ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

2-2003-8

На правах рукописи
УДК 530.145.6; 539.128.2

СОРИН
Александр Савельевич

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ W-АЛГЕБР И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ ИЕРАРХИИ С РАСШИРЕННОЙ СУПЕРСИММЕТРИЕЙ

Специальность: 01.04.02 — теоретическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Дубна 2003

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор, член-корреспондент РАН — В.Я. Файнберг
доктор физико-математических наук,
профессор — М.А. Ольшанецкий
доктор физико-математических наук — А.П. Исаев

Ведущее научно-исследовательское учреждение:
Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН.

Защита диссертации состоится "10" июня 2003 г. на заседании диссертационного совета Д720.001.01 в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований по адресу г. Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Объединенного института ядерных исследований.

Автореферат разослан "17" апреля 2003 г.

Ученый секретарь совета
доктор физико-математических наук — С.В. Голоскоков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Тема представленных в диссертации исследований в значительной степени обусловлена многочисленными свидетельствами, возникающими из широкого круга полевых теорий и статистических моделей, что знание мощного формализма интегрируемых иерархий оказывается решающим для получения решений и восприятия новых идей, следующих из струнных и калибровочных теорий.

Имеется несколько причин, стимулирующих изучение суперсимметричных иерархий с различным числом суперсимметрий $N \geq 1$, которые обобщают чисто бозонные ($N = 0$) интегрируемые иерархии. В настоящее время бозонные иерархии достаточно хорошо изучены, и их связь с физическими моделями (например, двумерной (2D) гравитацией и топологическими полевыми теориями) хорошо установлена. Напротив, имеющееся знание суперсимметричных интегрируемых иерархий пока еще достаточно скудно; в этом отношении ситуация весьма отличается от ситуации в конформных полевых теориях, где большое внимание уделялось суперсимметричным расширениям с $N \geq 1$. Можно надеяться, что, как только понимание суперсимметричных интегрируемых иерархий станет удовлетворительным, это поможет прояснить их связь с физическими моделями, например с нетвистованными $N = 2$ конформными полевыми теориями, подобно связи, имеющей место между бозонными интегрируемыми иерархиями и топологическими полевыми теориями. Еще одна причина заключается в том, что этот предмет сам по себе представляет математическую проблему, которая полна интригующих неожиданностей типа существования трех разных $N = 2$ суперсимметричных семейств интегрируемых иерархий с одной и той же супералгеброй $N = 2\ W_n$ в качестве их второй гамильтоновой структуры. Эта проблема оставалась загадкой в течение длительного времени. Другим источником интереса к расширенным суперсимметричным иерархиям является также и то, что они могли бы объединять известные бозонные иерархии.

Существует соответствие между аффинными и конформными W-(супер)алгебрами и иерархиями интегрируемых уравнений типа Кортевега–де Фриза (КдФ), нелинейного Шредингера (НУШ) и Кадомцева–Петвиашвили (КП), для которых эти (супер)алгебры обеспечивают вторые гамильтоновы структуры. Изучение таких иерархий позволяет проникать глубже в их математику и, следовательно, в структуру соответствующих теорий протяженных объектов, включая те, которые в настоящее время рассматриваются как кандидаты на предельную М-теорию. К универсальному классу $2D$ моделей, который естественным образом включает эти локальные симметрии и дает ключ для понимания взаимосвязей между ними (например, посредством гамильтоновой редукции), принадлежат модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена и связанные с ними Тодовские системы. Должна существовать глубокая связь (которая все еще не до конца исследована) между этим важным классом интегрируемых 2D моделей (связанных, в свою очередь, со струнными теориями) и (супер)иерархиями типа КдФ, НУШ и КП.

Бозонные иерархии играют важную роль во многих физических теориях. Кажутся разумными попытки построения суперсимметричных аналогов таких физических теорий начиная именно с построения суперсимметричных расширений соответствующих бозонных иерархий. Например, давно поставленной и все еще не решенной проблемой является проблема построения суперсимметричных матричных моделей, чье критическое поведение описывало бы 2D суперконформную материю, взаимодействующую с квантовой супергравитацией. Перспективный подход состоит в эксплуатации суперсимметричных расширений интегрируемых иерархий, содержащихся, например, в эрмитовых матричных моделях, которые допускали бы реконструкцию для описания в терминах собственных значений. Так, известно, что тау функция полубесконечной бозонной иерархии Тоды (ограниченной Вирасоровскими связями) воспроизводит статистическую сумму одноматричной модели, которая описывает двумерную минимальную конформную материю, взаимодействующую с двумерной квантовой гравитацией. Поэтому кажется разумным найти сначала нетривиальные суперсимметричные расширения иерархии Тоды, которая характеризует одноматричную модель, а затем на ее основе реконструировать соответствующую суперсимметричную модель собственных значений. Матричная формулировка таких моделей могла бы дать новое понимание проблемы квантования 2D супергравитации.

Начиная с пионерской работы Замолодчикова, множество расширенных нелинейных конформных (супер)алгебр (W-(супер)алгебр) было построено и изучено. Неослабевающий интерес к этому предмету в значительной степени мотивирован многими важными применениями

W-(супер)алгебр в теории струн и интегрируемых системах. Однако присущая W-(супер)алгебрам нелинейность делает довольно трудным делом применение к их изучению стандартного арсенала методов, используемых в случае линейных (супер)алгебр при построении, например, их полевых реализаций. В этой связи представляется важным нахождение различных процедур линеаризации W-(супер)алгебр.

Цель диссертации состоит в развитии методов построения и исследования суперсимметричных интегрируемых иерархий, нахождении их решений и линеаризации W-(супер)алгебр.

Научная новизна и практическая ценность.

