ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

2 - 3752

В.Г. Кадышевский

# ИССЛЕДОВАНИЯ ПО РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПРОБЛЕМЕ ДВУХ ТЕЛ

041 - теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание учёной степени доктора физико-математических наук

Дубна 1968

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований.

Официальные оппоненты:

академик,
доктор физико-математических наук М.А.Марков

профессор,
доктор физико-математических наук И.С.Шапиро

член-корреспондент АН СССР,
доктор физико-математических наук Д.В.Ширков

Ведущее предприятие:
Физический институт им. Лебедева АН СССР.

Автореферат разослан 25 марта 1968 г.
Защита диссертации состоится в конце апреля 1968 г.
на заседании Совета Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований, г. Дубна.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ЛТФ.

Учёный секретарь Совета

Р.А.Асанов

2 - 3752

В.Г. Кадышевский

# ИССЛЕДОВАНИЯ ПО РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПРОБЛЕМЕ ДВУХ ТЕЛ

041 - теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание учёной степени доктора физико-математических наук

Проблема двух тел занимает одно из центральных мест во всех разделах физики, начиная с классической механики и кончая релятивистской квантовой теорией.

Для физики элементарных частиц, исследующей ультрамикроскопическую структуру вещества, детальное знание двухчастичного взаимодействия имеет особо важное значение, поскольку подавляющая часть опытных данных здесь получается из экспериментов по рассеянию.

В квантовой теории поля, являющейся на сегодняшний день единственной количественной теорией элементарных микропроцессов, систему из двух взаимодействующих частиц можно описывать в рамках полностью ковариантного формализма Бете-Солпитера/1/. Однако, как хорошо известно, волновая функция Бете-Солпитера, будучи зависимой от двух временных аргументов, не допускает вероятностной интерпретации в духе обычной квантовой механики. Поэтому вопрос о нормировке этой функции не тривален, и фактически до сих пор здесь еще нет полной ясности.

Несколько лет назад Логунов и Тавхелидзе разработали квазипотенциальный подход (в дальнейшем сокращенно КПП) к задаче о взаимодействии двух релятивистских частиц/2/. В этом методе волновая функция выступает как непосредственное обобщение нерелятивистской волновой функции, поскольку она зависит от одного временного аргумента и подчиняется уравнению типа Шредингера.

В импульсном представлении в основных уравнениях КПП - уравнении для волновой функции и уравнении типа Липпмана-

Швингера для амплитуды рассеяния – интеграции производятся по трехмерному многообразию, тогда как в соответствующих уравнениях Бете–Солпитера областью интегрирования является все четырехмерное $p$ – пространство. Поэтому КПП можно рассматривать как трехмерную формулировку в $p$ -представлении релятивистской проблемы двух частиц. Благодаря близости КПП к нерелятивистскому формализму в рамках этого метода упрощаются вычисления релятивистских поправок к уровням энергии связанных состояний, а также исследование асимптотического поведения амплитуды рассеяния при высоких энергиях.

В настоящей диссертации развивается другая, не эквивалентная КПП, трехмерная формулировка задачи о взаимодействии двух релятивистских частиц. В частности, в отличие от КПП, предлагаемый подход совсем не связан с формализмом Бете–Солпитера и, вообще, с диаграммной техникой Фейнмана, а использует особый вариант теории возмущений, в котором частицы в начальном, промежуточном и конечном состояниях лежат на массовой поверхности. Однако по числу переменных и ряду других признаков получаемые нами уравнения для амплитуды рассеяния и волновой функции в $p$ – представлении аналогичны соответствующим уравнениям/2/, вследствие чего мы придерживаемся терминологии КПП и используем результаты некоторых работ этого направления.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и двух приложений.

Во введении дана краткая характеристика квазипотенциального подхода/2/ и конспективно изложено содержание диссертации.

