ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

УДК 517.957

17-89-379

БАРАШЕНКОВ
Игорь Владиленович

НЕТРИВИАЛЬНАЯ ДИНАМИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ СОЛИТОНОВ В МОДЕЛЯХ ТЕОРИИ ПОЛЯ И ФИЗИКИ КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

Специальность: 01.04.02 - теоретическая
и математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Дубна, 1989

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
старший научный сотрудник — Б.С.ГЕТМАНОВ

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук
старший научный сотрудник — А.Т.ФИЛИППОВ

доктор физико-математических наук
старший научный сотрудник — М.А.ОЛЬШАНЕЦКИЙ

Ведущее научно-исследовательское учреждение:
Физико-технический институт низких температур АН УССР, Харьков.

Автореферат разослан "2" октября 1989 г.

Защита диссертации состоится "1" ноября 1989 г. на заседании специализированного Совета К047.01.01 Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований, г.Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета
кандидат физико-математических наук — А.Е.ДОРОХОВ

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Одним из важнейших междисциплинарных представлений, на которых основывается современное развитие нелинейной математической физики, является концепция уединенных волн, или солитонов. С одной стороны, достижения последнего времени в области теоретической физики указывают на то, что солитоны и различные их аналоги играют первостепенную роль в нелинейной оптике, физике плазмы, гидродинамике, физике конденсированных сред, теории элементарных частиц, космологии и т.д. С другой стороны, продвижение в области нелинейных эволюционных уравнений привело к выводу, что, хотя для возникновения этих весьма частных решений требуются, казалось бы, достаточно специальные начальные условия, именно солитоны определяют временную асимптотику решения. Если солитоны устойчивы, то произвольное начальное условие распадается при $t \to \infty$ в набор солитонов и быстрозатухающий бессолитонный фон; в неустойчивом же случае солитоны обычно оказываются зародышами коллапса, т.е. определяют формирование особенностей.

В современной релятивистской теории поля большое значение придается изучению интегрируемых моделей. К настоящему времени обнаружено значительное число систем такого рода, и встала настоятельная необходимость их классификации. Массивные модели (как скалярные, так и спинорные) удается классифицировать в рамках схемы единого описания интегрируемых массивных релятивистских систем. Представляется весьма актуальным теперь сформулировать единый подход к построению решений для этих систем, и в первую очередь – солитонных.

По мере развития нелинейной физики, т.е. по мере перехода к рассмотрению все более сильных нелинейных эффектов, появляется потребность в изучении систем, все более удаленных от интегрируемости. Это выражается, в частности, в необходимости удержания следующих членов в разложении нелинейности, учета конкурирующих взаимодействий. Естественно ожидать, что вклад существенно нелинейных, самолокализованных структур в случае сильных эффектов должен становиться определяющим, и поэтому, с точки зрения приложений в физике конденсированного состояния, нелинейной оптике, физике плазмы и т.д., анализ солитоноподобных решений эволюционных уравнений с нелинейностью конкурирующего типа представляет собой важную проблему.

Цель работы – исследование солитонных решений для класса моделей релятивистской теории поля и физики конденсированного состояния, включая построение общей процедуры вычисления многосолитонных решений для схемы единого описания интегрируемых массивных релятивистских систем и изучение нелинейных структур в системах с конкурирующими взаимодействиями.

Научная новизна и практическая ценность

Обнаружен ряд новых релятивистски-инвариантных интегрируемых систем. Построена адекватная "процедура одевания" для схемы единого описания двумерных интегрируемых моделей массивной релятивистской теории поля, позволяющая получать многосолитонные решения на произвольном фоне (в единообразной замкнутой детерминантной форме) для всех систем, погружающихся в эту схему. С ее помощью N-солитонные решения на нулевом и постоянном однородном фоне получены для систем, содержащихся в $sl(2,\mathbb{C})$ и $sl(3,\mathbb{C})$ версиях схемы. Для всех скалярных уравнений в $sl(2)$ и $sl(3)$ версиях обнаружено существование несобственных преобразований Бэклунда, переводящих друг в друга решения с различными типами граничных условий.

Показана возможность существования устойчивых частицеподобных решений в моделях с некомпактной группой внутренней симметрии. Обнаружено нетривиальное взаимодействие солитонов в модели O(I,I) sine – Gordon, что является первым примером нетривиальной динамики в интегрируемой системе, ассоциированной с алгеброй ранга < 2.

