ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

С324
Х-955

О.А.Хрусталев

1279

ПОЛЮСА РЕДЖЕ И КВАЗИОПТИЧЕСКИЙ МЕТОД В ТЕОРИИ ПОЛЯ

Автореферат диссертации, представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель -
доктор физико-математических наук
А.А.Логунов

Дубна 1963 г.

О.А.Хрусталев

1279

С 324
Х-955

ПОЛЮСА РЕДЖЕ И КВАЗИОПТИЧЕСКИЙ МЕТОД В ТЕОРИИ ПОЛЯ

Автореферат диссертации, представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель –
доктор физико-математических наук
А.А.Логунов

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Дубна 1963 г.

В последнее время всеобщее внимание привлекает вопрос, в какой мере выводы Редже[1] о мероморфности парциальных амплитуд в ℓ -плоскости и связи резонансных состояний и асимптотики амплитуды процесса, установленные им для потенциального рассеяния нерелятивисткиx частиц, могут быть перенесены в квантовую теорию поля. Во введении к диссертации дается краткий обзор работ, посвященных изучению аналитических свойств амплитуд в ℓ -плоскости на основе представления Мандельстама и исследованию асимптотического поведения амплитуд рассеяния.

К сожалению, само представление Мандельстама является проблематичным, поэтому естественно начать изучение вопроса в рамках хорошо известной теории возмущений. В работах[2,3] исследовалось асимптотическое поведение амплитуды рассеяния методом ренормализационной группы, причем в духе идей Редже и Мандельстама для получения асимптотики амплитуды рассеяния по переменной s (квадрата полной энергии в сцм) использовались дифференциальные уравнения ренормгруппы по переменной t (квадрата передачи импульса). Полученная таким способом амплитуда рассеяния имеет реджеевское поведение

$$f(s,t) = \beta(t)\, s^{\alpha(t)}\,. \tag{1}$$

Более детальное изучение рассеяния релятивистских частиц[4] показало, что парциальная амплитуда рассеяния не мероморфна в ℓ -плоскости, поэтому извлечение информации об асимптотике амплитуды из ее аналитических свойств далеко не тривиально.

В первой главе диссертации вопрос о возможности представления амплитуды рассеяния в виде (1), аналитических свойст амплитуды в ℓ -плоскости, связанных состояниях и асимптотике амплитуды рассеяния изучается в наиболее известной области теории поля – квантовой электродинамике. Простейший пример факторизации амплитуды в виде (1) дает нам формула выделения инфракрасных особенностей[5]. Дополнительные соображения об аналитических свойствах не содержащей инфракрасных особенностей части амплитуды[6] позволяют в случае электрон-фотонного рассеяния найти уровень системы электрон-позитрон с радиальным квантовым числом нуль, а в предельном случае рассеяния частиц с неравными массами (масса одной из частиц стремится к бесконечности) получить значение уровней, совпадающее в низшем по e^2 приближении с формулой Зоммерфельда[7].

Далее в работе исследуется рассеяние скалярных частиц в кулоновском поле с учетом взаимодействия с квантованным электромагнитным полем. После выделения инфракрасных особенностей амплитуда рассеяния во втором порядке теории возмущений имеет вид

$$M_{r}^{(2)} = 4\pi a^2 \frac{E}{\sqrt{m^2 - E^2}}\, \frac{1}{t}\ln t - \frac{2\pi^2 a^2}{E}\, \frac{1}{\sqrt{-t}}\,. \tag{2}$$

