ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

11-90-244

МАЗЕПА
Надежда Евгеньевна

УДК 517.929.7.4.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ПРИМЕНЕНИЕМ САВ

Специальность: 01.01.07 - вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Дубна 1990

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук С.И.Сердюкова

Официальные оппоненты:
профессор, доктор физико-математических наук В.Б.Андреев

кандидат физико-математических наук Е.Е.Тыртышников

Ведущее научно-исследовательское учреждение - Новосибирский ИТ и ПМ СО/АН СССР.

Автореферат разослан "____" ________________ 1990 г.

Защита состоится "____" ________________ 1990 г. в "____" часов

на заседании Ученого Совета Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ, г. Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета
кандидат физико-математических наук З.М.Иванченко

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Исследование устойчивости модельных разностных краевых задач (р.к.з.*) на ЭВМ с применением САВ является новым перспективным направлением в решении вопроса выбора устойчивых численных алгоритмов для сложных прикладных задач. Практическое применение известных теоретических результатов по исследованию устойчивости модельных р.к.з. осложняется трудностями решения возникающих при этом алгебраических задач. Кроме того, проверка критериев устойчивости связана с громоздкими аналитическими выкладками, практически невыполнимыми вручную. В связи с этим разработка методов применения систем аналитических выкладок (САВ) для исследования устойчивости разностных схем (р.с) на ЭВМ является актуальной задачей.

Цель работы состоит в создании и реализации на ЭВМ с помощью САВ алгебраического алгоритма вычисления спектров р.к.з. для гиперболических р.с. с постоянными коэффициентами и одной пространственной переменной.

Методика исследования. Исследование устойчивости р.к.з. проводится по методике H.-O.Kreiss'a*. В его работах доказано, что точки спектра z, $|z|\geq 1$ полубесконечных р.к.з. удовлетворяют детерминантному уравнению, которое можно вывести аналитически.

Научная новизна изложенных в работе результатов заключается в следующем. Предложен алгебраический алгоритм вычисления спектров, позволяющий для практически важного класса разностных краевых задач свести сложную задачу вычисления точек спектра z, $|z|\geq 1$ к нахождению корней многочленов от одной переменной. Алгоритм реализован на ЭВМ с применением САВ REDUCE (программа SPECTR). Программа SPECTR применена для исследования устойчивости ряда практически важных р.к.з.

* //Math Comput. - 1968.- Vol.22.- N 104.- P.703-714.

Достоверность содержащихся в диссертации результатов и выводов подтверждена теоретическим обоснованием различных этапов предлагаемого алгоритма, тестовыми расчетами по программе и сопоставлением с известными результатами других авторов.

Научная и практическая ценность. Предложенные в диссертации алгоритм и программа SPECTR, позволяют для практически важного класса р.к.з. свести сложную задачу вычисления точек спектра z, $|z|\geq 1$ к нахождению корней многочленов от одной переменной. Программа SPECTR применена для исследования устойчивости ряда практически важных задач. На основе использования программы предложен способ выбора устойчивых р.к.з из заданного параметрического семейства. Получаемые при этом коэффициенты результирующих многочленов являются громоздкими аналитическими выражениями от исследуемых параметров. Их вывод без применения САВ практически невозможен. Для проверки получаемых численных результатов предложены и реализованы на ЭВМ критерии, подтверждающие их достоверность. С помощью программы SPECTR исследовано явление неустойчивости, которое наблюдалось при численном моделировании динамики флюксонов. На рассмотренной при этом р.к.з. для трехслойной р.с. Русанова третьего порядка точности продемонстрированы дополнительные возможности алгоритма и программы SPECTR для вычисления спектров сложных модельных задач.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на Международном совещании по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике (Дубна, 1985 г.), на семинарах кафедры вычислительной математики механико-математического факультета МГУ, на семинаре по аналитическим вычислениям на ЭВМ (Москва, 1987г.), на семинаре Математического факультета в Вильнюсском Государственном Университете, на семинаре отдела вычислительной математики ЛВТА ОИЯИ и на лабораторных семинарах ЛВТА ОИЯИ.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-5].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из

введения, трех глав, заключения, списка литературы и четырех приложений. Объем содержательной части диссертации 91 страница, списка литературы - 14 страниц, приложений - 29 страниц. Работа содержит 4 таблицы и 1 рисунок.

II. СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы исследования. Дан краткий обзор работ по исследованию устойчивости р.к.з. рассматриваемого класса. Рассмотрены возникающие при этом трудности.

В главе I изложены некоторые необходимые теоретические результаты по исследованию устойчивости краевых задач для гиперболических систем линейных разностных уравнений. В §1 ставится алгебраическая задача вычисления точек спектра z, $|z|\geq 1$ полубесконечных р.к.з. Выводится детерминантное уравнение. Рассмотрен класс гиперболических систем разностных уравнений:

$$\begin{cases} v_{\nu}^{n+1} = \sum\limits_{l=-r}^{p} A_l v_{\nu+l}^{n}, \quad \nu = 1,2,\dots, N-1, & (1) \\ v_{\nu}^{0} = f_{\nu}, \quad 0 \leq t \leq T, & \\ v_{\mu}^{n} = \sum\limits_{j=1}^{s} B_{j,\mu} v_{j}^{n}, \quad \mu=0,-1,\dots,-r+1, & (2) \\ v_{N+\sigma}^{n} = \sum\limits_{j=1}^{s} C_{j,\sigma} v_{N-j}^{n}, \quad \sigma=0,1,\dots,p-1. & (3) \end{cases}$$

Здесь v_{ν}- векторы размерности k, A_j, $B_{j,\mu}$, $C_{j,\sigma}$- постоянные матрицы. В соответствии с результатами Годунова С.К. и Рябенького В.С. для устойчивости р.к.з. (1), (2), (3) необходимы устойчивость соответствующей задачи Коши, левой краевой задачи и правой краевой задачи. Предполагаем, что задача Коши устойчива, матрицы A_p и A_{-r}- невырожденные, система (1) гиперболическая, то есть все собственные значения характеристической матрицы относительно всех определяющих точек имеют наклонные характеристики. Далее рассматриваем левую краевую задачу. При исследовании ее устойчивости прежде всего надо убедиться, что нет точек спектра вне единичной окружности. Если спектр лежит строго внутри единичного круга

$|z|<1$, рассматриваемая левая разностная краевая задача устойчива. Если есть точки спектра вне единичной окружности, наблюдается сильная неустойчивость экспоненциального типа. В первом параграфе выводится детерминантное уравнение, которому удовлетворяют точки спектра z, $|z|\geq 1$ левых р.к.з. рассматриваемого класса:

$$\det R(\kappa_1,\dots,\kappa_{kr},z) = 0, \qquad (4)$$

R - матрица, зависящая от граничных условий. Для $|z|\geq 1$ решения характеристического уравнения (х.у.)

$$F(\kappa,z) = \det\left\| \sum_{l=-r}^{p} A_l \kappa^l - zI \right\| = 0 \qquad (5)$$

разбиваются на два непересекающихся множества $|\kappa_l(z)|\leq 1$, $l=\overline{1,kr}$ и $|\kappa_l(z)|\geq 1$, $l=\overline{1,kp}$. Пусть κ_l, $l=\overline{1,kr}$ различны между собой. Тогда для вычисления отвечающих им "простых точек спектра" z, $|z|\geq 1$ левой р.к.з. получаем систему":

$$\begin{cases} F(\kappa_1,z)=0 \\ \cdots\cdots \\ F(\kappa_{kr},z)=0 \\ \det R(\kappa_1,\dots,\kappa_{kr},z) = 0, \ |z|\geq 1. \end{cases} \qquad (6)$$

Во втором параграфе рассмотрен случай кратных решений характеристического уравнения. Выводится детерминантное уравнение, которому удовлетворяют "кратные точки спектра" z, $|z|\geq 1$ и уравнение для вычисления кратных решений характеристического уравнения.

