

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

11-2005-67

На правах рукописи
УДК 519.6, 517.9

СТРЕЛЬЦОВА
Оксана Ивановна

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА
ФОРМИРОВАНИЯ СИНГУЛЯРНОСТЕЙ
В СВЯЗАННОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ
ЯНГА–МИЛЛСА С ДИЛАТОНОМ**

Специальность: 05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:

кандидат физико-математических наук
кандидат физико-математических наук

Э.А. Айрян
Е.Е. Донец

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
доктор физико-математических наук

В. П. Цветков
Е. Б. Ланеев

Ведущая организация:

Физический факультет Московского государственного университета
им. М.В. Ломоносова.

Защита состоится "28" июня 2005 г. в "14"⁰⁰ на заседании диссертационного совета Д. 720.001.04 в Объединенном институте ядерных исследований (Лаборатория информационных технологий), г. Дубна Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке
Объединенного института ядерных исследований

Автореферат разослан "27" мая 2005 г.

Ученый секретарь диссертационного совета / 1642
кандидат физико-математических наук З.М. Иванченко

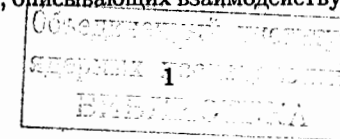
Актуальность темы

Одной из характерных особенностей, отличающей нелинейные эволюционные уравнения, от линейных является возможность формирования сингулярности – процесса, при котором решения (или его производные) неограниченно возрастают за конечное время в некоторой области пространства при ограниченных и гладких начальных данных.

Возможность образования пространственно-временных сингулярностей является одной из ключевых особенностей уравнений Эйнштейна. Детальное исследование динамики коллапса (образование пространственно-временной сингулярности во внутренней области черной дыры) в теории гравитации до сих пор остается актуальной и во многом нерешенной задачей. Однако, проведенные исследования процесса формирования сингулярностей в нелинейных эволюционных уравнениях в различных полевых моделях без гравитации показали, что этот процесс имеет много общих математических свойств с гравитационным коллапсом и роль гравитационного поля тут не является определяющей. Базируясь на этом наблюдении, было выдвинуто предположение, что все основные свойства гравитационного коллапса безмассовых полей материи, изначально обнаруженные на уравнениях Эйнштейна (универсальность, самоподобие, критическое поведение решений и т.д.), на самом деле есть свойства широкого класса *надкритических систем* нелинейных уравнений в частных производных. Как выяснилось далее, этот класс включает в себя уравнения Эйнштейна, уравнения Янга-Миллса в пространстве Минковского размерности $5 + 1$, некоторые нелинейные σ -модели и волновые отображения, Риччи-поток и многие другие.

Следуя этому предположению, в диссертации исследовалась система уравнений Янга-Миллса с дилатоном (ЯМд) в пространстве-времени Минковского размерности $3 + 1$, которая является удобной математической моделью, позволяющей исследовать наиболее общие свойства всех надкритических систем нелинейных эволюционных уравнений вплоть до образования сингулярностей, тогда как, например, в задаче гравитационного коллапса это возможно лишь до образования горизонта событий черной дыры.

Целью работы является исследование процесса образования сингулярностей в сферически-симметричных решениях связанной системы двух нелинейных волновых уравнений, описывающих взаимодействующие поля Янга-Миллса



и дилатонного поля в пространстве-времени Минковского размерности $3 + 1$.

В рамках проведенного исследования были решены следующие задачи:

– найдены собственные неустойчивые моды стационарных решений системы уравнений ЯМд;

– получено семейство автомодельных решений системы ЯМд, проведен анализ их устойчивости в линейном приближении с помощью метода фазовых функций;

– установлены условия возникновения сингулярности в решениях системы ЯМд для широкого класса начальных данных в полной самосогласованной эволюционной задаче Коши;

– изучена роль стационарных и автомодельных решений в динамике формирования сингулярностей, как возможных промежуточных аттракторов и критических решений.

Целью работы также являлась разработка эффективных вычислительных алгоритмов для решения выше перечисленных задач, в частности для решения:

– краевых задач для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, имеющих особые точки как внутри, так и на границах исследуемого интервала по пространственной переменной;

– матричных задач Штурма-Лиувилля – задач на нахождение собственных неустойчивых мод стационарных решений;

– начально-краевых задач для систем нелинейных волновых уравнений, возникающих при исследовании эволюции полевых конфигураций в системе ЯМд с последующим образованием сингулярности.

Научная новизна и практическая ценность

Впервые получено счетное множество автомодельных решений системы ЯМд и показано, что безузловое автомодельное решение является устойчивым.

Впервые получены неустойчивые моды регулярных стационарных решений системы ЯМд в линейном приближении, на основе которых была решена задача распада стационарных решений.

Было установлено, что стационарные решения в системе ЯМд образуют счетное множество критических (пороговых) решений, разделяющих дисперсионные решения и решения с образованием сингулярности.

Разработанные в диссертации аналитические и численные адаптивные алгоритмы могут применяться для исследования широкого класса систем нелинейных эволюционных уравнений допускающих сохранение функционала энергии.

Личный вклад автора.

Вклад автора диссертации был определяющим на всех этапах выполнения данной работы. Автором самостоятельно построены вычислительные алгоритмы, составлены программы и проведены численные расчеты.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на семинарах ЛИТ ОИЯИ, были представлены и докладывались на международных конференциях: "7th international Scientific Conference" (г. Кошице, Словакия, 2002.); Second Advanced Research Workshop "Gravity, astrophysics and strings" (г. Китев, Болгария, 2004); "XVI Всероссийская конференция по проблемам математики, информатики, физики и химии" (г. Москва, 2005).

