

**ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ**

11-2002-21

С - 603

На правах рукописи  
УДК 519.642

**СОЛОВЬЕВА**  
Татьяна Михайловна

**МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ  
РЕЛЯТИВИСТСКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ЧАСТИЦ  
С НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ ЭНЕРГИИ СВЯЗИ**

Специальность: 05.13.18 — математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Дубна 2002

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем им. В. П. Джелепова  
Объединенного института ядерных исследований.

**Научные руководители:**

доктор физико-математических наук,  
профессор  
доктор физико-математических наук,  
профессор

Жидков  
Евгений Петрович  
Скачков  
Николай Борисович

**Официальные оппоненты:**

доктор физико-математических наук,  
профессор  
кандидат физико-математических наук,  
доцент

Фаустов  
Рудольф Николаевич  
Ланеев  
Евгений Борисович

**Ведущая организация:**

НИИЯФ МГУ им. М.В.Ломоносова

Защита диссертации состоится "5" апреля 2002 г. в 14<sup>00</sup>  
на заседании Диссертационного совета Д720.001.04 при Лаборатории ин-  
формационных технологий Объединенного института ядерных иссле-  
дований, г. Дубна Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Автореферат разослан "5" марта 2002 г.

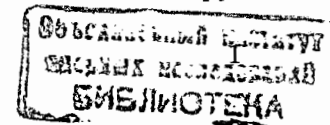
Ученый секретарь  
Диссертационного совета  
кандидат физико-математических наук

Ива З.М.Иванченко

**Общая характеристика работы**

**Актуальность темы.** Исследование взаимодействия двух фермио-  
нов занимает одно из центральных мест в физике элементарных частиц  
и атомного ядра. Двухфермионные системы являются тем инструмен-  
том, с помощью которого формировались и уточнялись наши пред-  
ставления о фундаментальных силах, действующих в природе. В фи-  
зике элементарных частиц широкое применение получил предложен-  
ный А.А. Логуновым и А.Н. Тавхелидзе метод одновременного опи-  
сания связанных систем релятивистских частиц. С его помощью по-  
лучены спектры уровней энергии, с высокой точностью найден маг-  
нитный момент водородоподобного атома. В рамках составной квар-  
ковой модели адронов найдены асимптотические выражения для элек-  
тромагнитных формфакторов адронов и структурные функции глубо-  
конеупругого рассеяния, исследовано поведение сечений инклюзивных  
процессов множественного рождения при высоких энергиях и больших  
передачах импульсов. Наличие четкого физического смысла и веро-  
ястной интерпретации позволило одновременному подходу занять  
важное место в задачах адронной и кварковой физики. Следует от-  
метить преимущество релятивистского одновременного подхода с  
трехмерным аппаратом потенциального описания, который применя-  
ется в нерелятивистской квантовой механике. Поэтому уравнения, воз-  
никшие в результате применения одновременного подхода, получили  
название квазипотенциальных.

Были достигнуты определенные успехи в построении точных реше-  
ний уравнений с потенциалами, отвечающими различным типам взаи-  
модействий. Однако в большинстве случаев попытки найти точное  
решение уравнения с более-менее реалистичным потенциалом наталки-  
ваются на непреодолимые пока трудности. Известные методы прибли-



женного исследования таких уравнений (квазиклассика, теория возмущений по константе связи и другие) не дают полного представления о поведении волновых функций и спектра масс в наиболее интересной области констант связи для частиц, составленных из легких кварков (для которых существенную роль играют релятивистские эффекты). Широкое применение квазипотенциального подхода требует разработки численных методов решения квазипотенциальных уравнений.

Следствием перехода к одновременному формализму является появление зависимости оператора взаимодействия от полной энергии связанной двухчастичной системы. Квазипотенциальное уравнение в импульсном пространстве принимает вид интегрального уравнения с ядром, включающим нелинейную зависимость от собственного числа.