Предложен метод конформной линеаризации широкого класса нелинейных W-(супер)алгебр. Он основан на наблюдении, что во многих случаях данная нелинейная W-(супер)алгебра с конечным числом токов может быть вложена в некоторую линейную конформную (супер)алгебру - линеаризующую алгебру, которая, как и исходная W-(супер)алгебра, обладает конечным набором токов и содержит ее как подалгебру в некотором специальном базисе. При этом важно, что токи исходной нелинейной W-(супер)алгебры, определенным образом расширенные конечным набором новых токов, связаны *обратимым* преобразованием с токами линеаризующей алгебры. Тем самым, большинство свойств нелинейной алгебры, а также свойств построенных на ее основе теорий, могут быть изучены более простым и эффективным способом, исходя из ее линейного аналога. Помимо того, что конформные линеаризующие алгебры весьма эффективны для получения более широкого класса полевых реализаций нелинейных алгебр, они также обеспечивают подходящую основу как для построения новых струнных теорий, так и для изучения вложения Вирасоровской струны в струны W-типа.

Найден широкий класс $N = 2$ и $N = 4$ суперсимметризаций обобщенных матричных иерархий КП, КдФ, НУШ и Тоды. Существенный прогресс достигнут в понимании общей структуры этих иерархий, взаимосвязи между ними и их связей с другими физическими и математическими концепциями и проблемами. Эти иерархии могут быть важны для исследования старой и все еще не решенной проблемы построения нетривиальной суперсимметричной матричной модели и/или модели собственных значений, что было одним из немаловажных стимулов для их построения.

Построен $N = 4$ суперполевой базис для $N = 4$ суперсимметричной иерархии Тоды, в котором потоки локальны, и найдено его вложение в $N = 4$ $O(4)$ суперконформный суперток, что может быть важным в связи с давней нерешенной проблемой построения $N = 4$ $O(4)$ суперконформной иерархии КдФ (если существует).

Решена проблема построения квазиклассического предела $N = (1|1)$ 2DTL иерархии — $N = (1|1)$ суперсимметричной бездисперсионной иерархии Тоды. Кроме чисто академического значения этой иерархии, интерес к ней связан с рядом возможных важных физических и математических приложений, аналогичных приложениям ее бозонного прообраза — бездисперсионной 2DTL иерархии. Например, для построения ряда самодуальных вакуумных метрик и метрик Эйнштейна–Вейля, теории твисторов, двумерной конформной и топологической теории поля, двумерной теории струн. Имея в виду глубокую связь между 2DTL и $N = (1|1)$ 2DTL иерархиями, представляется естественным полагать, что и бездисперсионная $N = (1|1)$ суперсимметричная 2DTL иерархия найдет аналогичные приложения в суперсимметричных обобщениях перечисленных выше теорий. Она может быть также значима и в контексте проблемы поиска интегрируемой структуры, лежащей в основе суперсимметричной полевой теории струн, подобно тому, как это имеет место для бозонной бездисперсионной иерархии Тоды по отношению к Виттеновской полевой теории струн, что было обнаружено нами совсем недавно.

Предложена новая обобщенная градуированная скобочная операция на пространстве градуированных операторов с инволюцией, которая определена в достаточно общих терминах, чтобы иметь широкий спектр приложений. Одним из мотивов для ее введения послужила проблема построения квазиклассического (непрерывного) предела $N = (1|1)$ 2DTL иерархии, в решении которой эта скобочная операция сыграла ключевую роль.

На защиту выдвигаются следующие результаты.

1. Разработан метод конформной линеаризации нелинейных W (супер)алгебр. На основе этого метода получены линеаризующие конформные алгебры для широкого класса W-(супер)алгебр и построены их новые полевые реализации.

2. Решена проблема Лаксового описания трех различных бесконечных семейств интегрируемых $N = 2$ суперсимметричных иерархий с $N = 2$ супер W_n алгебрами в качестве их вторых гамильтоновых структур.

3. Описан широкий класс редукций матричной суперсимметричной иерархии КП в $N = 2$ суперпространстве, характеризуемых конечным и бесконечным числом полей.

4. Предложен бесконечный класс интегрируемых $N = 2$ неограниченных суперсимметричных матричных иерархий обобщенных нелинейных уравнений Шредингера — $N = 2$ $(k|n, m)$-МОНУШ. Найдены его псевдодифференциальное и супералгебраическое описания, построены рекурсионные операторы, а также изучены его киральные редукции, допускающие би-гамильтоново описание, и их дискретные симметрии, представляющие собой решеточные суперсимметричные уравнения Тодовского типа. Установлена редукция иерархии $N = 2$ $(1|1, 0)$-МОНУШ в иерархию $N = 2$ $\alpha = 1$ КдФ и построен рекурсионный оператор и бигамильтонова формулировка для последней.

5. Предложена новая интегрируемая $N = (0|2)$ суперсимметричная решеточная иерархия Тоды, а также широкий класс ее интегрируемых обобщений. Новые $N = (0|2)$ суперсимметичные уравнения — $N = (0|2)$ суперконформное 2DTL уравнение и $N = (0|2)$ уравнение Давье-Стевартсона — являются ее первыми нетривиальными подсистемами.

6. Построены бозонные и фермионные решения уравнений симметрий, соответствующих двумерным $N = (0|0)$, $N = (0|2)$ и $N = (2|2)$ суперконформным решеточным уравнениям Тоды, и найдена их максимальная суперполевая формулировка.

7. Построены общие решения двумерных $N = (0|2)$ и $N = (2|2)$ суперконформных решеточных уравнений Тоды в случае одного или двух фиксированных концов.

8. Предложена новая градуированная скобочная операция на пространстве градуированных операторов с инволюцией, обобщающая градуированный коммутатор для супералгебр.

9. Получена новая форма представления Лакса для суперсимметричных решеточных иерархий Тоды в терминах обобщенной градуированной скобки, что важно для построения их квазиклассических асимптотик.

10. Построена бездисперсионная (непрерывная) $N = (1|1)$ суперсимметричная иерархия Тоды и найдено ее Лаксово описание.

11. Предложен широкий класс комплексифицированных $N = 4$ суперсимметричных интегрируемых иерархий.

12. Предложено Лаксово и би-гамильтоново описание $N = 4$ суперсимметричной иерархии Тоды в $N = 2$ и $N = 4$ суперпространствах, получены ее бозонные и фермионные симметрии, вещественные формы и установлена ее связь с иерархией $N = 4$ КдФ. Построен $N = 4$ суперполевой базис, в котором потоки локальны, и найдено его вложение в $N = 4$ $O(4)$ суперконформный супертоков.

