ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1293

Д.А. Славнов

К ВОПРОСУ ОБ УСТРАНЕНИИ УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫХ РАСХОДИМОСТЕЙ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Автореферат диссертации, представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель -
академик
Н.Н. Боголюбов

Диссертация выполнена в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова

Дубна 1963

Д.А.Славнов

К ВОПРОСУ ОБ УСТРАНЕНИИ УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫХ РАСХОДИМОСТЕЙ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Автореферат диссертации, представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель -
академик
Н.Н. Боголюбов

Диссертация выполнена в Московском государственном университете им.М.В.Ломоносова

Дубна 1963

Данная работа посвящается вопросу исключения расходимостей из квантовой теории поля на основе использования теории обобщенных функций. Аппарат теории обобщенных функций успешно был в свое время применен для исключения расходимостей из матричных элементов S –матрицы Н.Н. Боголюбовым и О.С. Парасюком /1,2/. Им удалось показать, что, исходя из теории обобщенных функций и вводя так называемые контрчлены, можно непротиворечивым образом построить матричные элементы S –матрицы, не содержащие бесконечностей.

Контрчлены позволяют избавиться от расходимостей, но подчас очень затрудняют выкладки, которые приходится делать с регуляризованными матричными элементами S –матрицы, особенно, когда это касается достаточно высокого порядка теории возмущений. В связи с этим было бы крайне желательно построить метод регуляризации, в котором удалось бы избежать введения контрчленов.

Как известно, основным моментом при использовании аппарата обобщенных функций для целей регуляризации является определение произведения нескольких обобщенных функций в качестве интегрируемой обобщенной функции. В предлагаемой работе такое определение дается на основе так называемого "предельного представления" сверток операторов поля. Сущность этого представления состоит в следующем. Все свертки операторов поля /для простоты рассматриваются действительные скалярные поля/ записываются в виде слабого предела от некоторых непрерывных функций

$$D^{(?)}(x) = \lim_{\mu \to 0} \Delta^{(?)}(x;\mu), \qquad /1/$$

где /?/ означает один из трех значков: $(-)$, $(+)$, (c) . Непрерывные функции $\Delta^{(?)}(x;\mu)$ проще всего построить, исходя из регуляризации Паули-Вилларса /3/. Так для $\Delta^{(-)}(x;\mu)$ можно написать :

$$\Delta^{(-)}(x;\mu) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int dk\, e^{ikx}\, \theta(-k_0) \sum_i C_i(\mu)\, \delta(k^2 - m^2 \mathfrak{M}_i(\mu)) . \qquad /2/$$

Соответственно, $\Delta^{(c)}(x;\mu)$ будет тогда выглядеть следующим образом;

$$\Delta^{(c)}(x;\mu) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk\, e^{ikx} \sum_i \frac{C_i(\mu)}{m^2 \mathfrak{M}_i(\mu) - k^2 - i\epsilon} \,. \qquad /3/$$

Причем величины $C_i(\mu)$ и $\mathfrak{M}_i(\mu)$ должны удовлетворять следующим требованиям/*/: все $C_i(\mu)$ ограничены, все $\mathfrak{M}_i(\mu)$ при $\mu \to 0$ стремятся к бесконечности, кроме $\mathfrak{M}_0(\mu)$, которое стремится к единице. Чтобы $\Delta(x;\mu)$ были непрерывными, величины $C_i(\mu)$ и $\mathfrak{M}_i(\mu)$ должны также удовлетворять уравнениям

$$\sum_i C_i(\mu)\, \mathfrak{M}_i^a(\mu) = 0 \qquad a = 0; 1. \qquad /4/$$

Используя "предельное представление", легко дать определение произведения отрицательно- /положительно-/ частотных частей сверток операторов поля. Именно: можно определить $\prod_{i,j} D^{(+)(-)}(x_i - x_j)$ как слабый предел произведения соответствующих $\Delta^{(+)(-)}(x_i - x_j;\mu)$; т.е., если $g(x_1,\ldots,x_n)$ – достаточно гладкая и быстро убывающая на бесконечности основная функция, то

$$\int dx_1 \ldots dx_n\, g(x_1,\ldots,x_n) \prod_{i,j} D^{(?)}(x_i - x_j) =$$

$$= \lim_{(\mu_1,\ldots\mu_N)\to 0} \int dx_1 \ldots dx_n\, g(x_1,\ldots, x_n) \prod_{i,j} \Delta^{(?)}(x_i - x_j; \mu_{ij}) \,. \qquad /5/$$

Поскольку "предельное представление" по форме аналогично регуляризации Паули–Вилларса, то легко показать, что в том случае, когда /?/ означает один из двух значков $(-)$, $(+)$, /5/ определяет непрерывный линейный функционал. Для этого достаточно повторить соответствующие рассуждения для регуляризации Паули–Вилларса /4/. Формула /5/ легко распространяется на случай произведения хронологических сверток, если основная функция $g(x_1,\ldots, x_n)$ имеет нули достаточно высокого порядка при совпадении любой пары аргументов.