Публикации

По результатам диссертации опубликовано шесть работ.

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения. Список литературы содержит 103 наименования. Полный объем диссертации – 115 страниц машинописного текста, включая четыре таблиц и двадцать четыре рисунка.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность работы, сформулированы цели диссертации, коротко описаны задачи, возникающие при исследовании процесса формирования сингулярности и приведен краткий обзор литературы по вопросам, рассматриваемым в диссертации. Во введение также сформулированы основные уравнения и приведены их свойства.

В сферически симметричном случае дилатонное поле и поле Янга-Миллса (ЯМ) могут быть описаны двумя функциями $\Phi(t, r)$ и $f(t, r)$ соответственно, относительно двух переменных: времени t и радиальной координаты r . Система взаимодействующих полей Янга-Миллса с дилатоном описывается функционалом действия

$$S = - \int \left[\frac{1}{2} r^2 \Phi_r^2 - \frac{1}{2} r^2 \Phi_t^2 + e^\Phi \left(f_r^2 - f_t^2 + \frac{(f^2 - 1)^2}{2r^2} \right) \right] dr dt. \quad (1)$$

Соответствующие уравнения движения имеют вид:

$$f_{tt} + f_t \Phi_t - f_{rr} - f_r \Phi_r = \frac{f(1 - f^2)}{r^2}, \quad (2a)$$

$$\Phi_{tt} - \Phi_{rr} - \frac{2\Phi_r}{r} = -\frac{e^\Phi}{r^2} \left(f_r^2 - f_t^2 + \frac{(f^2 - 1)^2}{2r^2} \right). \quad (2b)$$

Система нелинейных волновых уравнений (2) имеет две особые точки $r = 0$ и $r = \infty$. Из требования регулярности решений в этих точках (при $t < T$, где T – время существования решений) следуют краевые условия

$$f(t, r=0) = 1, \quad f_r(t, r=0) = 0, \quad \Phi_r(t, r=0) = 0, \quad (3a)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(t, r) = \pm 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} f_r(t, r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(t, r) = \Phi_\infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_r(t, r) = 0. \quad (3b)$$

Отметим важное свойство системы ЯМд. Так как подинтегральная функция (1) не содержит явно времени t , то энергия

$$E = \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{2} r^2 \Phi_r^2 + \frac{1}{2} r^2 \Phi_t^2 + e^\Phi \left(f_r^2 + f_t^2 + \frac{(f^2 - 1)^2}{2r^2} \right) \right] dr \quad (4)$$

является сохраняющейся величиной, т.е. $dE/dt = 0$. Во введении так же было показано, что система нелинейных эволюционных уравнений ЯМд является надкритической и допускает существование решений, становящихся сингулярным за конечное время T в центре симметрии $r = 0$.

В первой главе исследовались стационарные решения системы ЯМд, определяемые как решения краевой задачи:

$$f'' + f'\Phi' = -\frac{f(1-f^2)}{r^2}, \quad (5a)$$

$$\Phi'' + \frac{2\Phi'}{r} = \frac{e^\Phi}{r^2} \left[f'^2 + \frac{(f^2-1)^2}{2r^2} \right], \quad (5b)$$

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad \Phi(0) = 0, \quad \Phi'(0) = 0, \quad (5c)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = \pm 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} f'(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r) = \Phi_\infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi'(r) = 0. \quad (5d)$$

Здесь и ниже, если не указано отдельно, штрихом обозначены производные по переменной r . Краевые условия в точке $r = 0$ следуют из требования регулярности, которому удовлетворяют решения, представимые в виде ряда в окрестности этой точки с параметром b :

$$f(r)_{r \rightarrow 0} = \pm 1 - br^2 + O(r^4), \quad \Phi(r)_{r \rightarrow 0} = \Phi_0 + b^2 r^2 + O(r^4). \quad (6)$$

Как было ранее установлено система (5) имеет счетное множество стационарных решений, которые могут быть параметризованы через число нулей N функции ЯМ. Анализ устойчивости этих решений показал, что число неустойчивых мод стационарного решения с N нулями функции ЯМ равно N .

Задача (5) решалась численно двумя независимыми методами: на основе непрерывного аналога метода Ньютона и методом пристрелки по параметру b разложения (6). Поскольку точка $r = 0$ – особая, то при численных расчетах задача Коши, переписанная в виде системы уравнений первого порядка, решалась не с точки $r = 0$, а с некоторой точки $r_0 = \epsilon > 0$. Начальное условие в точке r_0 для задачи Коши было получено из разложения в ряд (6) в окрестности центра симметрии $r = 0$.

Было воспроизведено семейство стационарных решений полученных Г. Лаврешвилли и Д. Мэйсоном, а также уточнен численный параметр b , характеризующий эти решения.

Во втором параграфе изложен метод фазовых функций на примере анализа устойчивости стационарных решений в рамках линейной теории возмущений. В качестве возмущений стационарного решения $f_N(r)$, $\Phi_N(r)$ рассматривались сферически симметричные возмущения вида:

$$\begin{aligned} f(t, r) &= f_N(r) + \epsilon V_f(r) e^{i\omega t} = f_N(r) + \epsilon \exp(-\Phi_N/2) v(r) e^{i\omega t}, \\ \Phi(t, r) &= \Phi_N(r) + \epsilon V_\Phi(r) e^{i\omega t} = \Phi_N(r) + \epsilon \frac{\sqrt{2}}{r} u(r) e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (7)$$

где ϵ – малый параметр, а $v(r)$, $u(r)$ – функции подлежащие определению.