В главе 1 построена упомянутая новая теория возмущений и сформулированы соответствующие правила для написания матричных элементов. Основную роль при этом играет операторная амплитуда рассеяния $R(\lambda\kappa)$ ($\kappa$ – инвариантный параметр, $\lambda = (\lambda_0, \vec{\lambda})$ – единичный времени-подобный вектор с $\lambda_0 > 0$), связанная с полной $S$ -матрицей соотношением

$$\frac{S(\infty, -\infty) - 1}{i} = \lim_{\kappa \to 0} R(\lambda\kappa). \qquad (1)$$

Для $R(\lambda\kappa)$ выведено уравнение типа Липпмана–Швингера

$$R(\lambda\kappa) = -\tilde{\tilde{H}}(\lambda\kappa) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\tilde{H}}(\lambda\kappa - \lambda\kappa') \frac{d\kappa'}{\kappa' - i\epsilon} R(\lambda\kappa'), \qquad (2)$$

где $\tilde{\tilde{H}}(\lambda\kappa)$ – четырехмерный фурье-образ плотности гамильтониана взаимодействия:

$$\tilde{\tilde{H}}(\lambda\kappa) = \int e^{-i\lambda\kappa x} H(x) d^4x. \qquad (3)$$

В процессе $N$ – упорядочения итераций уравнения (2) в качестве спариваний полевых операторов приходится использовать функции вида

$$D^{(+)}(p) = \theta(p_0)\delta(p^2 - m^2). \qquad (4)$$

Это и приводит к тому, что даже в промежуточных состояниях частицы в данном формализме являются физическими. В то же время для выполнения в вершинах диаграмм закона сохранения 4-импульса оказывается необходимым ввести дополнительные шпурионные линии, несущие 4-импульс $\lambda\kappa$. Эти квазичастицы в свободном состоянии описываются плоской волной $e^{-i\lambda\kappa x}$.

а в промежуточном состоянии – пропагатором $\frac{1}{2\pi}\ \frac{1}{\kappa - i\epsilon}$.

В § 3 применительно к данному подходу сформулированы условия унитарности и причинности для амплитуды $R(\lambda\kappa)$, а в § 6, на основании только этих условий и принципа соответствия, произведено построение $R(\lambda\kappa)$ итерационным методом. Здесь же показано, что гамильтониан взаимодействия определяется при таком построении с точностью до членов, эквивалентных квазилокальному произволу при обычном рассмотрении.

В § 5 произведен анализ сходимости интегралов в новой теории возмущений. Установлено, что традиционные ультрафиолетовые расходимости могут появляться лишь в одномерных интегралах по параметрам $\kappa$, отвечающим квазичастицам. На примере массовой диаграммы второго пордяка, для которой в этой технике сразу возникает спектральное представление Челлена–Лемана, продемонстрирована процедура вычитания расходящейся части.

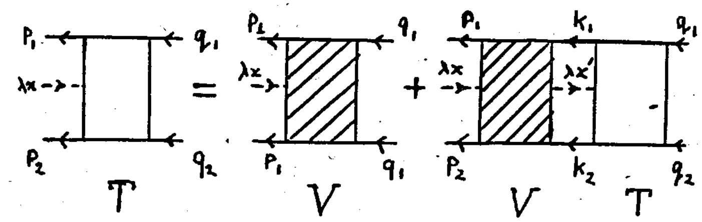
В § 7 основные уравнения, найденные ранее, записываются в виде операторных уравнений в $\kappa$-пространстве. Тем самым показано, что в определенном смысле квазичастицы в теории могут рассматриваться на равных правах с частицами.

Глава II содержит вывод уравнений квазипотенциального типа для амплитуды рассеяния и волновой функции и применение к ним преобразования Шапиро[3] ( разложения по матричным элементам унитарных представлений группы Лоренца).

В § 8 приводятся основные уравнения и соотношения теории потенциального рассеяния в нерелятивистской квантовой механике.

В § 9 введено понятие неприводимых диаграмм со шпурионными линиями и на этой основе получено уравнение для амплитуды рассеяния ("четыреххвостки") вне поверхности энергии-импульса. В графической записи это уравнение имеет вид:






где пунктирная линия соответствует квазичастице, а заштрихованный прямоугольник V отвечает совокупности неприводимых диаграмм.

