ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

11-90-242

МАЗУРКЕВИЧ
Георгий Евгеньевич

УДК 519.632.4 +
519.642.4

# МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КОМБИНИРОВАННОЙ ПОСТАНОВКЕ

Специальность: 01.01.07 - вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Дубна 1990

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований

Научные руководители:

доктор физико-математических наук, профессор — Жидков Е.П.

кандидат физико-математических наук — Хоромский Б.Н.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук — Агошков В.И.

кандидат физико-математических наук — Николаев Е.С.

Ведущее научно-исследовательское учреждение:
Киевский государственный университет им. Т.Г.Шевченко

Автореферат разослан "___"______________1990г.

Защита диссертации состоится "___"___________1990г.
в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований, г. Дубна

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ

Ученый секретарь Совета
кандидат физико-математических наук — Иванченко З.М.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность

При проектировании, создании и эксплуатации магнитных систем ускорителей заряженных частиц и других электрофизических установок в настоящее время большую роль играет вычислительный эксперимент. Он дает возможность исследовать картину протекающих физических процессов и поведения магнитного поля значительно полнее, относительно быстрее и дешевле, чем длительный и трудоемкий процесс физического моделирования. В то же время, эффективное проведение численного моделирования требует создания новых методов и программ, позволяющих получать характеристики магнитных полей с высокой точностью и минимальными затратами ресурсов ЭВМ.

Известны три основных подхода к построению математических моделей задач магнитостатики, которые характеризуются типом используемых уравнений: дифференциальный, интегральный и комбинированный. Наименее изученным из них, как в плане теоретическом так и в плане разработки методов решения, является комбинированный подход, в котором используется система из квазилинейных эллиптических уравнений и граничного интегрального уравнения (ГИУ). Комбинированная постановка для более широкого круга физических задач (нелинейной теории упругости, нелинейной диффузии, некоторые задачи обтекания и т.д.) дается в работе /9/. Выбор используемой модели определяется конструкцией магнитной системы. Этим обуславливается выбор исследуемого в диссертации комбинированного подхода.

Для адекватного описания картины магнитного поля важную роль играет переход от двумерных приближенных моделей к реальным трехмерным. Эти задачи имеют принципиальное отличие от двумерных аналогов. Для трехмерных задач характерно не только формальное возрастание размерности возникающих алгебраических систем, но и качественное и логическое усложнение алгоритмов, ухудшение их асимптотических вычислительных характеристик, значительное усложнение геометрии границ разрыва коэффициентов. Это предъявляет жесткие требования к вычислительным методам, особенно к асимптотическим свойствам алгоритмов, в силу быстрого роста размерности задачи при измельчении сеток. Новые проблемы ставит разработка методов параллельных вычислений. Все это определяет необходимость создания и оптимизации алгоритмов решения внутренних эллиптических задач и граничных интегральных уравнений, без разработки которых невозможно эффективное решение задач в комбинированной постановке.

Одним из интенсивно развиваемых в последнее время методов решения эллиптических задач является метод декомпозиции области. Использование концепции метода декомпозиции (в сочетании, естественно, с другими методами), как нам кажется, позволяет продвинуться в исследовании комбинированной задачи и разработке эффективных алгоритмов и программ для её решения.

Все выше сказанное определяет актуальность темы диссертации.

Работы, положенные в основу диссертации, выполнены в соответствии с проблемно-тематическим планом научно-исследовательских работ Объединенного института ядерных исследований.

Целью работы является разработка эффективных методов численного решения квазилинейных эллиптических уравнений, определенных в неограниченном трехмерном пространстве, создание на их основе программ для решения задач магнитостатики и расчет конкретных магнитных систем. Комбинированная постановка задачи состоит в том, что она сводится к краевой задаче в некоторой ограниченной области, содержащей область нелинейности, с граничным интегральным условием, которое точно учитывает поведение решения на бесконечности. Поэтому необходимо:
- исследовать нелинейную краевую задачу с граничным условием интегрального типа;
- разработать и обосновать методы решения задачи в комбинированной постановке и её дискретных аналогов;

Для эффективной численной реализации этих методов необходимо построить экономичные алгоритмы решения
- дискретных аналогов ГИУ второго рода и
- конечно-разностной внутренней эллиптической задачи.

