ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

11-82-311

КАДАНЦЕВА
Елизавета Петровна

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ САМОСОГЛАСОВАННОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Специальность: 01.01.07 - вычислительная математика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Дубна 1982

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации Объединенного института ядерных исследований.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук — С.И.СЕРДЮКОВА.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук профессор — В.И.ДМИТРИЕВ,
кандидат физико-математических наук — Н.А.СТРЕЛКОВ.

Ведущее научно-исследовательское учреждение - Казанский государственный университет.

Автореферат разослан "______" ____________ 1982 года.
Защита состоится "_____" ____________ 1982 года в "_____"часов на заседании Ученого совета Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ, г.Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Ученый секретарь Совета
кандидат физико-математических наук — З.М.ИВАНЧЕНКО

<u>Актуальность</u>. Расчет электромагнитных полей, возбуждаемых движением плотных сгустков электронов в ускоряющей структуре, представляет большой интерес для развития коллективных методов ускорения. Важно знать распределение этих полей и уметь оценивать обратное влияние полей на движение сгустка электронов. Для коллективного ускорения требуются высокоинтенсивные сгустки электронов с числом частиц $N \sim 10^{13}$. При этом возникает ряд трудностей. Энергия, которую необходимо сообщить сгустку электронов на единицу пути, составляет заметную долю энергии поля, создаваемого внешними источниками. Потери энергии на излучение при прохождении пространственных неоднородностей могут оказаться сравнимыми с энергией, приобретаемой сгустком электронов при движении. Поэтому правильная оценка потерь энергии на излучение позволяет ответить на вопрос, возможно ли производить ускорение сгустка при помощи резонатора.

Этой проблеме посвящены работы Колпакова О.А., Котова В.И., Болотовского Б.М., Воскресенского Г.В., Курдюмова В.Н., Картина В.И., Фоменко Г.П., Keil E., Berg R., Weiland T. и других. Однако в большинстве работ скорость движения источника принимается постоянной, в отдельных работах закон движения источника предписывается заранее. Обратное влияние собственного поля источника на его движение не учитывается. Рассматриваются сильно идеализированные модели, для которых удается получить аналитические решения.

Особый интерес представляет постановка задачи, которую называют самосогласованной. Она наиболее полно отражает картину физического явления. Решается система уравнений Максвелла. Изменение скорости движения сгустка электронов описывается релятивистским уравнением движения. Учитывается обратное влияние собственного поля сгустка на его движение.

В такой модели не удается получить аналитическое решение. Поэтому становится актуальной разработка численных методов решения самосогласованной задачи.

<u>Цель настоящей диссертации</u> состояла в численном моделировании движения плотных сгустков электронов в ускоряющей структуре.

Научная новизна работы. I) Разработан численный алгоритм решения самосогласованной электродинамической задачи. Система уравнений Максвелла и нелинейное уравнение движения решаются с использованием метода конечных разностей.

2) Разработан эффективный численный алгоритм решения уравнения Пуассона с разрывной правой частью, сосредоточенной на малой площадке. Метод позволяет определять начальные данные с высокой точностью, необходимой для корректного счета интеграла, управляющего движением.

3) Доказана устойчивость и сходимость численного решения в сеточной норме L_2.

Практическая ценность работы. Численно исследованы задачи:

I) О движении сгустка электронов из неустойчивого положения равновесия в однородной и неоднородной ускоряющих структурах;

2) о влете плотного сгустка электронов в резонатор через торцовую стенку подводящего волновода.

Рассмотренный алгоритм решения самосогласованной задачи может быть использован при расчете электромагнитных полей в резонаторах более сложной структуры, а также при решении задач с другими начальными данными и другими граничными условиями.

Апробация работы. Работы, положенные в основу диссертации, докладывались на Международном совещании по программированию и математическим методам решения физических задач (Дубна, 1977 г.), на научных семинарах ЛВТА и ОНМУ ОИЯИ.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 6 работах, в том числе в трудах совещания, ЖВМ и МФ и в сообщениях ОИЯИ.

Объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Содержит 104 страницы машинописного текста, 30 рисунков, 14 таблиц, список литературы, насчитывающий 38 наименований.

Содержание работы. Во введении дается обзор литературы по тематике диссертации, а также изложение основных результатов диссертации по главам.

Глава I посвящена описанию разностного алгоритма решения самосогласованной системы уравнений Максвелла.

В § I дается физическая и математическая постановки задачи. Рассматривается замкнутая коаксиальная структура цилиндрической формы, в которой ускоряется высокоинтенсивный сгусток с полным числом частиц $N \sim 10^{13}$.

Уравнения Максвелла для рассматриваемого случая имеют вид:

$$\frac{\partial E_r}{\partial \xi} = -\frac{\partial H_\varphi}{\partial z},$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial \xi} = \frac{1}{r}\frac{\partial r H_\varphi}{\partial r} - \frac{4\pi}{c} j_z, \quad j_z = c\rho \frac{dq}{d\xi}, \qquad (I)$$

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial \xi} = -\frac{\partial E_r}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial r},$$

$$\xi = ct, \quad (r,z) \subset \Omega, \quad \xi \in [0,T].$$

Здесь $\{E_r, E_z, H_\varphi\}$ – составляющие электромагнитного поля в цилиндрической системе координат. Распределение плотности заряда ρ задается соотношением

$$\rho(r,z,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0}{2\pi r}, & (r,z) \subset \sigma(\xi), \\ 0, & (r,z) \subset \Omega \setminus \sigma(\xi), \end{cases}$$

ρ_0 – плотность заряда сгустка, $\sigma(\xi)$ – область, занимаемая сечением сгустка в момент времени ξ.

Центр сечения сгустка $q(\xi)$ по оси z удовлетворяет релятивистскому уравнению движения

$$c^2 M \frac{d}{d\xi}\left(\frac{dq}{d\xi}\left(1-\left(\frac{dq}{d\xi}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right) = 2\pi \int\limits_{\sigma(\xi)} \rho E_z r\, dr\, dz. \qquad (2)$$

Касательные составляющие $\bar{E}$, $\bar{H}$ на границе идеально проводящей структуры равны нулю.

Решаются задачи о движении сгустка электронов внутри ускоряющей структуры.

Задача I: (О движении сгустка электронов из неустойчивого положения равновесия в резонаторе однородной структуры).

Система (I), (2) решается в однородной области $\Omega_1 = \{r, z;\ R_1 \le r \le R_2,\ 0 \le z \le A\}$. Начальное распределение составляющих $E_r|_{\xi=0}, E_z|_{\xi=0}$ электромагнитного поля $\bar{E}, \bar{H}$ находится из решения уравнения Пуассона в области Ω_1:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -4\pi\rho,$$

$$\Phi\big|_{\partial\Omega_1} = 0, \tag{3}$$

$$E_r\big|_{\xi=0} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad E_z\big|_{\xi=0} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Наведенная сторонняя волна $H_\varphi|_{\xi=0}$ задается соотношением

$$H_\varphi\big|_{\xi=0} = B\left\{Y_0(\sigma R_1)J_1(\sigma r) - J_0(\sigma R_1)Y_1(\sigma r)\right\}, \tag{4}$$

σ – минимальный положительный корень уравнения

$$J_0(x R_1)Y_0(x R_2) - J_0(x R_2)Y_0(x R_1) = 0.$$

J_0, J_1 – функции Бесселя, Y_0, Y_1 – функции Неймана. Предполагается, что $q(0)$ – задано, $\dot q(0) = 0$.

Задача 2. (О движении сгустка электронов из неустойчивого положения равновесия в резонаторе неоднородной структуры).