В основе задачи многоканального потенциального рассеяния лежит матричное радиальное уравнение Шредингера. В нашем случае, для получения двухканального уравнения Шредингера матричная задача Штурма-Лиувилля на полубесконечном интервале была приведена к самосопряженному виду:

$$-\Psi'' + U(r)\Psi - \lambda\Psi = 0, \quad (8)$$

на полуоси $0 < r < \infty$ с граничными условиями

$$\Psi_1(0) = 0, \quad \Psi_2'(0) = 0, \quad \Psi_1(\infty) = 0, \quad \Psi_2'(\infty) = 0 \quad (9)$$

и условием нормировки

$$I(\Psi) = \int_0^\infty \Psi^+ \Psi dr - 1 = \int_0^\infty (\Psi_1^2 + \Psi_2^2) dr - 1 = 0, \quad (10)$$

где вектор собственных функций $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$ (верхний индекс T обозначает транспонирование) связан с вектором возмущений $(u, v)^T$ определенным преобразованием, а элементы 2-матрицы U выражаются через стационарное

решение, устойчивость которого исследуется. Математической основой метода фазовых функций является тот факт, что линейное однородное уравнение второго порядка, каким является уравнение Шредингера, может быть сведено к нелинейному уравнению первого порядка - уравнению Риккати. В случае двухканального рассеяния процесс описывается двумя фазовыми функциями $\delta_1(r)$, $\delta_2(r)$ и функцией $\epsilon(r)$, которую обычно называют "параметром смешивания". Для нахождения этих функций решалась задача Коши для системы уравнений первого порядка на основе вариантов метода Рунге-Кутты и метода Адамса.

Анализ устойчивости стационарных решений показал, что для решений с числом нулей N функции ЯМ число неустойчивых мод также равно N .

В третьем параграфе была сформулирована матричная задача Штурма-Лиувилля в самосопряженном виде на конечном интервале $r \in [0, R_\infty]$, краевые условия на правом конце отрезка были получены принимая во внимание асимптотическое поведение стационарных решений и потенциалов U при $r \rightarrow \infty$. Приведен алгоритм решения этой задачи на основе непрерывного аналога метода Ньютона. С целью сравнения результатов также решалась несамосопряженная задача Штурма - Лиувилля:

$$-\chi'' + P(r)\chi' + Q(r)\chi = \omega^2\chi, \quad 0 < r < \infty. \quad (11)$$

Здесь P и Q - 2-матрицы, причем P является антисимметрической.

Также в третьем параграфе рассмотрен вопрос о выборе начального приближения для нахождения собственных функций и собственных значений.

В четвертом параграфе приведены результаты и анализ расчетов. Для нахождения собственных неустойчивых мод регулярных стационарных решений системы уравнений ЯМд были решены следующие задачи:

а) краевая задача (5) для нахождения стационарных решений, которые могут быть параметризованы через число нулей N функции Янга-Миллса;

Таблица 1: Собственные значения $\{\lambda_N^j\}_{j=1}^N$.

N	λ_N^1	λ_N^2	λ_N^3	λ_N^4
1	-9.0566×10^{-2}			
2	-7.5382×10^{-2}	-2.0742×10^{-4}		
3	-4.9346×10^{-2}	-1.4957×10^{-4}	-1.9622×10^{-7}	
4	-4.3455×10^{-2}	-5.9905×10^{-5}	-1.3278×10^{-7}	$\sim -10^{-9}$

Таблица 2: Основные (минимальные) собственные значения λ_N^1 и значения параметров R_∞ и b .

N	λ_N^1	R_∞	b
1	-9.0566×10^{-2}	2×10^3	1.043320582
2	-7.5382×10^{-2}	2×10^5	1.414072399
3	-4.9346×10^{-2}	2×10^7	1.500007215
4	-4.3455×10^{-2}	1×10^8	1.515017863
5	-4.2434×10^{-2}	1×10^9	1.517493316
6	-4.2266×10^{-2}	3×10^{10}	1.517897653
∞	$\approx -4.22 \times 10^{-2}$		≈ 1.518

б) самосопряженная матричная задача Штурма-Лиувилля (8) - (10) и эквивалентная ей несамосопряженная задача (11) для нахождения собственных функций и собственных значений.

Обе задачи а) и б) решались на основе непрерывного аналога метода Ньютона. Задача а) решалась также методом пристрелки по параметру b .

Влияние "актуальной бесконечности" R_∞ на результаты расчетов исследовалось методом установления.

Для стационарных решений с $N = 1, 2, 3, 4$ были получены все собственные функции и собственные значения $\lambda_N^j, j = 1, \dots, N$, которые представлены в Таб. 1. Как видно из этой таблицы, для решения, параметризованного через N , собственные значения быстро стремятся к нулевому значению снизу с увеличением j . Поэтому для стационарных решений с $N > 4$ были получены только основные собственные функции и собственные значения λ_N^1 , которые представлены в Таб. 2.

Одной из особенностей стационарных решений системы ЯМд является быстрое смещение асимптотической области к большим значениям r с увеличением номера N . Также в Таб. 2 приведены значения параметра R_∞ , необходимого для решения соответствующей краевой задачи на интервале $r \in [0, R_\infty]$ и уточненные значения параметра b (с точностью до 10^{-10}).