Апробация работы. Результаты, представленные в диссертации, докладывались на семинарах Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова ОИЯИ, ФИРАН (Москва), ИФВЭ (Протвино), на семинарах в Университетах и Физических институтах гг. Харьков (Украина), Берлин, Бремен, Ганновер, Мюнхен, Бонн и Падеборн (Германия), Твенте (Голландия), Лече, Милан, Падуя, Пиза, Триест, Турин и Фраскати (Италия), Вроцлав (Польша), Лион, Монтпелье, Орсэй и Париж (Франция), ЦЕРН (Женева), были представлены на Международных совещаниях "Quantum groups. Formalism and applications" (Карпач, Польша, 1994), "New symmetries and integrable models" (Карпач, Польша, 1999), "Проблемы квантовой теории поля" (Алушта, 1996), "Theory of elementary particles" (Буков, Германия, 1996), "Finite dimensional integrable systems" (Дубна, 1994), "Квантовая гравитация" (Москва, 1995), "Superstrings and Quantum Gravity" (Дубна, 1999, 2000, 2001), "Supersymmetry and Quantum symmetries" (Дубна, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999, 2000), "Group Theoretical Methods in Physics" (Дубна, 1996, 1998, 2000), "Integrable Hierarchies and Modern Physical Theories" (Чикаго, США, 2000), "Integrable Field Theories, Solitons and Duality" (Сан Паулу, Бразилия, 2002), "Classical and quantum Integrable Systems" (Протвино, 2000, 2003).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 40 работ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из Введения, 6 глав и Заключения. Она содержит 233 страницы машинописного текста. Список литературы включает 182 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во Введении обоснована актуальность проведенного в диссертации исследования. Представлен современный статус исследований и обзор литературы по тематике диссертации. Сформулирована цель работы и изложено ее краткое содержание.

В первой главе разработан метод конформной линеаризации нелинейных W-(супер)алгебр.

В разделе 1.1 построены конформные линейные (супер)алгебры со следующими нетривиальными операторными разложениями для их токов $\{\tilde{T},\, \tilde{U},\, \tilde{J}^b_a,\, \tilde{\bar{G}}^a,\, G_a,\, \bar{Q}^b\}$:

$$
\begin{aligned}
\tilde{T}(z_1)\tilde{T}(z_2) &= \frac{-6\epsilon K^2 + (N^2+13)K - (N^3 - N + 6\epsilon)}{2K\ z_{12}^4} + \frac{2\tilde{T}}{z_{12}^2} + \frac{\tilde{T}'}{z_{12}}, \\
\tilde{T}(z_1)\tilde{J}^b_a(z_2) &= \frac{\tilde{J}^b_a}{z_{12}^2} + \frac{\tilde{J}^{b\prime}_a}{z_{12}}, \quad \tilde{T}(z_1)\tilde{U}(z_2) = \frac{\tilde{U}}{z_{12}^2} + \frac{\tilde{U}'}{z_{12}}, \\
\tilde{T}(z_1)\tilde{\bar{G}}^a(z_2) &= \left(\frac{3}{2} + \frac{\epsilon(2+\epsilon N)}{2K}\right)\frac{\tilde{\bar{G}}^a}{z_{12}^2} + \frac{\tilde{\bar{G}}^a}{z_{12}}, \\
\tilde{U}(z_1)\tilde{U}(z_2) &= \left(\frac{2NK}{2+\epsilon N}\right)\frac{1}{z_{12}^2}, \quad G_a(z_1)\bar{Q}^b(z_2) = \frac{\delta^b_a}{z_{12}}, \\
\tilde{J}^b_a(z_1)\tilde{J}^d_c(z_2) &= (K-N)\frac{\delta^d_a\delta^b_c - \frac{1}{N}\delta^b_a\delta^d_c}{z_{12}^2} + \frac{\delta^b_c\tilde{J}^d_a - \delta^d_a\tilde{J}^b_c}{z_{12}}, \\
\tilde{U}(z_1)\tilde{\bar{G}}^a(z_2) &= -\frac{\tilde{\bar{G}}^a}{z_{12}}, \quad \tilde{J}^b_a(z_1)\tilde{\bar{G}}^c(z_2) = \frac{-\delta^c_a\tilde{\bar{G}}^b + \frac{1}{N}\delta^b_a\tilde{\bar{G}}^c}{z_{12}},
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

являющиеся линеаризующими алгебрами для нелинейных (супер)алгебр $W(sl(N{+}2), sl(2))$ ($\epsilon = 1$) и $W(sl(N|2), sl(2))$ ($u(N)$-суперконформной, $\epsilon = -1$), возникающих в результате первичной гамильтоновой редукции аффинных (супер)алгебр $sl(N+2)$ и $sl(N|2)$ соответственно, с минимальным набором связей, наложенных на токи последних

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} U & T & \overline{G}^1 & \overline{G}^2 & \dots & \overline{G}^N \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & G_1 & & & & \\ 0 & G_2 & & & & \\ \vdots & \vdots & & \multicolumn{3}{c}{sl(N) - \frac{\delta_a^b}{N}U} \\ 0 & G_N & & & & \end{array}\right). \qquad (2)$$

В разделе 1.2 разработан метод конформной линеаризации для широкого класса нелинейных W-(супер)алгебр $\subset W(sl(N+2), H)$ $(H \subset sl(N))$, возникающих в результате вторичных гамильтоновых редукций алгебры $W(sl(N+2), sl(2))$ (2) связями

$$G_1 = 1, \quad G_2 = \ldots = G_N = 0 \quad \text{и/или} \quad sl(N)|_{sl(2)}\,, \qquad (3)$$