Научная новизна

Исследована комбинированная постановка для квазилинейных эллиптических задач в неограниченном трехмерном пространстве, установлены существование и единственность обобщенного решения задачи в комбинированной постановке. На основе метода декомпозиции области построены итерационные алгоритмы для решения комбинированной задачи. Для их численной реализации

а) разработаны экономичные алгоритмы решения дискретных аналогов ГИУ на поверхности параллелепипеда;



б) для решения конечно- разностных эллиптических задач в прямоугольных областях в $R^n, n=2,3$, на основе клеточной декомпозиции области построены и исследованы переобуславливающие операторы, при использовании которых скорость сходимости обобщенного метода сопряженных градиентов определяется только характеристикой подобластей - максимальным размером сеточной подобласти, и не зависит от скачков коэффициентов уравнений на границах подобластей и от числа подобластей.

Практическая ценность

На основе предложенных в диссертации алгоритмов созданы комплексы специализированных программ для решения нелинейных пространственных задач магнитостатики. С их помощью проведено численное моделирование пространственного распределения поля дипольного магнита установки СПИН (ЛВЭ, ОИЯИ), выполнены расчеты характеристик электромагнита проектируемого спектрометра низкой энергии Московской мезонной фабрики ИЯИ АН СССР.

Разработанные алгоритмы и программы имеют самостоятельный интерес и могут быть использованы при численном решении аналогичных, рассматриваемым в диссертации, задач математической физики.

Апробация работы и публикации

Основные результаты диссертационной работы докладывались на семинарах вычислительной и прикладной математики ЛВТА ОИЯИ, на Всесоюзной конференции "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики"(Новосибирск, 1987), Международной конференции по численным методам и приложениям(София, 1988), XI Всесоюзном совещании по ускорителям заряженных частиц(Дубна, 1988), Чехословацкой конференции EQUADIFF-7 (Прага, 1989), XI конференции по методу граничных элементов BEM-XI (Кэмбридж, 1989). По теме диссертации опубликовано 8 работ, приведенных в списке литературы.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения, содержит 14 таблиц, 26 рисунков, список литературы из 156 наименований и изложена на 155 страницах машинописного текста.

## СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении приводится краткий обзор литературы по методам решения трех крупных задач, которые рассматриваются в диссертации: квазилинейные эллиптические задачи в неограниченной области, граничные интегральные уравнения, внутренние эллиптические краевые задачи. Отмечается, что интенсивно развиваемая в последнее время концепция метода декомпозиции области для решения внутренних краевых задач позволяет исследовать и разработать методы решения задачи в неограниченной области с использованием ГИУ для точного учета поведения решения на бесконечности (комбинированная постановка). Этапами численной реализации методов решения комбинированной задачи являются решение ГИУ и внутренней задачи. Однако, совместное использование ГИУ и дифференциальных уравнений невозможно без разработки специальных методов решения ГИУ, т.к. их численное решение в общем случае является намного более трудоемкой задачей. Один из возможных выходов – использование специальных поверхностей (шар, цилиндр, параллелепипед и т.д.). Для внутренних краевых задач (например, задач магнитостатики) характерно наличие областей с сильно меняющимися(разрывными) коэффициентами, наличие условий сопряжения на границах раздела сред. Эффективное численное решение таких задач возможно методом клеточной декомпозиции области(декомпозиция пересекающимися разрезами). Во введении так же отмечается, что при исследовании методов решения задачи на различных этапах эффективным математическим аппаратом являются операторы Пуанкаре–Стеклова, см. например /II,I2/.

В первой главе рассматривается комбинированный метод решения квазилинейных эллиптических уравнений в неограниченной области.