Во второй главе, в первом параграфе изучались автомодельные решения системы уравнений ЯМд. Систему уравнений ЯМд можно представить в мас-

штабно-инвариантной форме, если выделить масштабно-инвариантную часть дилатонной функции $\phi(t, r)$ следующим образом:

$$\Phi(t, r) = \phi(t, r) + 2 \ln(r).$$

Тогда, можно ввести положительную постоянную T и автомодельную переменную $\xi = (T - t)/r$, а решения системы уравнений ЯМд искать в автомодельном виде:

$$f_A(t, r) = f(\xi), \quad \phi_A(t, r) = \phi(\xi). \quad (12)$$

Автомодельная переменная также может быть выбрана в виде $\eta = r/(T - t)$. Подстановкой (12) система эволюционных уравнений (2) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, относительно функций $f(\xi)$ и $\phi(\xi)$:

$$f_{,\xi,\xi} = -f_{,\xi} \phi_{,\xi} + \frac{f[f^2 - 1]}{\xi^2 - 1}, \quad (13a)$$

$$\phi_{,\xi,\xi} = -\frac{2}{\xi^2 - 1} + \exp[\phi] \left\{ (f_{,\xi})^2 + \frac{(f^2 - 1)^2}{2(\xi^2 - 1)} \right\}. \quad (13b)$$

Полученная система уравнений имеет четыре сингулярные точки $\xi = -\infty, -1, +1, +\infty$. В начале была рассмотрена задача на полубесконечном интервале $\xi \in [1, +\infty)$, который покрывает внутреннюю часть светового конуса прошлой точки ($t = T, r = 0$).

Автомодельная задача на интервале $\xi \in [1, \infty)$ имеет вид:

$$f_{,\xi,\xi} + \frac{2f_{,\xi}}{\xi} + \frac{f_{,\xi}s_{,\xi}}{s} = \frac{f(1 - f^2)}{1 - \xi^2}, \quad (14)$$

$$\frac{s_{,\xi,\xi}}{s} - \frac{s_{,\xi}^2}{s^2} - \xi^2 s f_{,\xi}^2 - \frac{2}{\xi^2} = \frac{2}{1 - \xi^2} - \frac{\xi^2 s (1 - f^2)^2}{2(1 - \xi^2)}, \quad (15)$$

$$f(1) = 0, \quad s(1) = 4, \quad f(\infty) = \pm 1, \quad f_{,\xi}(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \quad s_{,\xi}(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0. \quad (16)$$

где функция $s(\xi)$ – регулярная часть дилатонной функции $\phi(\xi)$ на полубесконечном интервале $\xi \in [1, \infty)$: $\phi(\xi) = \ln[\xi^2 s(\xi)]$. Краевые условия (16) были получены из требования регулярности функции ЯМ $f(\xi)$ и дилатонной функции $s(\xi)$ в точках $\xi = 1$ и $\xi = +\infty$. Для численного решения этой задачи нами применялся непрерывный аналог метода Ньютона.

Как и для стационарных решений, было установлено, что полученные решения могут быть параметризованы через число нулей функции ЯМ $f(\xi)$ на

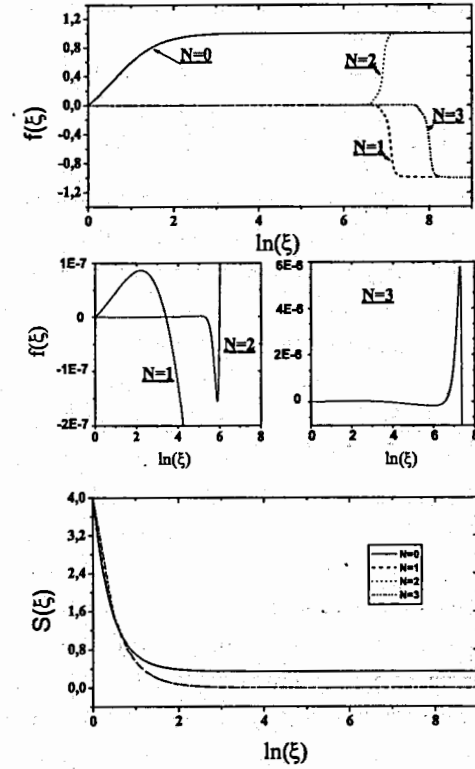


Рис. 1: Автомодельные решения с $N = 0, 1, 2, 3$ нулями функции ЯМ: функция $f(\xi)$ - вверху, дилатонная функция $s(\xi)$ - внизу.

интервале $\xi \in (1, \infty)$. Решения с $N = 0, 1, 2, 3$ нулями функции ЯМ представлены на Рис. 1.

К найденным в области $\xi \in [1, +\infty)$ решениям $f(\xi), s(\xi)$ было построено аналитическое продолжение решений в терминах функций $f(\xi), \phi(\xi)$ к точке $\xi = 0$ справа. На интервале $\xi \in [0, 1]$ искомые функции были получены численно как решения задачи Коши для системы уравнений (13) с начальными условиями

в точке $\xi = 1 - \epsilon$, $\epsilon > 0$, которые следуют из разложения в ряд:

$$f(\xi)_{\xi \rightarrow 1} = f_1(\xi - 1) - \frac{f_1}{8}(10 + s_1)(\xi - 1)^2 + O((\xi - 1)^3),$$

$$s(\xi)_{\xi \rightarrow 1} = 4 + s_1(\xi - 1) + (8 + 8f_1^2 + \frac{1}{8}s_1^2 + \frac{1}{2}s_1)(\xi - 1)^2 + O((\xi - 1)^3),$$

с параметрами f_1 и s_1 , полученными из значений производных функций $f(\xi)$ и $s(\xi)$ в точке $\xi = 1$ (См. Таблицу 3). Точка $\xi = 0$ (или $\eta = \infty$) - регулярная точка исследуемой системы уравнений и ей соответствует пространственная бесконечность $r \rightarrow +\infty$ при любых значениях $t = const$, $t < T$. В этой точке найденные функции монотонны и имеют значения $f(\xi = 0) = f(\eta = \infty) = f_\infty$, $\phi(\xi = 0) = \phi(\eta = \infty) = \phi_\infty$, для автомодельного решения с $N = 0$ были получены следующие значения параметров $f(\xi = 0) = f_\infty = -0.5072593 \dots$, $\phi(\xi = 0) = \phi_\infty = 2.1214115 \dots$. Невозможность дальнейшего продолжения решений от точки $\xi = 0$ к $\xi = -1$ справа была установлена численно. Все рассматриваемые решения с $N = 0, 1, 2, 3, \dots \infty$ становятся неограниченными в окрестности $\xi = -1$ справа, и как следствие, не могут быть непрерывно продолжены на все пространство-время, покрываемого координатой ξ .