где $sl(N)|_{sl(2)}$ – набор связей на $sl(N)$-токи, ассоциированный с произвольным вложением алгебры $sl(2)$ в подалгебру $sl(N)$ алгебры $W(sl(N+2), sl(2))$. В рамках этого метода найдены следующие общие формулы для токов $\{\widehat{T}, \widehat{U}, \widehat{J}_a, \widehat{\overline{G}}^i, \widehat{G}_i, \widehat{\overline{Q}}^i\}$ конформных линеаризующих алгебр:

$$\begin{aligned} &\widehat{U} \equiv \widetilde{U}, \quad \widehat{\overline{G}}^i = \widetilde{\overline{G}}^i, \quad \widehat{G}_i = G_i, \quad \widehat{\overline{Q}}^i = \bar{Q}^i \\ &\widehat{J}_{\bar{\alpha}} = \widetilde{J}_{\bar{\alpha}} + \sum_{\beta,\gamma} f^{\gamma}_{\bar{\alpha},\beta} b_\gamma c^\beta \,, \\ &\widehat{T} = \widetilde{T} + \mathcal{J}' + \sum_{\alpha} \{-(1+h_\alpha) b_\alpha c^{\alpha\prime} - h_\alpha b'_\alpha c^\alpha\} \,, \end{aligned} \qquad (4)$$

где $\{b_\alpha, c^\alpha\}$ - фермионные дух-антидуховые пары токов, греческие индексы $\{\alpha, \beta\}$ $(\{\bar{\alpha}, \bar{\beta}\})$ принимают значения в $(sl(N))_-$ ($(sl(N))_0 \oplus (sl(N))_+$) при разложении алгебры $sl(N)$ в прямую сумму собственных подпространств с положительными, нулевыми и отрицательными собственными значениями h_a относительно присоединенного действия генератора Картана алгебры $sl(2)$

$$sl(N) = (sl(N))_- \oplus (sl(N))_0 \oplus (sl(N))_+ \equiv \underset{h_a}{\oplus} \ (sl(N))_{h_a} \quad . \qquad (5)$$

В разделах 1.3 и 1.4 общий подход раздела 1.2 применен к сериям нелинейных алгебр $W(sl(N), sl(N))$ и $W(sl(N), sl(3))$ соответственно,

где все структурные соотношения их линеаризующих алгебр представлены явно, а также построены новые реализации для алгебр W_3, W_4 и $W(sl(N), sl(3))$, включая реализации по модулю нуль-полей для алгебры W_3.

В разделе 1.5 суммированы основные результаты этой главы.

Во второй главе предложено новое семейство $N = 2$ суперсимметричных интегрируемых иерархий — $N = 2$ $(k|n, m)$-МОНУШ, представляющее собой суперсимметричное обобщение бозонной матричной иерархии обобщенных нелинейных уравнений Шредингера.

В разделе 2.1 для бозонных потоков этого семейства получено матричное псевдодифференциальное представление Лакса в $N = 2$ суперпространстве в терминах $N = 2$ неограниченных матрично-значных суперполей $F, \overline{F}$

$$\frac{\partial}{\partial t_p} L = [(L^p)_{\geq 0} + res(L^p), L], \quad L = I\partial + \frac{1}{2} F D \overline{D} \partial^{-1} \overline{F}, \quad p \in \mathbb{N}. \ (6)$$

Далее, в рамках псевдодифференциального подхода построены соответствующие гамильтонианы и вещественные формы в действительном $N = 2$ суперпространстве.

В разделе 2.2 установлено супералгебраическое происхождение этого семейства, связанное с супералгеброй $sl(2k + n|2k + m)$, и на этой основе построены его бозонные и фермионные симметрии, их алгебра, а также рекурсионный оператор, связывающий все эволюционные уравнения, принадлежащие иерархии $N = 2$ $(k|n, m)$ МОНУШ.

В разделе 2.3 описаны несколько нетривиальных редукций этого семейства, одна из которых есть семейство $N = 2$ суперсимметричных киральных $(k|n, m)$-МОНУШ иерархий, для которого построено би-гамильтоново описание и дискретные симметрии, представляющие собой решеточные уравнения Тодовского типа. Далее установлена редукция $N = 2$ $(1|1, 0)$-МОНУШ иерархии в $N = 2$ $\alpha = 1$ КдФ иерархию и на этой основе построен рекурсионный оператор и би-гамильтонова формулировка для последней.

В третьей главе исходя из матричных псевдоифференциальных операторов Лакса

$$L_{KP} = I\partial + \sum\nolimits_{j=-\infty}^{0} (a_j + \omega_j D + \overline{\omega}_j \overline{D} + b_j [D, \overline{D}]) \partial^j \quad , \qquad (7)$$

параметризованных $N = 2$ неограниченными матрично-значными суперполями в $N = 2$ суперпространстве, изучены различные редукции

$N = 2$ суперсимметричной матричной КП иерархии, характеризуемые конечным и бесконечным числом полей. Примечательным свойством $N = 2$ суперсимметричной матричной КП иерархии является то, что она допускает несколько киральных редукций $[D, L_{KP}] = 0$, характеризуемых бесконечным числом полей

$$\begin{aligned} L^{red}_{KP(1)} &= I\partial + a_0 + \omega_0 D \\ &+ \sum\nolimits_{j=-\infty}^{-1}(a_j\partial - [Da_j]\overline{D} + \omega_j D\partial - \frac{1}{2}[D\omega_j][D,\overline{D}])\partial^{j-1}, \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^{red}_{KP(2)} &= I\partial + \sum\nolimits_{j=-\infty}^{0} a_j\partial^j \equiv I\partial - \left[D\mathcal{L}_s^{-1}\overline{D}\mathcal{L}_s\right], \\ \mathcal{L}_s &\equiv I\partial^s + \sum\nolimits_{j=-\infty}^{s-1} c_{s-j}\partial^j. \end{aligned} \quad (9)$$

В разделе 3.1 проанализированы возможные бозонные пределы для семейства скалярных $N = 2$ суперсимметричных иерархий с $N = 2$ супер W_n алгебрами в качестве их вторых гамильтоновых структур. В результате анализа получены три различных семейства бозонных иерархий и их операторы Лакса.

