Торие дисс

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

На правах рукописи
УДК 519.63:517.962.2
11-88-850

МАЗУРИК
Сергей Иванович

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ С ПОМОЩЬЮ СИМВОЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ НА ЭВМ

Специальность: 01.01.07 – вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Дубна 1988

Работа выполнена в Институте теоретической и прикладной механики Сибирского отделения Академии наук СССР, Новосибирск

Научные руководители – академик, профессор $\boxed{\text{Яненко Н.Н.}}$, кандидат физико-математических наук, в.н.с. Шапеев В.П.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, в.н.с. Сердюкова С.И.
кандидат физико-математических наук, с.н.с. Шашков М.Ю.

Ведущая организация: Институт математики и механики Уральского отделения АН СССР, Свердловск

Защита состоится "2" марта 1989 г. на заседании Специализированного совета Д 047.01.04 в Объединенном институте ядерных исследований (141980, Дубна, Моск. обл., Лаборатория вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Объединенного института ядерных исследований.

Автореферат разослан "31" января 1989 г.

Ученый секретарь
Специализированного совета
кандидат физико-математических наук Иван З.М.Иванченко

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящее время конечно-разностные схемы являются одним из наиболее эффективных и распространенных инструментов численного решения задач математической физики. Многие методы построения и исследования разностных схем (р.с.) приводят к большим вычислениям в символьном виде, что затрудняет решение практических задач. Применение ЭВМ для проведения символьных выкладок в этих методах может освободить математика-вычислителя от выполнения трудоемкой рутинной работы и помочь в создании новых схем и исследовании их свойств, в первую очередь, устойчивости и аппроксимации. Тем самым использование ЭВМ для указанной цели, во-первых, облегчает процесс создания р.с. с заданными свойствами, а во-вторых, создает предпосылки для более широкого применения численных методов при решении различных сложных задач математической физики. В связи с этим разработка методов автоматизации символьных преобразований для анализа и построения р.с. с помощью ЭВМ является важной и актуальной задачей.

Цель работы состоит в создании и реализации на ЭВМ методов и алгоритмов исследования и построения конечно-разностных схем для решения различных задач математической физики.

Методика исследований. Способ построения границ областей устойчивости р.с. основан на использовании спектрального метода Фурье, алгебраических критериев анализа распределения корней многочлена и методах теории оптимизации. Алгоритм построения р.с. основан на методе неопределенных коэффициентов. Для реализации методов и алгоритмов построения и анализа схем в символьном виде на ЭВМ использованы средства компьютерной алгебры.

Научная новизна изложенных в работе результатов заключается в следующем. а) Разработана методика исследования на ЭВМ устойчивости р.с. для систем линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами на основе использования метода Фурье. б) Применительно к исследованию схем осуществлена реализация проверки в символьном виде на ЭВМ критериев теорий Рауса-Гурвица и Шура-Кона для анализа распределения корней многочлена. в) Для анализа устойчивости схем и многочленов предложено использовать методы теории оптимизации. г) Впервые с помощью ЭВМ был проведен полный анализ устойчивости ряда р.с. д) Решена задача оптимизации областей устойчивости относительно различных параметров схем. В частности, для модельных уравнений динамики жидкости найдены новые р.с., обладающие расширенными по сравнению с известными схемами областями устойчивости. е) Разработаны алгоритмы построения р.с. и исследования их локальной аппроксимации в символьном виде на ЭВМ для систем дифференциальных уравнений, в первом случае – линейных, во втором – квазилинейных.

Достоверность содержащихся в диссертации результатов и выводов подтверждена теоретическим обоснованием различных этапов предлагаемых в работе методов и алгоритмов, тестовыми расчетами, сравнением с точными решениями, сопоставлением с известными результатами других авторов, экспериментальными численными расчетами конкретных прикладных задач.

