ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

2 - 3815

Б.М.Барбашов

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЕЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

041 - теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание учёной степени доктора физико-математических наук

Дубна 1968

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований.

Официальные оппоненты:

Ведущее предприятие:

Автореферат разослан " " 1968 г.

Защита диссертации состоится " " 1968 года на заседании Совета Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований, г.Дубна,

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Учёный секретарь Совета

Р.А.Асанов

2 - 3815

Б.М.Барбашов

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЕЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

041 - теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание учёной степени доктора физико-математических наук

Новейшее развитие квантовой электродинамики показало, что на основе инвариантной теории возмущений и приспособленного к ней метода перенормировок возможно построение прекрасно согласующейся с опытом количественной теории квантовых электромагнитных процессов, которая позволяет в принципе вычислять физически наблюдаемые величины с точностью до любого порядка по константе электромагнитного взаимодействия $\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$. Однако рассмотрение процессов взаимодействия частиц при высоких энергиях, проблема сильной связи и вопросы математической структуры квантовой теории поля (К.Т.П.) настоятельно потребовали координального выхода за рамки теории возмущений.

В этом направлении был достигнут значительный успех. Прежде всего, он связан с разработкой аксиоматических подходов в К.Т.П., не опирающихся на конкретный вид лагранжиана. Различные аксиоматические схемы в К.Т.П. отличаются выбором основных начальных пастулатов, таких как ковариантность, причинность, унитарность, спектральность и др. (схемы Боголюбова; Вайтмана; Лемана; Симанзика и Циммермана). Одним из самых бесспорных успехов аксиоматических подходов явилось открытие и обоснование дисперсионных соотношений (аксиоматика Боголюбова), а также новые доказательства теорем С.Р.Т., связи спина и статистики (аксиоматика Вайтмана) и др. Несмотря на эти успехи, в аксиоматической формулировке К.Т.П. до настоящего времени остается "роковым" вопрос о существовании нетривиальных моделей теории поля (S-матрица не единичная), которые бы удовлетворяли всем принятым аксиомам.

Поэтому принципиальный интерес представляет нахождение даже в рамках лагранжева формализма точно решаемых модельных примеров или разработка методов приближенного решения точных уравнений, не основанных на теории возмущений.

Одним из таких методов, представляющих собой координальную попытку выхода за рамки теории возмущений, является метод функционального интегрирования в К.Т.П. Впервые предложенный Фейнманом[1], этот метод получил дальнейшее развитие и применение в работах Эдварса и Пайерса[2], Боголюбова[3], Фрадкина[4] и других. На его основе были получены замкнутые выражения для квантовых функций Грина в виде функциональных интегралов. Однако на пути получения точных выражений этот метод наталкивается на существенные трудности, связанные, во-первых, с нахождением функции Грина частицы в произвольном внешнем поле и, во-вторых, с функциональным интегрированием этих решений по внешнему полю с соответствующим весовым функционалом. Как первая, так и вторая задачи представляют в общем случае К.Т.П. проблемы огромной трудности. Тем не менее, в ряде модельных примеров К.Т.П. этот

метод оказался эффективным, приводящим к точному решению[5,6].

1

Первая глава диссертации посвящена некоторым применениям метода функционального интегрирования в К.Т.П. Упомянутая выше первая проблема в методе функционального интегрирования, а именно: отыскание точного решения в произвольном внешнем поле, может быть формально преодолена путем записи этого решения также в виде функционального интеграла. Впервые это было сделано Фейнманом[7], записавшим решение уравнения в виде функционального интеграла по "путям".

В настоящей работе предлагается другой способ получения решений уравнений Дирака и Клейна-Гордона в виде функциональных интегралов. Предлагаемый метод может быть применен к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка, в которых дифференциальный оператор представлен как произведение двух операторов первого порядка.

Рассмотрим уравнение Клейна-Гордона для функции Грина G с внешним электромагнитным полем $A_\mu(x)$.

$$[(i\partial_\mu + eA_\mu(x))^2 - m^2]\, G(x,y\,|\,A) = -\delta^4(x-y). \tag{1}$$

Применяя предложенное Фоком представление обратного оператора в экспоненциальном виде, получим

$$G(x,y|A)=i\int_0^\infty ds\, e^{i\int_0^s d\xi(i\partial_\mu(\xi)+eA_\mu(x,\xi))^2-im^2 s}\,\delta^4(x-y) \qquad (2)$$

В таком представлении экспонента, в показателе которой стоят некоммутирующие величины ∂_μ и $A_\mu(x)$, понимается как T-экспонента по упорядочивающему индексу ξ, от которого в этом смысле зависят величины $\partial_\mu(\xi)$ и $A_\mu(x,\xi)$. "Распутать" выражение (2), т.е. выполнить операцию дифференцирования ∂_μ, без разложения экспоненты в ряд, нельзя. Это связано с тем, что экспонента содержит оператор ∂_μ^2. Если бы была первая степень ∂_μ, то выражение (2) вычислялось бы.