Выделение инфракрасных особенностей позволило избавиться от неприятного с точки зрения ренормгруппы члена вида $\ln^2 \frac{t}{m^2}$, однако второй член в (2) также дает нереджеевское поведение амплитуды. Изучение соответствующих парциальных амплитуд показывает, что этот член дает разрез амплитуды в ℓ -плоскости. Это низший по теории возмущений вклад в разрез при учете только потенциального взаимодействия. Суммирование по ренормгруппе полюсных в ℓ -плоскости членов дает обычную для кулоновского взаимодействия траекторию Редже /8/. Ввиду наличия разрезов в ℓ -плоскости изучение асимптотики амплитуды рассеяния и отыскание связанных состояний системы частиц представляются теперь разными задачами. На примере рассеяния спинорной частицы в кулоновском поле /9/ видно, что для получения уровней связанных состояний надо делать разложение не столько по e^2, сколько по $e^2/\sqrt{W}$, где W -энергия связи: в области связанных состояний этот параметр уже не мал и суммирование именно таких членов дает правильный результат. Для выяснения приемов счета в случае амплитуды, содержащей спиновые структуры, был проделан расчет траектории Редже для случая электрон-позитронного рассеяния /9/ и рассеяния фермиона на бозоне /8/. Как и следует ожидать, применение метода ренормгруппы к инвариантным амплитудам не дает информации о связанных состояниях системы - все они имеют нереджеевское поведение. В случае электрон-позитронного рассеяния амплитуду в системе центра масс можно разбить на части, соответствующие переходам синглет-синглет и триплет-триплет. Применение ренормгруппы к синглетной амплитуде сразу же дает кулоновскую траекторию Редже, в триплетной амплитуде опять присутствуют нереджеевские члены. При рассмотрении амплитуды рассеяния фермиона на бозоне в сцм показано, что члены, дающие нереджеевское поведение амплитуды, при стремлении массы бозона к бесконечности переходят в члены, дающие разрез в ℓ -плоскости при потенциальном рассеянии спинорной частицы. Пользуясь этим "принципом соответствия", можно выделить члены, дающие при суммировании их по ренормгруппе кулоновскую траекторию Редже.

Расчеты первой главы есть, по существу, теоретический эксперимент: рассматриваются простейшие диаграммы теории возмущений и указываются способы выделения членов, дающих при суммировании по ренормализационной группе траекторию Редже, определяющую уровни системы. Основным критерием отбора нужных членов является "правильная асимптотика" по передаче импульса или возможная аналогия с потенциальным рассеянием, где точно известны разрезы парциальных амплитуд в ℓ -плоскости. Однако такая процедура во многих случаях может быть затруднительной. Хорошим примером этого является электромагнитное рассеяние скалярных частиц /8/. Второй порядок теории возмущений дают члены с "плохой асимптотикой" по t, а четвертый порядок целиком имеет "правильную асимптотику", но это выражение не является воспроизведением по ренормгруппе членов второго порядка с "правильной асимптотикой". Таким образом, мы должны

как-то разделить члены с "правильной асимптотикой". На помощь приходит соображение, что для определения уровней энергии нужно получить разложение амплитуды по степеням $e^2/\sqrt{W}$. При вычислении амплитуды по теории возмущений мы получаем выражения вида $e^n \Phi(s,t) f(s,t)$, где $f(s,t) \to \infty$ при приближении s к порогу реакции. Разбивая $\Phi(s,t)$ на сумму $\phi_1(s,t)+\phi_2(s,t)$, где первый член конечен, а второй обращается в нуль при стремлении s к пороговому значению, мы выделяем главные в смысле разложения по $e^2/\sqrt{W}$ члены. Применение такой процедуры позволяет в случае рассеяния скалярных частиц, как и во всех предыдущих, построить правильную траекторию Редже. Конечно, пока этот рецепт можно рассматривать лишь как эмпирическое правило.

Вторая часть диссертации посвящена изучению квазиоптического метода в теории поля /10/. Суть его состоит в том, что для описания системы из двух частиц в сцм используется уравнение типа Шредингера

$$(E^2 - m^2 - \vec{p}^{\,2})\psi(\vec{p}) = \int V(E,\vec{p},\vec{p}\,')\psi(\vec{p}\,')d^3p' \tag{3}$$

с обобщенным комплексным потенциалом, зависящим от энергии и импульсов частиц. Мнимая часть потенциала является характеристикой неупругих процессов и характеризует поглощение в системе. Обобщенный потенциал V является аналитической функцией переменной E^2 с разрезами вдоль действительной оси. Этот метод позволяет, с одной стороны, найти амплитуду рассеяния, а, с другой стороны, изучить структуру связанных состояний.

Если поставить задачу описания только амплитуды рассеяния, то можно рассматривать обобщенный потенциал, являющийся функцией лишь энергии и передачи импульса - локальный потенциал.