В рассматриваемом формализме (5) играет ту же роль, что и уравнение Бете–Солпитера в обычной теории. Однако подобно квазипотенциальному уравнению[2], оно отличается от уравнения Бете–Солпитера меньшим числом интегрирований в правой части. В свою очередь, имеются различия между (5) и ортодоксальным квазипотенциальным уравнением. Они состоят, во-первых, в том, что квазипотенциалы в каждом из уравнений строятся разными способами (у нас квазипотенциал – сумма особых неприводимых диаграмм), а, во-вторых в том, что энергетический знаменатель – функция Грина – в каждом случае по-разному зависит от энергии. В частности, если произвольный вектор $\lambda$ выбирать согласно условию[x]

$$\lambda = \frac{q_1 + q_2}{\sqrt{(q_1+q_2)^2}}, \tag{6}$$

то функция Грина уравнения (5) с точностью до постоянного множителя будет даваться выражением

$$\frac{1}{s_k + t + u - 4m^2 - i\epsilon} \tag{7}$$

$$(s_k = (k_1 + k_2)^2, \quad t = (k_1 - q_1)^2, \quad u = (k_2 - q_1)^2).$$

---

[x] Физически условие (6) эквивалентно сохранению 4-скорости рассматриваемой двухчастичной системы.

Таким образом, возникает возможность трактовать известную мандельстамовскую комбинацию $s + t + u - 4m^2$ как волновой оператор в релятивистском уравнении Шредингера для системы двух частиц. Если условие (6) выполнено, то амплитуда $T$ из (5) представима в виде

$$T = T(s_p, t, u, s_q), \tag{8}$$

где

$$s_p = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - q_1)^2, \quad u = (p_2 - q_1)^2, \quad s_q = (q_1 + q_2)^2,$$

причём

$$\sqrt{s_p s_q} + t + u = 4m^2. \tag{9}$$

Равенство (9) отражает свойства перекрестной симметрии амплитуды (8) вне поверхности $s_p = s_q$.

В § 10 для случая псевдоскалярной связи исследован вопрос о спиновых структурах квазипотенциала, отвечающего системе частица-античастица. При этом приняты во внимание требования инвариантности относительно пространственных вращений, пространственного отражения, зарядового сопряжения и обращения времени. Показано в общем виде, что рассматриваемый квазипотенциал содержит шесть различных спиновых структур, пять из которых $T$- чётны и сопровождаются $T$-чётными коэффициентами, а одна $T$- нечётна и имеет, соответственно, $T$- нечётный коэффициент. Полученные выводы иллюстрируются на примере диаграмм второго порядка, отвечающих квазипотенциалу в низшем приближении. Спиновые структуры квазипотенциала выписаны также в лоренц-ковариантной форме. Все результаты § 10 согласуются с результатами нерелятивистского рассмотрения, предпринимавшегося ранее другими авторами.



В § 11 введена релятивистская амплитуда $A(s, t)$, нормированная "нерелятивистским" образом на дифференциальное сечение упругого рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = |A(s,t)|^2.$$

Уравнение (5), будучи записано для амплитуды A, экстраполированной за поверхность $s_p = s_q$, в системе центра инерции приобретает вид

$$A(\vec{p}, \vec{q}) = -\frac{m}{4\pi}\tilde{V}(\vec{p}, \vec{q}; E_q) + \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d\Omega_k \tilde{V}(\vec{p}, \vec{k}; E_q) A(\vec{k}, \vec{q})}{2E_q - 2E_k + i\epsilon}, \tag{10}$$

где

$$d\Omega_k = \frac{d\vec{k}}{\sqrt{1 + k^2/m^2}}, \tag{11}$$

$$E_q = \sqrt{q^2 + m^2}, \quad E_k = \sqrt{m^2 + k^2},$$

а $\tilde{V}$ - квазипотенциал. Сравнение (10) с нерелятивистским уравнением Липпмана-Швингера показывает, что единственное различие между этими двумя уравнениями связано с заменой нерелятивистского элемента объема $d\vec{k}$ и нерелятивистских соотношений

$$E_q = \frac{q^2}{2m}, \quad E_k = \frac{k^2}{2m}$$

их релятивистскими аналогами (11). Этот момент имеет принципиальное значение, поскольку таким образом установлен абсолютный характер уравнения Липпмана-Швингера по отношению к переходу от нерелятивистской теории (евклидово $\vec{p}$ - пространство) к релятивистской (неевклидово $\vec{p}$ - пространство). Абсолютную форму имеет также уравнение Шредингера для волновой функции, следующее из (10):

$$(2E_q - 2E_p)\Psi_q(\vec p) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\Omega_k \tilde{\tilde V}(\vec p, \vec k; E_q)\Psi_q(\vec k). \qquad (12)$$

В случае действительного квазипотенциала из уравнения (10) для амплитуды $A(\vec p, \vec q)\Big|_{E_p = E_q}$ получается соотношение, по форме точно совпадающее с нерелятивистским условием унитарности, но эквивалентное на самом деле релятивистскому условию двухчастичной унитарности.