В §I дается комбинированная постановка задачи и её обобщенная формулировка. Пусть область $\Omega_F$ с границей $\Gamma_0$ есть область нелинейности, $\Omega_V$ – область вакуума, $\Omega_F \cup \Gamma_0 \cup \Omega_V = R^3$. Задача (I) в ограниченной области $\Omega_I \supset \Omega_F$ является комбинированной постановкой для задачи во всем пространстве $R^3$ при условии $u(x) = O(|x|^{-\nu}),\ \nu \geq 2$, при $|x| \to \infty$ :

$$\Phi_\psi u \equiv -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} b_i(x, w) = 0\,, \quad u \in D(\Phi_\psi)$$

$$b_i(x,w) = \begin{cases} w_i\,, & x \in \Omega'_V = \Omega_I \setminus \bar{\Omega}_F \\ \mu(x, |w|)\, w_i\,, & x \in \Omega_F \end{cases}\,, \quad w_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \qquad \text{(I)}$$



$$D(\Phi_\psi) = \{u : u \in C^2(\bar{\Omega}_F) \cup C^2(\bar{\Omega}'_V)\ ;$$
$$[u]_{\Gamma_0} = 0\,,\ \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{\Gamma_0} = \psi\ ;\ G_1 u + \frac{\partial u}{\partial n} = 0\,,\ x \in \Gamma\}$$

Заданная функция $\psi \in C(\Gamma_0)$, $[\cdot]$ обозначает скачок функции либо её конормальной производной, $G_1 \equiv \mathbb{L}^{-1}(\mathbb{E} + \mathbb{K})$,

$$\mathbb{L}\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma r^{-1}(p,s)\,\sigma(s)\,ds\,,\quad \mathbb{K}u = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma u(s)\frac{\partial}{\partial n} r^{-1}(p,s)\,ds\,,\quad \Gamma \equiv \partial\Omega_I$$

Для обобщенной формулировки задачи (I) вводятся пространства функций

$$V = \{u \in H^1(\Omega_I) : (\gamma u, g_0)_{L_2(\Gamma)} = 0\}\,,\quad X = \{u \in H^{1/2}(\Gamma) : (u, g_0)_{L_2(\Gamma)} = 0\}\,,$$

$g_0$ – плотность потенциала Робена, и строится энергетическое расширение $A_K \in (V \to V^*)$ оператора $\Phi_\psi$ :

$$A_K u = 0\,,\quad u \in V\,. \qquad (2)$$

Задача (2) рассматривается в предположении, что при $x \in \Omega_F$, $t, \tau \in [0, \infty)$ :

$$\mu(x,t)t - \mu(x,\tau)\tau \geq m(t-\tau)\,,\quad t \geq \tau,\ m > 0$$
$$|\mu(x,t)t - \mu(x,\tau)\tau| \leq M|t-\tau|$$

функция $t \to \mu(x,t)t$ непрерывно дифференцируема и при почти всех $x \in \Omega_F$ $\left|\frac{\partial}{\partial t}(\mu(x,t)t)\right| \leq M$,

и оператор $G_1 \in \mathcal{L}(X \to X^*)$ является самосопряженным, положительно определенным и ограниченным оператором. Устанавливается существование единственного обобщенного решения задачи (2). Аналогично рассматриваются задачи Дирихле и Неймана в области $\Omega_I$ .

В §2 рассматриваются операторы Пуанкаре–Стеклова для задачи в неограниченной области.

Теорема I Оператор Пуанкаре–Стеклова $\mathcal{S} \in (X^* \to X)$ сильно монотонен, непрерывен и обладает обратным $\mathcal{S}^{-1} \in (X \to X^*)$, который является липшиц-непрерывным и сильно монотонным.

Устанавливается так же потенциальность и дифференцируемость по Гато оператора $\mathcal{S}^{-1}$ . Свойства оператора $G \equiv G_1^{-1} = (\mathbb{E} + \mathbb{K})\mathbb{L}^{-1}$ устанавливает

Теорема 2 Норма $\|\sigma\|_G^2 = (G\sigma, \sigma)$, $\sigma \in X^*$, $G \in \mathcal{L}(X^* \to X)$ эквивалентна норме пространства $X^*$ , норма $\|u\|_{G^{-1}}^2 = (G^{-1}u, u)$ $u \in X$ эквивалентна норме пространства $X$ .