В рамках обширного класса моделей с конкурирующими взаимодействиями обнаружены (многомерные) нелинейные структуры нового типа – солитоноподобные пузыри. Показано, что (статические) пузыри являются существенно неустойчивыми объектами, причем этот факт не зависит ни от конкретного вида нелинейности, ни даже от размерности пространства. В случае низких размерностей обнаружено существование критической скорости, выше которой движущиеся пузырьки становятся стабильными; получена физическая интерпретация этого эффекта. Получен общий критерий устойчивости "темных солитонов" (кинков и пузырьков), и с его помощью обоснована точная формула для критической скорости.

Обнаруженные в диссертации интегрируемые системы обладают примечательным сходством с рядом известных моделей теории поля и физики конденсированного состояния и, следовательно, сами могут иметь приложения в этих областях. Многосолитонные формулы, построенные для класса релятивистски-инвариантных уравнений (как с хорошо известными, так и с потенциальными приложениями), могут применяться для описания нелинейных явлений в моделируемых ими физических системах. Результаты по исследованию локализованных структур в системах с конкурирующими взаимодействиями могут быть использованы при моделировании сильнонелинейных эффектов как в физике конденсированных сред (в теории бозе-газа, сверхтекучести и сверхпроводимости, в физике магнитоупорядоченных и молекулярных кристаллов), так и за ее пределами – в нелинейной оптике, плазме, биофизике, химической кинетике и т.д.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 9 работ.

Апробация диссертации. Результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на семинарах ЛТФ и ЛВТА ОИЯИ, ЛОМИ и ЛИАП (Ленинград), ИТФ АН УССР (Киев), ФТИНТ АН УССР (Харьков), ИФВЭ (Протвино), мехмата МГУ, на Общемосковском семинаре по теории солитонов и интегрируемых систем, на IX Семинаре по физике высоких энергий и теории поля (Протвино, 1986 г.), Семинаре – совещании "Нелинейные волны" (Светлогорск, 1984 г.), Международной рабочей группе по нелинейным и турбулентным процессам в физике (Киев, 1983 и 1987 гг.), рабочих совещаниях по теории солитонов (Юрмала, 1986 г., Пущино, 1987 г., Дубна 1988 г.), Всесоюзной конференции "Математическое моделирование: нелинейные проблемы и вычислительная математика" (Звенигород, 1988 г.).

Объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и библиографического списка литературы, содержащего 110 наименований. Каждая глава снабжена аннотацией. Общий объем диссертации 133 страницы машинописного текста.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обсуждается актуальность проблем, затронутых в диссертации, кратко излагается содержание работы и полученные результаты.

Глава I посвящена построению многосолитонных решений в схеме единого описания интегрируемых массивных моделей релятивистской теории поля (сформулированной Гетмановым), а также несобственных преобразований Бэклунда. В § I дается изложение схемы единого описания в невырожденном $sl(2,\mathbb{C})$ случае, т.е. когда ассоциированная линейная задача формулируется с помощью бесшпуровых 2×2 матриц с ненулевой диагональю. Условием совместности для такой линейной задачи является система 4 полей с лагранжианом

$$\mathcal{L} = iq_2\partial_- q_1 + iq_4\partial_+ q_3 + q_1q_4 + q_2q_3 + q_1q_2q_3q_4 + \text{к.с.}, \qquad (I)$$

где $\partial_\pm \equiv \partial/\partial z_\pm$, а z_+ и z_- – комплексные координаты. Задавая соответствующим образом трансформационные свойства полей $q_1,\dots,q_4$ относительно преобразований Лоренца (или ортогональных преобразований в евклидовом случае), можно интерпретировать (I) либо как систему двух спинорных, либо (сводя ее к системе второго порядка) двух скалярных полей. В первом случае редукциями (I) являются массивная модель Тирринга (ММТ):

$$\mathcal{L} = iu_\xi \bar{u} + iv_\eta \bar{v} + u\bar{v} + \bar{u}v + \mathcal{L}_{int}, \tag{2}$$

$$\mathcal{L}_{int} = |uv|^2, \tag{3}$$

вторая массивная спинорная модель, с лагранжианом взаимодействия

$$\mathcal{L}_{int} = -(u^2-\bar{u}^2)(v^2-\bar{v}^2), \tag{4}$$

и их евклидовы аналоги. (В (2)-(4) u и v обозначают верхнюю и нижнюю компоненту спинора соответственно; η и ξ - конусные переменные). В скалярном случае система (I) допускает редукцию к комплексному sine-Gordon, называемому нами также O(2) sine-Gordon :

$$\mathcal{L} = \frac{|\partial_\mu \varphi|^2}{1 \pm |\varphi|^2} - |\varphi|^2 , \tag{5}$$

к новой модели, называемой нами O(1,1) sine-Gordon:

$$\mathcal{L} = \frac{|\partial_\mu \varphi|^2}{1 \pm |\varphi|^2} - |\varphi|^2 - \frac{1}{2}\frac{J_\mu^2}{|\varphi|^2(1\pm|\varphi|^2)} , \tag{6}$$

где $J_\mu = i(\bar{\varphi}\partial_\mu \varphi - \varphi \partial_\mu \bar{\varphi})$, и их евклидовым аналогам.