В § 12 пространство импульсов релятивистской частицы последовательно трактуется как трехмерное пространство Лобачевского. Рассматривается соответствующая группа движений (группа Лоренца), причём собственно лоренцовские преобразования (с параметрами $\vec k = (k_1, k_2, k_3)$) интерпретируются как преобразования "трансляции":

$$\vec p\,' \equiv \vec p\,(+)\,\vec k = \vec p + \vec k\left(\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2}} + \frac{\vec p\vec k}{m^2\left(1+\sqrt{1+k^2/m^2}\right)}\right). \qquad (13)$$

Развивается новая точка зрения на проблему построения релятивистского оператора координаты, связанная с истолкованием модуля радиуса-вектора как оператора Казимира группы движений $\vec p$ - пространства. При таком подходе роль преобразования Фурье в $\vec p$ - пространстве Лобачевского играет преобразование Шапиро[3] (см. выше):

$$\Psi(\vec r) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \xi(\vec p, \vec r)\Psi(\vec p)\, d\Omega_p , \qquad (14)$$



где "плоская волна" $\xi(\vec p, \vec r)$ есть выражение вида

$$\xi(\vec p, \vec r) = \left(\frac{p_0 - \vec p\vec n}{m}\right)^{-1-irm} \qquad (15)$$

$$\left(p_0 = \sqrt{\vec p^{\,2} + m^2}\ ;\quad \vec r = r\vec n,\quad \vec n^{\,2} = 1\right).$$

Функции (15) являются матричными элементами главной серии унитарных представлений группы Лоренца, а величина $r$ просто связана со значением оператора Казимира группы в указанных представлениях. Соотношения ортогональности и полноты для $\xi(\vec p, \vec r)$ выглядят как прямое релятивистское обобщение аналогичных соотношений для плоских волн $e^{i\vec p\vec r}$ :

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int \xi(\vec p, \vec r)\,\xi^*(\vec p, \vec r\,')\, d\Omega_p = \delta^{(3)}(\vec r - \vec r\,')$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int \xi(\vec p, \vec r)\,\xi^*(\vec p\,', \vec r)\, d\vec r = \delta^{(3)}(\vec p\,(-)\,\vec p\,') \qquad (16)$$

(символ (-) определен в (13)). Замечательно, что новое релятивистское $\vec r$ - пространство обладает по-прежнему евклидовой геометрией, или, другими словами, свойство евклидовости $\vec r$ - пространства оказывается абсолютным. Переход к релятивистскому описанию означает только, что в качестве генераторов сдвига вместо величин $\hat{\vec p} = -i\frac{\partial}{\partial \vec r}$ теперь необходимо использовать компоненты некоторого дифференциально-разностного (с шагом $\hbar/mc$ ) векторного оператора $\hat{\vec{\mathcal P}} = (\hat{\mathcal P}_1, \hat{\mathcal P}_2, \hat{\mathcal P}_3)$ [x/].

---

[x/] Явный вид $\hat{\mathcal P}_1$, $\hat{\mathcal P}_2$, $\hat{\mathcal P}_3$ приведен в тексте диссертации.

Совместный спектр величин $\hat{p}_1$, $\hat{p}_2$ и $\hat{p}_3$ есть $\vec{p}$-пространство Лобачевского, а общая собственная функция – "плоская волна" $\xi(\vec{p},\vec{r})$. В итоге можно сказать, что установлен новый математический факт, имеющий большое эвристическое значение для развития идеи квантования пространства-времени: алгебра группы движений (псевдо)евклидового координатного пространства допускает представление, органически содержащее в себе параметр с размерностью длины (в данном случае это $\hbar/mc$).

В § 13 изучены свойства преобразования "трансляции" (13) и найден ряд полезных соотношений.