В §3 рассматривается уравнение метода декомпозиции области для комбинированной постановки и методы его решения. С помощью операторов Пуанкаре–Стеклова $\mathcal{S}$ и $G$ записывается операторное уравнение в пространстве $X$ эквивалентное обобщенной формулировке (2) :

$$\mathbb{R}y \equiv \mathcal{S}^{-1}y + G^{-1}y = 0, \quad y\in X, \quad y = u|_{\Gamma} \qquad (3)$$

<u>Теорема 3</u> Метод простой итерации

$$J\left(\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}\right) = -\mathbb{R}y_n, \quad n=0,1,\dots \qquad (4)$$

сходится при $\tau\in(0,2M_{\mathbb{R}}^{-1})$ к единственному решению уравнения (3) со скоростью $\|y_n - y\|_X \le (\tau q^n/(1-q))\|\mathbb{R}y_0\|_{X^*}$ для любого $y_0$, где $J\equiv G^{-1}$, $q=\max(1-\tau m_{\mathbb{R}}, 1-\tau M_{\mathbb{R}})$, $m_{\mathbb{R}}, M_{\mathbb{R}}$ есть константы сильной монотонности и липшиц-непрерывности оператора $\mathbb{R}$.

<u>Теорема 4</u> Пусть функция $t\to \frac{\partial}{\partial t}(\mu(x,t)t)$ непрерывно дифференцируема по $t$ при почти всех $x\in\Omega_F$ и $t\in[0,\infty)$. Тогда метод Ньютона

$$\frac{dy}{d\tau} = -\left[\mathbb{R}'(y(\tau))\right]^{-1}\mathbb{R}(y(\tau)), \quad y(0)=y_0$$

сходится к решению $y\in X$ уравнения (3) от произвольного начального приближения.

Отмечается так же, что поскольку оператор $\mathcal{S}^{-1}$ потенциален, а $G^{-1}$ симметричен и положительно определен, то для решения уравнения (3) применимы градиентные методы.

В §4 рассматривается дискретизация задачи (3) и методы решения дискретных аналогов. Для (3) стоятся аппроксимации по Галеркину:

$$\mathbb{R}_n y_n = 0, \quad \mathbb{R}_n = I_n^* \mathbb{R} I_n \in (X_n \to X_n^*) \qquad (5)$$

$X_n\subset X$ линейное подпространство в $X$, с нормой, индуцированной из $X$, $I_n\in(X_n\to X)$ оператор вложения. Далее приводится общая лемма об оценке погрешности метода Галеркина и даются конкретные оценки для гладких поверхностей и кусочно-линейных элементов. Для решения задачи (5) устанавливается аналог теоремы 3.

В конце главы приводятся результаты численных экпериментов, демонстрирующих независимость скорости сходимости итерационного процесса (4) от шага дискретизации задачи и характера нелинейности (на примере задач магнитостатики), а так же результаты модельных расчетов демонстрирующих аппроксимацию решения.

Реализация итерационного процесса (4) с $J = G^{-1}$ вкючает два основные трудоемкие этапа:

I. Вычисление элемента $v = \mathcal{S}^{-1}y_n$, что эквивалентно решению задачи Дирихле в области $\Omega_\Gamma$.



II. Вычисление элемента $y_{n+1/2} = Gv$. На этом этапе решается ГИУ $(\mathbb{E}+\mathbb{K})y_{n+1/2} = \mathbb{L}v$ на границе и находится $y_{n+1/2} = (\mathbb{E}+\mathbb{K})^{-1}\mathbb{L}v$.

В связи с этим две следующие главы посвящены разработке методов решения задач на этапах I, II.

Вторая глава посвящена разработке эффективных методов решения ГИУ второго рода на поверхности параллелепипеда.

В §I приводится краткий обзор по ГИУ, обсуждаются известные свойства интегральных операторов $\mathbb{K}$ и $\mathbb{L}$ и методы решения ГИУ.