Во второй главе предложен новый алгебраический алгоритм вычисления спектров р.к.з. и его программная реализация. В первом параграфе излагается сам алгоритм. Для практически важного класса р.к.з.:

$$\begin{cases} v_\nu^{n+1} = \sum_{l=-r}^{p} a_l v_{\nu+l}^n, \ \nu\geq 1, \\ v_\mu^n = \sum_{j=1}^{s} b_{j,\mu} v_j^n, \ \mu=0,-1,\dots,-r+1, \ r\leq 3, \ r+p\leq 5, \end{cases} \qquad (7)$$

v - скаляр, a_l, $b_{j,\mu}$ - const, алгоритм позволяет свести задачу вычисления точек спектра z, $|z|\geq 1$ к решению полиномиального уравнения от одной переменной. Для этого класса р.к.з. программа SPECTR автоматически вычисляет все точки спектра z, $|z|\geq 1$ рассматриваемой р.к.з. Применение алгоритма для вычисления спектров более сложных задач и

возможности использования при этом программы SPECTR рассмотрены в III-ей главе, §4. Алгебраическая задача вычисления точек спектра z, $|z|\geq 1$ рассматриваемого класса р.к.з. (7) сводится к решению системы (6) для $k=1$, $r\leq 3$. Основная идея алгоритма состоит в следующем. Вводим переменные

$$x = \sum_{l=1}^{r} \kappa_l, \quad y = \prod_{l=1}^{r} \kappa_l, \quad |\kappa_l|\leq 1, \quad r\leq 3. \qquad (8)$$

Используя свойства симметрических многочленов и соотношения Виета для х.у., сложные полиномиальные уравнения системы (6) удается преобразовать к более простым соотношениям в новых переменных. При этом решение системы (6) сводится к решению системы:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \\ \det R(x,y,z) = 0, \ |z|\geq 1. \end{cases} \qquad (9)$$

Для рассматриваемого класса р.к.з. ее решение сводится к нахождению корней многочленов от одной переменной x, y, или z. Получаемые многочлены называем результирующими. Например, задача вычисления спектра левой р.к.з., возникающая при исследовании устойчивости дополнительных граничных условий для явных р.с. максимального нечетного порядка точности $O(h^5)$ для уравнения $u_t + u_x = 0$, сводится к нахождению решений z, $|z|\geq 1$ системы:

$$\begin{cases} 3\kappa_1^5 - 25\kappa_1^4 + (150 - 256z)\kappa_1^3 + 150\kappa_1^2 - 25\kappa_1 + 3 = 0 \\ 3\kappa_2^5 - 25\kappa_2^4 + (150 - 256z)\kappa_2^3 + 150\kappa_2^2 - 25\kappa_2 + 3 = 0 \\ 3\kappa_3^5 - 25\kappa_3^4 + (150 - 256z)\kappa_3^3 + 150\kappa_3^2 - 25\kappa_3 + 3 = 0 \\ \det\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \phi_1(\kappa_1) & \phi_1(\kappa_2) & \phi_1(\kappa_3) \\ \phi_2(\kappa_1) & \phi_2(\kappa_2) & \phi_2(\kappa_3) \end{Vmatrix} = 0, \end{cases} \qquad (10)$$

$\phi_1(\kappa) = 63 + (315 - 256z)\kappa - 210\kappa^2 + 126\kappa^3 - 45\kappa^4 + 7\kappa^5$,

$\phi_2(\kappa) = -7 + 105\kappa + (210 - 256z)\kappa^2 - 70\kappa^3 + 21\kappa^4 - 3\kappa^5$.

С помощью алгоритма ее решение сводится к решению системы:

$$\begin{cases} -\dfrac{x}{y} + \left(\dfrac{25}{3} - x\right)\left[\dfrac{150-256z}{3} + \dfrac{1}{y} - x\left(\dfrac{25}{3} - x\right)\right] + y = -\dfrac{150}{3} \\ -\dfrac{1}{y}\left[\dfrac{150-256z}{3} + \dfrac{1}{y} - x\left(\dfrac{25}{3} - x\right)\right] + y\left(\dfrac{25}{3} - x\right) = -\dfrac{25}{3} \\ \det\begin{Vmatrix} \mathcal{F}_{11} & \mathcal{F}_{12} \\ \mathcal{F}_{21} & \mathcal{F}_{22} \end{Vmatrix} = 0, \end{cases} \qquad (11)$$