Система (I),(2) решается в неоднородной области $\Omega_2 = \{r, z;\ (R_1 \le r \le R_2,\ 0 \le z \le Z) \cup (R_2 \le r \le R_3,\ z_1 \le z \le z_2)\}$, $R_1, R_2, R_3, z_1, z_2, Z$ – параметры структуры. Начальное распределение составляющих $E_r|_{\xi=0}$, $E_z|_{\xi=0}$ электромагнитного поля для задачи 2 находится из решения уравнения Пуассона (3) в области Ω_2.

Импульсное стороннее поле $H_\varphi|_{\xi=0}$ задается соотношением

$$H_\varphi\big|_{\xi=0} = \begin{cases} B\left\{Y_0(\sigma R_1)J_1(\sigma r) - J_0(\sigma R_1)Y_1(\sigma r)\right\}, & r \ge R_H, \\ 0, & r < R_H. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь σ определяется из решения уравнения (4) при $R_2 = R_3$, R_H – корень уравнения

$$Y_0(\sigma R_1)J_1(\sigma R_H) - J_0(\sigma R_1)Y_1(\sigma R_H) = 0.$$

Предполагается, что $q(0)$ – задано, $\dot q(0) = 0$.

Задача 3. (О влете сгустка электронов в резонатор через торцовую стенку подводящего волновода).

Система уравнений (I),(2) решается в неоднородной области Ω_2. Начальное распределение электромагнитного поля находится из решения двух вспомогательных задач.

Предварительно численно решается система (I) с заданной постоянной скоростью движения сгустка $\frac{dq}{d\xi} = \rho_0 \ne 0$. Предполагается, что $E_r|_{\xi=0} = E_z|_{\xi=0} = H_\varphi|_{\xi=0} = 0$, $q(0) = -l_\sigma/2$ (l_σ – линейный размер сгустка $\sigma(\xi)$ квадратного сечения). Сгусток электронов проникает в область структуры через ее торцовую стенку. Задача решается до момента ξ_0 отрыва сгустка от левой стенки структуры.

Затем на отрезке времени $[0, \xi_0]$ независимо решается задача о распространении импульсного поля $H_\varphi|_{\xi=0}$ в пустом резонаторе. В области Ω_2 решается система (I) с $\rho_0 = 0$, $E_r|_{\xi=0} = E_z|_{\xi=0} = 0$, $H_\varphi|_{\xi=0}$ задается формулой (5).

Суперпозиция полученных в момент времени ξ_0 решений двух вспомогательных задач принимается в качестве начальных данных динамической самосогласованной задачи 3. При этом $q(\xi_0) = l_\sigma/2$, $\dot q(\xi_0) = \rho_0$.

Следствиями (I),(2) являются законы сохранения энергии и импульса:

$$\frac{1}{4}\int_\Omega (E_r^2 + E_z^2 + H_\varphi^2)\, r\,dr\,dz\,\Big|_{\xi_0}^{T} = -\frac{2\pi}{c}\int_{\xi_0}^{T}\int_{\sigma(\xi)} j_z E_z\, r\,dr\,dz\,d\xi, \tag{6а}$$

$$c^2 M\left(1 - \left(\frac{dq}{d\xi}\right)^2\right)^{-1/2}\Big|_{\xi_0}^{T} = \frac{2\pi}{c}\int_{\xi_0}^{T}\int_{\sigma(\xi)} j_z E_z\, r\,dr\,dz\,d\xi. \tag{6б}$$

Удовлетворение законов сохранения (6а), (6б) принимается основным критерием правильности численного решения.

В § 2 описывается эффективный численный метод решения уравнения Пуассона (3) в Ω_1 и Ω_2 (однородной и неоднородной областях соответственно). Строится разностная аппроксимация (3), выбирается начальное приближение $\Phi^{(0)}$. Далее задача решается по оптимальному методу релаксаций*) на сетках с шагами h и $h/2$. Проводится линейная экстраполяция полученных значений на $h = 0$. В случае однородной области этот алгоритм решения (3) дает хорошее согласование численных значений нормы начальных данных в L_2 и интеграла, управляющего движением $F(0) = \frac{2\pi}{c^2 M}\int_{\sigma(0)} \rho\, E_z|_{\xi=0}\, r\,dr\,dz$, с их аналитическими значениями.