Во втором параграфе был проведен анализ устойчивости автомодельных решений системы уравнений ЯМд на интервале $\xi \in [1, +\infty)$ в рамках линейной теории возмущений методом фазовых функций. Для этих целей была введена дополнительная переменная τ так, чтобы множество прямых $\xi = const$ было ортогонально к множеству прямых $\tau = const$:

$$\xi = \frac{T-t}{r}, \quad \tau = -\ln \sqrt{(T-t)^2 - r^2} \quad (17)$$

Таблица 3: Значения параметров f_1 , s_1 для автомодельных решений с N нулями функции ЯМ

N	f_1	s_1
0	0.498934096775465	-8.92179247
1	1.135710^{-12}	-8.00124
2	6.315410^{-13}	-8.00095
3	8.068710^{-13}	-8.00068
...
∞	0.0	-8.0

и рассмотрены сферически симметричные возмущения в виде:

$$f(\xi, \tau) = f_N(\xi) + \epsilon \sqrt{2(\xi^2 - 1)} v(\xi) e^{i\omega\tau},$$

$$\phi(\xi, \tau) = \phi_N(\xi) + \epsilon e^{-\phi_N(\xi)/2} \sqrt{\xi^2 - 1} u(\xi) e^{i\omega\tau}, \quad (18)$$

где $f_N(\xi)$, $\phi_N(\xi)$ - автомодельные решения задачи (14 -16), параметризованные через число нулей N функции Янга-Миллса $f(\xi)$.

Для проведения анализа устойчивости автомодельных решений на основе метода фазовых функций, было получено двухканальное радиальное уравнение Шредингера:

$$-\chi_{,\rho,\rho} + U\chi = \Omega^2\chi, \quad \Omega^2 = \omega^2 - 1, \quad (19)$$

где была введена дополнительная переменная ρ :

$$\rho = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\xi - 1}{\xi + 1} \right), \quad \xi = \frac{1 + e^{2\rho}}{1 - e^{2\rho}}. \quad (20)$$

Отметим, что в координатах ρ рассматриваемый интервал $\xi \in [1, \infty)$ переходит в $\rho \in (-\infty, 0]$, а потенциалы U выражаются через автомодельные решения.

Анализ устойчивости показал, что только *безузловое автомодельное решение* ($N = 0$) устойчиво в рамках линейной теории возмущений.

В третьей главе изучалась динамика формирования сингулярности в решениях системы ЯМд.

В первом параграфе, для моделирования процесса формирования сингулярности в центре симметрии $r = 0$ была предложена следующая постановка начально-краевой задачи для системы нелинейных волновых уравнений (2).

В качестве *начального условия* для поля ЯМ была выбрана локализованная волна, распространяющаяся только по направлению к $r = 0$. Поскольку уравнения ЯМд допускают два вакуумных состояния для поля ЯМ $f = \pm 1$, то было рассмотрено два типа начальных распределений для поля ЯМ $f(t = 0, r) = q(r)$, отличающихся от вакуумных состояний в ограниченной области, лежащей вдали от $r = 0$. Первый тип начального распределения, соединяющий топологически идентичные вакуумные состояния $f = +1$, был выбран в виде гаусс-распределения

$$q(r) = 1 - Ar^2 \exp[-\alpha(r - R)^2], \quad (21)$$

где A , α и R - параметры.

Второй тип начального распределения функции ЯМ, соединяющий топологически различные вакуумные состояния поля ЯМ $f = +1$ и $f = -1$, был

выбран в виде кинк-распределения с параметром a

$$q(r) = \frac{1 - ar^2}{1 + ar^2}. \quad (22)$$

Начальные условия на функцию ЯМ, описывающие локализованную волну, распространяющуюся к $r = 0$, записываются следующим образом:

$$f(0, r) = f^0(r) = q(r), \quad f_t(0, r) = \tilde{f}^0(r) = f_r(0, r) = q_r(r). \quad (23)$$

Начальное распределение для дилатонной функции получается интегрированием уравнения (2b) по радиальной координате при $t = 0$: полагая в (2b) $\Phi_t(0, r) = 0$, $\Phi_{tt}(0, r) = 0$ и учитывая условия (3), находим функцию $\Phi(0, r) = \Phi^0(r)$ как решение задачи Коши с начальным условием в точке $r = 0$:

$$-\Phi^{0''} - \frac{2\Phi^{0'}}{r} = -\frac{e^{\Phi^0}}{r^2} \left[\frac{(q(r)^2 - 1)^2}{2r^2} \right], \quad \Phi^0(0) = \Phi^{0'}(0) = 0. \quad (24)$$

Задача Коши (24) решалась численно методом Рунге-Кутты.