$$\mathcal{F}_{11} = -210 + 126x - 45(x^2 - u) + 7(x^3 - 2xu + y),$$
$$\mathcal{F}_{12} = -256z + 315 - 126u + 45(ux - y) - 7(x^2u - xy - u^2),$$
$$\mathcal{F}_{21} = -256z + 210 + 70x + 21(x^2 - u) - 3(x^3 - 2xu + y),$$
$$\mathcal{F}_{22} = 105 + 70u - 21(ux - y) + 3(x^2u - xy - u^2),$$
$$u = \frac{150 - 256z}{3} + \frac{3}{y} - x\left(\frac{25}{3} - x\right).$$

Программа сводит решение полученной системы (11) к решению полиномиального уравнения:

$$P_{39}(y) = 1632586752y^{13}P_{26}(y) = 0, \qquad (12)$$

где $P_{26}(y) = 19683y^{26} + 2952450y^{25} + 140530059y^{24} + 174611838y^{23} - 16312679910y^{22} + 82304893881y^{21} - 205209729450y^{20} + 313894922544y^{19} - 385112025063y^{18} + 2338748818839y^{17} - 6796506878883y^{16} - 8202521876700y^{15} + 6266640025628y^{14} + 4705866305681 8y^{13} + 7673595262466 0y^{12} + 78008633983448y^{11} + 47534784947653y^{10} + 16098774318440y^{9} - 145290245258 7y^{8} - 443334937429 8y^{7} - 219919499112 6y^{6} - 49624700139y^{5} + 3449607862y^{4} - 2531082168y^{3} + 85233951y^{2} - 1476225y + 19683$,

$$y = \kappa_1\kappa_2\kappa_3, \quad |\kappa_i| \le 1, \ i=1,3.$$

Полученные полиномиальные уравнения решаются численно. Используется стандартная программа MULLRD. Корни результирующих многочленов вычисляются быстро, но недостаточно точно. Полученные значения уточняются по методу Воеводина. Вычисляются все x_j, y_j, z_j. Во втором параграфе содержится описание программы SPECTR, реализующей алгоритм, и ее возможностей. Программа состоит из двух частей: аналитической, написанной в САВ REDUCE (REDUCE - часть) и численной, написанной на FORTRANe (FORTRAN - часть). REDUCE - часть программы аналитически ставит задачу вычисления точек спектра z, $|z| \ge 1$ (выводит систему (6)) и в соответствии с алгоритмом сводит ее решение к нахождению корней многочленов

от одной переменной. При этом программа создает тексты фортранных подпрограмм, содержащих необходимую для численных расчетов информацию: коэффициенты результирующего многочлена, выражения, связывающие переменные x, y, z и аналитические результаты для вычисления "кратных точек спектра" z, $|z| \ge 1$. FORTRAN - часть программы вычисляет все решения z_j, y_j и x_j рассматриваемой системы (9) и определяет, какие из полученных значений z_j, $|z_j| \ge 1$ являются точками спектра. "Ложные точки спектра" появляются: а) из-за того, что соотношениям Виета удовлетворяют не только выбранные нами решения характеристического уравнения, меньшие по модулю 1, б) из-за освобождений от радикалов в процессе получения результирующего многочлена. "Ложные точки спектра" легко отделяются. Точка z_j, $|z_j| \ge 1$ является точкой спектра, если и только если выполняются соответствующие рассматриваемой задаче соотношения (8). Кроме изложенных основных этапов алгоритма в программе реализована схема Рауса для аналитического определения расположения корней вещественного многочлена от одной переменной относительно единичного круга. Она применяется в случае получения результирующего многочлена от переменной z. В третьем параграфе рассмотрены вопросы достоверности численных результатов. Как правило степени результирующих многочленов велики (до 48-ой степени в рассмотренных р.к.з.). Их коэффициенты являются целыми числами высоких порядков (до 15-ого в рассмотренных р.к.з.) или громоздкими аналитическими выражениями в случае исследования параметрических р.к.з. (гл. III, §§3, 5). Вопрос достоверности полученных результатов возникает из-за накопления погрешности в процессе вычислений. Полученные простые точки спектра z_j, $|z_j| \ge 1$ должны удовлетворять детерминантному уравнению (4). Для вычисленной вещественной точки z_j, $|z_j| \ge 1$ определяется вилка $\det R(z_j - \varepsilon)\det R(z_j + \varepsilon) < 0$, на концах которой знаки детерминанта остаются различными при уточнении ее с машинной точностью (гл.III, §4). В случае комплексной z_j, $|z_j| \ge 1$ вычисляется последовательность значений детерминанта для уточненных по методу Воеводина значений κ_i, $|\kappa_i| < 1$, $i=1,r$. Если последовательность значений детерминанта убывает к 0, считаем, что детерминантное условие