Неуклонное расширение области приложения интегральных уравнений стимулировало интенсивную разработку их теории и особенно приближенных методов решения. Проекционные методы решения интегральных уравнений основаны на представлении приближенного решения функцией определенного вида, зависящей от свободных (неопределенных до окончания процесса решения) параметров. Итерационные методы, заключающиеся в построении последовательных приближений искомой величины, позволяют получить наиболее простые вычислительные алгоритмы решения интегральных уравнений.

Решение нелинейных интегральных уравнений является сложной задачей вычислительной математики, что обусловлено трудностями как принципиального, так и вычислительного характера. В связи с этим разрабатываются методы, специально предназначенные для решения нелинейных уравнений. Обычно процесс решения нелинейных интегральных уравнений, несмотря на дискретизацию задачи каким-либо проекционным методом, не освобождает от необходимости приме-

нять итерационные процедуры при решении аппроксимирующих нелинейных конечных уравнений. В этом случае сходимость обычно зависит от начального приближения, выбор которого приобретает существенное значение.

В диссертации квазипотенциальное уравнение, описывающее систему двух частиц, сводится к алгебраической спектральной задаче. Таким образом, поиск энергетических уровней и волновых функций связанных состояний означает вычисление собственных значений и собственных функций этой задачи.

### **Цель работы.**

Целью настоящей работы является разработка метода численного решения релятивистских квазипотенциальных интегральных уравнений, ядра которых содержат зависимость от энергии связи (рассмотрение таких уравнений приводит к проблеме решения спектральных задач с нелинейной зависимостью от собственного числа), строгое обоснование этого метода, построение на его основе вычислительного алгоритма, а также исследование сходимости построенного алгоритма с помощью численных экспериментов и решение уравнений с квазипотенциалами, зависящими от полной энергии двухчастичной системы.

### **Научная новизна.**

Предложен и развит эффективный метод решения нелинейных спектральных задач, возникающих при описании двухчастичной системы интегральными уравнениями с ядрами, зависящими от энергии связи между частицами. Метод относится к классу итерационных и основан на последовательном решении ряда линейных спектральных задач для отыскания решения исходной нелинейной спектральной задачи. Построен итерационный алгоритм, по которому вычисляются собственные значения и собственные функции. Исследована зависимость скоро-

сти сходимости итерационного процесса от начального приближения.

### **Практическая ценность.**

Создана компьютерная программа, которая рассчитывает собственные значения и собственные функции нелинейной спектральной задачи для разных видов квазипотенциалов. С помощью этой программы был получен спектр энергий связи и волновые функции связанных состояний двух фермионов равной массы. Оценены величины погрешностей полученных решений, обусловленные итерационным методом и аппроксимацией исходного уравнения системой дискретных уравнений. Рассчитаны частоты переходов между уровнями ( $n = 1 - 4$ ,  $n$  — главное квантовое число) энергии позитрония. Были вычислены, в частности, разность энергий основных состояний орто- и парапозитрония и разность энергий основного и первого возбужденного состояний ортопозитрония, а также ширина распада основного состояния парапозитрония на два фотона. Хорошее согласие полученных величин с экспериментальными данными показывает высокую эффективность предложенного метода. Было рассчитано расщепление основного и ряда последующих возбужденных состояний димюония и ширина распада основного состояния парадимюония на два фотона. Полученные величины соответствуют результатам теоретических расчетов других авторов. Также были рассчитаны ширины распада возбужденных состояний парапозитрония и парадимюония.

Разработанный итерационный метод решения нелинейных спектральных задач представляет практическую ценность благодаря своей универсальности. Его можно применить для решения интегральных уравнений, описывающих связанную систему двух частиц, во-первых, разной массы, а во-вторых, в случае, когда масса частицы, переносящей взаимодействие, не равна нулю.

Строгий подход к созданию итерационного метода решения нелинейных спектральных задач дает качественную основу для его развития и применения в более сложных задачах. Представляется перспективным распространение разработанной методики (при соответствующей ее модификации) на решение систем интегральных уравнений, ядро которых зависит от собственного числа. Подобные системы уравнений возникают, например, при рассмотрении связанных состояний двухчастичной системы с орбитальным квантовым числом  $l \geq 1$ .