Научная и практическая ценность. Созданные в диссертации методы и алгоритмы анализа и построения р.с. реализованы в виде комплекса программ. Это позволяет проводить с помощью ЭВМ различные исследования р.с. и получать новые численные алгоритмы решения ряда задач математической физики. Предлагаемый в диссертации аппарат анализа устойчивости схем на ЭВМ позволяет также ставить и решать новые, качественно более сложные задачи, такие как оптимизация областей устойчивости относительно параметров схемы. При этом могут быть учтены и другие свойства р.с. Полученные в диссертации р.с. с расширенными по сравнению с известными схемами областями устойчивости позволяют в некоторых случаях сэкономить в 1,5–2 раза время работы ЭВМ. Разработанные методы и алгоритмы могут быть обобщены на случай криволинейных сеток и нелинейных дифференциальных уравнений. Результаты анализа многопараметрических семейств р.с. с помощью указанных подходов могут быть использованы при создании пакетов прикладных программ, ориентированных на численное моделирование различных задач математической физики. С целью практического применения полученных при помощи описанных аналитико-численных подходов таблиц значений границ областей устойчивости р.с. предложен и реализован на ЭВМ алгоритм определения максимально возможного временного шага на основе этих таблиц. В силу общности модулей комплекса, реализующего методы решения задачи о локализации корней

многочлена, его можно использовать и для анализа полиномов, возникающих в различных областях математики и физики.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на конференциях молодых ученых ИТПМ СО АН СССР (Новосибирск, 1983–1987 гг.), на VIII Всесоюзном семинаре по комплексам программ математической физики (Ташкент, 1983 г.), на Международных совещаниях по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике (Дубна, 1982 г., 1985 г.), на VI Советско-франко-итальянском симпозиуме по численному решению нелинейных задач (Франция, Париж, 1983 г.), на Всесоюзных конференциях по системам для аналитических преобразований в механике (Горький, 1984 г.; Москва, 1987 г.), на VI и VII Всесоюзных школах по теоретическим основам и конструированию численных алгоритмов решения задач математической физики (Горький, 1986 г.; Кемерово, 1988 г.), на Международных конференциях по компьютерной алгебре (EUROCAL: Австрия, Линц, 1985 г.; ГДР, Лейпциг, 1987 г.), на Международной конференции по численным методам в промышленности: теория и применения (NUMETA: Англия, Суонси, 1987 г.), на Советско-японском симпозиуме по вычислительной аэрогидродинамике (Хабаровск, 1988 г.), на семинаре численных методов механики сплошной среды НГУ, на совместных семинарах ИТПМ и ВЦ СО АН СССР по аналитическим вычислениям на ЭВМ, на семинаре отдела вычислительной аэрогазодинамики ИТПМ СО АН СССР, на семинаре отдела вычислительной математики Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [1–18].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, четырех приложений и списка цитируемой литературы. Объем содержательной части диссертации – 143 стр., приложений – 56 стр., списка литературы – 23 стр. Работа содержит 25 таблиц и 75 рисунков, список литературы состоит из 207 наименований.

II. СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы исследования, дан обзор основных отечественных и зарубежных работ по этой теме, сформулированы задачи исследования, кратко изложены содержание и основные результаты работы, отмечена научная новизна полученных результатов.

Глава I посвящена автоматизации с помощью символьных преобразований на ЭВМ процесса исследования методом Фурье устойчивости р.с. для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. В §I изложены основные положения этого метода. Идея метода состоит в исследовании поведения решений, которые ищутся в классе функций вида

$$u(x,t) = u_0 \exp\{i(kx - wt)\} , \qquad (I)$$

где $x=(x_1,\dots,x_L), L \geqslant 1$, - вектор пространственных координат, t - время, $k=(k_1,\dots,k_L)$ - вещественный волновой вектор, w - частота волны, u_0 - вектор констант, $i=\sqrt{-1}$. Метод Фурье сводится к проверке необходимого критерия фон Неймана: модуль любого корня характеристического многочлена схемы не должен превышать величины $1+O(\tau)$, где τ - шаг схемы по t. Выбор для реализации на ЭВМ именно метода Фурье связан, прежде всего, с тем, что он применим для широкого класса схем, алгоритмически прост и позволяет в некоторых случаях получать более точные, качественные результаты по сравнению с рядом других методов. В §2 приведены алгоритм реализации метода Фурье в символьном виде на ЭВМ, входные и выходные данные этого алгоритма, особенности его автоматизации с помощью языка РЕФАЛ. В соответствии с данным алгоритмом задача анализа устойчивости р.с. сведена к исследованию расположения на комплексной плоскости корней характеристического многочлена р.с. В §3 для решения последней задачи предложено использовать алгебраические методы теорий Рауса-Гурвица и Шура-Кона. Здесь приведены определения полиномов в зависимости от распределения их корней относительно единичного круга и левой полуплоскости комплексной плоскости и изложены различные детерминантные и рекуррентные критерии выделения того или иного класса полиномов. Детерминантные критерии - это те, в которых из коэффициентов многочлена по определенным правилам строится специальная матрица и вычисляются определители некоторых ее миноров. Рекуррентные критерии - это те критерии, которые используют некоторый рекуррентные механизм, позволяющий перейти от рассмотрения многочлена степени n к многочлену степени $n-1$ (тем самым анализ исходного полинома сводится к анализу полинома I-й степени, провести который гораздо проще). В данной работе использованы детерминантные критерии Рауса-Гурвица и Льенара-Шипара для решения задачи локализации корней полинома относительно левой полуплоскости (см. Постников М.М. Устойчивые многочлены.- М.: Наука, I98I). С целью применения этих критериев в случае решения задачи локализации относительно единичного круга использовано конформное отображение Мёбиуса. Различные рекуррентные критерии решения задачи анализа распределения корней полинома относительно единичного круга, использованные в данной работе, основаны на теоремах Миллера (Miller J.J.H.//J.Inst.Maths.Applics.-1971.-V.8.-N3.-P.397-406). В приложении Iа изложены некоторые примеры построения алгоритмов для перенесения приведенных в §3 критериев на ЭВМ. Описаны особенности их реализации в символьном виде на ЭВМ с помощью языка РЕФАЛ.