Таким образом, начально-краевая задача для связанной системы нелинейных волновых уравнений (2) имеет вид:

$$(e^{\Phi} f_t)_t = (e^{\Phi} f_r)_r + e^{\Phi} \frac{f(1 - f^2)}{r^2}, \quad (25a)$$

$$r^2 \Phi_{tt} = (r^2 \Phi_r)_r - e^{\Phi} \left(f_r^2 - f_t^2 + \frac{(f^2 - 1)^2}{2r^2} \right), \quad 0 < t < T, 0 < r < \infty; \quad (25b)$$

$$f(0, r) = f^0(r), \quad f_t(0, r) = \tilde{f}^0(r), \quad \Phi(0, r) = \Phi^0(r), \quad \Phi_t(0, r) = \tilde{\Phi}^0(r) \quad \forall r \geq 0; \quad (25c)$$

$$f(t, 0) = 1, \quad \Phi_r(t, 0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} f(t, r) = \pm 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(t, r) = \Phi^0(\infty) \quad 0 < t < T. \quad (25d)$$

Во втором параграфе приведена общая вычислительная схема для решения задачи (25) методом конечных разностей, применяемая для численного построения решений как на больших, так и на малых пространственных и временных масштабах.

Необходимость расчетов на больших пространственных масштабах возникла при решении задач распада стационарных решений, рассмотренных в главе 4.

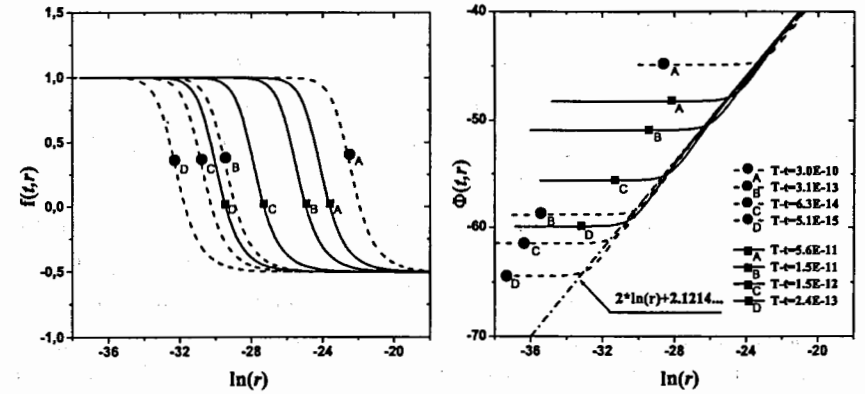


Рис. 2: Автомоделный характер поведения решений: эволюция решений функции ЯМ $f(t, r)$ –слева, дилатонной функции $\Phi(t, r)$ –справа при $t \rightarrow T$: с начальным гаусс-распределением функции ЯМ с параметрами $A = 0.2$, $\alpha = 10$, $R = 2$ -квадраты, с кинк-распределением, параметр $a = 0.281$ – круги.

Для изучения эволюционных решений нами применялись два подхода: использование квазиравномерных сеток и масштабирование по радиальной координате, позволяющие формировать расчетную область в зависимости от величины R_{∞} , следующим образом:

$$x = r^{\mu}, \quad r = x^{1/\mu}, \quad 1/\mu = \nu = 1, 2, 3, \dots$$

Для задачи (25), переписанной относительно новой переменной x , на основе метода энергетических неравенств была построена консервативная разностная схема и получено энергетическое тождество, которое является разностным аналогом закона сохранения энергии (4). Так же было найдено условие при котором разностная схема является безусловно устойчивой. Разностная задача решалась итерационным методом: специальное представление потенциальных слагаемых позволило существенно сократить число итераций, требуемых для решения задачи с заданной точностью на каждом временном слое.

В третьем параграфе приведены результаты и анализ расчетов начально-краевой задачи (25). Вычислительные эксперименты показали, что при однопараметрическом задании начального распределения поля Янга-Миллса в виде локализованной волны, распространяющейся к $r = 0$, существует критическое значение параметра A_{cr} (другие параметры гаусс-распределения фиксируются)

или a_{cr} , разделяющего режимы рассеяния $A < A_{cr}$ ($a < a_{cr}$) и сжатия, приводящего к формированию сингулярности $A > A_{cr}$ ($a > a_{cr}$):

- При значении начального параметра, меньшего некоторого критического, волна поля ЯМ движется к $r = 0$ и далее рассеивается по направлению к $r = \infty$.
- При значении начального параметра, большего некоторого критического значения, волна поля ЯМ сжимается в ограниченной области к точке $r = 0$ за конечное время T . Время существования решения зависит от вида начального распределения поля ЯМ и значения начального параметра. В момент $t = T$ наблюдается неограниченный рост второй производной функции ЯМ и неограниченное убывание дилатонного поля $\Phi \rightarrow -\infty$ в точке $r = 0$, что и означает формирование сингулярности. Универсальная асимптотика решений, приводящих к формированию сингулярности описывается устойчивым автомодельным решением.

На Рис. 2 представлена эволюция функции ЯМ $f(t, r)$ и дилатонной функции для обоих типов начального распределения поля ЯМ, демонстрирующая автомодельный характер поведения решений в асимптотической области при $t \rightarrow T$, где T – время формирования сингулярности. Для сравнения решений с автомодельным решением вводится понятие *автомодельного представления решений*, определяемого в каждый момент времени следующим образом:

$$f(t, \eta) = f(t, \eta(T - t)), \quad \phi(t, \eta) = \Phi(t, \eta(T - t)) - 2 \ln(\tau). \quad (26)$$

На Рис. 3 показано автомодельное представление для эволюционного решения с начальным распределением поля ЯМ в виде гауссиана. В третьем параграфе также представлен адаптивный алгоритм сгущения сеток, согласованный с пространственно-временной структурой устойчивого автомодельного решения. Для тестирования алгоритма в качестве начального условия выбиралось безузловое автомодельное решение с заданным временем T^* формирования сингулярности. Как показали вычислительные эксперименты с различными значениями T^* , время существования решения восстанавливалось с заданной точностью и автомодельный характер поведения решений наблюдался все время эволюции.