Степень оператора ∂_μ в показателе экспоненты (2) может быть понижена путем формального преобразования с помощью 4-кратного функционального интеграла:

$$e^{i\int_0^s d\xi(i\partial_\mu(\xi)+eA_\mu(x,\xi))^2}=C\int\delta^4\nu\, e^{-i\int_0^s d\xi[\nu_\mu^2(\xi)-2e\nu_\mu(\xi)(i\partial_\mu(\xi)+eA_\mu)]}, \qquad (3)$$

где

$$C^{-1}=\int\delta^4\nu\, e^{-i\int_0^s d\xi\,\nu_\mu^2(\xi)} \quad ; \delta^4\nu=\prod_x d^4\nu(x)$$

Подставляя (3) в (2), можно без разложения в ряд действовать оператором сдвига $\exp\{-2\int_0^s d\xi\,\nu_\mu(\xi)\,\partial_\mu(\xi)\}$ и получить выраже-

ние для функции Грина (2) в виде функционального интеграла

$$G(x,y|A)=i\int_0^\infty ds\, e^{-im^2 s}C\int\delta^4\nu\, e^{-i\int_0^s d\xi[\nu_\mu^2(\xi)-2e\nu_\mu(\xi)A_\mu(x-2\int_\xi^s\nu(\eta)d\eta)]}\times \qquad (4)$$

$$\times\ \delta^4(x-y-2\int_0^s\nu(\xi)d\xi).$$

Таким образом получается решение и для уравнения Дирака в произвольном внешнем поле.

Введением новой переменной интегрирования $z_\mu(\xi)=\int_0^\xi\nu_\mu(\eta)d\eta$ выражение (4) приводится к известному фейнмановскому интегралу по "путям", при этом в экспоненте стоит выражение

$$W=i\int_0^s d\xi[\dot z_\mu^2(\xi)-2e\dot z_\mu(\xi)A_\mu(y+2z(\xi))], \qquad (5)$$

которое и есть функция действия для заряженной частицы в поле A_μ, а параметр s интерпретируется как собственное время.

Поскольку математические операции при получении (4) мало обоснованы, то для сравнения с известными результатами в §2 этой главы рассматриваются примеры полей A_μ, допускающих точные решения таких уравнений. Показывается, что в этих случаях в выражении (4) можно провести функциональное интегрирование по ν и получить те же результаты, что и при решении уравнения. Например, для случая плоской волны

$A_\mu(x)=A_\mu(kx)$, $k^2=0$, $k_\mu A_\mu(kx)=0$.

В §3 на основе полученной функции Грина в поле плоской волны точно решается задача рассеяния частиц заряженного поля полем плоской электромагнитной волны $A_3(x-t)$. Найденная S -матрица приводит только к упругому рассеянию заряженных частиц вперед:

$$S = S_0 N \exp\left\{ \int d^3p \left[e^{-\frac{i\int_{-\infty}^{\infty}[2p_3 e A_3(\lambda) + e^2 A_3^2(\lambda)]\,d\lambda}{2(\omega - p_3)}} - 1 \right] \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left[a^+(\vec{p})\, a^-(\vec{p}) + b^+(p_{1)} - p_{2)} - p_3))\, b^-(p_{1)} - p_{2)} - p_3) \right] \right\},$$

где константа $S_0 = \langle 0 | S | 0 \rangle$ - среднее по вакууму от S -матрицы, равное бесконечному фазовому множителю. N -знак нормального произведения операторов рождения и уничтожения заряженных частиц $a^{\pm}$, $b^{\pm}$.

Форма решений (4) удобна тем, что с ее помощью можно, согласно формуле для одночастичной квантовой функции Грина

$$G(x,y) = \frac{\int G(x,y\,|\,A)\, S_0(A)\, e^{-\frac{1}{2}\int D^{-1}_{\mu\nu}(q) A_\mu(q) A_\nu(-q)\, d^4q}\, \delta^4 A}{\int S_0(A)\, e^{-\frac{1}{2}\int D^{-1}_{\mu\nu}(q) A_\mu(q) A_\nu(-q)\, d^4q}\, \delta^4 A}, \tag{6}$$

получить $G(x,y)$, если пренебречь вкладами от поляризации вакуума, положив $S_0(A) = 1$. Это приближение оказывается справедливым в инфракрасной области квантовой электродинамики. Выполнив интегрирование по A_μ (при $S_0(A) = 1$ оно сводится к хорошо известным гауссовым квадратурам), получаем квантовую функцию $G(x,y)$ в инфракрасной области, которая содержит еще интегралы по ν, возникшие в результате применения преобразования (3).

§§4 и 5 посвящены одному приближенному способу вычисления $G(x,y)$ в инфракрасной области квантовой электродинамики. Для этого предлагается метод апроксимации функциональных интегралов, сущность которого состоит в следующем[x]. Интегрируя по A_μ в (6) и переходя к импульсному представлению, получаем для $G(p)$ выражение:

$$G(p) = i\int_0^\infty ds\, e^{is(p^2 - m^2)}\, C\int \delta^4\nu\, e^{-i\int_0^s \nu_\mu^2(\xi)\,d\xi}\, e^{-ie^2 F(s|\nu)} \tag{7}$$

Функционал $F(s|\nu)$ апроксимируется его средним значением $\bar{F}(s) = C\int \delta^4\nu\, e^{-\int_0^s \nu_\mu^2(\xi)\,d\xi}\, F(s|\nu)$, и применяется следующее разложение по разности $F(s|\nu) - \bar{F}(s)$

$$C\int \delta^4\nu\, e^{-8i\int_0^s \nu_\mu^2(\xi)\,d\xi}\, e^{-ie^2 F(s|\nu)} = e^{-ie^2\bar{F}(s)}\, C\int \delta^4\nu\, e^{-i\int_0^s \nu_\mu^2(\xi)\,d\xi} \sum_{n=0}^{\infty} e^{2n} \frac{(F - \bar{F})^n}{n!} \tag{8}$$

---

[x] Подобного рода апроксимации были предложены Фейнманом в квантовой статистике см.[8].