Использование символьных преобразований позволило перенести в аналитическом виде основные трудоемкие процессы метода Фурье - построение матрицы перехода и характеристического многочлена - на ЭВМ. Это обстоятельство дает возможность избежать применения ручного труда для проведения указанных процессов и уменьшить вероятность привнесения ошибок. Автоматизация получения в символьном виде (на основе использования вышеуказанных критериев анализа распределения корней полинома) систем неравенств из требования устойчивости р.с. позволяет, во-первых, избежать применения приближенного и трудоемкого процесса нахождения корней полинома, а во-вторых, расширяет возможность получения результата в аналитическом виде. В §4 рассмотрены вопросы применения созданной в диссертации системы аналитических вычислений (САВ) STADIS для исследования некоторых свойств р.с. В приложении Iб изложены проведенные в данной работе исследования устойчивости р.с. для ряда практических задач, взятых из различных источников. Основное внимание уделено случаю получения и разрешения итоговых неравенств в аналитическом виде. Более сложные примеры рассмотрены в главе 2.

Использование ЭВМ позволило свести решение задачи анализа устойчивости р.с. в аналитическом виде к решению системы "буквенных" неравенств. Четкого алгоритма решения последней задачи в общем случае для символьных неравенств нет. Решение данной проблемы усложняется еще и потому, что получаемые неравенства часто бывают нелинейными относительно искомых параметров и громоздкими, что значительно затрудняет их обработку вручную. В этой связи в <u>главе 2</u> предлагается аналитико-численная методика анализа устойчивости р.с. на ЭВМ. Эта методика использует символьно-численный интерфейс, разработанный автором и предназначенный для построения границ областей устойчивости схем на ЭВМ. В §I изложена общая структура такого интерфейса. Разностные схемы обычно можно записать в виде, в котором коэффициенты разностных уравнений зависят от некоторых безразмерных величин (числа Куранта, весовых параметров и т.п.) $\varkappa_1, \dots, \varkappa_M$. После подстановки правой части (I) в схему получаются формулы, в которые, кроме $\varkappa_1, \dots, \varkappa_M$, входят еще и величины $k_1 h_1, \dots, k_L h_L$, где $h_1, \dots, h_L$ – шаги равномерной сетки соответственно вдоль осей $x_1, \dots, x_L$. Следовательно, коэффициенты получаемого характеристического многочлена будут зависеть от $\varkappa_1, \dots, \varkappa_M$ и спектральных координат $\xi_1, \dots, \xi_L$, где $\xi_l = k_l h_l$, $l = 1, \dots, L$. Область устойчивости р.с. предлагается строить в M-мерном евклидовом пространстве E^M точек $(\varkappa_1, \dots, \varkappa_M)$, используя узловые точки некоторой сетки в области пространства $\mathcal{E}^L$ координат $(\xi_1, \dots, \xi_L)$.

Этапами предлагаемого интерфейса являются: I) построение характеристического многочлена схемы, 2) сведение критерия Неймана к эквивалентной системе неравенств, 3) вычисление границы области устойчивости схемы в E^M на основе численной проверки полученной системы аналитических неравенств.