В § 2 построена "процедура одевания" для $sl(2,\mathbb{C})$-версии схемы единого описания, и с ее помощью вычислены N-солитонные решения (на произвольно заданном фоне, в явной детерминантной форме) для системы (I). В двух важнейших частных случаях - для нулевого и экспоненциального (в т.ч. постоянного однородного) фона - получены полностью замкнутые выражения (§3). В идейном плане наша процедура построения решений основывается на классическом подходе Захарова-Шабата-Михайлова, однако "одевание" в треугольной калибровке (лежащей в основе схемы единого описания) имеет существенные отличия от случаев, разобранных ранее. Центральной трудностью является невозможность использовать каноническую нормировку задачи Римана. Предлагаемый выход состоит в том, что на одевающую матрицу не накладывается никаких априорных условий нормировки; нормировка вычисляется согласованно с построением решений.

В последующих разделах из общего решения извлекаются решения для редукций: в § 4 - для ММТ (2)-(3), в § 5 - для второй массивной спинорной модели (2), (4) и уравнения O(1,1) sine-Gordon (6), в § 6 - для комплексного SG (5) и ММТ в евклидовой области, и наконец в § 7 - для комплексного SG в пространстве Минковского. Последняя редукция

весьма нетривиальна, поскольку не связана непосредственно с вещественными формами алгебры $sl(2,\mathbb{C})$. Для нахождения редукционных ограничений в этом случае приходится ввести вспомогательную ("виртуальную") калибровку, которая индуцирует довольно нестандартную инволюцию на многообразии $\{\psi(\lambda)\}$ фундаментальных решений линейной задачи:

$$(\psi^{-1}(\bar{\lambda}))^{\dagger} = G(\lambda)\psi(\lambda)H(\lambda), \tag{7}$$

$$G(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{1\pm|\varphi|^2}}\begin{pmatrix} \lambda & \varphi \\ \bar{\varphi} & \mp\lambda^{-1}\end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$H(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{1\pm|\varphi|^2}}\frac{|\Delta_1|}{|\Delta_2|}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mp\lambda^{-1}\end{pmatrix}. \tag{9}$$

Здесь φ - "одетое" решение комплексного SG(5); Δ_1 и Δ_2 - детерминанты матриц, определяемых параметрами одевания и затравочного решения; λ - спектральный параметр. После того как автоморфизм (7) построен, редукционные условия (почти при любом выборе фона) становятся вполне очевидными. Единственным исключением является случай постоянного однородного фона, когда матрица (8) вырождается. В этом случае трудность преодолевается с помощью перехода к пределу в более общей, невырожденной (экспоненциальной) ситуации.

В § 8 излагается $sl(3,\mathbb{C})$- версия схемы единого описания. Система общего положения включает здесь уже I2 полей, содержит в качестве частного случая модель (I), однако имеет и целый ряд простых редукций, не вкладывающихся в $sl(2,\mathbb{C})$-версию. Это третья массивная спинорная модель со взаимодействием

$$\mathcal{L}_{int} = (u+\bar{u})(v+\bar{v})(\bar{u}v+u\bar{v}), \tag{I0}$$

уравнение "комплексный sine-Gordon-II ":

$$\mathcal{L} = \frac{|\partial_\mu \varphi|^2}{1\pm|\varphi|^2} - |\varphi|^2(1\pm|\varphi|^2), \tag{II}$$

новая модель с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{|\partial_\mu \varphi|^2}{1\pm|\varphi|^2} - |\varphi|^2(1\pm|\varphi|^2) - \frac{1}{2}\frac{J_\mu^2}{|\varphi|^2(1\pm|\varphi|^2)} \tag{I2}$$

и т.д. В § 9 для $sl(3,\mathbb{C})$-случая развита процедура одевания, построены N-солитонные решения для системы общего положения и выделены решения для важнейших редукций. В системе общего положения динамика солитонов оказывается нетривиальной (т.е. имеются слияния и распады), что, впрочем, достаточно естественно для систем такого рода, ассоциированных с алгебрами ранга $\geqslant 2$.