(4) выполняется и z_j, $|z_j|\geq 1$ является простой точкой спектра (гл.III, §2). Аналогичная проверка выполняется для вычисленных "кратных точек спектра" z_j, $|z_j|\geq 1$.

Третья глава посвящена вопросам практического применения программы SPECTR. В первом параграфе ее работа продемонстрирована на примерах. Во втором параграфе с помощью программы SPECTR исследуется устойчивость дополнительных граничных условий для р.с. максимального нечетного порядка точности ($O(h^3)$, $O(h^5)$), написанных по несимметричному четному набору точек для уравнения $u_t+u_x=0$:

$$u_\nu^{n+1}=\sum_{l=-k}^{k-1} a_l u_{\nu+l}^n, \quad n\geq 0, \quad \nu\geq k.$$

u_0^n, u_ν^0- заданы. Недостающие $u_1^{n+1}, \ldots, u_{k-1}^{n+1}$ определяются из аппроксимации максимального порядка точности для уравнения $u_t+u_x=0$:

$$u_i^{n+1}=\sum_{j=-0}^{2k-1} c_i u_j^n \quad , \; i=1,\ldots,k-1.$$

Порядок аппроксимации на решении $O(h^{2k-1})$. Устойчивость дополнительных граничных условий исследована для р.с. порядка точности $O(h^3)$ и $O(h^5)$. Рассмотрены последовательно случаи k=2, k=3. В предположении устойчивости задачи Коши доказано, что спектры поставленной левой р.к.з. лежат внутри единичного круга $|z|<1$. В случае k=2 характеристическое уравнение для $|z|\geq 1$, имеет два решения κ_1 и κ_2, меньшие по модулю единицы. Алгебраическая задача вычисления точек спектра z, $|z|\geq 1$ сводится к решению системы из 3-х уравнений третьей степени по κ_1 и κ_2 с параметром z. Программа сводит ее решение к решению полиномиального уравнения 5-ой степени по y, $y=\kappa_1\kappa_2$, $|\kappa_{1,2}|\leq 1$. Для случая k=3 алгебраическая задача вычисления точек спектра z, $|z|\geq 1$ сводится к решению полиномиальной системы (10), решение которой программа сводит к нахождению корней многочлена 26-ой степени по y (12). Результаты численных расчетов приведены в диссертации. На правой границе недостающие u_i^{n+1}, $i=N,\ldots,N-k+2$ находятся аналогично. Доказано, что исследование устойчивости правой краевой задачи сводится к исследованию "кратных точек спектра". Для k=2,3

прямым расчетом показано, что характеристическое уравнение имеет кратные решения, меньшие по модулю 1 лишь для $|z|<1$. В третьем параграфе с помощью программы SPECTR уточняется область устойчивости р.к.з. Слоуна для р.с. Крайсса-Олигера. Граничные условия содержат параметр μ. Программа сводит задачу вычисления точек спектра z, $|z|\geq 1$ к решению полиномиального уравнения 48-ой степени по переменной y. Коэффициенты являются многочленами 4-ой степени по μ. В свою очередь числовые коэффициенты при μ имеют порядок $_m$, m≤15. Результаты вычисления точек спектра z, $|z|\geq 1$ согласуются с известными результатами Слоуна. При этом удалось уточнить интервал значений μ, для которых спектры рассматриваемых р.к.з. лежат внутри единичного круга $|z|<1$. В 4-ом параграфе исследовано явление неустойчивости одного реального физического расчета, в котором использовалась трехслойная р.с. Русанова третьего порядка точности. Доказано, что к неустойчивости приводила точка спектра z=-1.063. Исследована р.к.з. с дополнительными граничными условиями, которые были использованы для физических расчетов. На этом примере продемонстрированы дополнительные возможности алгоритма и программы SPECTR для вычисления спектров достаточно сложных р.к.з. (система (6) для k=2, k(r+p)=8, r=2). В 5-ом параграфе программа применяется для выбора устойчивых р.к.з. из заданного параметрического семейства. Определяется область устойчивости одной трехпараметрической р.к.з.