В §2 рассматривается дискретизация интегральных операторов $\mathbb{K}$ и $\mathbb{L}$, определенных на границе параллелепипеда с квадратом в основании. Она осуществляется на основе кусочно-постоянной интерполяции и коллокации на равномерной сетке:поверхность параллелепипеда разбивается на элементарные носители – прямоугльники на боковых сторонах, квадраты на основаниях. Узлами коллокации являются центры носителей. В результате имеем алгебраическую систему :

$$(\mathbb{E} + \mathbb{K}_h)u = \mathbb{L}_h v \qquad (6)$$

Отмечается, что вопрос об оценке погрешности уравнения (6) не является тривиальным: сходимость метода коллокации достаточно подробно изучена для ГИУ на кривых из $R^2$, для поверхностей класса $C^\infty$ из $R^3$ имеются лишь некоторые результаты для специального класса операторов/10/. Для рассматриваемых трехмерных задач численные эксперименты показывают, что погрешность решения (6) в $C$ – и $L_2^h$–норме есть $O(h)$. Наша основная задача – изучение структуры матриц $\mathbb{K}_h, \mathbb{L}_h$.

В §3 рассматривается структура матриц $\mathbb{K}_h$ и $\mathbb{L}_h$ и алгоритмы умножения их на вектор. Подробно рассматривается матрица $\mathbb{K}_h$. Существует такое разбиение $\mathbb{K}_h$ на блоки, что каждый блок состоит из симметричных теплицевых матриц либо приводится к такому виду с помощью матриц перестановок. На этом основано эффективное умножение матрицы $\mathbb{K}_h$ на вектор/13/. Рассматриваются общий случай и случай, когда у решения есть какие-либо симметрии. Все сказанное о матрице $\mathbb{K}_h$ справедливо и для матрицы $\mathbb{L}_h$.

§4 посвящен итерационным методам решения системы (6), аппроксимирующей ГИУ второго рода. Для этого устанавливаются свойства $\mathbb{K}_h$:

<u>Лемма I</u> Матрица $\mathbb{K}_h$ неотрицательна, $\mathbb{K}_h \geqslant 0$, и имеет собственный вектор $u_1 = (1,\dots,1)^T$, $\mathbb{K}_h u_1 = u_1$.

<u>Лемма 2</u> Матрица $\mathbb{K}_h$ неразложима.

Лемма 3 При любом $N \geqslant 6$ , $N$ - размерность задачи (6), существует $\Delta > 0$ такое, что :

$$Re\, \mathcal{G}(\mathbb{E} + \mathbb{K}_h) \geqslant \Delta$$

Для решения задачи (6) используется попеременно-треугольный метод. Устанавливается

Лемма 4 а) Итерационный процесс при $\mathbb{K}_h = \mathbb{K}_1 + \mathbb{K}_2$

$$B_\tau(u_{n+1} - u_n) = -2\tau((\mathbb{E} + \mathbb{K}_h)u_n - f) \ ; \ B_\tau = (\mathbb{E} + \tau\mathbb{K}_1)(\mathbb{E} + \tau\mathbb{K}_2)$$

осуществим по крайней мере для $0 < \tau \leq 1$ ;
б)существует $\tau_c > 0$ , что для всех $0 < \tau \leq \tau_c$

$$\sup_{\tau \in (0, \tau_c]} \rho(\mathbb{E} - 2\tau B_\tau^{-1}(\mathbb{E} + \mathbb{K}_h)) < 1$$

При наличии у решения симметрий для решения (6) используется блочный метод Зейделя, устанавливается лемма о его сходимости.

В§5 приводится оценка трудоемкости решения задачи (6) предложенными методами и даются некоторые вычислительные характеристики программ BIEGM3 (общий случай) и BIESM3 (наличие симметрий), в которых они реализованы.

В третьей главе разрабатываются итерационные методы решения конечно-разностных эллиптических задач в прямоугольных областях в $R^n, n=2,3$ , основанные на клеточной декомпозиции области.