Первые два символьных этапа интерфейса используют аппарат, рассмотренный в главе I. На третьем, численном этапе интерфейса для решения полученной нелинейной системы неравенств использованы методы теории оптимизации. С этой целью в §2 описана математическая постановка соответствующей оптимизационной задачи. В результате выполнения второго этапа интерфейса получается система неравенств

$$g_i(\varkappa_1, \dots, \varkappa_M, \vec{\xi}\,) \geq 0, \; i = 1, \dots, K, \tag{2}$$

где $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_L)$. Заметим, что коэффициенты характеристического многочлена являются периодическими функциями по $\xi_1, \dots, \xi_L$ с периодами, соответственно, $T_1, \dots, T_L$. В $\mathcal{E}^L$ рассмотрим параллелепипед $\Pi: \{0 \leq \xi_l \leq T_l, l = 1, \dots, L\}$. Выберем величину $\varkappa_1$ в качестве параметра и предположим, что уравнения $\varkappa_1 = \varkappa_1$, $\varkappa_j = \varphi_j(\varkappa_1)$, $j = 2, \dots, M$ определяют параметрически некоторую гладкую кривую $\mathcal{L}$ в E^M, пересекающую границу Γ_Ω области устойчивости Ω исследуемой схемы. Если ввести в рассмотрение аддитивную штрафную функцию

$$J(\varkappa_1, \vec{\xi}\,) = \sum_{i=1}^{K} \sigma_i \left[|\tilde{g}_i(\varkappa_1, \vec{\xi}\,)| - \tilde{g}_i(\varkappa_1, \vec{\xi}\,) \right], \tag{3}$$

где $\tilde{g}_i(\varkappa_1, \vec{\xi}\,) = g_i(\varkappa_1, \varphi_2(\varkappa_1), \dots, \varphi_M(\varkappa_1), \vec{\xi}\,)$, $\sigma_i \geq 0$, $i = 1, \dots, K$, – коэффициенты штрафа, то, в соответствии с методами теории оптимизации, целевую функцию G можно определить как

$$G(\varkappa_1, \vec{\xi}\,) = -\varkappa_1 + J(\varkappa_1, \vec{\xi}\,). \tag{4}$$

Поиск искомой величины $\varkappa_{1max}$ осуществляется следующим образом.

I. Для каждого фиксированного $\vec{\xi} \in \Pi$ решаем задачу

$$\min_{\varkappa_1^{min} < \varkappa_1 < \varkappa_1^{max}} G(\varkappa_1, \vec{\xi}\,). \tag{5а}$$

2. Для каждого $\vec{\xi} \in \Pi$ строим множества

$$B(\vec{\xi}\,) = \operatorname{Argmin}_{\varkappa_1} G(\varkappa_1, \vec{\xi}\,),$$
$$C(\vec{\xi}\,) = \{ \varkappa_1 \in B(\vec{\xi}\,) \,|\, G(\varkappa_1', \vec{\xi}\,) \geq G(\varkappa_1, \vec{\xi}\,), \forall \varkappa_1' \in B(\vec{\xi}\,) \}. \tag{5б}$$

3. Находим искомое решение как

$$\varkappa_{1max} = \min_{\vec{\xi} \in \Pi} \{ \varkappa_1 \,|\, \varkappa_1 \in C(\vec{\xi}\,) \}. \tag{5в}$$

Для теоретического обоснования использования метода штрафных функций в рассматриваемой задаче важным является обоснование выбора σ_i, $i = 1, \dots, K$ в (3). При предположении, что уравнение поверхности Γ_Ω имеет вид $\varkappa_1 = Q(\varkappa_2, \dots, \varkappa_M)$ и в Ω лежат все точки $(\varkappa_1, \dots, \varkappa_M) \in E^M \,|\, 0 \leq \varkappa_1 \leq Q(\varkappa_2, \dots, \varkappa_M)$, доказано

<u>Утверждение</u>. Если коэффициенты штрафа σ_i, $i = 1, \dots, K$, в (3) выбираются в виде

$$\sigma_i \begin{cases} > \max\limits_{\varkappa_1 \in \mathcal{D}_i} \{ 1/[2 \max\limits_{\vec{\xi} \in \Pi} |\partial \tilde{g}_i(\varkappa_1, \vec{\xi}\,)/\partial \varkappa_1|] \}, & \mathcal{D}_i \neq \varnothing, \\ = 0, & \mathcal{D}_i = \varnothing, \end{cases}$$

где $\mathcal{D}_i(\varkappa_1, \vec{\xi}\,) = \{ (\varkappa_1, \dots, \varkappa_M) \in E^M \,|\, \tilde{g}_i(\varkappa_1, \vec{\xi}\,) < 0 \}$, $i = 1, \dots, K$, то использование целевой функции вида (4), (3) для решения задачи (5) позволяет найти точку кривой $\mathcal{L}$, принадлежащую границе Γ_Ω области устойчивости Ω.