В приложении I приведен текст аналитической части программы SPECTR (REDUCE-части) и пример обращения к программе.

В приложении II - основные подпрограммы численной части программы SPECTR (FORTRAN-части).

В приложении III - тексты подпрограмм, создаваемых аналитической частью программы при решении задачи выбора устойчивых р.к.з. из заданного параметрического семейства (глава III, §5).

В приложении IV - коэффициенты результирующего многочлена, полученного программой при уточнении области устойчивости р.к.з. Слоуна (глава III, §4).

III. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. В диссертации предложена методика применения САВ REDUCE для исследования устойчивости модельных р.к.з. на ЭВМ. Разработан алгебраический алгоритм вычисления спектров, позволяющий для практически важного класса р.к.з. свести сложную задачу вычисления точек спектра z, $|z|\geq 1$ к нахождению корней многочленов от одной переменной.
2. Предложенный алгоритм реализован на ЭВМ в виде программы SPECTR, использующей САВ REDUCE и язык FORTRAN. Модульная структура программы позволяет использовать ее процедуры для выполнения отдельных этапов алгоритма в тех случаях, когда по программе не удается автоматически вычислить точки спекта z, $|z|\geq 1$ рассматриваемой р.к.з. Для повышения точности реализованы алгоритмы уточнения результатов счета, а также необходимых проверок, подтверждающих их достоверность.
3. На основе использования схемы Рауса аналитически решена задача о расположении корней вещественного многочлена относительно единичной окружности (применяется в случае получения результирующего многочлена от переменной z).
4. Для разностных схем максимального нечетного порядка точности ($O(h^3)$, $O(h^5)$), написанных по несимметричному четному набору точек для уравнения $u_t + u_x = 0$, исследована устойчивость предложенных дополнительных граничных условий.
5. Исследовано явление неустойчивости, которое наблюдалось при численном моделировании динамики флюксонов. Исследована р.к.з. с дополнительными граничными условиями, которые были использованы для физических расчетов.
6. С помощью программы SPECTR уточнена область устойчивости р.к.з. для р.с. Крайсса-Олигера с граничными условиями Слоуна, содержащими параметр.
7. На основе применения программы SPECTR предложен способ выбора устойчивых разностных краевых задач из заданного параметрического семейства. Эта возможность программы продемонстрирована на задаче определения области устойчивости одной трехпараметрической р.к.з.

IV. ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Мазепа Н.Е., Сердюкова С.И. Исследование устойчивости одной разностной краевой задачи с применением системы аналитических вычислений //Изв. ВУЗов. Математика.- 1985.- N 10. - С.55-61.
2. Мазепа Н.Е., Сердюкова С.И. Некоторые примеры исследования устойчивости разностных краевых задач с применением системы аналитических вычислений REDUCE //Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в теорет. физике. -Дубна, 1985. - С.-307-311.
3. Мазепа Н.Е., Сердюкова С.И. Дополнительные граничные условия для разностных схем максимального нечетного порядка точности //SNAM.- 1988.- Vol.3.- N 2.- P.150-161.
4. Мазепа Н.Е. Вычисление спектров разносных краевых задач с применением САВ.-Дубна, 1989.- 12 с. - (Препринт ОИЯИ; Р11-89-382).
5. Мазепа Н.Е. Описание программы SPECTR. -Дубна, 1989.- 12с. - (Препринт ОИЯИ; Р11-89-383).

Рукопись поступила в издательский отдел
3 апреля 1990 года.