В §I дается постановка конечно-разностной эллиптической задачи в прямоугольной области $\Pi$ в $R^n, n=2,3$ , разбитой на подобласти $\Omega_\ell$ вертикальными и горизонтальными линиями(плоскостями), которые образуют внутренние по отношению к $\Pi$ границы $\Gamma$ подобластей $\Omega_\ell$ . Используются сетки со сдвигом на $h/2$ относительно границ подобластей:

$$-\mu_\ell \Delta_h w = 0 \quad , \quad \text{на } \omega_\ell \ , \ \ell = 1 \div p \tag{7}$$

$$[\gamma w] = 0 \ , \ [\mu \tfrac{\Delta w}{\Delta n}] = \psi \quad \text{на } \Gamma \ ; \quad \gamma w = 0 \quad \text{на } \partial\Pi$$

$\mu_\ell = const_\ell, \ell = 1 \div p$, через $\gamma w$ обозначен след сеточной функции $w$ на границах подобластей, $\Delta w / \Delta n$ внешняя нормальная производная. Рассматриваются сеточные аналоги операторов Пуанкаре-Стеклова $S_\ell$ для подобласти $\Omega_\ell$ и с их помощью дается формулировка задачи относительно следа $\varphi = \gamma w$ сеточной функции на внутренней границе $\Gamma$ , которая эквивалентна (7) :

$$A\varphi = \psi \tag{8}$$



На пространстве следов $X(\Gamma)$ $h$ - гармонических функций в $\Omega_\ell, \ell = 1 \div p$, $A$ является симметричным и положительно определенным оператором.

В §2 приводится общая схема построения переобуславливателей $B$ для матрицы $A$ . Она основана на представлении пространства $X(\Gamma)$ в виде суммы двух подпространств $X_o(\Gamma)$ и $X_L(\Gamma)$ , и $B$ выбирается так, что для $\varphi = \varphi_o + \varphi_L \in X(\Gamma)$ , $\varphi_o \in X_o(\Gamma)$ , $\varphi_L \in X_L(\Gamma)$

$$(B\varphi, u) = (B_o\varphi_o, u_o) + (A\varphi_L, u_L) \ ,$$

$B_o$ есть блочная диагональ матрицы $A$ , для обращения $B_o$ используется быстрое преобразование Фурье, а на подпространстве $X_L(\Gamma)$ матрица $A$ легко обратима. Для числа обусловленности $\mathcal{K}$ матрицы $B^{-1}A$ справедлива

Теорема 5 Пусть известны $C_o$ и $C_L$ из неравенств

$$C_L(A\varphi_L, \varphi_L) \leq (A\varphi, \varphi) \quad ; \quad C_o(B_o\varphi_o, \varphi_o) \leq (A\varphi_o, \varphi_o) \tag{9}$$

тогда $\mathcal{K} \leq C[C_L \cdot min(C_o, 1)]^{-1}$.

В §3 исследуются переобуславливатели $B$ связанные с конкретным выбором пространств $X_o(\Gamma)$ и $X_L(\Gamma)$. Основной принцип их выбора состоит в том , чтобы оценки для $C_L$ и $C_o$ из (9) получить через аналогичные константы для операторов, которые соответствуют элементарным подобластям или небольшой группе подобластей. Рассматриваются два переобуславливателя в двумерном случае $PC2$ и $PL2$ и один в трехмерном $PC3$ . Доказывается

Теорема 6 Для числа обусловленности $\mathcal{K}(B^{-1}A)$ справедливо

$$\mathcal{K} \leq C(1 + \ln N)\lambda^{-1} \quad \text{для } PL2, PC2$$

$$\mathcal{K} \leq C(1 + \ln N) \cdot N \cdot \lambda^{-1} \quad \text{для } PC3$$

$N$ - максимальная из размерностей сеточных подобластей, $\lambda = \min_{\ell = 1 \div p} \lambda^\ell_{min}$, $\lambda^\ell_{min}$ - минимальное собственное значение обобщенной задачи

$$S_\ell^{-1} v = \lambda^\ell \, diag\, S_\ell^{-1} \cdot v \tag{10}$$

$S_\ell^{-1}$ - сеточный аналог оператора, обратного оператору Пуанкаре-Стеклова в подоблати $\Omega_\ell$ , $diag\, S_\ell^{-1}$ - его блочная диагональ.

Гипотеза Для $\lambda^\ell_{min}$ задачи (10) выполняется

$$[\lambda^\ell_{min}]^{-1} \leq C(1 + \ln N) \ .$$

Гипотеза иллюстрируется численными примерами.