Полученные результаты могут быть применены для решения нелинейных спектральных задач и с другим физическим содержанием.

### **Апробация работы.**

Основные результаты диссертации докладывались на семинарах вычислительной и прикладной математики ОВФ ЛИТ ОИЯИ, а также на следующих конференциях.

1. Международное Собрание по программированию и математическим методам решения физических задач.  
ОИЯИ, Дубна, 14–19 июня 1993 г.
2. XXXIII научная конференция факультета физико-математических и естественных наук РУДН.  
РУДН, Москва, 20–24 мая 1997 г.
3. XXXIV научная конференция факультета физико-математических и естественных наук РУДН.  
РУДН, Москва, 19–22 мая 1998 г.
4. Modern Trends in Computational Physics.  
ОИЯИ, Дубна, 15–20 июня 1998 г.
5. Конференция “Математическая физика, математическое моделирование и приближенные методы”.  
ИАТЭ, Обнинск, 15–19 мая 2000 г.

**Публикации.** По материалам диссертации опубликовано 8 работ.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация объемом 120 страниц состоит из введения, трех глав, включающих 11 параграфов, заключения, приложения, списка литературы из 117 наименований. Она содержит 11 рисунков и 22 таблицы.

### Содержание работы

Во введении показана актуальность темы и сформулирована цель работы. Дано краткое введение в круг физических проблем, затронутых в диссертации, и описание основных методов решения интегральных уравнений. Кратко изложено содержание диссертации.

В первой главе диссертации обсуждаются физическая и математическая постановка задачи описания двухчастичной системы, исследуются функциональные свойства операторов, входящих в интегральные уравнения, и асимптотика собственных функций.

В § 1.1 дается краткое описание физической сущности рассматриваемой задачи. Вводится релятивистское уравнение для волновой функции системы двух скалярных частиц равной массы в случае обмена скалярным фотоном (орбитальное квантовое число равно нулю):

$$2\sqrt{1+x^2}\psi(x) + \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{\psi(y)}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} \times \ln \left( \frac{|x-y| + \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} - \lambda}{x+y + \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} - \lambda} \right) dy = \lambda\psi(x), \quad (1)$$

где  $x = p/m$ ,  $y = k/m$ ,  $\lambda = M/m$ ,  $p$  и  $k$ —модули импульсов частиц в начальном и конечном состояниях двухчастичной системы (уравнение (1) записано в системе центра инерции  $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = p$ ),  $M$ —полная масса системы,  $m$ —масса составляющей частицы.  $\psi(x)$ —волновая функция системы,  $\alpha = 1/137.0359895$ —постоянная тонкой структуры. Нерелятивистский аналог уравнения (1) записывается следующим образом:

$$(x^2 + 2)\psi(x) + \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty \ln \left( \frac{|x-y| + 2 - \lambda}{x+y + 2 - \lambda} \right) \psi(y) dy = \lambda\psi(x). \quad (2)$$

Уравнения, описывающие взаимодействие двух фермионов, как и прежде в случае нулевого орбитального квантового числа, имеют вид:

$$2\sqrt{1+x^2}\psi(x) + \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1 - 2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2})\psi(y)}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} \times \ln \left( \frac{x+y + \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} - \lambda}{|x-y| + \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} - \lambda} \right) dy = \lambda\psi(x), \quad (3)$$

если общий спин равен нулю, и

$$2\sqrt{1+x^2}\psi(x) + \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{xy\psi(y)}{4\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} \times \left\{ R_1 \ln \left| \frac{x+y + \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} - \lambda}{|x-y| + \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} - \lambda} \right| + R_2 + R_3 + R_4 \right\} = \lambda\psi(x), \quad (4)$$