Затем в разделе 3.2 предложено их описание в терминах супероператоров Лакса

$$L_s = I\partial - \left[D\mathcal{L}_s^{-1}\overline{D}\mathcal{L}_s\right], \quad \mathcal{L}_s := I\partial^s + \sum\nolimits_{j=0}^{s-1} J_{s-j}\partial^j + \overline{F}\partial^{-1}F \qquad (10)$$

для первого и

$$\begin{aligned} L_s &= I\partial^s + \sum\nolimits_{j=1}^{s-1}(J_{s-j}\partial - [DJ_{s-j}]\overline{D})\partial^{j-1} - J_s - \overline{D}\partial^{-1}[DJ_s] \\ &-F\overline{F} - F\overline{D}\partial^{-1}[D\overline{F}], \quad DF = \overline{D}\,\overline{F} = 0 \end{aligned} \qquad (11)$$

для второго и третьего семейств; тем самым решена давняя проблема описания трех семейств $N = 2$ суперсимметричных иерархий с $N = 2$ супер W_n вторыми гамильтоновыми структурами, существование которых являлось интригующим фактом в течение длительного времени.

Четвертая глава посвящена исследованию дискретных интегрируемых иерархий Тодовского типа с расширенными суперсимметриями.

В разделах 4.1 и 4.2 развит алгоритм построения бозонных и фермионных симметрий для решеточного двумерного бозонного уравнения Тоды (2DTL) и $N = (1|1)$ суперсимметричного 2DTL уравнения, соответственно, исходящий из знания соответствующих этим уравнениям интегрируемых иерархий – 2DTL и $N = (1|1)$ 2DTL (STL) иерархий соответственно. Эти иерархии представляют собой бесконечную систему эволюционных уравнений (потоков) для бесконечного набора решеточных бозонных и фермионных полей, содержащих как подсистемы уравнения 2DTL и $N = (1|1)$ 2DTL соответственно. Более того, также установлены алгебры этих симметрий и показано, что $N = (1|1)$ 2DTL иерархия, в действительности, обладает более высокой симметрией, а именно $N = (2|2)$ суперсимметрией, и поэтому может называться $N = (2|2)$ 2DTL иерархией.

В разделе 4.3 решена проблема построения решений уравнения симметрии, соответствующего предлагаемому в диссертации новому интегрируемому суперсимметричному уравнению — $N = (0|2)$ суперконформному 2DTL уравнению

$$\partial_- \ln\Big((\overline{D}_+ F_{j+1})(D_+\overline{F}_j)\Big) = -F_j\overline{F}_j + F_{j+1}\overline{F}_{j+1}. \qquad (12)$$

Так, сначала в этом разделе предложена новая $N = (0|2)$ суперсимметричная 2DTL иерархия, которая содержит $N = (0|2)$ 2DTL уравнение как подсистему, а затем в рамках ранее развитой в разделах 4.1 и 4.2 схемы построены его бозонные и фермионные симметрии, их алгебра, а также предложена $N = (0|2)$ суперполевая формулировка $N = (0|2)$ 2DTL иерархии и в качестве иллюстрации явно представлено новое $N = (0|2)$ суперсимметричное обобщение уравнения Давье–Стевартсона

$$\begin{aligned} D_4^+ F_j &= -\partial_+^2 F_j + 2D_+\Big((\overline{D}_+ F_j)\partial_-^{-1}\partial_+(F_j\overline{F}_j)\Big), \\ D_4^+ \overline{F}_j &= +\partial_+^2 \overline{F}_j + 2\overline{D}_+\Big((D_+\overline{F}_j)\partial_-^{-1}\partial_+(F_j\overline{F}_j)\Big), \end{aligned} \qquad (13)$$

являющееся вторым бозонным потоком этой иерархии.

Раздел 4.4 посвящен обобщению: там предложен широкий класс новых суперсимметричных интегрируемых иерархий, первый представитель которых — $N = (0|2)$ 2DTL иерархия.

В разделе 4.5 рассмотрена одномерная редукция $N = (0|2)$ 2DTL иерархии — N=2 1DTL иерархия, и найдены ее би-гамильтонова структура и рекурсионный оператор.

Раздел 4.6 посвящен построению общих решений для N=(2|2) и N=(0|2) 2DTL уравнений в случае одного или двух фиксированных концов.

Содержанием пятой главы является изучение квазиклассического (непрерывного) предела $N = (1|1)$ 2DTL иерархии.

В разделе 5.1 предложена новая обобщенная градуированная скобочная операция

$$\left[\mathbb{O}_1, \mathbb{O}_2\right\} := \mathbb{O}_1 \mathbb{O}_2 - (-1)^{d_{\mathbb{O}_1} d_{\mathbb{O}_2}} \, {\mathbb{O}_2}^{*(d_{\mathbb{O}_1})} \, {\mathbb{O}_1}^{*(d_{\mathbb{O}_2})}, \tag{14}$$

обобщающая градуированный коммутатор для супералгебр на пространстве операторов $\mathbb{O}_k$ с градуировкой $d_{\mathbb{O}_k}$ ($d_{\mathbb{O}_k} \in \mathbb{Z}$, $d_{\mathbb{O}_1 \mathbb{O}_2} = d_{\mathbb{O}_1} + d_{\mathbb{O}_2}$) и инволюцией $*$ ($\mathbb{O}_k^{*(2)} = \mathbb{O}_k$)[1] и обладающая следующими свойствами:

Симметрия

$$\left[\mathbb{O}_1, \mathbb{O}_2\right\} = (-1)^{d_{\mathbb{O}_1} d_{\mathbb{O}_2} + 1} \left[{\mathbb{O}_2}^{*(d_{\mathbb{O}_1})}, {\mathbb{O}_1}^{*(d_{\mathbb{O}_2})}\right\}, \tag{15}$$

Дифференцирование

$$\left[\mathbb{O}_1, \mathbb{O}_2 \mathbb{O}_3\right\} = \left[\mathbb{O}_1, \mathbb{O}_2\right\} \mathbb{O}_3 + (-1)^{d_{\mathbb{O}_1} d_{\mathbb{O}_2}} \mathbb{O}_2^{*(d_{\mathbb{O}_1})} \left[{\mathbb{O}_1}^{*(d_{\mathbb{O}_2})}, \mathbb{O}_3\right\}, \tag{16}$$