Решение задачи (5) позволяет найти лишь одну точку границы Γ_Ω, которая является точкой пересечения кривых $\mathcal{L}$ и Γ_Ω. Для того, чтобы найти множество точек Γ_Ω, необходимо построить множество кривых $\mathcal{L}^{(m)}$, часть из которых, предположительно, может пересекать Γ_Ω, и решить вдоль каждой такой кривой соответствующую задачу вида (5). В некоторых случаях требуется найти ограничение снизу на параметр $æ_1$. Для решения этой задачи достаточно задать функцию G в виде $G(æ_1, \vec{\xi}) = æ_1 + J(æ_1, \vec{\xi})$. При этом формулу (5в) необходимо заменить на $æ_{1max} = \max\limits_{\vec{\xi} \in \Pi} \{æ_1 | æ_1 \in C(\vec{\xi})\}$.

В §3 рассмотрена реализация предлагаемого интерфейса на ЭВМ. С целью большей автоматизации всего процесса анализа схем на втором этапе интерфейса результатом работы РЕФАЛ-программы является генерация ФОРТРАН-подпрограммы, в которой в виде ФОРТРАН-операторов выписаны левые части получаемой аналитически системы неравенств. Эта подпрограмма используется на третьем этапе интерфейса. Задачу (5) можно решать относительно $\xi_1, \ldots, \xi_L$ различными способами: либо задавать сетку, покрывающую область $\Pi \subset \mathcal{E}^L$, и искать решение в каждом узле сетки, либо решать L-мерную задачу вида $æ_{1max} = \min\limits_{\vec{\xi} \in \Pi} H(\vec{\xi})$, где $H(\vec{\xi}) = æ_1, æ_1 \in C(\vec{\xi}) | æ_1 \leq æ_1', \forall æ_1' \in C(\vec{\xi})$. При реализации этого процесса на ЭВМ в первом случае был использован метод Фибоначчи, во втором – метод покоординатного спуска.

В §4 приведены примеры практического использования созданной методики анализа устойчивости р.с. на примерах, взятых из различных областей механики сплошных сред. Исследование р.с. для ряда примеров было полностью проведено впервые в данной работе. С целью наглядности и верификации работы предлагаемого подхода в приложении П для одного из громоздких примеров приведены листинг выдачи ЭВМ и выкладки для частного случая.

Предлагаемый аналитико-численный подход анализа р.с. позволил уменьшить объем требуемых вычислений и повысить точность получаемых результатов. Использование его дает возможность ставить и решать качественно более сложные задачи (такие, как оптимизация областей устойчивости относительно параметров схемы), решение которых затруднительно при применении только лишь численных методов. В этой связи в <u>главе 3</u> рассматривается одна из таких задач – проблема выбора параметров схем из требования устойчивости. На основе использования описанного в главе 2 интерфейса предлагается метод автоматического поиска на ЭВМ р.с. с наибольшей по объему областью устойчивости среди схем заданного многопараметрического семейства. В §I дано понятие о "максимально устойчивых" р.с. (в смысле наибольшей по объему области устойчивости) и описание метода их поиска. С этой целью из множества величин $æ_1, \ldots, æ_M$ выделены весовые схемные параметры, которые обозначены через $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$. Тогда исходная задача есть задача о поиске относительно $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in R^N$ (где R^N – N-мерное евклидово пространство) в семействе $S(\vec{\alpha})$ схем с наибольшей по объему областью устойчивости. Введем в R^N параллелепипед $P = \{\vec{\alpha} \in R^N | A_i \leq \alpha_i \leq B_i, i = 1, \ldots, N\}$, $A_i < B_i$, где A_i, B_i – заданы. По аналогии с предыдущим пусть уравнение $æ_1 = Q(æ_2, \ldots, æ_{\tilde{M}}, \vec{\alpha})$, где $\vec{\alpha} \in P$ – некоторый заданный вектор, $\tilde{M} = M - N$, определяет границу области Ω в $E^{\tilde{M}}$. Предположим, что в Ω лежат все точки $(æ_1, \ldots, æ_{\tilde{M}})$, такие, что $0 \leq æ_1 \leq Q(æ_2, \ldots, æ_{\tilde{M}}, \vec{\alpha})$. Введем функционал $F(\vec{\alpha}) = \int\limits_V Q(æ_2, \ldots, æ_{\tilde{M}}, \vec{\alpha})\, dV$, где V – некоторая заданная область изменения величин $æ_2, \ldots, æ_{\tilde{M}}$.