В четвертой главе, в первом параграфе численно исследовалась нелинейная задача распада неустойчивых сферически симметричных стационарных

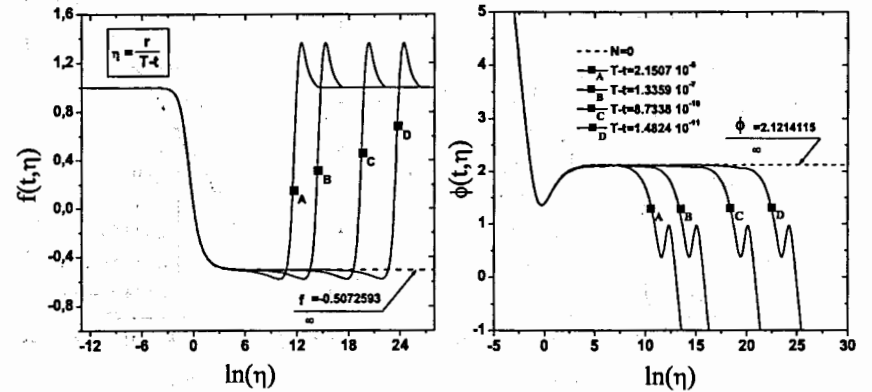


Рис. 3: Автомодельное представление решений: функции ЯМ $f(t, \eta)$ – слева, дилатонной функции $\phi(t, \eta)$ – справа, для начального гаусс-распределения функции ЯМ с параметром $A = 0.2$. Автомодельное решение ($f_0(\eta), \phi_0(\eta)$) изображено пунктирной линией.

решений в системе уравнений Янга-Миллса с дилатоном. Для изучения эволюции возмущенных стационарных решений в качестве начальных условий для функции Янга-Миллса $f(t, r)$ и дилатонной функции $\Phi(t, r)$ были рассмотрены возмущенные стационарные решения, когда в качестве возмущений берутся собственные возмущения (7) с различными значениями параметра ϵ . Из (7) получаем значения функций и производных по времени при $t = 0$:

$$f(0, r) = f^0(r) = f_N(r) + \epsilon V_f(r), \quad f_t(0, r) = \dot{f}^0(r) = \epsilon \sqrt{\lambda} V_{f_t}(r), \quad (27)$$

$$\Phi(0, r) = \Phi^0(r) = \Phi_N(r) + \epsilon V_\Phi(r), \quad \Phi_t(0, r) = \dot{\Phi}^0(r) = \epsilon \sqrt{\lambda} V_{\Phi_t}(r). \quad (28)$$

Поскольку для каждого фиксированного стационарного решения с N нулями функции ЯМ собственные значения $\{\lambda_N^j\}_{j=1}^N$ быстро стремятся к нулевому значению снизу с увеличением j , то вначале были рассмотрены основные возмущения: $V_f^1, V_\Phi^1, \lambda_N^1$, которые и определяют время жизни данного неустойчивого стационарного решения.

Далее, для стационарных решений числом нулей функции ЯМ $N \geq 2$ были рассмотрены возмущения $V_f^j, V_\Phi^j, \lambda_N^j, j = 2, \dots, N$. Одной из особенностей рассматриваемой задачи является быстрое смещение асимптотической области к большим значениям r с увеличением номера N (См. Таб. 1) и как следствие – большие массивы данных, возникающих из-за необходимости моделировать эволюцию на больших интервалах по пространственной координате

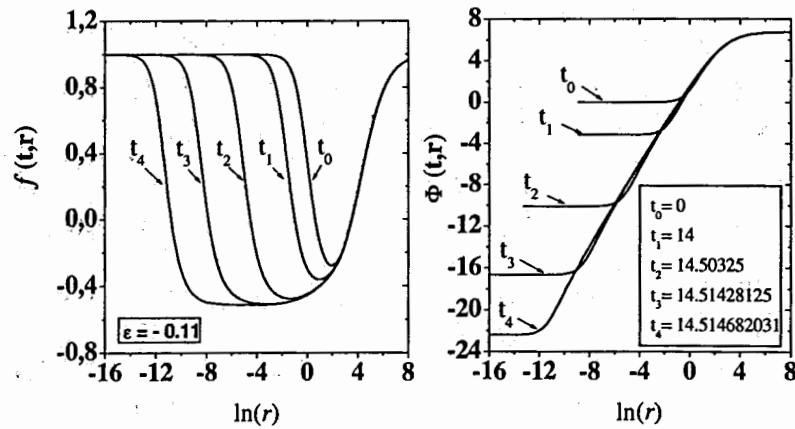


Рис. 4: Эволюция возмущенного стационарного решения с $N = 2$, $\{V_f^1, V_\phi^1, \lambda_2^1\}$ и $\epsilon = -0.11$.

$r \in [0, R_\infty]$. В этом случае можно обеспечить значительную редукцию используемых массивов, если ввести масштабированную пространственную переменную $r = x^\nu$, $\nu = 1, 2, 3$. Выбор значения степени ν делается в зависимости от номера N рассматриваемого стационарного решения и соответствующего значения параметра R_∞ .

Отметим, что при малых значениях ϵ и с увеличением номера j рассматриваемого возмущения быстро увеличивается необходимое время счета. С целью уменьшения расчетного времени применялись параллельные вычисления с использованием нескольких процессоров. При решении уравнений с трехдиагональными матрицами, возникающих после соответствующей дискретизации исходной задачи были применены:

А) параллельная реализация метода встречных прогонок – этот метод эффективен для расчетов на двух процессорах;

В) метод разбиения системы на p групп, позволяющий проводить параллельные расчеты для произвольного числа p процессоров.