Тождества Якоби

$$\begin{aligned} & (-1)^{d_{\mathbb{O}_1} d_{\mathbb{O}_3}} \left[\left[{\mathbb{O}_1}^{*(d_{\mathbb{O}_3})}, \mathbb{O}_2\right\}, {\mathbb{O}_3}^{*(d_{\mathbb{O}_1})}\right\} \\ + \;& (-1)^{d_{\mathbb{O}_2} d_{\mathbb{O}_1}} \left[\left[{\mathbb{O}_2}^{*(d_{\mathbb{O}_1})}, \mathbb{O}_3\right\}, {\mathbb{O}_1}^{*(d_{\mathbb{O}_2})}\right\} \\ + \;& (-1)^{d_{\mathbb{O}_3} d_{\mathbb{O}_2}} \left[\left[{\mathbb{O}_3}^{*(d_{\mathbb{O}_2})}, \mathbb{O}_1\right\}, {\mathbb{O}_2}^{*(d_{\mathbb{O}_3})}\right\} = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Затем представление Лакса $N = (1|1)$ 2DTL иерархии, а также все основные определяющие его соотношения представлены в терминах этой обобщенной градуированной скобки

$$\begin{aligned} & D_n^{\pm} L^{\alpha} = \mp\alpha(-1)^n \left[(((L^{\pm})_*^n)_{-\alpha})^*, L^{\alpha}\right\}, \quad \alpha = +,-, \quad n \in \mathbb{N}, \\ & L^+ = \sum_{k=0}^{\infty} u_{k,j} e^{(1-k)\partial}, \quad L^- = \sum_{k=0}^{\infty} v_{k,j} e^{(k-1)\partial}, \quad u_{0,j} = 1, \\ & (L^{\alpha})_*^{2n} := \Big(\frac{1}{2} \left[(L^{\alpha})^*, (L^{\alpha})\right\} \Big)^n, \quad (L^{\alpha})_*^{2m+1} := L^{\alpha} \, (L^{\alpha})_*^{2n}. \end{aligned} \tag{18}$$

В разделе 5.2 определен квазиклассический предел $N = (1|1)$ 2DTL иерархии

$$\begin{aligned} & \hbar \to 0, \quad s = \lim\nolimits_{\hbar \to 0,\ j >> 1} (\hbar j), \\ & D_{2n+1}^{\pm} \to \sqrt{\hbar} D_{2n+1}^{\pm}, \quad D_{2n}^{\pm} \to \hbar D_{2n}^{\pm} \end{aligned} \tag{19}$$

---

[1] ${\mathbb{O}_k}^{*(m)}$ обозначает m–кратное действие инволюции на оператор $\mathbb{O}_k$.

и соответствующее асимптотическое поведение фермионных и бозонных полей, параметризующих операторы Лакса

$$\begin{aligned} u_{2k,j} & \to u_{2k}(\hbar j), & v_{2k,j} & \to v_{2k}(\hbar j), \\ u_{2k+1,j} & \to \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \, u_{2k+1}(\hbar j), & v_{2k+1,j} & \to \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \, v_{2k+1}(\hbar j), \end{aligned} \tag{20}$$

где $\hbar$ - длина шага решетки, играющая роль постоянной Планка, а s выступает в роли непрерывной "решеточной" координаты. Затем с помощью этих данных найдены асимптотическое поведение всех композитных операторов, входящих в представление Лакса, и следующие из него полевые эволюционные уравнения, являющиеся, по определению, потоками бездисперсионной $N = (1|1)$ 2DTL иерархии. Далее найдены суперскобки Пуассона

$$\begin{aligned} \left\{\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2\right\} &= 2p \left(\frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial p} \, \frac{\partial \mathbb{F}_2}{\partial s} - \frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial s} \, \frac{\partial \mathbb{F}_2}{\partial p} + \frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial \pi} \, \frac{\partial \mathbb{F}_2}{\partial \pi}\right) \\ &+ \pi \left(\frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial \pi} \, \frac{\partial \mathbb{F}_2}{\partial s} - \frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial s} \, \frac{\partial \mathbb{F}_2}{\partial \pi}\right) \end{aligned} \tag{21}$$

на фазовом суперпространстве $\{\pi, \ p, \ s\}$, представляющем собой фазовое пространство бездисперсионной 2DTL иерархии $\{p, \ s\}$, расширенное одной грассмановой координатой π, и символы $\mathcal{L}^{\pm}$

$$\mathcal{L}^+ = \sum_{k=0}^{\infty} (u_{2k+1} + u_{2k}\pi) p^{-k}, \quad \mathcal{L}^- = \sum_{k=0}^{\infty} (v_{2k-1} + v_{2k}\pi) p^{k-1} \tag{22}$$

операторов Лакса. И, наконец, заменяя операторы Лакса на их символы $L^{\pm} \ \to \ \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \ \mathcal{L}^{\pm}$ а обобщенную градуированную скобку (14) на суперскобку Пуассона (21) в представлении Лакса (18) для $N = (1|1)$ 2DTL иерархии по правилу $\Big[\ .\ ,\ .\ \Big\} \to \hbar \, \Big\{\ .\ ,\ .\ \Big\}$, осуществляя затем подстановку и переход к пределу (19), получено представление Лакса для бездисперсионной $N = (1|1)$ 2DTL иерархии

$$\begin{aligned} & D_n^{\pm} \mathcal{L}^{\alpha} = \mp\alpha(-1)^n \left\{(((\mathcal{L}^{\pm})_*^n)_{-\alpha})^*, \mathcal{L}^{\alpha}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha = +,-, \\ & (\mathcal{L}^{\alpha})_*^{2m} := \Big(\frac{1}{2} \left\{(\mathcal{L}^{\alpha})^*, \mathcal{L}^{\alpha}\right\} \Big)^m, \quad (\mathcal{L}^{\alpha})_*^{2m+1} := \mathcal{L}^{\alpha} \, (\mathcal{L}^{\alpha})_*^{2m}. \end{aligned} \tag{23}$$

В шестой главе предложена комплексифицированная $N = 4$ суперсимметричная матричная иерархия КП и описан широкий класс ее редукций, характеризующихся конечным числом полей. Этот класс включает одномерную редукцию двумерной $N = (2|2)$ суперсимметричной решеточной иерархии Тоды, обладающей вещественной $N = 4$ суперсимметрией — $N = 4$ иерархию Тоды.