если общий спин равен единице. В последнем выражении введены следующие обозначения:

$$R_1 = 4 \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma - \gamma'} \left( \frac{2\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}}{xy} + \gamma \left( \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + 1} + 2 \right) \right) + \gamma(2\gamma + 1/(xy)),$$

$$R_2 = 2 \frac{\gamma'^2 - 1}{\gamma' - \gamma} \left( \frac{2\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}}{xy} + \gamma' \left( \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + 1} + 2 \right) \right) \times \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} + xy}{1 + \sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} - xy} \right|,$$

$$R_3 = 4 \frac{\gamma'^2 - 1}{\gamma' - \gamma} \left( \frac{2\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}}{xy} + \gamma' \left( \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + 1} + 2 \right) \right) \times \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} - \lambda}{(2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} + 2 - x^2 - y^2)^{1/2}} \times \left[ \operatorname{arctg} \frac{(2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} + 2 - x^2 - y^2)^{1/2}}{x+y} - \operatorname{arctg} \frac{(2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} + 2 - x^2 - y^2)^{1/2}}{|x-y|} \right],$$

$$\begin{aligned}
R_4 &= \frac{|x-y|^3 - (x+y)^3}{3x^2y^2} \times \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} - \lambda}{\sqrt{1+x^2} + 1} + \\
&+ \frac{(x+y - |x-y|)(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} - \lambda)}{2xy} [-4/(xy) - \\
&- 8 \left( \gamma + \frac{x^2 + y^2}{2xy} \right) + 4 \frac{2\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}}{xy} + \\
&+ 4 \left( \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + 1} + 2 \right) \times \\
&\times \left( \gamma + \frac{(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2})^2}{2xy} \right) \Big] + 4/(xy) + 8\gamma - \\
&- 4 \frac{2\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2}}{xy} - 4 \left( \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + 1} + 2 \right) (\gamma + \gamma'), \\
\gamma &= \frac{x^2 + y^2 - (\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} - \lambda)^2}{2xy}, \\
\gamma' &= \frac{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} + 1}{xy}.
\end{aligned}$$

В § 1.2 задача определения энергетических уровней и волновых функций связанных состояний двухчастичной системы формулируется как математическая проблема поиска собственных чисел и собственных функций операторного уравнения:

$$\begin{cases} A(\lambda)\psi - \lambda\psi = 0, \\ (\psi, \psi) - 1 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

В § 1.3 доказывается теорема о вполне непрерывных операторах. Показывается, что оператор рассматриваемого нами уравнения является вполне непрерывным и самосопряженным.

В § 1.4 определяется асимптотика собственной функции  $\psi(x)$  интегральных уравнений при  $x \rightarrow \infty$ , что позволяет в дальнейшем выбрать наиболее подходящие аппроксимационные схемы при переходе от непрерывных величин в уравнениях к дискретным.

Вторая глава содержит описание итерационного метода, разработанного нами для решения нелинейной спектральной задачи, и вычислительного алгоритма, построенного на основе этого метода; а также исследование вопросов, связанных с программной реализацией этого метода. Приводятся результаты тестирования программы на модельной задаче, имеющей точное аналитическое решение. В численных экспериментах изучается скорость сходимости итерационного алгоритма в зависимости от выбора начального приближения и погрешность получаемых решений.

В § 2.1 осуществляется переход от уравнения с непрерывной переменной к уравнениям в конечномерных пространствах с дискретной переменной. Методом Бубнова-Галеркина на отрезке дискретизации  $R$  строится аппроксимационная схема исходного уравнения.

В § 2.2 рассматривается итерационный метод и вводится рекуррентная формула  $A(\lambda_{n^*}^{(l-1)})\psi_n^{(l)} = \lambda_n^{(l)}\psi_n^{(l)}$ ,  $n = 1, 2, \dots, n^*, \dots$ , по которой строятся последовательности собственных значений и собственных функций. (Здесь верхний индекс  $(l)$  — номер итерации, а нижний индекс  $n$  — номер собственного числа и собственной функции). То есть на каждом итерационном шаге в ядро интегрального оператора подставляется собственное число с фиксированным номером  $n^*$ , выбранное из совокупности собственных чисел  $\{\lambda_n\}$ , вычисленных на предыдущем шаге процесса итераций. Неизвестные функции  $\{\psi_n\}$  вычисляются как обычные собственные функции линейной спектральной задачи с помощью QR-алгоритма. Признаком близости получаемых приближений к искомой величине собственного значения является достижение малой величины разности между двумя приближенными собственными значениями, вычисленными на двух следующих друг за другом итерационных шагах. Строится вычислительный алгоритм,

реализующий данный метод.