Следующий параграф посвящается применению преобразования Шапиро (14) в развитой квазипотенциальной теории. Вначале найдена интегральная форма уравнения Шредингера в релятивистском $\vec{r}$ – пространстве:

$$\Psi_q(\vec{r}) = \xi(\vec{q},\vec{r}) + \int G_q(\vec{r},\vec{r}\,')\, V(\vec{r}\,',\vec{r}\,'';E_q)\, \Psi_q(\vec{r}\,'')\, d\vec{r}\,'\, d\vec{r}\,'' \tag{17}$$

( $G_q$ – функция Грина уравнения (12) в $\vec{r}$– представлении, $V(\vec{r}\,',\vec{r}\,'';E_q)$ – квазипотенциал). Затем произведено разложение $\xi$ – функций по парциальным волнам и с его помощью найдено дифференциально-разностное (с шагом $\hbar/mc$) уравнение, которому должны удовлетворять $\xi(\vec{q},\vec{r})$ x/:

$$(2E_q - H_0)\,\xi(\vec{q},\vec{r}) \equiv$$

$$\equiv \left(2E_q - 2\,\mathrm{ch}\, i\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2i}{r}\,\mathrm{sh}\, i\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\Delta_{\theta,\phi}}{r^2}\, e^{i\frac{\partial}{\partial r}}\right)\xi(\vec{q},\vec{r}) = 0 \tag{18}$$

( $\Delta_{\theta,\phi}$ – угловая часть оператора Лапласа).

x/ Здесь и далее употребляется система единиц, в которой $\hbar = c = m = 1$. Переход к нерелятивистскому пределу теперь означает, что $r \gg 1$, а $q \ll 1$.



В нерелятивистском пределе (18) переходит в уравнение Лапласа для плоских волн $e^{i\vec{q}\vec{r}}$.

При помощи (18) уравнение (17) переписывается в "дифференциальной" форме

$$(2E_q - H_0)\,\Psi_q(\vec{r}) = \int V(\vec{r},\vec{r}\,';E_q)\,\Psi_q(\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,'. \tag{19}$$

Таким образом, рассматриваемая релятивистская проблема двух частиц сводится к решению дифференциально-разностного уравнения Шредингера с нелокальным взаимодействием. Естественно возникает вопрос, при каких условиях в уравнении (19) допустимо ограничение локальными квазипотенциалами?

Этот вопрос обсуждается в § 15. При этом, как и в ортодоксальном КПП, в качестве исходного пункта использовано предположение о существовании в некоторой области значений энергии спектрального представления амплитуды рассеяния по передаче импульса. Если это предположение выполнено, то квазипотенциал

$$V(\vec{p},\vec{k};E_q) = \sqrt{E_p E_k}\;\tilde{V}(\vec{p},\vec{k};E_q)$$

допускает спектральное представление вида

$$V(\vec{p},\vec{k};E_q) = \int_{\sigma_0}^{\infty} \frac{\rho(\sigma;E_q)\,d\sigma}{\sigma - (E_p - E_k)^2 + (\vec{p}-\vec{k})^2}, \tag{20}$$

откуда, в силу равенства $E_pE_k - \vec{p}\vec{k} = \sqrt{1 + (\vec{p}(-)\vec{k})^2}$,

$$V(\vec{p},\vec{k};E_q) = V((\vec{p}(-)\vec{k})^2;E_q). \tag{21}$$

Функции (21) отвечает локальный квазипотенциал $V(r;E_q)$ в релятивистском $\vec{r}$ – пространстве. Уравнение Шредингера с локальным квазипотенциалом записывается в виде:

$$\frac{H_0}{2}(2E_q - H_0)\Psi_q(\vec{r}) = V(r;E_q)\Psi_q(\vec{r}), \qquad (22)$$

причём в $\vec{p}$ – представлении оператор, стоящий в левой части (22), точно соответствует выражению $s+t+u-4$ (см.выше).

