ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

2 - 10799

КАТЫШЕВ
Юрий Вениаминович

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ СОЛИТОНОВ

Специальность 01.04.02 -
теоретическая и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Дубна 1977

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
старший научный сотрудник В.Г.Маханьков.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук
старший научный сотрудник В.К.Федянин,

доктор физико-математических наук
доцент В.И.Рыжий.

Ведущее научно-исследовательское учреждение:
Институт теоретической физики АН УССР, Киев.

Защита диссертации состоится "___" ____________ 1977 года в _____ часов на заседании специализированного Ученого совета К-56 Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований (г.Дубна, Московской области).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Автореферат разослан "___" ____________ 1977 года.

Ученый секретарь Совета
кандидат физико-математических наук В.И.Журавлев

Существует довольно большой класс нелинейных эволюционных уравнений, допускающих решения в виде так называемых уединенных волн, или солитонов.

Все многообразие физических явлений, сводящихся к нелинейным волновым уравнениям, обладающим солитонными решениями, можно разделить на две большие группы. Они различаются между собой как по постановке задач, так и по интерпретации получающихся результатов, хотя на классическом уровне они непосредственно смыкаются.

К первой группе относятся задачи исследования нелинейных волновых явлений в реальных сплошных средах (гидродинамика, твердое тело, физика плазмы и т.д.), ко второй группе - теоретико-полевые задачи, физика частиц .

Оба эти направления смыкаются на промежуточном этапе - этапе исследований локализованных решений конечной энергии классических нелинейных волновых уравнений.

Настоящая диссертация посвящена некоторым актуальным вопросам теории классических солитонов, при этом основное внимание уделено исследованию их устойчивости в псевдоевклидовом пространстве, имеющей решающее значение для построения теоретико-полевых моделей протяженных частиц.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, двух приложений и раздела "Выводы".

В первой главе диссертации приведен литературный обзор по теории солитонов – области на стыке теоретической физики и математики, которая бурно развивается в последнее десятилетие. Здесь достаточно кратко перечисляются те физические проблемы, изучение которых сводится к уравнениям, допускающим солитонные решения, а также основные свойства солитонов. Дается необходимое условие существования псевдостационарных солитонных решений уравнения Шредингера с насыщающейся нелинейностью.

Наконец, приводится краткий обзор литературы по многополевым солитонам.

Во второй главе мы рассматриваем вопросы существования солитонных решений в теоретико-полевых моделях, описываемых уравнением

$$\frac{1}{r^{\mathcal{D}-1}}\frac{d}{dr}\left(r^{\mathcal{D}-1}\frac{d\varphi}{dr}\right)-\varkappa^2\varphi+g^2\varphi^{p-1}-a\varphi^{q-1}=0. \quad (I)$$

Используя масштабное преобразование $r\to\lambda r$ в лагранжиане

$$L=-\frac{1}{2}\int\left[(\varphi_r)^2+\varkappa^2\varphi-\frac{2g^2}{p}\varphi^p-\frac{2a}{q}\varphi^q\right]r^{\mathcal{D}-1}dr$$

и вариационный принцип, получим

$$(2-\mathcal{D})T-\mathcal{D}(U_2-U_p+U_q)=0,$$

где

$$T=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(\varphi_r)^2r^{\mathcal{D}-1}dr, \quad U_2=\frac{\varkappa^2}{2}\int_0^{+\infty}\varphi^2r^{\mathcal{D}-1}dr,$$

$$U_p=\frac{g^2}{p}\int_0^{+\infty}\varphi^pr^{\mathcal{D}-1}dr, \quad U_q=\frac{a}{q}\int_0^{+\infty}\varphi^qr^{\mathcal{D}-1}dr.$$

Домножая (I) на $r^{\mathcal{D}-1}\varphi$ и интегрируя по r от нуля до бесконечности, имеем

$$2(T+U_2)-pU_p+qU_q=0.$$

Из этих уравнений можно получить необходимые условия существования солитонных решений для различных значений констант $\mathcal{D}$, $\varkappa^2$, g^2 и a. Так, в случае инстантонного уравнения ($\varkappa^2=a=0$) имеем

$$p=2\mathcal{D}/(\mathcal{D}-2)\equiv p_b. \quad (2)$$

Область под кривой (2) – область существования решений для массовых полей $\varkappa^2\neq 0$. В области над кривой (2) решений при $a=0$, т.е. для скалярных ренормируемых теорий, не существует. Для ренормируемых теорий калибровочных полей с более высокой чем $U(I)$ симметрией $a\neq 0$ и доступна область

$$p>p_b.$$

Общие необходимые условия существования солитонных решений уравнения (I) имеют вид:

$$\left(1-p\frac{\mathcal{D}-2}{2\mathcal{D}}\right)U_p>\left(1-q\frac{\mathcal{D}-2}{2\mathcal{D}}\right)U_q, \quad (3)$$

$$(p-2)U_p>(q-2)U_q,$$

где

$$U_p = \frac{g^2}{p}\int_0^{+\infty}\varphi^p r^{D-1}dr \quad , \quad U_q = \frac{a}{q}\int_0^{+\infty}\varphi^q r^{D-1}dr \; .$$

Аналогичные формулы могут быть получены для векторных полей вида

$$A_\mu = a\,\frac{x_\mu}{|x|} \quad ,$$

когда вместо оператора Лапласа Δ в уравнение (I) входит оператор $\hat{D} = \Delta - \frac{D-1}{r^2}$.