§ 2.3 содержит описание внутренней структуры программы, реализующей итерационный алгоритм. Приведены численные значения параметров, использовавшихся непосредственно в наших расчетах.

В § 2.4 приводятся результаты численных экспериментов, проведенных по разным схемам. Изучается поведение расстояния

$$\rho = |\lambda_1 - \lambda_2| + \sup_{1 \leq j \leq N} |\psi_{1,j} - \psi_{2,j}|,$$

(где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — собственные числа, а  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — собственные функции интересующей нас задачи,  $N$  — количество узлов сетки дискретизации,  $j$  — номер компоненты  $\psi$ ) на последовательных шагах итерационного процесса в зависимости от выбора начального приближения.

В § 2.5 приводятся результаты численных расчетов для нерелятивистского уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом, имеющего точное решение. Это уравнение решается на двух сетках с шагом  $h$  и  $h/2$ . Полученные в результате экстраполяции по Ричардсону данные сравниваются с аналитическим решением, и оценивается их точность. Также оценивается погрешность собственных чисел и собственных функций нелинейной спектральной задачи. Показывается, что погрешность, вносимая итерационным методом, на один – два порядка меньше, чем погрешность аппроксимации задачи методом Бубнова – Галеркина. Следовательно, точность вычисления собственных чисел и собственных функций спектральной задачи с оператором, зависящим от собственного числа, не уступает точности, с которой решается линейная спектральная задача.

В третьей главе приводятся результаты численного решения квази-потенциальных уравнений с нелинейной зависимостью от спектрального параметра, а также их физическая интерпретация.

В § 3.1 представлены энергетические спектры и волновые функции

релятивистского скалярного линейного и нелинейного уравнения, нерелятивистского уравнения, а также двух спинорных уравнений, с общим спином, равным нулю, и общим спином, равным единице. Погрешность решения задачи (5) в случае уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом имеет порядок  $10^{-12}$ . А порядок поправок, вносимых в спектр уравнений (1), (2), (3) и (4) эффектом нелинейной зависимости от спектрального параметра, релятивистскими эффектами и эффектами, связанными со спином частиц, равен  $10^{-6} - 10^{-8}$ . Поэтому можно сказать, что точность, использованная в программе, достаточна для того, чтобы уверенно зарегистрировать сдвиг уровней энергии.

В § 3.2 вычисляются частоты переходов между уровнями позитрония и димюония, а также рассчитываются их ширины распада. Полученные результаты сравниваются с экспериментальными данными и

Частоты переходов между уровнями позитрония.

	Эксперимент, МГц	Значение, рассчитанное по теории воз- мущений, МГц	Численный расчет, МГц
$2^1S_0 - 1^1S_0$			1233787210(37)
$3^1S_0 - 2^1S_0$			177121905(49)
$4^1S_0 - 3^1S_0$			62209436(62)
$2^3S_1 - 1^3S_1$	1233607216.4(3.2)	1233607222.18(58)	1233609106(37)
$3^1S_0 - 2^1S_0$			177107563(49)
$4^1S_0 - 3^1S_0$			62200405(62)
$1^3S_1 - 1^1S_0$	203389.10(0.74)	203392.01(46)	203861(25)
$2^3S_1 - 2^1S_0$		25424.67(6)	25737(49)
$3^3S_1 - 3^1S_0$			11404(49)
$4^3S_1 - 4^1S_0$			2372(74)

результатами, полученными другими авторами с помощью теории возмущений. С помощью итерационного метода были получены следующие значения ширины распада парапозитрония на два фотона  $\Gamma(e^+e^- \rightarrow 2\gamma)$ : для уравнения (1) —  $7.9782(72) \cdot 10^9 c^{-1}$ , для уравнения (2) —  $7.9638(72) \cdot 10^9 c^{-1}$ , для уравнения (3) —  $7.9843(72) \cdot 10^9 c^{-1}$ , а экспериментально измеренная ширина распада равна  $7.9909(17) \cdot 10^9 c^{-1}$ .