После выполнения интегрирования по ν, что оказывается возможным, все инфракрасные особенности содержит только выделенный множитель $e^{-ie^2\bar{F}(s)}$, а каждый член ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{2n} \frac{(F-\bar{F})^n}{n!}$ их уже не содержит. Если ограничиться $n=0$ в (8), то получаем хорошо известный результат Блоха-Нордсика для инфракрасной асимптотики функции Грина. Учёт следующих членов в (8) дает поправки к этой формуле по константе e^2. Такие поправки находятся для одной простой модели квантовой электродинамики, описанной ниже.

В § 6 процедура апроксимации функциональных интегралов применяется для вычисления сечения рассеяния двух скалярных частиц Ψ, взаимодействующих через поле ϕ, с лагранжианом взаимодействия $\mathfrak{L} = g : \phi(x)\Psi^2(x):$, где $\phi(x)$ – поле с нулевой массой.

При построении амплитуды рассеяния с использованием решений для функции Грина в форме функционального интеграла помимо указанных выше проблем возникает еще чисто техническая трудность перехода на массовую поверхность $p_i^2 = m_i^2$. Дело в том, что амплитуда рассеяния, например, двух частиц $f(p',q'|p,q)$, выражается через двухчастичную функцию Грина $G(p',q'|p,q)$ соотношением

$$(2\pi)^4 \delta(p+q-p'-q') f(p',q'|p,q) = \frac{1}{4} \lim_{(p^2,p'^2,q'^2,q^2)\to m^2} (p^2-m^2)(p'^2-m^2)(q^2-m^2) \cdot \tag{9}$$

$$\cdot (q'^2-m^2)\, G(p'q'|p,q),$$

поэтому из $G(p',q'|p,q)$ должны быть выделены полюсные множители $[(p^2-m^2)(p'^2-m^2)(q^2-m^2)(q'^2-m^2)]^{-1}$, компенсирующие нули $p_i^2 - m_i^2$ на массовой поверхности. В теории возмущений это сокращение очевидно, поскольку $G(p',q'|p,q)$ строится из свободных функций распространения $\frac{1}{p_i^2 - m_i^2}$. Милёхиным и Фрадкиным была предложена /9/ формула, которая в рамках метода функционального интегрирования компенсирует часть нулей в (9), а именно: соотношение

$$\lim_{p^2\to m^2} i\int_0^\infty ds\, e^{is(p^2-m^2)-ig^2\bar{F}(s)} = \frac{1}{m^2-p^2}\, e^{-ig^2\bar{F}(\infty)}, \tag{10}$$

справедливое для ограниченной функции $\bar{F}(s)$. Применение его позволяет в случае (9) сократить два множителя (p'^2-m^2), (p^2-m^2). Для выделения еще двух полюсных множителей $(q^2-m^2)^{-1}$ $(q'^2-m^2)^{-1}$ в данной работе применяется преобразование, эквивалентное явному исключению из замкнутого выражения для амплитуды нулевого порядка теории возмущений $g^2=0$, не дающего вклада в сечение. Схематически оно выражается так:

$$e^{-ig^2\bar{F}(s)} - 1 = -ig^2\bar{F}(s)\int_0^1 e^{-ig^2\bar{F}(s)\alpha}\, d\alpha \tag{11}$$

В результате переход на массовую поверхность по всем четырем импульсам p, p', q, q' возможен.

После устранения инфракрасных расходимостей за счёт учёта неупругих процессов с испусканием квантов поля ϕ с энергией $\omega_i < \Delta$, где Δ – разрешающая способность прибора, и перенормировок, устраняющих ультрафиолетовые расходимости, получается конечное выражение для сечения рассеяния, в котором точно учтены все вклады от низкоэнергетических квантов поля ϕ.

Таким образом, предлагаемый способ записи решений через функциональные интегралы и метод их апроксимации оказываются достаточно эффективными при изучении инфракрасной области функций Грина и амплитуд процессов рассеяния. Для исследования области высоких энергий необходимо разработать другие методы приближенных вычислений функциональных интегралов, поскольку апроксимация на основе формулы (8) не учитывает существенной зависимости функций распространения от квадратичных комбинаций виртуальных импульсов $q_i q_j$.

2

Система операторных гейзенберговских уравнений в К.Т.П. является нелинейной (нелинейность обусловлена взаимодействием полей). В рамках метода функционального интегрирования это находит свое выражение в том, что при вычислении одночастичной функции Грина электрона по формуле (6) мы должны учесть член $S_0(A)$, который отвечает вкладам электронно-

позитронного вакуума. Точный учёт $S_0(A)$ в рамках этого метода кажется безнадежно трудной задачей.

Ввиду проблем, связанных с нелинейностью задачи, значительное внимание привлекают к себе нелинейные модели К.Т.П., на которых можно было бы выяснить некоторые свойства общей нелинейной проблемы. Однако принципиальные трудности при нахождении точных решений нелинейных уравнений не позволяют сделать определенных выводов о характере решений и о физических следствиях этих уравнений (см. Гайзенберг [10]). Точно решаемая модель Тирринга оказалась в этом смысле мало полезной, поскольку она привела к тривиальной S-матрице.