Наконец, из самого метода получения условий (3) вытекает, что чем больше членов в полиноме, тем легче выполняются эти условия.

Третья глава посвящена подробному аналитическому исследованию поперечной устойчивости плоских солитонов для некоторых наиболее известных нелинейных уравнений - двумерного уравнения КдВ, нелинейных уравнений Шредингера, Клейна-Гордона, Гинзбурга-Ландау-Хиггса, двухполевых моделей Фридберга-Ли-Сирлина и Раджарамана-Вайнберга-Монтонена.

Исследование проводится с помощью варьирования отинтегрированного по продольной координате лагранжиана вблизи известного плоского солитонного решения.

Для двумерного уравнения КдВ

$$u_{tx} + \frac{1}{2}(u^2)_{xx} + u_{xxxx} + \frac{\alpha}{2}u_{yy} = -\frac{3}{2}\alpha\, u_{yyxx} \; , \quad (4)$$

где $\alpha = +1$ (отрицательная дисперсия) или $\alpha = -1$ (положительная дисперсия), нами получено следующее дисперсионное уравнение, описывающее поперечную, а также продольную устойчивость солитонного решения (4) (для устойчивости необходимо $\omega^2 \geqslant 0$)

$$\omega^2 = \alpha k_y^2\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{5}A_0^2\right)\left[8A_0^2 + \frac{\alpha k_y^2}{9A_0^2}\left(1 - 24A_0^2\right)\right] . \quad (5)$$

Из (5) следует, что неустойчивость Кадомцева-Петвиашвили носит пороговый характер, как, впрочем, и неустойчивость Шпачека, Щуклы и Ю, для которой, кроме того, нами найден численный коэффициент.

Для устойчивости солитонных решений уравнения $S3$

$$i\varphi_t + \Delta\varphi + |\varphi|^2\varphi = 0$$

получено дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = -4A_0^2 k_y^2\left(1 - \frac{\pi^2+12}{36}\,\frac{k_y^2}{A_0^2}\right) ,$$

где A_0 - амплитуда солитона. Эта неустойчивость напоминает случай уравнения (4).

Солитонные решения уравнения КГЗ для действительного поля φ

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + m^2\varphi - g^2\varphi^3 = 0$$

неустойчивы даже при $k_y = 0$ (продольная неустойчивость):

$$\omega^2 = k_y^2 - 2{,}93\,m^2 \; .$$

Аналогично исследована устойчивость солитонов для уравнений

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + m^2\varphi - g^2|\varphi|^2\varphi = 0 , \qquad (6')$$

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} - m^2\varphi + g^2\varphi^3 = 0 , \qquad (6)$$

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} - m^2\varphi + g^2|\varphi|^2\varphi = 0 . \qquad (7)$$

Для поперечной устойчивости солитона огибающей для комплексного уравнения КГЗ (6') нами получено следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 = k_y^2 + \frac{9}{11}\left(\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + (1-A_0^2)\,k_y^2\,\frac{22}{9}}\right),$$

где

$$\Delta = 1 - 2A_0^2 .$$

Поскольку условие существования солитонного решения есть $0 < A_0^2 < 1$, целесообразно рассмотреть три возможности: (I) $A_0^2 > \frac{1}{2}$, (II) $A_0^2 = \frac{1}{2}$, (III) $A_0^2 < \frac{1}{2}$.

В первом случае ($A_0^2 > \frac{1}{2}$) имеем неустойчивость при

$$k_y^2 < (k_y)^2_{thr} \equiv \left(A_0^2 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\beta} ,$$

где

$$\beta = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1-\xi\,\mathrm{th}\,\xi}{\mathrm{ch}\,\xi}\right)^2 d\xi = \frac{\pi^2+12}{36} \approx \frac{11}{18} .$$

Для $A_0^2 = 1/2$ имеем

$$\omega^2 = k_y^2 \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}}\,k_y A_0 .$$

При $k_y^2 < A_0^2/\beta$ это уравнение имеет "неустойчивый" корень $\mathrm{Im}\,\omega > 0$, пропорциональный $\sqrt{k_y}$ для малых k_y.