В диссертации предлагается расширить класс основных функций, на котором формула /5/ дает определение произведения хронологических сверток. Именно; предлагается считать, что /5/ справедлива для хронологических сверток при основных функциях, не обращающихся в нуль при совпадении аргументов. Ясно, что при вычислении пределов по μ в /5/ мы, вообще говоря, будем получать расходящиеся выражения. Однако, как выяснено в диссертации, при некоторых дополнительных условиях на C_i и $\mathfrak{M}_i$ эти пределы будут существовать.

Приведенный в главе III диссертации расчет нескольких матричных элементов S -матрицы в низших порядках теории возмущений показывает, что

на основе определения /5/ для этих матричных элементов может быть получено интегрируемое выражение, если C_i и $\mathfrak{M}_i$ подчиняются условиям типа

$$\lim_{\mu\to 0} \sum_i C_i(\mu)\, \mathfrak{M}_i^a(\mu) \ln^\beta \mathfrak{M}_i(\mu) = A_{\alpha\beta} \,, \qquad /6/$$

где $A_{\alpha\beta}$ ограничены, $a = 0, 1$; $\beta = 1, 2, 3,..$

Однако для целей квантовой теории поля возможность построения отдельных интегрируемых матричных элементов еще не достаточна, необходимо, чтобы эти матричные элементы образовывали совокупность, соответствующую унитарной и причинной S -матрице. Это накладывает дополнительное требование на предельный переход по μ. Оказывается, что для того, чтобы S -матрица была причинной и унитарной, знак $\lim\limits_{(\mu_1,\ldots,\mu_N)\to 0}$ в /5/ должен означать

$$\lim_{(\mu_1,\ldots\mu_N)\to 0} = P(\mu_1,\ldots,\mu_N) \lim_{\mu_1\to 0} \ldots \lim_{\mu_N\to 0} \,, \qquad /7/$$

где P – оператор полной симметризации. В главе III это проверено на примере отдельных простейших матричных элементов.

В четвертой главе показывается, что на основе /5/ может быть построен свободный от расходимостей матричный элемент любого порядка по константе связи. Так, для теории с лагранжианом взаимодействия

$$\mathfrak{L}(x) = e : \phi^4(x) :, \qquad /8/$$

где $\phi(x)$ – действительное скалярное поле, справедлива следующая теорема.

Теорема

Вычисление любого матричного элемента S -матрицы до n -го порядка теории возмущений, включительно, дает конечное значение для этого элемента, совпадающее со значением соответствующего матричного элемента, полученным в методе Боголюбова после проведения регуляризации /применения R - операции/, если выполнены следующие условия:

1. Все хронологические свертки полей имеют вид, даваемый "предельным представлением" /формулы /1/,/3//.

2. Произведения хронологических сверток полей определяются формулами /5/ и /7/.

3. Величины C_i и $\mathfrak{M}_i$ подчиняются условиям /*/ (см.стр.4) и /4/.

4. Выполняются соотношения

$$\lim_{\mu \to 0} \sum_i C_i(\mu) \ln^{a-1} \mathfrak{M}_i(\mu) = A_{0a-1} \qquad /9/$$

$$\lim_{\mu \to 0} \sum_i C_i(\mu) \mathfrak{M}_i(\mu) \ln^a \mathfrak{M}_i(\mu) = A_{1a} ,$$

где $a = 1, 2, \dots, n$.

Помимо доказательства этой теоремы /см. также статью[/5/]/, четвертая глава содержит доказательство непротиворечивости всех условий, накладываемых на C_i и $\mathfrak{M}_i$. Причем показывается, что в условиях /9/ возможен предельный переход $n \to \infty$.

Таким образом, на основе "предельного представления" может быть построена регуляризация, эквивалентная процедуре, разработанной Н.Н. Боголюбовым и О.С. Парасюком / R -операция/. В отличие от R - операции в предложенной регуляризации произведение сверток определено как слабый симметризованный предел от произведения аппроксимирующих непрерывных функций. Напомним, что в R - операции произведение хронологических сверток определено как слабый предел произведения соответствующих непрерывных функций, из которого вычтена некоторая комбинация контрчленов. Ввиду отсутствия контрчленов в способе регуляризации, основанном на "предельном представлении", выражение для регуляризованного матричного элемента S -матрицы выглядит значительно проще, чем в методе R -операции. С другой стороны, вычисление пределов по μ, необходимое в первом методе, сложнее, чем вычисление членов ряда Тейлора, необходимое в R -операции.

Предложенный метод регуляризации может быть распространен на теории с лагранжианом взаимодействия, отличным от /8/. Этот вопрос рассмотрен в пятой главе диссертации. При введении в теорию нескольких различных полей /не обязательно скалярных/, естественно, возникает необходимость ввести "предельное представление" для сверток всех фигурирующих полей. Эти представления строятся по аналогии с формулами /1/-/3/. Соответственно, для конечности матричных элементов оказывается необходимым накладывать условия типа /6/ на все C_i и $\mathfrak{M}_i$, фигурирующие в "предельных представлениях" сверток различных полей. Однако, поскольку эти условия для различных полей оказываются независимыми друг от друга, то никаких существенных усложнений это не вносит.