В тридцатые годы Борн [11] предложил вариант нелинейной электродинамики, которая, с одной стороны, в предельном случае малых напряженностей поля совпадала с электродинамикой Максвелла, с другой, – как существенно нелинейная теория, приводила к важным физическим следствиям, таким, как конечность собственной энергии электрона, рассеяние света на свете и другим. Но дальнейшее изучение этой теории затруднялось отсутствием точных решений уравнений свободного электромагнитного поля.

Лагранжиан этой системы имеет вид:

$$\mathfrak{L} = \kappa^2 \Big(1 - \sqrt{1 + \frac{\vec{H}^2 - \vec{E}^2}{\kappa^2} - \frac{(\vec{E}\vec{H})^2}{\kappa^4}}\,\Big). \qquad (12)$$

Константа κ играет роль абсолютного масштаба напряженности поля. При $E, H \ll \kappa$ получаем разложение, первый член которого $\frac{\vec{E}^2 - \vec{H}^2}{2}$ – лагранжиан максвелловского поля.

Вторая глава диссертации посвящена точному решению и исследованию двухмерной скалярной модели поля Борна. Такое поле в мезодинамике впервые было введено Гайзенбергом /12/ для изучения проблемы мезонных ливней. Лагранжиан в двухмерном псевдоевклидовом пространстве x, t аналогичен (12)

$$\mathcal{L} = \kappa^2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\phi_x^2 - \phi_t^2}{\kappa^2}}\right) \tag{13}$$

Уравнение поля, возникающее из (13) $(\kappa = 1)$

$$(1 - \phi_t^2)\phi_{xx} + 2\phi_x\phi_t\phi_{xt} - (1 + \phi_x^2)\phi_{tt} = 0, \tag{14}$$

относится к классу квазилинейных уравнений гиперболического типа.

В § 2 этой главы точно решается задача Коши для уравнения (14). По начальным данным: $\phi|_{t=0} = a(x)$; $\phi_t|_{t=0} = b(x)$ находится решение в параметрическом виде:

$$\phi(x(\alpha,\beta), t(\alpha,\beta)) = z(\alpha,\beta) = \frac{a(\alpha) + b(\alpha)}{2} + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \pi(\lambda)d\lambda$$

$$x(\alpha, \beta) = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta G(\lambda)d\lambda$$

$$t(\alpha, \beta) = \frac{\beta - \alpha}{2} + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta H(\lambda)d\lambda, \tag{15}$$

где функции $\pi(x)$, $G(x)$ и $H(x)$ имеют интересный физический смысл. $\pi(x)$ – канонический импульс поля $\phi(x,t)$ при $t=0$

$$\pi(x) = \pi(x,0) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_t}\bigg|_{t=0} = \frac{b(x)}{\sqrt{1 - \dot{a}^2(x) + b^2(x)}} \tag{16}$$

$G(x)$ оказывается плотностью импульса поля ϕ при $t=0$

$$G(x) = -\pi(x,t)\phi_x(x,t)\big|_{t=0} = \frac{-\dot{a}(x)b(x)}{\sqrt{1 - \dot{a}^2(x) + b^2(x)}} \tag{17}$$

Наконец, $H(x)$ – плотность гамильтониана поля ϕ при $t=0$

$$H(x) = (\pi\phi_t - \mathcal{L})_{t=0} = \frac{1 + \dot{a}^2(x)}{\sqrt{1 - \dot{a}^2(x) + b^2(x)}} - 1 = \tag{18}$$

$$= \sqrt{(1 + \dot{a}^2(x))(1 + \pi^2(x))} - 1$$

В § 3 предлагается метод сведения этой нелинейной задачи для функции ϕ к линейной системе трех функций $t(\alpha,\beta)$, $x(\alpha,\beta)$ и $z(\alpha,\beta)$ в псевдоевклидовом пространстве α, β. Показывается, что система трех функций t, x, z с лагранжианом $\mathfrak{L} = (\vec{r}_\alpha \vec{r}_\beta)$, где $\vec{r} = \{t, x, z\}$, и с дополнительными нелинейными условиями $\vec{r}_\alpha^{\,2} = 0$, $\vec{r}_\beta^{\,2} = 0$ приводит к тому же решению (15) задачи Коши, если начальные данные для этих функций заданы следующим образом

$$x\big|_{\alpha=\beta} = \alpha \qquad t\big|_{\alpha=\beta} = 0 \qquad z\big|_{\alpha=\beta} = a(\alpha)$$

$$(x_\alpha - x_\beta)_{\alpha=\beta} = G(\alpha) \qquad (t_\alpha - t_\beta)_{\alpha=\beta} = H(\alpha) \qquad (z_\alpha - z_\beta)_{\alpha=\beta} = \pi(\alpha)$$

(Отсюда видно, что начальный момент $t=0$ в переменных α, β выражается равенством $\alpha = \beta$).