В разделе 6.1 развиты псевдодифференциальные методы для описания интегрируемых систем с $N = 4$ суперсимметрией. Так, в рамках подхода одевания с одевающим оператором W

$$W \equiv 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(w_n^{(0)} + w_n^{(+)} D_+ + w_n^{(-)} D_- + w_n^{(1)} D_+ D_-\right) \partial^{-n}, \qquad (24)$$

исходя из комплексифицированной суперсимметричной иерархии КП в $N = 2$ суперпространстве, продемонстрировано, что она, в действительности, обладает $N = 4$ суперсимметрией. Затем, исходя из представления нулевой кривизны для уравнения $N = (2|2)$ суперконформной решетки Тоды, получен оператор Лакса

$$L = D_- + v D_+^{-1} u, \qquad (25)$$

генерирующий бозонные потоки суперсимметричной иерархии Тоды.

В разделе 6.2, используя этот оператор Лакса для редукции исходной КП иерархии налагаемым на одевающий оператор условием

$$W D_- W^{-1} = D_- + v D_+^{-1} u, \qquad (26)$$

построены непротиворечивые редукции для всех потоков $N = 4$ суперсимметричной иерархии КП, сохраняющие алгебраическую структуру последней, а также ее различные вещественные формы, и показано, что редуцированная иерархия — $N = 4$ иерархия Тоды — обладает $N = 4$ суперсимметрией. Затем установлена ее связь с $N = 4$ суперсимметричной иерархией КдФ, обсуждена ее вторичная редукция в $N = 2$ $\alpha = -2$ суперсимметричную иерархию КдФ и предложен широкий класс ее матричных $N = 4$ обобщений.

В разделе 6.3 для бозонных потоков этой иерархии построено представление Лакса в $N = 4$ суперпространстве с оператором Лакса

$$\widetilde{L}_1^T \equiv -\mathcal{D}_- - \overline{\mathcal{D}}^- + [(\mathcal{D}_- + \overline{\mathcal{D}}^-)\xi] - (\mathcal{D}_+ + \overline{\mathcal{D}}^+)^{-1} [\overline{\mathcal{D}}^+ \overline{\mathcal{D}}^- \xi], \qquad (27)$$

где ξ – ограниченное вещественное линейное $N = 4$ суперполе ($\mathcal{D}_+ \overline{\mathcal{D}}^- \xi = \mathcal{D}_- \overline{\mathcal{D}}^+ \xi = 0$), найдено несколько суперполевых базисов с локальными

потоками, вещественные формы в действительном $N = 2$ и $N = 4$ суперпространствах (одна из них обладает вещественной N=4 суперсимметрией), локальные и нелокальные гамильтонианы, конечные и бесконечные дискретные симметрии, первые две гамильтоновы структуры

$$\{\xi(Z_1), \xi(Z_2)\}_k = J_k^\xi(Z_1)\delta^{N=4}(Z_1 - Z_2), \quad J_1^\xi = (\overline{\Pi} - \Pi),$$
$$J_2^\xi = (\overline{\Pi} + \Pi)\partial + (\Pi + \overline{\Pi})\xi\,'(\Pi - \overline{\Pi}) - 2\Pi\xi\overline{\Pi}\partial + 2\overline{\Pi}\xi\Pi\partial, \qquad (28)$$

рекурсионный оператор

$$R^\xi = (\overline{\Pi} - \Pi)\partial - (\Pi + \overline{\Pi})\xi\,'(\Pi + \overline{\Pi}) - 2\Pi\xi\overline{\Pi}\partial - 2\overline{\Pi}\xi\Pi\partial, \qquad (29)$$

связывающий все эволюционные уравнения и гамильтоновы структуры $N = 4$ иерархии Тоды, а также вложение суперполя ξ в $N = 4$ $O(4)$ суперток σ, $\xi = (\Pi - \overline{\Pi})\sigma$, где операторы Π и $\overline{\Pi}$ — $N = 4$ киральные проекторы.

В заключении представлена сводка основных результатов, полученных в диссертации.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. S. Krivonos and A. Sorin, "Linearizing W-algebras", Phys. Lett. **B335** (1994) 45.

2. S. Krivonos and A. Sorin, "Linearizing W-algebras", In "Quantum groups. Formalism and applications" (Eds. J.Lukierski, Z.Popowicz and J.Sobczyk), Polish Scientific Publishes PWN, (1994) 619.

3. S. Bellucci, S. Krivonos and A. Sorin, "Linearizing $W_{2,4}$ and WB_2 algebras", Phys. Lett. **B347** (1995) 260.

4. S. Krivonos and A. Sorin, "Linearization of nonlinear W-algebras", In Proceedings of the International Workshop "Finite dimensional integrable systems", July 18-21, 1994, JINR, Dubna, (Eds. A.N. Sissakian and G.S. Pogosyan), E2-95-525, (1995) 127.

5. S. Krivonos and A. Sorin, "More on the linearization of W-algebras", Int. Journ. Mod. Phys. **A11** (1996) 5739.

6. S.Bellucci, S. Krivonos and A. Sorin, "Null Fields realizations of W_3 from $W(sl(4)$ and $W(sl(3|1)$ algebras",Phys.Lett. **B366** (1996) 104.

7. S. Krivonos and A. Sorin, "Conformal linearization versus nonlinearity of W-algebras", In "Geometry and Integrable Models" (eds. P.N.Pyatov, S.N.Solodukhin), World Scientific Publ. Co., 1996, 121.

8. L. Bonora, S. Krivonos and A. Sorin, "Towards the construction of $N = 2$ supersymmetric integrable hierarchies", Nucl. Phys. **B477** (1996) 835.

9. A.N. Leznov and A.S. Sorin, "Two-dimensional superintegrable mappings and integrable hierarchies in the $(2|2)$ superspace", Phys. Lett. **B389** (1996) 494.

10. A.N. Leznov and A.S. Sorin, "Integrable mappings and hierarchies in the $(2|2)$ superspace", Nucl.Phys. (Proc.Suppl.) **B56** (1997) 258.

11. S. Bellucci, S. Krivonos and A. Sorin, "The $W(sl(N+3), sl(3))$ algebras and their contractions to W_3", Phys.Lett. **B392**(1997) 350.