Наконец, в случае $A_0^2 < \frac{1}{2}$ находим, что "неустойчивый" корень появляется, если $k_y^2 < A_0^2/\beta$, однако теперь $\mathrm{Im}\,\omega \sim k_y$ при малых k_y.

Солитонные решения типа "кинков" уравнений Гинзбурга-Ландау-Хиггса (6),(7) проявляют удивительную склонность оставаться устойчивыми даже в случае комплексного поля (7), когда они фактически представляют собой вращающуюся смесь солитонного и антисолитонного состояний.

Нами также показано, что плоские солитоны релятивистски инвариантных двухполевых систем (χ – действительное поле, ψ –заряженное)

$$\Box\chi + 2\varkappa^2\chi|\psi|^2 + \frac{1}{2}\chi(\chi^2-1) = 0 ,$$

$$\Box\psi + 2\varkappa^2\psi\chi^2 - \frac{\varkappa^2}{2}\psi = 0$$

и

$$\Box\chi + (|\psi|^2-1)\chi + \chi^3 = 0 ,$$

$$\Box\psi + m^2\psi + (\chi^2-1)\psi + \psi|\psi|^2 = 0$$

являются поперечно устойчивыми, по крайней мере, по отношению к довольно общему виду возмущений. По-видимому, присутствие в обеих системах "кинкового" поля Хиггса

$$\chi_{Higgs} = \mathrm{th}(\mu x)$$

в качестве одного из взаимодействующих полей и является основным удерживающим и стаблизирующим фактором. Отсюда понятно, почему многочисленные исследователи используют именно это поле при построении различных моделей протяженных частиц (в дополнение к эффекту Голдстоуна).

Проведенное в настоящей диссертации исследование позволяет качественно судить об устойчивости квазиплоских (двухмасштабных) сферически (цилиндрически) симметричных солитонов по отношению к возмущениям меньшей, чем у солитона, симметрии, например азимутальным.

В четвертой главе рассмотрены некоторые вопросы устойчивости неодномерных (в частности, сферически симметричных) солитонов в рамках релятивистски инвариантных уравнений (РИУ).

Из теоремы Хобарта-Деррика известно, что в случае числа пространственных измерений $D>1$ устойчивых стационарных частицеподобных решений РИУ не существует как для одного скалярного поля, так и для системы взаимодействующих скалярных полей. Такие решения оказываются неустойчивыми по отношению к масштабным колебаниям.

Поэтому выход надо искать на пути нарушения условий применимости указанной теоремы. Ясно видны две возможности. Одна состоит в построении так называемых топологических солитонов, для которых помимо законов сохранения, связанных с симметрией лагранжиана, существует дополнительный закон сохранения, определяемый топологией солитонного решения.

Вторая возможность заключается в использовании свойства калибровочных полей, связанного с их внутренней симметрией и вытекающим из нее законом сохранения изотопического заряда.

Первое направление интенсивно развивалось в работах Л.Д.Фаддеева и его группы, А.М.Полякова и многих других исследователей.

Второе направление началось довольно давно (работы Л.Г.Заставенко и других) и развивается до настоящено времени, в том числе по пути усложнения моделей (работы Т.Д.Ли и др.).

Задача об исследовании устойчивости неодномерных Q-солитонных решений для скалярного комплексного поля сводится к задаче отыскания условного минимума функционала энергии E при постоянном заряде

$$Q = -i\int\left(\varphi_t^*\varphi - \varphi^*\varphi_t\right)d\vec{x} .$$

В.Г.Маханьковым была доказана теорема, согласно которой для нелинейных взаимодействий довольно общего вида устойчивость Q-солитонов РИУ

$$\varphi_s = \psi(x)\exp\{-i\omega t\}$$

имеет место лишь при $dQ/d\omega < 0$.

В диссертации приводятся аргументы в пользу существования устойчивых сферически симметричных Q-солитонов в классической ($\varphi^4 - \alpha\varphi^6$) - теории поля с лагранжианом

$$L = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left[(\varphi_r)^2 + \varkappa^2\varphi^2 - \frac{1}{2}\varphi^4 + \frac{\alpha}{3}\varphi^6\right]r^2 dr$$

и даются примеры таких солитонов.

В приложении I приведено полученное нами одно из возможных при $\alpha \ll 1$ солитонных решений уравнения В.К.Федянина

$$i\varphi_t = \varphi - \alpha\varphi_x^* - \varphi_{xx} - \varphi|\varphi|^2 ,$$

описывающего экситонные возбуждения в одномерных молекулярных кристаллах:

$$\varphi = \exp\left\{-i\left[\omega t - \frac{v}{2}x + \frac{\alpha}{2}\frac{A}{1+\frac{v^2}{4}}\, th Ax \sin 2\left(1+\frac{v^2}{4}\right)t\right]\right\}\cdot$$

$$\cdot \frac{\sqrt{2}\,A}{ch\left\{A\left[x - vt + \frac{\alpha}{2\left(1+\frac{v^2}{4}\right)}\cos 2\left(1+\frac{v^2}{4}\right)t\right]\right\}},$$

где v - скорость солитона, A - его амплитуда, $\omega = 1 - A^2 + \frac{v^2}{4}$.