Частоты переходов между уровнями димюония.

	Значение, полученное с помощью теории возмущений, МГц	Численный расчет, МГц
$2^1S_0 - 1^1S_0$		$255108046(7.7) \cdot 10^3$
$3^1S_0 - 2^1S_0$		$36623189(10.2) \cdot 10^3$
$4^1S_0 - 3^1S_0$		$12862937(18) \cdot 10^3$
$2^3S_1 - 1^3S_1$		$255071216(7.7) \cdot 10^3$
$3^3S_1 - 2^3S_1$		$36620226(10.2) \cdot 10^3$
$4^3S_1 - 3^3S_1$		$12861070(18) \cdot 10^3$
$1^3S_1 - 1^1S_0$	$42333.5(2.7) \cdot 10^3$	$42151.8(5.1) \cdot 10^3$
$2^3S_1 - 2^1S_0$	$5290.41(0.34) \cdot 10^3$	$5321.7(10.2) \cdot 10^3$
$3^3S_1 - 3^1S_0$		$2358.1(10.2) \cdot 10^3$
$4^3S_1 - 4^1S_0$		$490.5(18) \cdot 10^3$

Для парадимюония с помощью итерационного метода были рассчитаны следующие значения ширины распада  $\Gamma(\mu^+\mu^- \rightarrow 2\gamma)$ : для уравнения (1) —  $1649.6(1.5) \cdot 10^9 c^{-1}$ , для уравнения (2) —  $1646.6(1.5) \cdot 10^9 c^{-1}$ , для уравнения (3) —  $1650.9(1.5) \cdot 10^9 c^{-1}$ .

В заключении перечислены основные оригинальные результаты, содержащиеся в диссертации.

В приложении изучаются вопросы, связанные с обоснованием применимости итерационного метода к решению рассматриваемой задачи.

Оператор нелинейной задачи рассматривается как возмущенный оператор некоторой линейной задачи. При помощи известного результата теории возмущений о существовании и единственности решения нелинейной спектральной задачи при условии ограниченности возмущения и существовании решения линейной спектральной задачи, полученной из исходной нелинейной задачи путем приравнивания нулю ее возмущения, показано, что решение рассматриваемых в диссертации уравнений существует и единственно. На основе принципа сжимающих отображений доказано, что при выполнении условия ограниченности производной оператора нелинейной спектральной задачи по спектральному параметру итерационный процесс сходится к искомому решению. Показано, что операторы рассматриваемых уравнений удовлетворяют этому условию.

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Исследованы функциональные свойства интегральных операторов квазипотенциальных уравнений, содержащих ядро, описывающее взаимодействие: непрерывность и самосопряженность, асимптотика собственных функций при больших значениях аргумента.
2. Разработан итерационный метод решения спектральной задачи, интегральный оператор взаимодействия которой содержит зависимость от собственного числа. Метод основан на идее последовательного решения линейных спектральных задач, то есть на каждом итерационном шаге в оператор подставляется собственное число, полученное на предыдущем итерационном шаге.
3. На основе разработанного метода созданы программы для решения нелинейной спектральной задачи с разными ядрами взаимодействий, представляющими интерес для физических задач. Про-