Уравнение (14) имеет интересное геометрическое истолкование, на основе которого дальше производится обобщение нелинейного лагранжиана (13) на случай системы n нелинейных полей, допускающей точное решение. Дело в том, что при замене $t = iy$ из уравнения (14) получается хорошо известное в геометрии уравнение минимальных поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве x, y, z, $z = \phi(xt)$

$$(1+\phi_y^2)\phi_{xx} - 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} + (1+\phi_x^2)\phi_{yy} = 0.$$

Решение его $z = \phi(x,y)$ определяет поверхность минимальной площади

$$S = -\int dx\,dy\,\sqrt{1+\phi_x^2+\phi_y^2}\,,$$

ограниченную заданным контуром. Наше уравнение (14) является условием экстремума интеграла (функции действия системы (13))

$$S = -\int dx\,dy\,\sqrt{1+\phi_x^2-\phi_t^2}\,, \tag{19}$$

который выражает площадь поверхности $z = \phi(x,t)$ в псевдоевклидовом пространстве x, t, z с метрикой $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dz^2$. Поэтому уравнение (14) можно рассматривать как уравнение экстремальной поверхности в псевдоевклидовом пространстве, проходящей через заданную начальную кривую, а решение (15) – как параметрическое представление этой поверхности.

Опираясь на геометрическую интерпретацию, функция действия (19) обобщается на систему n нелинейных взаимодействующих полей в псевдоевклидовом пространстве x, t. Для этого рассматривается $n+2$ -мерное псевдоевклидово пространство $(t, x, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ с метрикой

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - \sum_{i=1}^{n} dz_i^2\,.$$

Пусть в этом пространстве задана n уравнениями двухмерная поверхность: $z_1 = \phi_1(x,t)$, $z_2 = \phi_2(x,t)$, …, $z_n = \phi_n(x,t)$. Тогда, обобщая (19) на $n+2$-мерное пространство, получаем площадь этой поверхности в виде интеграла

$$S = -\iint dx\,dt\,\sqrt{\Big(1+\sum_{i=1}^{n}\phi_{i,x}^2\Big)\Big(1-\sum_{i=1}^{n}\phi_{i,t}^2\Big) + \Big(\sum_{i=1}^{n}\phi_{i,x}\phi_{i,t}\Big)^2} \tag{20}$$

$$\phi_{i,x} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \; ; \; \phi_{i,t} = \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \; .$$

Далее величина S, согласно вышесказанному, рассматривается как функция действия системы n полей, которая при $n = 1$ переходит в (19), а уравнения Эйлера, следующие из (20), как уравнения движения этой системы полей:

$$(1 - \sum_{i=1}^{n} \phi_{i,t}^{2})\phi_{j,xx} + 2\phi_{j,xt}\sum_{i=1}^{n}\phi_{i,x}\phi_{i,t} - (1 + \sum_{i=1}^{n}\phi_{i,x}^{2})\phi_{j,tt} = 0 \tag{21}$$

$$(j = 1, 2, \ldots n)$$

К нелинейной системе (21) относятся и уравнения электродинамики Борна для вектор-потенциала A_μ в двухмерном пространстве x, t, которые рассматриваются в главе III.

Для системы (21) опять точно решается задача Коши

$$\phi_j(x,t)|_{t=0} = a_j(x) \qquad \phi_{j,t}(x,t)|_{t=0} = b_j(x).$$

Решение также представляется в параметрической форме:

$$\phi_i(x(\alpha,\beta), t(\alpha,\beta)) = z_i(\alpha,\beta) = \frac{a_i(\alpha) + a_i(\beta)}{2} + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \pi_i(\lambda)\,d\lambda$$

$$x(\alpha,\beta) = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta G(\lambda)\,d\lambda \tag{22}$$

$$t(\alpha,\beta) = \frac{\beta-\alpha}{2} + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta H(\lambda)\,d\lambda \, ,$$

где $\pi_i(x)$, $G(x)$ и $H(x)$, как и в случае одного поля, имеют смысл соответственно канонических импульсов полей ϕ_i, плотности импульса и гамильтониана в начальный момент $t = 0$.

Для любого n система (21) имеет два частных решения: $\phi_i(x,t) = \Psi_{1,i}(x-t)$ и $\phi_i(x,t) = \Psi_{2,i}(x+t)$, где $\Psi_{1,i}$ и $\Psi_{2,i}$ – произвольные функции. Эти решения – бегущие волны произвольной формы. Из общего решения (22) или (15) они получаются, если положить

$$b_i(x) = \dot a(x) = \dot\Psi_{1,i} \qquad \text{или} \qquad b_i(x) = -\dot a_i(x) = -\dot\Psi_{2,i}(x).$$

В литературе отмечалось[13], что в нелинейных теориях, в которых коэффициенты при старших производных зависят от самих функций поля ϕ, например, квазилинейное уравнение (14), не исключена возможность распространения сигнала, рассматриваемого как распространение слабых разрывов, выше скорости света. Наше решение показывает, что уравнения (14) и (21) таких сигналов не допускают. Например, из решения (15) следует, что скорость распространения слабого разрыва v всегда меньше $1 \; (c = 1)$

$$v^2 - 1 = -\left[\frac{b(x) \pm \dot a(x)\sqrt{1 + \dot a^2(x) - b^2(x)}}{1 + \dot a^2(x)}\right]^2 < 0,$$

если начальные данные удовлетворяют условию гиперболичности

$$1 + \dot a^2(x) - b^2(x) > 0.$$

Одним из важных и нерешенных вопросов в электродинамике Борна был вопрос о том, как взаимодействуют электромагнитные волны в нелинейной теории.

В третьей главе диссертации поставлена и точно решена задача взаимодействия и рассеяния двух волн в этой теории.