В §4 дается оценка вычислительной работы для решения задачи (8) методом сопряженных градиентов с переобуславливателями $PL2$, $PC2$, $PC3$. Для этого метода приводятся результаты численных экспериментов, демонстрирующих свойства полученных алгоритмов. Для трехмерногослучая эти алгоритмы реализованы в комплексе программ $CDD3$.

В четвертой главе рассматривается применение разработанных алгоритмов и программ для решения ряда конкретных задач магнитостатики.

В §I дается математическая постановка магнитостатических задач относительно двух скалярных потенциалов, сводящаяся к системе (I).

В §2 приводится описание специализированного комплекса программ. Даются схемы модульного комплекса программ для решения задач магнитостатики с использованием комбинированной постановки и схема блока для решения внутренней нелинейной задачи с использованием неполно-нелинейной постановки /I4/.

В §3 для дипольного магнита установки СПИН(ЛВЭ,ОИЯИ) изучалась картина магнитного поля при различных токах в обмотке с учетом насыщения ферромагнетика. Основное внимание уделено анализу эффектов (нарушение однородности поля), возникающих на торцах магнита. Приводится сравнение экспериментальных данных с расчетными.

Численное моделирование поля магнита спектрометра низкой энергии Московской мезонной фабрики ИЯИ АН СССР проводилось с целью изучения его основных проектируемых характеристик – магнитного поля в центре системы, его отклонения от однородного в рабочей зоне, Эффективной длины. Приводится сравнение проектируемых параметров с параметрами, которые получаются в результате численного моделирования.

В заключении сформулированы основные результаты :

I. Показано, что решение квазилинейного уравнения в трехмерном пространстве с заданной асимптотикой поведения искомой функции на бесконечности эквивалентно решению нелинейного граничного операторного уравнения относительно следа искомой функции на поверхности $\Gamma$ некоторой вспомогательной области, содержащей ограниченную область нелинейности.

2. Установлено, что нелинейный оператор Пуанкаре-Стеклова для внутренней задачи, определенный на $\Gamma$, является липшиц-непрерывным, сильно монотонным и потенциальным с симметричной и положительно определенной производной Гато в пространствах $H^{1/2}_{g_0}(\Gamma)$. Построен аналог оператора Пуанкаре-Стеклова для внешней краевой задачи, установлена его связь с линейным оператором для внутренней задачи. На основании свойств этих операторов получены условия существования и единственности обобщенного решения задачи в комбинированной постановке.

3. Построены итерационные методы решения граничного операторного уравнения на $\Gamma$ до дискретизации задачи (метод простой итерации с переобуславливанием, методы ньютоновского типа). Показано, что на каждом шаге таких процессов необходимо решать внутреннюю нелинейную задачу Дирихле и граничное интегральное уравнение второго рода на $\Gamma$, и, таким образом, задача оптимизации всего итерационнго процесса разбивается на две независимые проблемы, для решения которых разработаны эффективные методы, учитывающие специфику этих подзадач.

4. Для дискретизации задачи построены аппроксимации по Галеркину. В случае гладкой поверхности $\Gamma$, для кусочно-линейных элементов получены оценки погрешности аппроксимации относительно шага дискретизации.

5. Для численного решения ГИУ на поверхности параллелепипеда разработаны экономичные алгоритмы умножения матриц, аппроксимирующих интегральные операторы, на вектор, которые учитывают все упрощающие особенности поверхности и ядер интегральных операторов. На их основе построены итерационные процессы решения соответствующих систем уравнений, которые требуют для решения $O(n^3 \ln n)$ арифметических операций и $O(n^3)$ ячеек машинной памяти ( $n$ – число переменных по одному направлению). Приводятся результаты численных экспериментов, демонстрирующие эффективность предложенных алгоритмов.

6. Для решения конечно-разностных эллиптических задач в прямоугольных областях в $R^n$, $n=2,3$, разработан метод клеточной декомпозиции области. Построены переобуславливающие операторы, при использовании которых скорость сходимости обобщенного метода сопряженных градиентов решения задачи определяется только характеристикой отдельной подобласти – максимальным размером сеточной подобласти, и не зависит от скачков коэффициентов уравнений на границах подобластей и от числа подобластей. Приводятся результаты численных экспериментов, демонстрирующие эффективность предложенных алгоритмов.