Благодаря существованию соотношения (20), локальный квазипотенциал можно рассматривать как суперпозицию <u>релятивистских</u> потенциалов Юкавы

$$V(\sigma,(\vec{p}(-)\vec{k})^2) = \frac{1}{\sigma - (E_p - E_k)^2 + (\vec{p} - \vec{k})^2}$$

с интенсивностями, зависящими от энергии. В $\vec{r}$ –представлении релятивизованный юкавский потенциал имеет вид

$$V(\sigma,r) = \frac{1}{4\pi r}\,\frac{\mathrm{ch}\left[r\,\mathrm{Arc}\cos\frac{\sigma-2}{2}\right]}{\mathrm{sh}\,\pi r},$$

откуда при $\sigma \to 0$ получается релятивистский аналог потенциала Кулона

$$V(0,r) = \frac{1}{4\pi r}\,\mathrm{cth}\,\pi r\ . \qquad (23)$$

Следует специально подчеркнуть, что потенциалы $V(\sigma,r)$ и $V(0,r)$ отвечают взаимодействиям, распространяющимся с <u>конечной</u> скоростью, поскольку в $\vec{p}$ – представлении им сопоставляются фейнмановские пропагаторы.



Возможность представления квазипотенциала в виде (20) имеет важное значение для феноменологического описания релятивистских двухчастичных систем в нашем формализме, поскольку позволяет моделировать взаимодействие между частицами с помощью <u>локальных</u> квазипотенциалов. С другой стороны, если квазипотенциал выбран в локальной форме, то это означает, в силу сказанного выше, что мы в определенной мере учитываем наличие у релятивистской амплитуды рассеяния спектрального представления, или, в конечном счёте, принимаем во внимание условия локальности и причинности в смысле теории поля.

В § 16 рассмотрен круг вопросов, связанных с использованием в рамках современной теории поля разложений по представлениям группы Лоренца, в частности, разложения в кросс-канале (представление Редже-Йооса). Показано, что в классической релятивистской картине рассеяния реджевский параметр $\alpha(t)$, фигурирующий в упомянутом представлении, имеет простую интерпретацию в терминах характеристик траектории частицы. При этом оказывается $\alpha(\alpha+1) < 0$, что отвечает вкладу лишь унитарных представлений группы $O(2,1)$ в "классическое" представление Редже-Йооса.

III глава диссертации посвящена последовательной разработке исчисления конечных разностей в релятивистском $r$ – пространстве.

В § 17 введена операция конечно-разностного дифференцирования

$$\Delta = i\left(e^{-i\frac{d}{dr}} - 1\right), \qquad (24)$$

определена обобщенная степенная функция

$$r^{(\lambda)} = i^{\lambda}\,\frac{\Gamma(-ir+\lambda)}{\Gamma(-ir)},$$

для которой справедливо равенство

$$\Delta r^{(\lambda)} = \lambda r^{(\lambda-1)}, \qquad (25)$$

а также рассмотрен ряд вспомогательных соотношений. В следующем параграфе построены аналоги важнейших функций непрерывного анализа, в том числе:

1) "экспонента"

$$\exp[a;r] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n r^{(n)}}{n!} = (1-ia)^{ir}$$

(очевидно, $\Delta \exp[a;r] = a\exp[a;r]$);

2) "логарифмическая" функция

$$\ln[r] \equiv \psi(ir+1) = \lim_{z\to ir+1} \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

(легко проверить, что $\Delta \ln[r] = r^{(-1)}$);

3) "гипергеометрическая" функция

$${}_2F_1[\alpha,\beta;\gamma;a,r] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{(n)}\beta_{(n)}}{\gamma_{(n)}} a^n r^{(n)} = {}_3F_1(\alpha,\beta,-ir;\gamma;ia)$$

$$(\alpha_{(n)} = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1));$$

4) вырожденная "гипергеометрическая" функция

$$\Phi[\alpha,\gamma;a;r] = \lim_{\xi\to\infty} {}_2F_1\,[\alpha,\xi;\gamma;\frac{a}{\xi};r] = \qquad (26)$$

$$= {}_2F_1(\alpha,-ir;\gamma;ia);$$

5) "ступенчатая" $\hat{\theta}$ – функция



$$\hat{\theta}(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\kappa r} d\kappa}{e^{\kappa}-1-i\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{(1+i\epsilon)^{ir-1}}{1-e^{-2\pi r}} = \frac{1}{1-e^{-2\pi r}} \qquad (27)$$

(очевидно, $\Delta\hat{\theta}(r) = \delta(r)$).