Для распараллеливания мы использовали технологию MPI (Message Passing Interface), которая позволяет проводить вычисления на кластерах с многопроцессорной архитектурой.

Расчеты проводились на кластере Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Во втором параграфе приведены параллельные алгоритмы и MPI-реализа-

ция метода разбиения системы алгебраических уравнений.

В третьем параграфе проводился анализ эффективности параллельных вычислений. Чтобы оценить, насколько быстрее удастся решить задачу при распараллеливании вводится понятие "ускорение" как отношение времени решения задачи на одном процессоре к времени решения той же задачи на системе из p таких же процессоров – T_1/T_p . Параллельные вычисления проводились на кластере с использованием процессоров p от 1 до 7. Было проведено исследование эффективности параллельных вычислений, которое показало, что ускорение расчетов порядка $p/2$.

В четвертом параграфе приведены результаты и анализ расчетов.

Для всех рассмотренных стационарных решений было показано, что:

1. В начале эволюции решения описываются выражением для линейных возмущений (7) (линейный режим), время существования в линейном режиме увеличивается при возрастании N , j и при уменьшении значения параметра ϵ .
2. Для основных собственных возмущений $\{V_f^1, V_\phi^1, \lambda_N^1\}$:
 - при $\epsilon > 0$ эволюционные решения описывают процесс рассеяния поля ЯМ по направлению к $r \rightarrow \infty$,
 - при $\epsilon < 0$ эволюционные решения описывают процесс формирования сингулярности.
3. Для собственных возмущений $\{V_f^j, V_\phi^j, \lambda_N^j\}$, $j = 2, \dots, N$ эволюционные решения описывают процесс формирования сингулярности.

Тем самым было установлено, что стационарные решения образуют множество пороговых конфигураций, лежащих в функциональном пространстве решений на границе, разделяющей решения приводящие к формированию сингулярности и решения, остающиеся регулярными.

В заключении сформулированы основные результаты диссертации.

На защиту выдвигаются следующие результаты

1. Обнаружена скрытая масштабная инвариантность системы уравнений ЯМд и на основе анализа масштабных свойств функционала энергии установлена принадлежность системы ЯМд к классу надкритических систем.
2. Для численного исследования эволюционных решений построена вычислительная схема на основе консервативной разностной схемы, позволяющая исследовать поведение решений на разных пространственных и временных масштабах. Для ускорения расчетов создана параллельная реализация вычислительной схемы.
3. Впервые получено семейство автомодельных решений системы ЯМд, проведен анализ их устойчивости в линейном приближении с помощью метода фазовых функций, который показал, что множество автомодельных решений содержит только одно устойчивое решение.
4. В результате численного исследования процесса формирования сингулярности в решениях системы нелинейных волновых уравнений ЯМд было установлено, что при значении управляющего параметра, большего некоторого критического, решения становятся сингулярными за конечное время. Асимптотическое поведение решений в окрестности сингулярности носит универсальный характер и описывается устойчивым автомодельным решением, которое может претендовать на роль глобального аттрактора для всех решений, приводящих к формированию сингулярности.
5. Впервые получены неустойчивые моды (собственные функции и собственные значения) регулярных стационарных решений системы ЯМд в линейном приближении, на основе которых была решена задача распада стационарных решений. Было установлено, что стационарные решения образуют множество пороговых конфигураций, лежащих в функциональном пространстве решений на границе, разделяющей решения, приводящие к формированию сингулярности и решения, остающиеся регулярными в процессе эволюции.

По теме диссертации опубликованы следующие работы:

1. О. И. Стрельцова, Э. А. Айрян, Е. Е. Донец, Т. Л. Бояджиев:
Численное моделирование процесса формирования сингулярности в связанной системе уравнений Янга-Миллса с дилатоном.
Вестник РУДН, сер. Прикладная математика, 2003, т. 2, с.13–25.
2. E.E. Donets, O.I. Streltsova, T.L. Boyadjiev:
Self-similarity and singularity formation in a coupled system of Yang-Mills-dilaton evolution equations.
Phys. Rev. D68, 2003, № 12, p. 125010(9).
3. O.I. Streltsova, E.E. Donets, E.A. Hayryan, D.A. Georgieva, T.L. Boyadjiev:
Unstable even-parity eigenmodes of the regular static SU(2) Yang-Mills-dilaton solutions.
Препринт ОИЯИ, E11-2004-151, 2004;
ЖВМиМФ., 2005, т. 45, № 5, с.925–937.
4. Э. А. Айрян, Я. Буша, Е. Е. Донец, И. Покорны и О. И. Стрельцова:
Численное исследование распада возмущенных стационарных решений системы уравнений Янга-Миллса с дилатоном с использованием технологии MPI.
Препринт ОИЯИ, P11-2004-183, 2004;
Математическое моделирование, 2005, т. 17, № 6, с. 103–121.
5. E. A. Ayrjan, E. E. Donets, M. Pavlus, O. I. Streltsova: *Energy conservative difference schemes for Yang-Mills equations.*
Proc. 7th international Scientific Conference, Kosice, Slovakia, 2002, p.6–10.
6. D. A. Georgieva, O. I. Streltsova, E. E. Donets, E. A. Hayryan, T. L. Boyadjiev:
Calculation the eigenmodes of the regular static Yang-Mills-dilaton problem.
"Gravity, Astrophysics and Strings at the Black sea", Proceedings Second Advanced Research Workshop, Kiten, Bulgaria, June 10-16, 2004, pp. 137-149, Eds. P. Fiziev, M. Todorov, St. Kliment Ohridski University Press, Sofia, 2005.