<u>Определение</u>. Разностную схему $S(\vec{\alpha}^*)$, где $\vec{\alpha}^* = (\alpha_1^*, \ldots, \alpha_N^*) \in P$, будем называть "максимально устойчивой" в области V, если точка $\vec{\alpha}^*$ является точкой глобального максимума функционала $F(\vec{\alpha})$ на P.

Поиск "максимально устойчивых" схем $S(\vec{\alpha}^*)$ осуществляется следующим образом. Сначала решается задача безусловной оптимизации $\max\limits_{\vec{\alpha} \in P} F(\vec{\alpha})$. Обозначим через $X = \mathrm{Arg}\max\limits_{\vec{\alpha}} F(\vec{\alpha})$ совокупность всех точек $\vec{\alpha} \in P$, таких, что функционал $F(\vec{\alpha})$ достигает в этих точках своих локальных максимумов. Введем также множество $Y = \{\vec{\alpha} \in X | F(\vec{\alpha}) \geq F(\vec{\alpha}'), \forall \vec{\alpha}' \in X\}$. Точки множества Y и будут искомыми.

В §2 изложены алгоритм поиска "максимально устойчивых" схем и его реализация на ЭВМ. При реализации данного алгоритма на ЭВМ изменяется только третий, численный этап описанного в главе 2 подхода, поскольку первые два его этапа реализованы символьно на ЭВМ и работают для любого вида коэффициентов р.с. Это является существенным моментом для решения поставленной задачи, поскольку позволяет не вычислять каждый раз для определенной схемы из семейства характеристический многочлен и соответствующую систему неравенств. Они вычисляются и записываются на магнитном носителе в виде ФОРТРАН-подпрограммы только один раз для всего семейства. Поэтому значительно экономится время ЭВМ и математика-вычислителя. На третьем этапе искомая точка $\vec{\alpha}^*$ находится в результате решения последовательности задач (5) при конкретных значениях $\alpha_1^{(m)}, \ldots, \alpha_N^{(m)}$. Для решения задачи о поиске $\vec{\alpha}^*$ был использован метод покоординатного спуска. В §3 приведены примеры практического использования созданного метода для получения новых схем с расширенными (по сравнению с известными) областями устойчивости в нескольких многопараметрических семействах р.с. для решения одно- и двумерных модельных задач динамики вязкой жидкости (Пейре Р., Тейлор Т.Д. Вычислительные методы в задачах механики жидкости.–Л.: Гидрометеоиздат, 1986). Во всех семействах были найдены "максимально устойчивые" р.с. на различных интервалах выбранных величин $æ_1,\ldots,æ_{\tilde{M}}$. С целью верификации полученных во всех примерах границ областей устойчивости были проведены расчеты задачи о распространении ступеньки по схемам из различных семейств, которые подтверждают, что значения $\vec{\alpha}^*$ найдены правильно, поскольку счет для схем $S(\vec{\alpha}^*)$ был устойчив при условии $(æ_1,\ldots,æ_{\tilde{M}})\in\Omega$. Часть этих расчетов в виде графиков приведена в приложении Ш. Следует отметить, что счет по схемам $S(\vec{\alpha}^*)$ в некоторых случаях потребовал примерно в 1,5–2 раза меньше шагов по времени, чем счет по известным схемам.

С целью практического использования получаемых при помощи описанных аналитико-численных подходов таблиц значений границ областей устойчивости р.с. в §4 предложен алгоритм определения максимально возможного временного шага на основе этих таблиц. Алгоритм основан на применении сплайн-функции, интерполирующей полученные значения табличной функции. Он также реализован на ЭВМ и апробирован на одном из семейств, рассмотренных в §3.