12. C. Ahn, E. Ivanov and A. Sorin, "$N = 2$ affine superalgebras and hamiltonian reduction in $N = 2$ superspace", Commun. Math. Phys. **183** (1997) 205.

13. A. Sorin, "The discrete symmetry of the $N = 2$ supersymmetric modified NLS hierarchy", Phys. Lett. **B395** (1997) 218.

14. A.N. Leznov and A. Sorin, "The solution of the $N = 2$ supersymmetric f-Toda chain with fixed ends", Phys.Lett. **B402** (1997) 87.

15. L. Bonora and A. Sorin, "The Hamiltonian structure of the $N = 2$ supersymmetric GNLS hierarchy", Phys. Lett. **B407** (1997) 131.

16. A.S. Sorin, "Discrete symmetries of the $N = 2$ supersymmetric generalized nonlinear Schrödinger hierarchies", Yad.Fiz. **61**(1998) 1879.

17. V.B. Derjagin, A.N. Leznov and A.S. Sorin, "$N = 2$ superintegrable f-Toda mapping and super-NLS hierarchy in the $(1|2)$ superspace", Yad. Fiz. **61** (1998) 2097.

18. L. Bonora, S. Krivonos and A. Sorin, "The $N = 2$ supersymmetric matrix GNLS hierarchies", Lett. Math. Phys. **45** (1998) 63.

19. L. Bonora, S. Krivonos and A. Sorin, "Coset approach to the $N = 2$ supersymmetric matrix GNLS hierarchies", Phys. Lett. **A240** (1998) 201.

20. L. Bonora and A. Sorin, "The $N = 2$ supersymmetric Toda lattice hierarchy", Nucl. Phys. **B521** (1998) 444.

21. V.B. Derjagin, A.N. Leznov and A. Sorin, "The solution of the $N = (0|2)$ supeconformal f-Toda lattice", Nucl. Phys. **B527** (1998) 643.

22. S. Krivonos and A. Sorin, "Extended $N = 2$ supersymmetric matrix $(1, s)$-KdV hierarchies", Phys. Lett. **A251** (1999) 109.

23. S. Krivonos and A. Sorin, "Third family of $N = 2$ supersymmetric KdV hierarchies", in *Supersymmetries and quantum symmetries* (Eds. J. Wess and E.A. Ivanov), Lecture Notes in Physics 524 (1999) 261, Springer.

24. O. Lechtenfeld and A. Sorin, "Fermionic flows and tau function of the $N = (1|1)$ supeconformal Toda lattice hierarchy", Nucl. Phys. **B557** (1999) 535.

25. F. Delduc, L. Gallot and A. Sorin, "$N = 2$ local and $N = 4$ nonlocal reductions of supersymmetric KP hierarchy in $N = 2$ superspace", Nucl. Phys. **B558** (1999) 545.

26. O.Lechtenfeld and A.Sorin, "Supersymmetric KP hierarchy in $N = 1$ superspace and its $N = 2$ reductions", Nucl.Phys. **B566** (2000) 489.

27. F. Delduc and A. Sorin, "A note on real forms of the complex $N = 4$ supersymmetric Toda chain hierarchy in real $N = 2$ and $N = 4$ superspaces", Nucl. Phys. **B577** (2000) 461.

28. F. Delduc and A. Sorin, "Real forms of the $N = 4$ supersymmetric Toda chain hierarchy", In "New symmetries and integrable models" (Eds. A. Frydryszak, J. Lukierski and Z. Popowicz), World Scientific, Singapore/New Jersey/London/Hong Kong, (2000) 182.

29. O. Lechtenfeld and A. Sorin, "Real forms of the complex twisted N=2 supersymmetric Toda chain hierarchy in real N=1 and twisted $N = 2$ superspaces", J. Nonlinear Math. Phys. **7** (2000) 433.

30. O. Lechtenfeld and A. Sorin, "Hidden $N = (2|2)$ supersymmetry of the $N = (1|1)$ supersymmetric Toda lattice hierarchy", J. Nonlinear Math. Phys. **8** (2001) 183.

31. V.G. Kadyshevsky and A.S. Sorin, "Supersymmetric Toda lattice hierarchies", In "Integrable Hierarchies and Modern Physical Theories" (Eds. H. Aratyn and A.S. Sorin), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht/Boston/London, (2001) 289.

32. A.S. Sorin and P.H.M. Kersten, "The N=2 supersymmetric unconstrained matrix GNLS hierarchies", Lett.Math.Phys. **60** (2002) 135.

33. P.H.M. Kersten and A.S. Sorin, "Bi-Hamiltonian structure of the $N = 2$ supersymmetric $\alpha = 1$ KdV hierarchy", Phys. Lett. **A300** (2002) 397.

34. A.S. Sorin and P.H.M. Kersten, "Deformation and recursion for the $N = 2$ $\alpha = 1$ supersymmetric KdV-hierarchy", nlin.SI/0203041.

35. A.S. Sorin, "N=4 Toda chain (KdV) hierarchy in N=4 superspace", Yad. Phys. **65** (2002) 1113.

36. F. Delduc and A.S. Sorin, "Lax pair formulation of the $N = 4$ Toda chain (KdV) hierarchy in N=4 superspace", Nucl. Phys. **B631** (2002) 403.

37. В.Г. Кадышевский и А.С. Сорин, "$N = (1|1)$ суперсимметричная бездисперсионная решеточная иерархия Тоды", ТМФ **132** (2002) 222.

38. V.G. Kadyshevsky and A.S. Sorin, "Continuum limit of the $N = (1|1)$ supersymmetric Toda lattice hierarchy", JHEP Proceedings, PrHEP unesp2002, Workshop on Integrable Theories, Solitons and Duality, 1-6 July 2002, Sao Paulo, Brazil.

39. F. Delduc and A.S. Sorin, "Recursion operators of the $N = 2$ supersymmetric unconstrained matrix GNLS hierarchies", JHEP Proceedings, PrHEP unesp2002, Workshop on Integrable Theories, Solitons and Duality, 1-6 July 2002, Sao Paulo, Brazil; nlin.SI/0206037.

40. L. Bonora and A.S. Sorin, "Integrable structures in string field theory", Phys. Lett. **B553** (2003) 317.

Получено 16 января 2003 г.