Для функций ${}_2F_1[\alpha,\beta;\gamma;a;r]$ и $\Phi[\alpha;\gamma;a;r]$ найдены разностные уравнения, переходящие в нерелятивистском пределе в гипергеометрические дифференциальные уравнения. В частности, уравнение для $\Phi$-функции имеет вид

$$\{[\gamma+i(r-i)]\Delta^2 + i[\gamma - a(r-i) + ia\alpha]\Delta - ia\alpha\}\Phi = 0. \qquad (28)$$

Вторым линейно независимым решением (28) является выражение

$$a^{1-\gamma} r^{(1-\gamma)} \Phi[\alpha-\gamma+1, 2-\gamma; a; r+i(1-\gamma)] = \qquad (29)$$

$$= a^{1-\gamma} r^{(1-\gamma)} {}_2F_1(\alpha-\gamma+1, -ir+1-\gamma; 2-\gamma; ia).$$

Сравнение (29) и (26) позволяет установить замечательный факт, что оба решения разностного уравнения (28) удовлетворяют одному и тому же дифференциальному гипергеометрическому уравнению по аргументу $a$.

В § 19 исследованы решения свободного разностного уравнения Шредингера в $r$ – представлении. В частности, рассмотрены решения, соответствующие "стоячим" волнам

$$s_\ell(r,\chi_q)=\sqrt{\frac{\pi}{2}\operatorname{sh}\chi_q}\,(-1)^{\ell+1}(-r)^{(\ell+1)}P^{-1/2-\ell}_{-1/2+ir}(\operatorname{ch}\chi_q) \tag{30}$$

$$c_\ell(r,\chi_q)=\sqrt{\frac{\pi}{2}\operatorname{sh}\chi_q}\,(-r)^{(-\ell)}P^{1/2+\ell}_{-1/2+ir}(\operatorname{ch}\chi_q)$$

( $\operatorname{ch}\chi_q = E_q$ ) и решения, отвечающие расходящейся и сходящейся сферическим волнам: $e_\ell^{(1,2)}(r,\chi_q)=c_\ell \pm is_\ell$. Изучено асимптотическое поведение этих функций при больших $r$ и их аналитические свойства в $\ell$ – плоскости. Вычислены определители, играющие роль вронскианов в данном формализме. Найдено явное выражение для радиальной функции Грина:

$$G_\ell(r,r';\chi_q)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\chi\, s_\ell(r,\chi)\, s_\ell^*(r',\chi)}{2\operatorname{ch}\chi_q-2\operatorname{ch}\chi+i\epsilon}=$$

$$=-\frac{1}{w\left(e_\ell^{(1)}(r',\chi_q),e_\ell^{(2)}(r',\chi_q)\right)}\Big\{\hat\theta(r-r')e_\ell^{(1)}(r,\chi_q)e_\ell^{(2)}(r',\chi_q)+$$

$$+\hat\theta(r'-r)e_\ell^{(1)}(r',\chi_q)e_\ell^{(2)}(r,\chi_q)-\hat\theta(r+r')e_\ell^{(1)}(r,\chi_q)e_\ell^{(1)}(r',\chi_q)-$$

$$-\hat\theta(-r-r')e_\ell^{(2)}(r,\chi_q)e_\ell^{(2)}(r',\chi_q)\Big\},$$

где $w(e_\ell^{(1)},e_\ell^{(2)})$ – новый "вронскиан", а функция $\hat\theta$ определена в (27). Единственное отличие (31) от соответствующего выражения обычной теории состоит в том, что в новой функции Грина имеется "акаузальный" член, пропорциональный $\hat\theta(-r-r')$. В нерелятивистском пределе это слагаемое, очевидно, исчезает.



Следующий § 20 содержит вывод уравнения непрерывности, а также соотношения, которое в нерелятивистской теории эквивалентно непрерывности логарифмической производной волновой функции (условие "сшивания" решений).

В § 21 сосредоточены формулы и соотношения, основанные на связи между релятивистской амплитудой рассеяния на энергетической поверхности и асимптотикой при больших $r$ релятивистской волновой функции. Введены в рассмотрение фазы рассеяния $\delta_\ell$ и показано, что унитарность парциальной матрицы рассеяния $S_\ell = e^{i2\delta_\ell}$ при вещественных $\delta_\ell$ эквивалентна релятивистской двухчастичной унитарности.

В главе IV в целях иллюстрации развитого метода даны решения нескольких задач с квазипотенциалами простого вида.

В § 22 решена задача о частице в сферическом "потенциальном ящике".