В § 10 для всех скалярных систем, погружающихся в $sl(2,\mathbb{C})$ и $sl(3,\mathbb{C})$ - версии схемы единого описания, построены (несобственные) преобразования Бэклунда, связывающие уравнения с противоположными знаками массового члена и переводящие друг в друга решения с разными типами граничных условий. N-солитонное решение на нулевом фоне, например, переводится в нелинейную суперпозицию N кинков.

<u>В главе II</u> изучаются свойства частицеподобных решений в моделях с некомпактными группами внутренней симметрии. § 1 посвящен проблеме устойчивости таких решений. Показано, что тот факт, что энергия в моделях с индефинитным кинетическим членом не может иметь (даже условного локального) минимума, еще не запрещает существования устойчивых решений. В § 2 мы обращаемся к рассмотрению конкретной системы - уравнения O(1,1) sine-Gordon (6). Показано, что уже простейшее его решение, полученное одеванием постоянного ненулевого фона и соответствующее случаю, когда $\psi(\lambda)$ и $\psi^{-1}(\lambda)$ имеют по одному простому полюсу, описывает нетривиальное взаимодействие солитонов (распады и синтез). Таким образом, уравнение O(1,1) sine-Gordon представляет собой первый пример интегрируемой системы, ассоциированной с алгеброй ранга 1, которая обладает нетривиальной динамикой солитонов. Нетривиальность динамики обусловлена в данном случае некомпактностью группы; отметим для сравнения, что солитоны "компактного аналога" системы (6) - комплексного sine-Gordon (5) - взаимодействуют упруго. Аналогичный механизм нетривиального взаимодействия реализуется также в уравнении O(1,1) sine-Gordon-II (12). В § 2 обсуждаются также приложения полученных точных решений в кинематике тахионов.

<u>Глава III</u> посвящена новому типу коллективных возбуждений в нелинейных средах с конкурирующими взаимодействиями - солитоноподобным "пузырькам". Этот новый тип солитонов описан в § 1 на примере т.н. $\psi^3-\psi^5$ нелинейного уравнения Шредингера:

$$i\psi_t + \Delta\psi + \alpha_1\psi + \alpha_3|\psi|^2\psi - \alpha_5|\psi|^4\psi = 0, \qquad (13)$$

$\alpha_3, \alpha_5 > 0$, возникающего, в частности, в задаче о бозе-газе с δ-образными двухчастичным притяжением и трехчастичным отталкиванием. "Пузырьки" могут быть интерпретированы как локализованные области разряжения в конденсате постоянной плотности. В отличие от кинков и вихрей уравнения Гросса-Питаевского:

$$i\psi_t + \Delta\psi - (|\psi|^2 - \rho_0)\psi = 0, \qquad (14)$$

существующих в силу топологических причин и не имеющих трехмерных локализованных стационарных аналогов, "пузырьки" возникают благодаря конкуренции взаимодействий и существуют при любом D. При $D = 1$ солитоны-"пузырьки" уравнения (13) получены явно, при $D = 2$ и 3 - численно. Дополнительная информация извлекается из двух предельных случаев, когда (13) сводится либо к интегрируемому уравнению, либо к уравнению, основательно изученному ранее. В § 2 новый тип солитонов определяется в случае уравнения с нелинейностью общего вида,

$$i\psi_t + \Delta\psi + F(|\psi|^2)\psi = 0, \qquad (15)$$

и излагается схема анализа их устойчивости. Нестандартность возникающей линеаризованной системы

$$\begin{aligned} f_t &= \{-\Delta - F(\psi^2)\} g \equiv L_1 g \\ -g_t &= \{-\Delta - F(\psi^2) - 2\psi^2 F'(\psi^2)\} f \equiv L_2 f \end{aligned} \qquad (16)$$

обуславливается необычными свойствами оператора L_1 (непрерывный спектр касается нуля). В § 3 доказан центральный результат: покоящиеся солитоны-"пузырьки" неустойчивы - для произвольного выбора нелинейности и размерности пространства. § 4 посвящен (численному) нахождению соответствующих инкрементов распада и обоснованию их максимальности. В § 5 рассмотрен случай движущихся "пузырьков". Обнаружено существование критической скорости v_{cr}, такой, что при $v \geqslant v_{cr}$ "пузырьки" становятся стабильными объектами. Дается интерпретация этого эффекта в терминах бозе-газа. В § 6 получен общий критерий устойчивости одномерных "темных солитонов", т.е. кинков и "пузырьков". Именно, область устойчивости дается неравенством

$$P_v\,(P/v)_v > 0, \qquad (17)$$

где v - скорость солитона, а P - импульс:

$$P = \frac{i}{2}\int(\bar{\psi}_x\psi - \psi_x\bar{\psi})\,dx - (|\psi|^2 \arg\psi)\Big|_{-\infty}^{\infty}. \qquad (18)$$

С помощью (17) удается обосновать точную формулу для критической скорости, полученную ранее эмпирически. В § 7 сделан ряд заключительных замечаний и подведены итоги гл.III.