В приложении 2 приводятся найденные автором диссертации точные солитонные решения трех типов для предложенной В.Г.Маханьковым двухполевой (η -действительное поле, φ -заряженное) релятивистски инвариантной системы

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \varphi - \varphi\eta = 0\,,$$

$$\eta_{tt} - \eta_{xx} - \nu\eta - g\eta^2 = |\varphi|^2$$

и вычисляются формфакторы этих солитонных решений.

Одно из указанных решений, получающееся для случая

$$2(1-3g) > \nu > 0\,, \quad g < \frac{1}{3}\,,$$

имеет вид

$$\varphi = \frac{3\sqrt{g-1}}{1-3g}\,\nu\, th\left[\sqrt{\frac{\nu}{2(1-3g)}}\,\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}\right] ch^{-1}\left[\sqrt{\frac{\nu}{2(1-3g)}}\,\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}\right] e^{i\omega(vx-t)},$$

$$\eta = \frac{3\nu}{1-3g}\, ch^{-2}\left[\sqrt{\frac{\nu}{2(1-3g)}}\,\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}\right].$$

Формфакторы этих решений равны

$$F_\varphi = \frac{3i\sqrt{g-1}\,(q-p+\omega v)\,(1-v^2)}{ch\left[\frac{\pi(q-p+\omega v)\sqrt{(1-3g)(1-v^2)}}{\sqrt{\nu}}\right]},$$

$$F_\eta = \frac{3\,(q-p)\,(1-v^2)}{sh\left[\frac{\pi(q-p)\sqrt{(1-3g)(1-v^2)}}{\sqrt{\nu}}\right]}.$$

В заключение кратко перечислим основные полученные впервые результаты диссертации, выносимые на защиту. Они состоят в следующем:

I. Аналитически исследованы поперечная и продольная устойчивости плоских солитонных решений ряда нелинейных волновых уравнений (КГЗ, ГЛХ, $S3$, двухполевые системы и др.) по отношению к довольно общему виду возмущений.

2. Найдены необходимые условия существования D -мерных сферически симметричных частицеподобных решений нелинейного уравнения общего вида

$$\frac{1}{r^{D-1}}\frac{d}{dr}\left(r^{D-1}\frac{d}{dr}\varphi\right) - \varkappa^2\varphi + g^2\varphi^{p-1} - a\varphi^{q-1} = 0\,,$$

к которому сводится большой круг задач теории поля.

3. Показана возможность существования устойчивых Q - солитонов в классической ($\varphi^4 - \alpha\varphi^6$) - теории поля и приведены примеры таких солитонов.

4. Получено (для случая $\alpha \ll 1$) солитонное решение уравнения

$$i\varphi_t = \varphi - \alpha\varphi_x^* - \varphi_{xx} - \varphi|\varphi|^2,$$

описывающего экситонные возбуждения в одномерных молекулярных кристаллах.

5. Найдены точные солитонные решения трех типов для одной двухполевой релятивистски инвариантной системы и вычислены формфакторы этих решений.

Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в теории поля при построении различных моделей протяженных частиц, а также в тех областях теоретической и математической физики, где исследуются солитонные явления.

Основные результаты, изложенные в диссертации, докладывались на семинарах отдела вычислительной математики ЛВТА и сектора № 8 Лаборатории теоретической физики ОИЯИ, на Конференции молодых ученых по физике атомного ядра, элементарных частиц и конденсированного состояния (Гатчина, апрель 1977 г.), на XVIII Международной конференции по физике высоких энергий (Тбилиси, июль 1976 г.) и опубликованы в следующих работах:

1. Yu.V.Katyshev, V.G. Makhankov, Phys. Lett. 57A, 10 (1976); ОИЯИ, Р4-9507, Дубна, 1976.
2. V.G.Makhankov, Yu.V. Katyshev. JINR, E5-9058, Dubna, 1975.
3. И.Л.Боголюбский, Е.П.Жидков, Ю.В.Катышев, В.Г.Маханьков, А.А.Расторгуев. ОИЯИ, Р2-9673, Дубна, 1976.
4. Ю.В.Катышев. ОИЯИ, Р2-10285, 1976.
5. В.Г.Маханьков, Ю.В.Катышев. ОИЯИ, Р2-10547, Дубна, 1977.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 июня 1977 года.