- граммы протестированы на модельной задаче. Проведены вычислительные эксперименты с целью изучения скорости сходимости алгоритма и машинного времени, требуемого для его реализации.
4. При помощи созданного комплекса программ получены *энергетические спектры и волновые функции связанной системы двух частиц в скалярном и спинорном случаях, для релятивистского и нерелятивистского уравнений.*
  5. Получены значения величин *разности энергий основного состояния орто- и пара- позитрония и разности энергий основного и первого возбужденного состояний ортопозитрония*, а также значение *ширины распада* основного состояния паразитрония на два фотона, которые хорошо согласуются с экспериментальными данными. Рассчитаны частоты переходов в МГц между энергетическими уровнями ( $n = 1-4$ ) позитрония. Величина ширины распада была вычислена для нерелятивистского, релятивистского скалярного и спинорного уравнений, что позволило оценить вклад соответствующих релятивистских и спиновых эффектов в окончательное значение ширины распада.
  6. Рассчитано *расщепление основного и ряда последующих возбужденных состояний димюония в МГц и ширина распада синглетного состояния димюония.* Сравнение этих величин с результатами, полученными другими методами, показывает хорошее соответствие их друг другу. Ширина распада основного состояния парадимюония также была вычислена для нерелятивистского, релятивистского скалярного и спинорного уравнений.
  7. Для высоковозбужденных состояний позитрония и димюония итерационным методом выполнены расчеты *ширин распада этих составных систем*, что представляет интерес для эксперименталь-

ной проверки в случае проведения соответствующих опытов.

8. Путем численных расчетов произведена *оценка величин погрешностей* частот переходов между уровнями энергии и ширинами распада позитрония и димюония, рассчитанными с помощью итерационного метода.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах<sup>1</sup>:

1. *Грегуш М.М., Жидков Е.П., Макаренко Т.М., Скачков Н.Б., Хоромский Б.Н.* Решение релятивистской задачи двух тел с нелинейной зависимостью от спектрального параметра. Сообщение ОИЯИ Р11-92-142, Дубна: ОИЯИ, 1992.
2. *Жидков Е.П., Макаренко Т.М., Хоромский Б.Н.* Решение методом итераций квазипотенциального уравнения для двухчастичной системы с нелинейным вхождением спектрального параметра. Сообщение ОИЯИ Р11-93-210, Дубна: ОИЯИ, 1993.
3. *Khoromskij B.N., Makarenko T.M., Nikonov E.G., Skachkov N.B., Zhidkov E.P.* Numerical methods for solving relativistic equations describing bound states of double - particle system. // Proceedings of the International Conference on Programming and Mathematical methods for Solving Physical Problems, Dubna, 1993. (Ed. by Yu.Yu.Lobanov et al.). World Scientific Publ, 1994, p. 210-214.
4. *Solovjeva T.M., Zhidkov E.P.* Iteration method of solving one nonlinear spectral problem. // Second International Conference "Finite-Difference Methods: Theory and Application" (CFDM98). Proceed-

<sup>1</sup>Первые три работы сделаны под фамилией Макаренко

- ings. Volume 3. Minsk, 1998. (Ed. by A.A.Samarskii). Minsk: Belarus, 1998, p. 136–140.
5. *Solov'eva T.M., Zhidkov E.P.* Iteration method of solving the integral equation with nonlinear dependence on spectra parameter. // *Comp. Phys. Comm.*, Elsevier, The Netherlands, 2000, v.126/1-2, p.168–177.
  6. *Solov'eva T.M.* Numerical calculation of the energy spectrum of a two fermion system. // *Comp. Phys. Comm.*, Elsevier, The Netherlands, 2001, v.136/3, p.208–211.
  7. *Жидков Е.П., Скачков Н.Б., Соловьева Т.М.* Оценка точности численного решения спектральной задачи с оператором, зависящим от собственного числа. Препринт ОИЯИ Р11-01-120, Дубна: ОИЯИ, 2001. Направлено в журнал “Математическое моделирование”.
  8. *Скачков Н.Б., Соловьева Т.М.* Результаты численного решения интегрального уравнения для системы двух фермионов. Препринт ОИЯИ Р2-01-121, Дубна: ОИЯИ, 2001. Направлено в журнал “Ядерная физика”.

Получено 12 февраля 2002 г.