Глава 4 посвящена построению и исследованию локальной аппроксимации р.с. с помощью символьных преобразований на ЭВМ. В §I приведены основные понятия, необходимые для изложения материала, в §2 и §3 рассмотрены вопросы автоматизации соответственно процесса построения схем и процесса нахождения погрешности аппроксимации схем. В §2 с целью решения указанной задачи разработан алгоритм, в основе которого лежит метод неопределенных коэффициентов. Данный алгоритм является обобщением предложенного в работе (Валиуллин А.Н. и др.//Препринт ИТПМ СО АН СССР. 1981, № 7–81) алгоритма построения схем для случая скалярного линейного уравнения с постоянными коэффициентами. Его реализация на языке РЕФАЛ в виде САВ **GENEDIS** осуществлена для случая произвольной системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных как с постоянными, так и с переменными коэффициентами. Допускается использование регулярных и нерегулярных шаблонов. Предлагаемая в §3 САВ **INLADIS** для анализа аппроксимации схем в символьном виде на ЭВМ работает как для одного, так и для системы дифференциальных уравнений (со многими независимыми переменными). Эти уравнения могут быть неоднородными, с переменными коэффициентами и квазилинейными.

В §4 приведены примеры использования созданных в диссертационной работе САВ **GENEDIS** и **INLADIS** для различных дифференциальных уравнений, шаблонов и схем. САВ **INLADIS** использована, в частности, для исследования точности некоторых схем, полученных в главе 3. Более громоздкие и наглядные примеры приведены в приложении IУ. При реализации метода неопределенных коэффициентов зачастую получаются р.с., зависящие от некоторых параметров. В данной работе выбор этих параметров предлагается осуществлять из требования устойчивости схем (или "максимальной устойчивости" в указанном выше смысле). Решение последней задачи продемонстрировано в §4 на нескольких простых примерах. При этом использовалась описанная в первых главах САВ **STADIS**.

Реализация всех созданных в диссертации САВ такова, что специалист-вычислитель может самостоятельно на ЭВМ исследовать и строить предлагаемыми подходами р.с.

В заключении сформулированы основные результаты работы с краткими характеристиками.

Ш. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Разработана аналитико-численная методика автоматического построения на ЭВМ границ областей устойчивости разностных схем для систем дифференциальных уравнений на основе метода Фурье, которая реализована в виде комплекса программ с необходимым для этого символьно-численным интерфейсом.
2. Применительно к исследованию разностных схем осуществлена реализация проверки в символьном виде на ЭВМ критериев теорий Рауса-Гурвица и Шура-Кона для анализа распределения на комплексной плоскости корней многочлена произвольного типа.
3. Предложен метод автоматического поиска на ЭВМ разностных схем с наибольшей по объему областью устойчивости среди схем заданного многопараметрического семейства.
4. С помощью ЭВМ получены новые результаты по исследованию

устойчивости разностных схем, в том числе найдены новые схемы для решения одно- и двумерных модельных задач динамики вязкой жидкости с расширенными по сравнению с известными схемами областями устойчивости.

5. Для случая систем дифференциальных уравнений с частными производными и переменными коэффициентами обобщен алгоритм построения в символьном виде на ЭВМ разностных схем на основе метода неопределенных коэффициентов. Разработан алгоритм проверки в символьном виде на ЭВМ порядка локальной аппроксимации разностных схем для систем квазилинейных дифференциальных уравнений со многими независимыми переменными.

6. Созданы специализированные САВ для проведения всех указанных выше исследований на ЭВМ.

IУ. ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

I. Мазурик С.И. Применение ЭВМ для исследования устойчивости разностных схем систем дифференциальных уравнений // Материалы XX Всесоюз.научн.студ.конф.-Новосибирск, НГУ,1982.С.4I-54.

2. Валиуллин А.Н., Ганжа В.Г., Мазурик С.И., Мурзин Ф.А., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Применение ЭВМ для исследования и построения разностных схем // Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в теоретической физике.-ОИЯИ,ДII-83-5II,Дубна, I983.-С.85-96.

3. **Valiullin A.N.,Ganzha V.G.,Mazurik S.I.,Meleshko S.V.,Shapeev V.P.,Yanenko N.N. Symbolic manipulations and their applications to constructing new exact solutions and difference schemes//Proc.of France-Italy-URSS 6-th Joint Symp.on Numer.** Solutions of Non-Linear Probl.-Rocquencourt,1983.-P.314-329.

4. Яненко Н.Н., Ганжа В.Г., Мазурик С.И., Шапеев В.П. Анализ и построение разностных схем с помощью аналитических выкладок на ЭВМ // Тез.докл.Всесоюзн.конф.по системам для аналитических преобразований в механике.-Изд.ГГУ,I984.-С.I2-I3.