7. На основе разработанных алгоритмов решения ГИУ и конечно-разностных краевых задач созданы комплексы специализированных программ для решения нелинейных пространственных задач магнитостатики в комбинированной постановке.

8. Проведены расчеты поля в трехмерном пространстве дипольного магнита установки СПИН(ЛВЭ,ОИЯИ); выполнены расчеты характеристик проектируемого магнита спектрометра низкой энергии Московской мезонной фабрики ИЯИ АН СССР.

## Работы, положенные в основу диссертации


I. Жидков Е.П., Мазуркевич Г.Е., Хоромский Б.Н. Экономичный численный метод учета краевого условия на бесконечности при решении пространственных задач магнитостатики на основе скалярного потенциала. Общий случай. – Сообщение ОИЯИ PII-86-230, Дубна, 1986, I7с.

2. Жидков Е.П., Мазуркевич Г.Е., Хоромский Б.Н. Экономичный численный метод учета краевого условия на бесконечности при решении пространственных задач магнитостатики на основе скалярного потенциала. Учет пространственных симметрий. Модельные расчеты. – Сообщение ОИЯИ PII-86-333, Дубна, 1986, I6с.

3. Жидков Е.П., Мазуркевич Г.Е., Хоромский Б.Н. К теории комбинированных методов в нелинейных задачах магнитостатики. – Сообщение ОИЯИ PII-87-50I, Дубна, 1987, I9с.

4. Жидков Е.П., Мазуркевич Г.Е., Хоромский Б.Н., Юдин И.П. Численное моделирование пространственного распределения краевого поля синхротронного дипольного магнита. – Препринт ОИЯИ PII-88-I5, Дубна, 1988.

5. Жидков Е.П., Мазуркевич Г.Е., Полякова Р.В. и др. Расчеты магнитных полей с использованием комбинированной постановки магнитостатических задач. – В: Трудах XI Всесоюз. сов. по ускор. зар. част., т.I, Д9-89-52, Дубна, 1989, стр.354-360

6. Zhidkov E.P., Mazurkevich G.E., Khoromsky B.N. Iterative methods of domain-decomposition with cross-points for the solution of discrete elliptic problems. - Preprint JINR E11-89-174, Dubna, 1989, 23p.

7. Gregus M., Khoromsky B.N., Mazurkevich G.E., Zhidkov E.P. On approximation of nonlinear boundary integral equations for the combined method. - In.: Proc. of Int. Conf. BEM-XI, eds. Brebbia C.A., Connor J.J., Springer-Verlag, 1989, vol. 2, pp. 207-220. (Commun. JINR E11-89-442, Dubna, 1989).

8. Жидков Е.П., Мазуркевич Г.Е., Хоромский Б.Н., Юдин И.П. Анализ пространственного распределения поля спектрометрического магнита. – Сообщение ОИЯИ PII-90-I4I, Дубна, 1990, I2с.


## Цитированная литература


9. Hsiao G.G. - The Coupling of BEM and FEM. - A brief Review In.: Boundary Elements X, vol. 1, ed. Brebbia C.A., Springer-Verlag, 1988, p. 431.





I0. Wendland W.L. On asymptotic error estimates for combined FEM and BEM. Universitat Stuttgart, Mathematisches Institut A, Bericht Nr 10, 1988, 61p.

II. Лебедев В.И., Агошков В.И. Операторы Пуанкаре-Стеклова и их приложения в анализе. – М.: Отдел вычислительной математики АН СССР, 1983.

I2. Агошков В.И., Лебедев В.И. Операторы Пуанкаре-Стеклова и методы разделения области в вариационных задачах. – В кн.: Вычислительные процессы и системы, вып.2, М.: Наука, Стр.I73-227.

I3. Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е. Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. – М.: Наука, 1987

I4. Хоромский Б.Н. Краевые задачи магнитостатики в неполно-нелинейной постановке и методы их решения,I. – Сообщение ОИЯИ PII-88-480, Дубна, 1988.



Рукопись поступила в издательский отдел
3 апреля 1990 года.