Важным моментом является возможность на основании инвариантности относительно 3-мерной группы вращений рассмотрения вместо полной амплитуды рассеяния четной и нечетной амплитуды /10/, которым при переходе к парциальным амплитудам соответствуют просто амплитуды с четными и нечетными ℓ. На основе дисперсионных соотношений можно показать, что эти амплитуды в некотором интервале энергий представимы в виде:

$$T(E,(\vec{p}\,'-\vec{p})^2) = \int_{\mu^2}^{\infty} \frac{r(E,t)}{t+(\vec{p}\,'-\vec{p})^2}\, dt. \tag{4}$$

Из уравнения (3) можно получить интегральные уравнения для четных и нечетных амплитуд, причем в той же области энергий, где справедливы формулы (4), четный и нечетный потенциалы допускают спектральное представление /11,12/

$$V(E,(\vec{p}\,'-\vec{p})^2) = \int_{\mu^2}^{\infty} \frac{U(E,\nu)}{\nu+(\vec{p}\,'-\vec{p})^2}\, d\nu. \tag{5}$$

Таким образом, задача исследования амплитуды рассеяния сводится к весьма близкой задаче, исследованной Редже, в нерелятивистской квантовой механике: найти аналитические свойства и асимптотику рассеяния на потенциале вида

$$V(r) = \int_{\mu^2}^{\infty} d\nu\, U(\nu)\, \frac{e^{-\nu r}}{r} . \tag{6}$$

Если учесть, что здесь мы имеем дело с линейным интегральным уравнением вместо получаемого при использовании представления Мандельстама нелинейного уравнения[11], то можно думать, что квазиоптический метод окажется весьма эффективным при изучении свойств амплитуды рассеяния.

Во второй главе диссертации выводится уравнение типа (3) для системы из двух различных скалярных частиц. Метод вывода уравнений и амплитуд рассеяния продемонстрирован на примере реакций в аннигилярном канале

$$\begin{aligned} a + \bar a &\to a + \bar a \\ a + \bar a &\to b + \bar b \\ b + \bar b &\to b + \bar b . \end{aligned} \tag{7}$$

Другие каналы учитываются введением комплексных потенциалов. Полученные уравнения дают возможность исследовать асимптотику рассеяния реакций

$$\begin{aligned} a + a &\to a + a \\ a + b &\to a + b \\ b + b &\to b + b \end{aligned} \tag{8}$$

в s – канале. Функции Грина для систем частиц в реакциях (7) удовлетворяют уравнениям

$$G_{ij} = G^0_{ij} + G^0_{in} K_{nm} G_{mj} , \tag{9}$$

где $G^0_{ij} = \delta_{ij} G^0_i$ – функции Грина свободных частиц, $i, j = a, b$.

Ядра K_{nm} вещественны, если учитывать только двухчастичные состояния систем ($a\bar a$) и ($b\bar b$), т.е. только каналы (7), и комплексны в общем случае. В духе работы[10] вводится двухвременная матричная функция Грина $\tilde{\tilde G}$, удовлетворяющая уравнению

$$\Sigma \tilde{\tilde G} = 1 , \tag{10}$$

где

$$\Sigma = \tilde{\tilde G}^{0^{-1}} - \tilde{\tilde G}^{0^{-1}} \widetilde{G^0 K G^0}\, \tilde{\tilde G}^{0^{-1}} + \dots \tag{11}$$

Уравнению (10) можно придать вид[13]

$$F(\vec p^{\,2}, E)\, \tilde{\tilde G}(\vec p, \vec p\,', E) - \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 q\, V(\vec p, \vec q, E)\, \tilde{\tilde G}(\vec q, \vec p\,', E) = \delta(\vec p - \vec p\,') \tag{12}$$

где

$$F_{ij}(\vec p^{\,2}, E) = \delta_{ij}(\vec p^{\,2} + m_i^2 - E^2)\sqrt{\vec p^{\,2} + m_i^2} , \tag{13}$$

а $V(\vec p, \vec p\,', E)$ – матрица потенциалов $v_{ij}(\vec p, \vec p\,', E)$.