5. Мазурик С.И., Мурзин Ф.А., Шапеев В.П. Комплекс программных модулей, реализующий в символьном виде спектральный метод Фурье исследования устойчивости разностных схем // Комплексы программ математической физики.-Новосибирск, ИТПМ и ВЦ СО АН СССР,I984.-С.24-32.

6. Яненко Н.Н., Ганжа В.Г., Мазурик С.И., Шапеев В.П. Применение символьных преобразований на ЭВМ для построения и анализа разностных схем // Оптимизация и моделирование в САПР.-Горький, Изд.ГГУ,I985.-С.4I-57.

7. Ворожцов Е.В., Ганжа В.Г., Мазурик С.И., Шапеев В.П. Применение символьных преобразований для исследования на ЭВМ разностных схем для систем линейных уравнений с частными производными // Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в теоретической физике.-ОИЯИ,ДII-85-79I,Дубна,I985.-С.3II-3I6.

8. **Ganzha V.G., Mazurik S.I., Shapeev V.P. Symbolic manipulations on a computer and their applications to generation and investigation of difference schemes//Lecture Notes in Computer Science.-1985.-V.204.-P.335-347.**

9. Мазурик С.И. Алгоритмы решения задачи о локализации корней символьного многочлена, их реализация на ЭВМ и применение.-Новосибирск,I985.-48с.-(Препринт/АН СССР. Сиб.отд-ние. Ин-т теорет.и прикл.механики; № 24-85).

I0. Мазурик С.И. Автоматизация процесса построения разностных схем для систем дифференциальных уравнений в частных производных // Динамика многофазных сред.-Новосибирск, ИТПМ СО СССР, I985.-С.I40-I48.

II. Мазурик С.И. Исследование аппроксимации и устойчивости разностных схем с помощью символьных преобразований на ЭВМ // Моделирование процессов гидрогазодинамики и энергетики.-Новосибирск, ИТПМ СО АН СССР,I985.-С.9-I3.

I2. Мазурик С.И. Устойчивость многочленов и символьные преобразования на ЭВМ // Числ.методы механики сплошной среды.-Новосибирск, ИТПМ и ВЦ СО АН СССР,I986.-Т.I7.-№6.-С.93-I0I.

I3. Мазурик С.И., Шапеев В.П. Применение символьных преобразований на ЭВМ для исследования аппроксимации и устойчивости разностных схем // Журн.вычисл.матем.и матем.физики.-I986.-Т.26.-№ 4.-С.586-600.

I4. Ворожцов Е.В., Ганжа В.Г., Мазурик С.И. Символьно-численный интерфейс в задачах исследования устойчивости разностных схем на ЭВМ // Числ.методы механ.сплошной среды.-Новосибирск,I986.-ИТПМ и ВЦ СО АН СССР,I986.-Т.I7.-№5.-С.43-58.

I5. Ворожцов Е.В., Ганжа В.Г., Мазурик С.И., Шапеев В.П. Оптимизационный подход к построению областей устойчивости разностных схем на ЭВМ // Тез.докл.УI Всесоюзн.школы по теор.основам и конструированию числ.алгоритмов решения задач мат.физики.-Горький, ГГУ, I986.-С.43.

16. Ворожцов Е.В., Мазурик С.И. Метод автоматического поиска разностных схем с наибольшей по объему областью устойчивости среди схем заданного семейства.1.Описание метода и приложение к одномерным задачам.-Новосибирск,1987.-52с.-(Препринт АН СССР.Сиб.отд-ние.Ин-т теорет.и прикл.механики; № 24-87).
17. Ворожцов Е.В., Мазурик С.И. Метод автоматического поиска разностных схем с наибольшей по объему областью устойчивости среди схем заданного семейства.2.Приложение к двумерным задачам.-Новосибирск,1987.-51с.-(Препринт/АН СССР.Сиб.отд-ние. Ин-т теорет.и прикл.механики; № 34-87).
18. Мазурик С.И. Автоматизация процесса анализа устойчивости разностных схем с помощью методов компьютерной алгебры и теории оптимизации // Моделирование в механике.-Новосибирск, ИТПМ и ВЦ СО АН СССР,1988.-Т.2(19).-№2.-С.84-93.

**Рукопись поступила в издательский отдел
12 декабря 1988 года.**