§ 3 посвящен описанию разностного алгоритма решения системы уравнений Максвелла (I) в однородной и неоднородной областях, а также решению нелинейного уравнения движения (2).

В областях Ω_1, Ω_2 строятся квадратные сетки $\bar\Omega_{1h}$, $\bar\Omega_{2h}$ с шагом h. Дополнительно строятся сетки Ω^*_{1h}, Ω^*_{2h}, узлы которых расположены в центрах ячеек сеток $\bar\Omega_{1h}$, $\bar\Omega_{2h}$. В узлах сеток $\Omega^*_{1h}, \Omega^*_{2h}$ строится аппроксимация граничных условий для (I) и задаются начальные данные. Счет ведется по схеме Лакса с пересчетом по "кресту". В течение шага по времени τ значение $\rho_n = \frac{dq}{d\xi}\big|_{\xi=n\tau}$ считается фиксированным и при счете ($n+1/2$)-го и ($n+1$)-го слоев берется равным значению на n-м слое.

*) Carre B.A., Computer J., v.4, N1, April, 1966 .

Положение $q(\xi)$ центра сечения сгустка $\sigma(\xi)$ находим, используя разностный аналог уравнения движения Ньютона (2). Уравнение решается итерациями. Численные эксперименты показали, что для корректного счета движения сгустка необходимо правую часть (2) вычислять с высокой точностью. Для этого учтено "непрерывное" движение сгустка по разностной сетке.

В этом параграфе приводятся разностные аналоги законов сохранения энергии и импульса.

Глава 2 посвящена исследованию устойчивости и сходимости численного решения самосогласованной системы уравнений Максвелла (I),(2).

В §§ I,2 доказана устойчивость разностного алгоритма в $L_2(\Omega_1)$ $(L_2(\Omega_2))$. При доказательстве используется метод энергетических неравенств[*)].

Теорема. При $\alpha = \tau/h \leq 1$ и $n\tau \leq T$ разностная задача, аппроксимирующая (I),(2), устойчива по начальным данным в $L_2(\Omega_1)(L_2(\Omega_2))$.

Для нелинейных задач нет аналога теоремы Лакса об эквивалентности: из условий аппроксимации и устойчивости, вообще говоря, не следует сходимость.

В § 3 доказана сходимость численного решения к точному решению нелинейной задачи (I),(2).

Пусть $\bar{Y}\{E_z, E_r, H_\varphi\}$ – точное решение (I),(2). Относительно решения делаются естественные предположения[**)].

I) В области Ω_2 существует конечное число K линий $\mathcal{L}_i$ $(i=1,2,\dots,K)$ разрыва первых производных решения. Линии разрыва кусочно-гладкие и имеют конечную длину.

2) Вне линий разрыва $\Omega_2 \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{K} \mathcal{L}_i$, $\bar{Y}$ – гладкая вектор-функция с ограниченными первыми производными.

3) $\bar{Y}_\xi$ – непрерывна при $\xi \in [0,T]$.

Теорема. Пусть решение $\bar{Y}$ задачи (I),(2) удовлетворяет условиям I)-3). Тогда при $\alpha = \tau/h \leq 1$ и $n\tau \leq T$ решение разностной задачи $\bar{U}$ сходится к решению (I),(2) со скоростью

$$\|\bar{Y} - \bar{U}\|_{L_2} = O(\omega(\tau,h) + \sqrt{h}),$$

где $\omega(\tau,h)$ – модуль непрерывности первых производных решения в $\mathcal{D}_T = [\Omega_2 \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{K} \mathcal{L}_i] \times [0,T]$ (для точек, лежащих по одну сторону от линии разрыва).

Следствие. Если в $\mathcal{D}_T$ решение $\bar{Y}$ имеет ограниченные вторые производные, то $\|\bar{Y} - \bar{U}\|_{L_2} = O(\tau + \sqrt{h})$.