Волновая функция системы

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_{a\bar a} \\ \psi_{b\bar b} \end{pmatrix} \tag{14}$$

удовлетворяет соответствующему однородному уравнению. Как и ранее[11], для
амплитуд рассеяния можно получить уравнения Липмана–Швингера с локальными
потенциалами. В рамках теории возмущений показывается, что в той области
энергий, где четные и нечетные амплитуды имеют представление вида (4),
матричные элементы матрицы четных и нечетных потенциалов записываются в
виде (5) и наоборот. Далее используются асимптотические свойства спектральных
плотностей амплитуд рассеяния $r_{ij}(s,t)$ при $t \to \infty$. В случае потенциалов
без вычитания система уравнений для четырех спектральных плотностей распада-
ется на две одинаковые однородные системы для спектральных плотностей
$r_{aa}(s,t), r_{ba}(s,t)$ и $r_{ab}(s,t), r_{bb}(s,t)$, которые имеют решение вида

$$\begin{aligned} r_{aa}(s,t) &= f^{(a)}_{aa}(s)\, t^{a} , \\ r_{ba}(s,t) &= f^{(a)}_{ba}(s)\, t^{a} . \end{aligned} \tag{15}$$

Аналогичный вид имеет вторая пара спектральных плотностей. Функции $f^{(a)}_{ij}(s)$,
в свою очередь, удовлетворяют паре одинаковых однородных систем, аналогичных
системам для r_{ij}. Из уравнений для волновой функции (14) выводятся урав-
нения для волновых функций, соответствующих состояниям с определенным угло-
вым моментом ℓ:

$$\Psi_{ij}(\vec p, \vec p\,') = f^{(\ell)}_{ij}(p^2)\, Y^m_\ell(\vec p \vec p\,') . \tag{16}$$

При этом оказывается, что уравнения для радиальных волновых функций $f^{(\ell)}_{ij}$
в точности совпадают с уравнениями для функций $f^{(a)}_{ij}(s)$ с заменой a на ℓ,
т.е. уравнения для определения $a(s)$ есть аналитическое продолжение по ℓ
уравнений, определяющих энергетический спектр системы. Если связанные состо-
яния существуют, то уравнения для амплитуд рассеяния имеют асимптотическое
решение вида (15). По четным и нечетным амплитудам рассеяния восстанавли-
вается полная амплитуда рассеяния. Поскольку система для определения функций
$f^{(a)}_{ij}(s)$ распадается на две одинаковые системы, то функции $f^{(a)}_{ij}(s)$
удовлетворяют соотношениям

$$f_{aa} = c f_{ab} , \quad f_{ba} = c f_{bb} , \tag{17}$$

где C – постоянная, т.е.

$$f_{aa} f_{bb} = f_{ab} f_{ba} . \qquad (18)$$

Это выражение дает соотношение между сечениями [14]: как дифференциальными сечениями упругого рассеяния, так и полными сечениями:

$$\sigma_{aa} \sigma_{bb} = \sigma^2_{ab} . \qquad (19)$$

В заключение второй главы обсуждается роль вычитательных членов в потенциалах, которые могут привести к нереджеевскому поведению амплитуд рассеяния и нарушить соотношение (19) между дифференциальными или даже полными сечениями рассеяния.

В третьей главе диссертации изучаются аналитические свойства парциальных амплитуд рассеяния тождественных частиц.