Постановка проблемы базируется на следующем свойстве уравнений поля в электродинамике Борна.

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{f^{ik} - \epsilon^{ik\ell m} f_{\ell m} G}{\sqrt{1+F-G^2}} \right) = 0, \tag{23}$$

где

$$F = \frac{1}{2} f^{ik} f_{ik} \quad ; \quad G = \frac{1}{4} \epsilon^{sk\ell m} f_{sk} f_{\ell m}$$

$f_{ik} = \dfrac{\partial A_k}{\partial x_i} - \dfrac{\partial A_i}{\partial x_k}$ – компоненты тензора электромагнитного поля, $\epsilon^{sk\ell m}$ – полностью антисимметричный тензор.

Нетрудно проверить, что плоская электромагнитная волна произвольной формы, распространяющаяся вдоль $\vec{k}$

$$A_i(\vec{r}, t) = \Psi_i (\vec{k}\vec{r} - |\vec{k}|\, t),$$

является решением уравнений (23). Сумма двух плоских волн $\Psi_{1,i}(\vec{k}_1\vec{r} - |\vec{k}_1|\, t) + \Psi_{2,i}(\vec{k}_2\vec{r} - |\vec{k}_2|\, t)$ ($\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$ – неколлинеарные векторы) также удовлетворяет (23) в пространственно-временной области, где $\Psi_{1,i}$ $\Psi_{2,i}$ не перекрываются, т.е. в области, где одна из этих функций равна нулю. Далее, без ограничения общности можем считать, что волны движутся по оси x навстречу друг другу; этого можно всегда достичь соответствующим преобразованием Лоренца, направив ось времени по 4-вектору $k_1 + k_2$, а ось x – по направлению $k_1 - k_2$. Тогда получаем:

$$\vec{k}_1\vec{r} - |\vec{k}_1|\, t = \sqrt{\frac{(k_1 k_2)}{2}}\,(x' - t'); \quad \vec{k}_2\vec{r} - |\vec{k}_2|\, t = \sqrt{\frac{(k_1 k_2)}{2}}\,(x' + t').$$

Поскольку уравнения (23) и лагранжиан (12) инвариантны к преобразованиям Лоренца, то мы вправе сформулировать нашу задачу следующим образом. Найти решение уравнений (23), удовлетворяющее асимптотическим условиям: при $t \to -\infty$ решение должно переходить в две плоские волны, движущиеся навстречу друг другу:

$$\lim_{u \to \infty} A_i (x, y, z, t) = \Psi_{2,i}(v)\ ; \quad \lim_{v \to \infty} A_i (x, y, z, t) = \Psi_{1,i}(u)\ , \tag{24}$$

где $u = x - t$; $v = x + t$ (так как $t = \frac{v-u}{2}$, то в обоих случаях (24) $t \to -\infty$). Чтобы удовлетворить асимптотическим условиям (24), находится решение уравнений (23), не зависящее от y и z, т.е. A_i считаются функциями только двух переменных x и t. Таким образом, задача для двух плоских волн сводится к двухмерной проблеме, и система (23) приводится к системе (21) при $n = 2$, для которой решена задача Коши (22). Из решения задачи Коши может быть получено решение асимптотической задачи с условием (24). Процедура получения этого решения демонстрируется сначала на более простом примере скалярного поля (§2 глава III), а затем с учётом условия Лоренца и для электромагнитного поля (§5). Решение записывается в параметрической форме:

$$A_i(x(\mu,\nu),\ t(\mu,\nu)) = \Psi_{1,i}(\mu) + \Psi_{2,i}(\nu)$$

$$u = x - t = \mu - \int_{-\infty}^{\nu} \sum_{i=2}^{3} \dot{\Psi}^2_{2,i}(\lambda)\,d\lambda \qquad (25)$$

$$v = x + t = \nu + \int_{\mu}^{\infty} \sum_{i=2}^{3} \dot{\Psi}^2_{1,i}(\lambda)\,d\lambda$$

Нетрудно показать, что решение (25) удовлетворяет асимптотическим условиям (24) и уравнениям (23). Из (25) получаются и асимптотические значения при $t \to +\infty$. На другой бесконечности $u \to -\infty$ и $v \to \infty$ мы имеем

$$\lim_{u \to -\infty} A_i = \Psi_{2,i}(v - P_1) \ ; \quad \lim_{v \to \infty} A_i = \Psi_{1,i}(u + P_2) , \qquad (26)$$

где P_1, $-P_2$ – импульсы первой и второй начальных плоских волн

$$P_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=2}^{3} \dot{\Psi}^2_{1,i}(\lambda)\,d\lambda \ ; \qquad P_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=2}^{3} \dot{\Psi}^2_{i,2}(\lambda)\,d\lambda . \qquad (26a)$$

(Согласно условию Лоренца в плоской волне $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$). Таким образом, две плоские электромагнитные волны из $t = -\infty$ в результате столкновения друг с другом переходят при $t \to +\infty$ в две плоские волны той же формы, но со сдвинутыми аргументами.

В § 3 обсуждаются свойства решений (22), (25).

Оказывается, что если начальные данные заданы произвольно, то решение $A_i(x,t)$ будет в некоторых областях многозначной функцией от x и t, т.е. в одной точке пространства-времени может существовать несколько (нечётное число) значений поля A_i. Это качественно новое поведение решений, не присущее линейным уравнениям. Кроме того, в таких областях решение может оказаться не гиперболического, а параболического типа, тогда нарушаются пространственно-временные соотношения в теории (сигналы больше скорости света).