<u>В заключении</u> кратко перечислены основные результаты, полученные в диссертации.

В диссертации получены следующие основные результаты:

I. Обнаружены новые релятивистские интегрируемые системы: уравнение O(I,I) sine-Gordon (представимое также как комплексное sine-Gordon с самодействием типа "ток х ток") и его $sl(3)$ - аналог, уравнение O(I,I) sine-Gordon-II .

2. Построена адекватная "процедура одевания" для схемы единого описания двумерных интегрируемых моделей релятивистской теории поля, позволяющая получать многосолитонные решения на произвольном фоне (в единообразной замкнутой детерминантной форме) для всех известных массивных лоренц-инвариантных систем. С ее помощью N-солитонные решения на нулевом и постоянном однородном фоне получены для систем общего положения, ассоциированных с алгебрами $sl(2,\mathbb{C})$ и $sl(3,\mathbb{C})$, а также их редукций:

а) массивной модели Тирринга и ее обобщения,

б) комплексного уравнения sine-Gordon ,

в) второй массивной спинорной модели и уравнения O(I,I) sine-Gordon,

г) евклидовой версии комплексного sine-Gordon и евклидова аналога массивной модели Тирринга,

д) третьей массивной спинорной модели и уравнения O(I,I) sine-Gordon-II.

3. Построены (несобственные) преобразования Бэклунда, связывающие решения с различными типами граничных условий для скалярных уравнений: O(2) и O(I,I) sine-Gordon , комплексного sine-Gordon-II .

4. Исследован класс моделей с некомпактной группой внутренней симметрии. Показано, что несмотря на отсутствие у соответствующего функционала энергии (даже условного локального) минимума, такие системы могут обладать устойчивыми частицеподобными решениями. Обнаружено нетривиальное взаимодействие солитонов в модели O(I,I) sine-Gordon. Показано, что (по крайней мере на уровне этой модели) в рамках солитонного формализма удается обосновать основной постулат кинематики тахионов - принцип реинтерпретации.

5. В рамках класса моделей с конкурирующими взаимодействиями обнаружены (многомерные) нелинейные структуры нового типа - солитоноподобные пузыри. Показано, что статические пузыри являются существенно неустойчивыми объектами, причем этот факт не зависит ни от конкретного вида нелинейности, ни от размерности пространства. В случае низких размерностей обнаружено существование критической скорости, выше которой движущиеся пузырьки стабильны; получена физическая интерпретация этого эффекта. Получен общий критерий устойчивости "темных солитонов" (кинков и пузырей), и с его помощью обоснована точная формула для критической скорости.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Barashenkov I.V., Getmanov B.S. Multisoliton Solutions in the Scheme for Unified Description of Integrable Relativistic Massive Fields. Commun.Math.Phys. 1987, 112, p.423-446.
2. Barashenkov I.V., Gocheva A.D., Makhankov V.G., Puzynin I.V. Stability of the Soliton-like Bubbles. Physica D, 1989, 34, p.240-254.
3. Barashenkov I.V., Makhankov V.G. Soliton-loke bubbles in the System of interacting bosons. Phys.Lett., 1988, A128, p.52-56.
4. Barashenkov I.V., Getmanov B.S., Kovtun V.E. Integrable model with nontrivial interaction between sub- and superluminal solitons. Phys.Lett., 1988. A128, p.182-186.
5. Barashenkov I.V., Boyadjiev T.L., Puzynin I.V., Zhanlav T. Stability of moving bubbles in a system of interacting bosons. Phys. Lett., 1989,A135, p.125-128.
6. Барашенков И.В., Гетманов Б.С., Ковтун В.Е. Точно решаемая модель теории поля с тахионами. ЯФ, 1988, 48, с.886-889.
7. Barashenkov I.V., Getmanov B.S., Kovtun V.E. Creation of tachyons in soliton decays: an exact solution. In: Plasma theory and nonlinear and turbulent processes in Physics. Book of selected papers. World Scientific, Singapore, 1988.
8. Barashenkov I.V. Stability properties of solutions to nonlinear models possessing a sign-undefined metric. Acta Phys. Austr., 1983, 55, p.155-165.
9. Barashenkov I.V. Some remarks on the stability of kinks and bubbles. JINR, E17-89-81, Dubna, 1989.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 мая 1989 года.