Особое внимание уделено задаче об определении энергетического спектра релятивистской частицы, находящейся в сферической " потенциальной яме" конечной глубины (§23). Как известно, потенциалы этого типа применяются в составных моделях элементарных частиц, в частности, в модели кварков. Релятивистская формулировка задачи о потенциальной яме дает возможность обосновать гипотезу о нерелятивистском характере движения кварков внутри составной частицы (мезона), если масса кварка $m$ значительно превышает массу мезона $\mu$ :

$$\mu/m \ll 1 . \tag{32}$$

Именно, как установлено в § 23, в случае выполнения (32) для величины $p$ – среднего значения импульса кварка внутри мезона справедлива оценка:

$$\frac{p^2}{m^2c^2}\approx\frac{\mu}{m}, \tag{33}$$

что в силу (32) и означает применимость нерелятивистского приближения.

Рассмотрена также задача о рассеянии медленной частицы с $\ell = 0$ на потенциальной яме. Показано, что сечение рассеяния обращается в бесконечность при энергии $E = 2$, отвечающей первому дискретному уровню.

В § 24 найдено решение "кулоновой проблемы" (квазипотенциал вида (23)) для случая $\ell=0$ и $E=0$. Кроме того, в предположении $\ell=0$ получены энергетические уровни и точные волновые функции разностного уравнения Шредингера с квазипотенциалом (23) в ортодоксальном КПП[x/]. Соотношение, определяющее энергетический спектр, имеет вид ($-|W| = 2E - 2$ – энергия связи):

$$e^4/4n^2 = |W|\left(1-\frac{|W|}{4}\right)\left(1-\frac{|W|}{2}\right)^2, \quad n=1,2,\ldots \tag{34}$$

При $|W| \ll 1$ это выражение переходит в формулу Бора $|W| = \frac{e^4}{4n^2}$ (массы частиц одинаковы!).

В Приложении 1 построена модель квантовой теории поля, являющаяся непосредственным обобщением формализма, развитого в I главе диссертации. В этой модели математически последовательным образом введено обрезание интегралов по импульсам квазичастицы. Новая матрица рассеяния не содержит расходимостей, удовлетворяет условию унитарности и модифицированному условию причинности.

---

[x/] При этом удалось свести данное уравнение к вырожденному "гипергеометрическому" уравнению (28).



В Приложение II вынесены "теоремы сложения" для функций, связанных с унитарными представлениями группы Лоренца.

Результаты диссертации докладывались на сессиях Отделения ядерной физики АН СССР, на всесоюзных и международных конференциях по физике высоких энергий, в Международном центре теоретической физики в Триесте и опубликованы в следующих работах:

1. ЖЭТФ, 46, 654 (1964).
2. ЖЭТФ, 46, 872 (1964).
3. ДАН СССР, 147, 588 (1962).
4. ДАН СССР, 160, 573 (1965).
5. Сборник "Пространство, время, причинность в микромире", стр. 40-53, Д-1753, Дубна (1964).
6. Труды XII Международной конференции по физике высоких энергий, т. II стр. 232, Атомиздат (1964).
7. "Regge pole exchange in classical physics and in non-relativistic quantum mechanics", preprint IC/67/69, Trieste (1967), Physical Review, в печати (совместно с G.Cocho, C.Fronsdal, I.T.Grodsky).
8. "On a relativistic quasipotential equation in the case of particles with spin", preprint IC/67/768, Trieste (1967) Nuovo Cimento, в печати (совместно с М.Матеевым)
9. "Quasipotential approach and the expansion in relativistic spherical functions", preprint IC/67/732, Trieste (1967) Nuovo Cim., в печати (совместно с Р.М.Мир-Касимовым и Н.Б.Скачковым)
10. "Quasipotential type equation for the relativistic scattering amplitude", preprint IC/67/73, Trieste (1967) Nuclear Physics, в печати.
11. On a equation for the relativistic scattering amplitude, ITF-Kiev preprint, No.7 (1967).

## *Литература*


1. *E.E.Salpeter, H.A.Bethe, Phys. Rev., 84, 1239 (1951).*
2. *A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze, Nuovo Cim., 29, 380 (1963).*
3. *И.С.Шапиро, ДАН СССР 106, 647 (1956).*



Рукопись поступила в издательский отдел

6 марта 1968 года.