Если же начальные данные подчинены определенным условиям (условия гиперболичности): $\dot{a}^2(x) - b^2(x) > \kappa^2$ в задаче Коши или в задаче двух плоских волн: $\sum_{i=2}^{3} \dot{\Psi}^2_{1,i}(x)\,\dot{\Psi}^2_{2,i}(x) < \kappa^4$, то таких явлений не возникает, и решение является однозначной функцией координат x, t.

4.

В IV главе рассматривается проблема квантования нелинейного поля Борна на примере системы скалярных полей в двухмерном пространстве x, t (20).

Обычная процедура квантования опирается на линейность свободного уравнения поля. Такую картину квантования мы имеем в представлении взаимодействия, где операторы подчиняются линейным уравнениям движения. Решая эти уравнения и находя выражения для операторов в любой момент времени через начальные значения (задача Коши), можно установить, как коммутируют операторы поля для произвольных времен, постулируя одновременные коммутаторы в начальный момент $t = 0$. При квантовании поля Борна мы с самого начала имеем нелинейные уравнения свободного поля (21). Если теперь предположим, что уравнения для операторных функций этого поля (уравнения Гайзенберга) имеют такой же вид, как и для классических полевых функций (21), для которых было найдено решение задачи Коши (22), то, задавая канонические перестановочные соотношения при $t = 0$

$$[\phi_i(x,0), \pi_j(x',0)] = \delta_{ij}\,\delta(x-x'), \tag{27}$$

тем самым на основании решений (22) можем, как и в линейных задачах, определить операторы $\phi_i(x,t)$ для произвольного момента времени. Однако оказывается, что такая процедура

приводит к трудностям, не свойственным линейным теориям. Перепишем решение задачи Коши (22), введя вместо α и β параметры $\alpha = \xi - \tau$, $\beta = \xi + \tau$

$$\phi_i(x(\xi,\tau), t(\xi,\tau)) = z_i(\xi,\tau) = \frac{a_i(\xi+\tau)+a_i(\xi-\tau)}{2} + \frac{1}{2}\int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau}\pi_i(\lambda)\,d\lambda$$

$$x(\xi,\tau) = \xi + \frac{1}{2}\int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} G(\lambda)\,d\lambda \tag{28}$$

$$t(\xi,\tau) = \tau + \frac{1}{2}\int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} H(\lambda)\,d\lambda .$$

Начальный момент $t = 0$ в переменных ξ, τ соответствует $\tau = 0$ и коммутационные соотношения (27), согласно (28), принимают вид:

$$[a_i(\xi), \pi_j(\xi')] = \delta_{ij}\,\delta(\xi-\xi'). \tag{29}$$

Тогда из (28) для $\tau \neq 0$ ($t \neq 0$) получается, что время $t(\xi,\tau)$ и координата $x(\xi,\tau)$ становятся операторами, не коммутирующими между собой и полем $z_i(\xi,\tau)$, поскольку t и x выражаются в (28) через $G(\lambda)$ и $H(\lambda)$, которые, в свою очередь, являются функциями канонических переменных поля a_i и π_i, (например, для $n = 1$ формулы (17) и (18)). Таким образом, на этом пути мы приходим к проблеме формулировки теории в квантованном пространстве-времени.

В § 1 четвертой главы развивается такой подход к квантованию. При этом ξ, τ рассматриваются как с-числовые значения координат и времени, а вместо n полевых функций $\phi_i(x,t)$ в пространстве x, t рассматривается система $n+2$ полей $t(\xi,\tau)$, $x(\xi,\tau)$, $z_1(\xi,\tau), \dots z_n(\xi,\tau)$ в пространстве ξ, τ. Если для классических уравнений такие два подхода эквивалентны (§3 гл.II), то в квантовой теории этого утверждать нельзя, так как уже было отмечено, что уравнения Гайзенберга для $\hat{\phi}_i$ могут и не совпадать с классическими уравнениями (21).

В §2 и §3 строится квантовая теория рассеяния волн в системе с лагранжианом (13) и гамильтонианом (18) в обычном подходе, когда гамильтониан системы разбивается на свободный H_0, ведущий к линейным уравнениям поля, и H_{int}, определяющий взаимодействие поля с самим собой. Для этого вводится константа нелинейности $g = \frac{1}{\kappa}$, когда $\kappa \to \infty, g \to 0$, лагранжиан (13) переходит в лагранжиан $\frac{\phi_t^2 - \phi_x^2}{2}$ свободного поля ϕ, подчиняющегося уравнению Даламбера $\phi_{tt} - \phi_{xx} = 0$. Гамильтониан (18), записанный с помощью константы g, имеет вид:

$$H = g^{-2}\{ \sqrt{(1+g^2\phi_x^2)(1+g^2\pi^2)} - 1 \} \tag{30}$$

и рассматривается в квантовой теории в виде ряда по g^2 нормальных произведений операторов ϕ_x, π, первый член которого является гамильтонианом свободного поля $H_0 = \frac{\phi_x^2 + \pi^2}{2}$. Поэтому H представляется как $H_0 + H_{int}$, в результате становится возможной вся процедура квантования в представлении взаимодействия, а также построение S-матрицы в виде T-произведения свободных операторов.