[*)] Самарский А.А., Гулин А.В. "Устойчивость разностных схем".
[**)] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. "Системы квазилинейных уравнений".

В главе 3 обсуждаются результаты численных расчетов.

В § I приводятся результаты расчета движения плотного сгустка электронов из неустойчивого положения равновесия в однородной структуре. Проведены расчеты для различных начальных расположений центра $q(\xi)$ сгустка по оси z, расчеты движения "облегченного" сгустка $(\rho_0\ 14.25)$ и движения в отсутствие наведенной сторонней волны $(H_\varphi|_{\xi=0} = 0)$.

В § 2 приводятся результаты расчета движения плотного сгустка электронов из неустойчивого положения равновесия в неоднородной структуре. Дополнительно рассматривается движение без учета обратного влияния собственного поля сгустка и движение "утяжеленного" сгустка $(2\rho_0)$.

В §3 приводятся результаты расчета движения сгустка электронов, влетающего с различными скоростями в резонатор через торцовую стенку подводящего волновода. Также рассматривается "влет" сгустка в структуру без учета влияния собственного поля сгустка на его движение и "влет" сгустка в структуру при отсутствии импульсного стороннего поля $(H_\varphi|_{\xi=0} = 0)$. Дополнительно рассматривается "влет" сгустка электронов в резонатор прямоугольного сечения для различных радиусов внутреннего и внешнего цилиндров.

В §§ I-3 приводятся графики скорости движения сгустка $\frac{dq}{d\xi}$ и силы, действующей на сгусток $F(\xi) = \frac{2\pi}{c^2 M}\int\limits_{\sigma(\xi)} \rho E_z r\,dr\,dz$, таблицы энергетических соотношений.

Основные результаты диссертации. I) Разработан алгоритм решения самосогласованной электродинамической задачи. Соответствующая группа уравнений Максвелла и нелинейное уравнение движения сгустка решаются методом конечных разностей.

2) Разработан эффективный численный алгоритм решения уравнения Пуассона с разрывной правой частью, сосредоточенной на малой площадке. Метод позволяет определять начальные данные с высокой точностью, необходимой для корректного счета интеграла, управляющего движением.

3) Доказана устойчивость в L_2 численного метода решения самосогласованной электродинамической задачи при естественном ограничении на шаги сетки $\tau/h \leq 1$ и $n\tau \leq T$.

Рассмотренная задача является нелинейной. При некоторых, достаточно общих предположениях относительно свойств решения дифференциальной задачи доказана сходимость численного решения к точному в L_2.

4) Численно исследованы модели движения плотного сгустка электронов из неустойчивого положения равновесия в неоднородной ускоряющей структуре, а также влет плотного сгустка электронов в резонатор через торцовую стенку подводящего волновода.

5) Рассмотренный метод решения самосогласованной электродинамической задачи, в принципе, может быть использован при решении других задач, например, при решении задач в областях более сложной формы или задач с другими начальными данными и другими граничными условиями.

Работы, положенные в основу диссертации

1) Бахвалов Н.С., Жидков Е.П., Каданцева Е.П., Рубин С.Б., Сердюкова С.И. В сб. "Совещание по программированию и математическим методам решения физических задач", Д10-11-11264, Дубна, 1978.
2) Бахвалов Н.С., Жидков Е.П., Каданцева Е.П., Рубин С.Б., Сердюкова С.И. ЖВМ и МФ, т.19, № 5, 1979.
3) Бахвалов Н.С., Жидков Е.П., Каданцева Е.П., Рубин С.Б., Сердюкова С.И., ЖВМ и МФ, т.22, № 3, 1982.
4) Каданцева Е.П. ОИЯИ, Р11-80-89, Дубна, 1980.
5) Каданцева Е.П. ОИЯИ, Р11-81-813, Дубна, 1981.
6) Бахвалов Н.С., Жидков Е.П., Каданцева Е.П., Рубин С.Б., Сердюкова С.И. ОИЯИ, Р11-82-233, Дубна, 1982.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 апреля 1982 года.