Такое положение будет сохраняться до тех пор, пока мы имеем дело с перенормируемыми теориями. При переходе к неперенормируемым теориям в

условиях /6/ приходится считать, что a не ограничено двумя значениями /0 и 1/, а пробегает ряд 0,1,3, ..., r. При росте порядка теории возмущений r неограниченно растет. Здесь мы сталкиваемся с обычной трудностью, характерной для неперенормируемых теорий. В нашем случае она выражается в том, что при $r \to \infty$ условия /6/ вряд ли окажутся совместными. С другой стороны, если ограничиваться конечным порядком теории возмущений, то r будет конечным, и условиям /6/ удовлетворить можно. Таким образом, для неперенормируемых теорий ситуация здесь такая же, как в регуляризации, предложенной недавно Тейлором[/6/]. Помимо изложенных только что вопросов, в главе V диссертации показывается, что формула /5/ определяет линейный непрерывный функционал, если ограничиваться только такими произведениями $D^{(c)}$, которые возникают при написании матричных элементов S -матрицы в перенормируемой теории.

Наконец, в шестой главе диссертации рассматриваются некоторые вопросы, связанные с обобщенным характером операторов поля и векторов состояний. Обращается внимание на следующий факт. Пусть $\phi(x)$ - оператор поля. Действуя на какой-нибудь вектор гильбертова пространства векторов состояний, например на вакуум $/\Omega>$, он переводит этот вектор в ненормируемый

$$\phi(x)/\Omega> = /\phi(x)> \qquad /10/$$

и, следовательно, гильбертову пространству не принадлежащий. В рамках гильбертова пространства оператор $\phi(x)$ /соответственно, векторы типа $/\phi(x)>/$ может быть определен лишь как "распределение" или, иными словами, обобщенный оператор /соответственно, обобщенное состояние/. При действии с этими величинами должен учитываться их обобщенный характер. В частности, нуждаются в дополнительном определении такие величины, как произведение нескольких операторов поля, производная от оператора поля или вектора состояния.

Чтобы учесть обобщенный характер векторов состояний и операторов поля, предлагается для этих величин также ввести "предельное представление" /см. на эту тему статью[/7/]/. Например, операторы поля представляются в виде

$$\phi(x) = \lim_{\mu \to 0} \phi(x;\mu) ,$$

где $\lim\limits_{\mu \to 0}$ опять имеет смысл слабого предела. Соответственно, произведение нескольких операторов поля определяется как слабый предел от соответствующего произведения $\phi(x;\mu)$. То же самое делается при определении производной. При этом с величинами $\phi(x;\mu)$ можно обращаться уже, как с собственными операторами гильбертова пространства.

На основе использования "предельного представления" для операторов поля и векторов состояний в главе УI получено уравнение Шредингера :

$$i \lim_{(\mu)\to 0} \frac{\partial}{\partial \tau} | \Phi_\tau (\mu) = \lim_{\mu \to 0} H(\tau ; \mu) | \Phi_\tau (\mu) > . \qquad /12/$$

Здесь $/\Phi_\tau (\mu) >$ – "предельное представление" вектора состояния системы в момент времени τ , а

$$H(\tau ; \mu) = - \int d\bar{x} \, \mathcal{L}(\tau, \bar{x} ; \mu) , \qquad /13/$$

где $\mathcal{L}(x ; \mu)$ – "предельное представление" лагранжиана взаимодействия. Особенностью уравнения /12/ является то, что в нем не фигурируют контрчлены. Это, во-первых, позволяет избежать "ультрафиолетовых" расходимостей в уравнении Шредингера при одновременном исключении таких расходимостей из матричных элементов S –матрицы, что не удается сделать другими способами. Во-вторых, отсутствие контрчленов приводит к тому, что в уравнении Шредингера не появляются так называемые "поверхностные" расходимости.

Эти два факта позволяют сделать вывод, что аппарат уравнения Шредингера в квантовой теории поля совместен с аппаратом S –матрицы. Т.е. может быть построена такая схема, в которой широко распространенное мнение о существовании своеобразного принципа дополнительности /либо S –матрица, либо уравнение Шредингера содержат бесконечности/ не справедливо.

Литература

1. Н.Н. Боголюбов, О.С. Парасюк. Известия АН СССР, математическая серия, 20 , 585, /1956/.
2. О.С. Парасюк. Украинский математический журнал. 12 , 237 /1960/.
3. W.Pauli, F.Villars. Rev. Mod. Phys. 21 , 434, /1949/. Перевод в сб. "Сдвиг уровней атомных электронов" . ИЛ, 139, /1950/.
4. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, 1957.
5. Д.А. Славнов. ЖЭТФ, 42, 1543, /1962/.
6. J.G.Taylor. Nuovo Cimento 17, 695 , /1960/.
7. Д.А. Славнов. ДАН СССР, 143 , 570 /1962/.