Сначала в § 2 находится S-матрица на основе предположения, что оператор рассеянных волн $\hat{\phi}_{out}$ совпадает по форме с решением классической задачи (26). S-матрица находится из соотношения

$$\hat{\phi}_{out}(x,t) = S^+ \hat{\phi}_{in}(x,t) S, \tag{31}$$

где $\hat{\phi}_{in}(x,t)$ – оператор падающих волн, подчиняющийся свободному уравнению $\hat{\phi}_{in\,tt} - \hat{\phi}_{in\,xx} = 0$ и представимый поэтому в виде:

$$\hat{\phi}_{in}(x,t) = \hat{\Psi}_1(u) + \hat{\Psi}_2(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{2k}}\{a^+(k)e^{iku} + a^-(k)e^{iku}\} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{2k}}\{a^+(-k)e^{ikv} + a^-(-k)e^{-ikv}\} \tag{32}$$

$$[a^-(k), a^+(k')] = \delta(k-k').$$

А оператор $\hat{\phi}_{out}(x,t)$ берется из решения классической задачи (26) в виде:

$$\hat{\phi}_{out}(x,t) = \hat{\Psi}_1(u + g^2\hat{P}_2) + \hat{\Psi}_2(v - g^2\hat{P}_1) \tag{33}$$

Из соотношения (30) находится оператор S. В силу сделанного предположения об операторе $\hat{\phi}_{out}$, назовем найденную таким образом S-матрицу "классической" $S_{кл}$

$$S_{кл} = e^{i g^2 \hat{P}_1 \hat{P}_2} . \qquad (34)$$

Поскольку $\hat{P}_1$ и $\hat{P}_2$ коммутируют, это выражение понимается как ряд по степеням произведения операторов $\hat{P}_1 P_2$. Такая S-матрица ведет только к упругим процессам рассеяния.

Затем в §3 S-матрица строится с помощью стандартной процедуры в представлении взаимодействия в виде T-произведения:

$$S = T e^{-i \int dt \int dx \, H_{int}(g^2, x, t)} , \qquad (35)$$

где $H_{int} = H - H_0$. H в (30) разложен по g^2 в ряд нормальных произведений операторов. Далее показывается, что если в (35) перейти от T-произведения операторов к обыкновенному произведению, удерживая в разложении $H_{int}(g^2, x, t)$ только член, пропорциональный g^2, то получается выражение $S_{кл}$ в (33), учёт же следующих членов по g^2 в H_{int} приводит к S-матрице, отличной от $S_{кл}$ и содержащей возможность неупругих процессов. Таким образом, $S_{кл}$-матрица, построенная на основе классических решений, не совпадает с квантовой

S-матрицей и, следовательно, точный оператор рассеянных волн $\hat{\phi}_{out}$ не равен выражению (33). Только в пренебрежении неупругими процессами эти S-матрицы совпадают.

В диссертации имеется пять приложений, которые содержат вывод некоторых формул, использованных в основном тексте, и дано обобщение точно решаемых нелинейных моделей на случай полей с массой и полей в пространстве большего числа измерений, чем два.

Результаты диссертации докладывались на сессиях Отделения ядерной физики АН СССР, на всесоюзных и международных конференциях по физике высоких энергий и опубликованы в следующих работах:

1. ЖЭТФ, 48, 607 (1965).
2. ЖЭТФ, 50, 660 (1966).
3. ЖЭТФ, 50, 1296, (1966).
4. ЖЭТФ, 51, 658 (1966).
5. Commun. Math. Phys., 3, 313 (1966).
6. Труды международной школы по теоретической физике. "Физика высоких энергий и теория элементарных частиц", Киев (1967) стр. 733.
7. Труды международной школы в Карпаче (Польша) "Functional Methods in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics", Wroclaw (1968), vol. II, 161, vol. III, 108.
8. Препринт ОИЯИ, Р2-3330, Дубна (1967).
9. ЖЭТФ, 54, №5 (1968).
10. Препринт ОИЯИ Р2-3753, Дубна, (1968).

Л и т е р а т у р а

1. R.P.Feynman, Rev. Mod. Phys., 20, 376 (1947).
2. S.E.Edwards, R.E.Peierls, Proc. Roy. Soc., 224, 24 (1954).
3. Н.Н.Боголюбов, ДАН СССР, 99, 225 (1964).
4. Е.С.Фрадкин, ДАН СССР, 98, 47 (1954).
5. Е.С.Фрадкин "Квантовая теория поля и гидродинамика". Труды ФИАН СССР том. 29 (1965). "Наука" Москва.
6. Б.М.Барбашов, Г.В.Ефимов, ЖЭТФ, 39, 450 (1960).
7. R.P.Feynman, Phys. Rev., 84, 108 (1951).
8. R.P.Feynman, A.R.Hilbs, Quantum Mechanics and Path Integrals, New York (1965), M.Graw-Hill Book Company
9. Г.А.Милёхин, Е.С.Фрадкин, ЖЭТФ, 45, 1926 (1963).
10. В.Гайзенберг, УФН, 94, 1955 (1968).
11. M.Born, Proc. Roy. Soc., A143, 410 (1934).
12. W.Heisenberg, Zs.f.Phys., 133, 65 (1952).
13. Д.И.Блохинцев. ДАН СССР 32, 553 (1952).

Рукопись поступила в издательский отдел
15 апреля 1968 года.