Как уже отмечалось, в нерелятивистской квантовой теории с потенциалом (6) удалось доказать при весьма общих предположениях относительно $U(\nu)$ представление Мандельстама для амплитуды рассеяния и с помощью преобразования Ватсона-Зоммерфельда найти асимптотику амплитуды рассеяния по косинусу угла рассеяния [1]. В квантовой теории поля информацию об асимптотике амплитуды рассеяния обычно извлекают из соотношений унитарности и представления Мандельстама. Представление Мандельстама используется при этом для доказательства аналитичности парциальной амплитуды рассеяния в некоторой части ℓ -плоскости. Для получения этого результата не обязательно, однако, пользоваться представлением Мандельстама. Может случиться так, что представления Мандельстама нет, но тем не менее в некоторой части ℓ -плоскости парциальная амплитуда аналитична и асимптотика амплитуды рассеяния по косинусу угла рассеяния определяется особенностями парциальной амплитуды по ℓ. В связи с этим целесообразно разобрать метод, позволяющий изучать аналитические свойства парциальной амплитуды и ее асимптотику непосредственно, без использования гипотезы о представлении Мандельстама. Для этой цели удобны интегральные уравнения для парциальных амплитуд, выводимые из уравнения (3). Ряды Фредгольма для этих уравнений сходятся на всей области комплексной переменной E^2 при $Re\ell>-½$ [15]. Таким образом, амплитуда, как функция ℓ и E^2, аналитична в топологическом произведении полуплоскости $Re\ell > -½$ и плоскости E^2 с известными разрезами вдоль действительной оси и другими возможными разрезами, обусловленными разрезами спектральной плотности потенциала (5). Применение метода Фредгольма позволяет легко найти асимптотику амплитуды по ℓ при физических E^2, заменить при физических E^2 ряд по парциальным амплитудам интегралом Зоммерфельда-Ватсона и доказать аналитичность амплитуды по передаче импульса при физических значениях энергии. При физических значениях передачи импульса при помощи процедуры аналитического продолжения, предложенной Редже [1], можно показать аналитичность полной амплитуды в комплексной плоскости с разрезами вдоль действительной оси. При отрицательных значениях $k^2 = E^2 - m^2$, которые интересны при изучении связанных состояний, полная амплитуда представляется в виде контурного интеграла в плоскости ℓ вдоль прямой $Re\ell = -½$. Склеивая два экземпляра плоскости k^2, можно определить парциальную амплитуду рассеяния в плоскости k, где она представляется в хорошо известном в нерелятивистской квантовой механике виде отношения функций Иоста.

В дополнении к диссертации в связи с использованной в первой главе формулой факторизации инфракрасных особенностей дается анализ проблемы инфракрасной расходимости.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [7-9, 13, 15, 16].

Литература

1. T.Regge. Nuovo Cimento, 14, 951 (1959); 18, 957 (1960); Theoretical Physics, Lectures at Triest, 1962.
2. B.A.Arbusov, A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze, R.N.Faustov. Phys. Letters 2, 150(1962).
3. B.A.Arbusov, A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze, R.N.Faustov, A.T.Filippov. Phys. Letters, 2, 305(1962)
4. B.A.Arbusov et al. Preprint E-1095, JINR, 1962; Phys. Letters / в печати /.
5. D.R.Yennie, S.C.Frantschi, H.Suura. Ann. of Phys., 13, 379 (1961).
6. Л.Д.Соловьев. ЖЭТФ (в печати), препринт Д-1108, ОИЯИ, 1962.
7. Л.Д.Соловьев, О.А.Хрусталев. ЖЭТФ, 44, 758 (1963).
8. A.A.Logunov, Nguyen van-Hieu, A.N.Tavkhelidze, O.A.Khrustalev. Preprint E-1194, JINR, 1963; Nuclear Phys. / в печати /.
9. A.A.Logunov, Nguyen van-Hieu, A.N.Tavkhelidze, O.A.Khrustalev. Preprint E-1122, JINR, 1962. Nuclear Phys. /в печати/.
10. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze. Preprint E-1145, JINR, 1962; Nuovo Cimento / в печати /.
11. А.А.Логунов, А.Н.Тавхелидзе, И.Т.Тодоров, О.А.Хрусталев. Препринт Д-1191, ОИЯИ, 1963: Nuovo Cimento / в печати /.
12. А.А.Логунов, А.Н.Тавхелидзе, О.А.Хрусталев. Препринт Р-1195, ОИЯИ, 1963 Phys. Letters / в печати /.
13. A.A.Logunov, Nguyen van-Hieu, O.A.Khrustalev. Preprint JINR, 1963; Nuovo Cimento /в печати/
14. В.Н.Грибов, И.Я.Померанчук. M.Gell-Mann, G.Domokos. Proc. Internat. Conf. on High Energy Phys. at CERN, 1962.
15. А.Б.Арбузов, А.А.Логунов, А.Т.Филиппов, О.А.Хрусталев. Препринт ОИЯИ, 1963
16. О.А.Хрусталев. Препринт Р-1126, ОИЯИ, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел 7 мая 1963 года.