

С393м/07

Ш-954



Учебно-  
методические  
пособия  
Учебно-научного  
центра ОИЯИ  
Дубна

УНЦ-2016-59

Ю. М. Шукринов, И. Р. Рахмонов, К. В. Куликов

ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ  
ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭФФЕКТА ДЖОЗЕФСОНА

2016

Учебно-научный центр ОИЯИ

СЗ93и(от)  
Ш-954

Ю. М. Шукринов, И. Р. Рахмонов, К. В. Куликов

155380  
ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ  
ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭФФЕКТА ДЖОЗЕФСОНА

*Учебное пособие*

*Рекомендовано учебно-методическим советом  
университета «Дубна» в качестве учебного пособия  
для студентов, обучающихся по направлениям  
подготовки «Химия, физика и механика материалов»,  
«Физика» (бакалавриат)*

**Научно-техническая  
библиотека  
ОИЯИ**

Дубна 2016

УДК 538.945(075.8); 538.91(075.8)

ББК 22.368.3 я73

Ш95

Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 15-51-61011\_Egypt и № 16-52-45011\_India, а также гранта ЛТФ ОИЯИ для молодых научных сотрудников № 16-302-07.

**Шукринов Ю. М., Рахмонов И. Р., Куликов К. В.**

Ш95 Применение численных методов для исследования эффекта Джозефсона: Учебное пособие. — Дубна: ОИЯИ, 2016. — 94 с.

ISBN 978-5-9530-0457-2

В учебном пособии представлены методы расчета динамики джозефсоновских наноструктур, основанные на численном моделировании их вольт-амперных характеристик и временных зависимостей фазы и напряжения. В частности, описано применение метода Рунге–Кутта и метода разностных схем для исследования динамики джозефсоновских переходов. Представленный материал охватывает все основные аспекты использования различных численных методов для решения конкретных физических задач. Кроме того, в пособии приложены коды программ на языке C++, реализующие вышеперечисленные методы.

Данное пособие рекомендовано для научных сотрудников, студентов и аспирантов, специализирующихся в области физики твердого тела.

**Shukrinov Yu. M., Rahmonov I. R., Kulikov K. V.**

Application of Numerical Methods for the Study of the Josephson Effect: Textbook. — Dubna: JINR, 2016. — 94 p.

ISBN 978-5-9530-0457-2

The textbook presents methods for calculating the dynamics of Josephson nanostructures based on numerical simulation of current-voltage characteristics and time dependence of the phase and voltage. In particular, it describes implementation of the Runge–Kutta method and finite difference scheme method for the study of the dynamics of Josephson junctions. The material introduced in the textbook includes all major aspects of applying various numerical methods for solving specific physical problems. Furthermore, it contains C++ program codes that implement the above methods.

This textbook is recommended for researchers, students and graduate students specializing in the field of solid state physics.

## Оглавление

Введение	6
Эффект Джозефсона	6
Резистивная модель	7
1. Моделирование фазовой динамики и вольт-амперной характеристики джозефсоновского перехода	9
1.1. Методика расчета временных зависимостей разности фаз и напряжения	9
1.2. Усреднение напряжения и составляющих базового тока	11
1.3. Краткие сведения о командах программирования и языке C++	12
1.4. Составление программы для расчета вольт-амперной характеристики джозефсоновского перехода	14
1.4.1. Подключение стандартных библиотек C++	14
1.4.2. Объявление переменных	15
1.4.3. Задание начальных условий для дифференциального уравнения	16
1.4.4. Создание файлов для записи численных данных	17
1.4.5. Цикл по току	17
1.4.6. Цикл по времени	18
1.4.7. Запись временных зависимостей и их согласование с вольт-амперной характеристикой	19
1.4.8. Усреднение напряжения и запись вольт-амперной характеристики в файл	21
1.5. Шум в численных расчетах. Генераторы шума	22
1.6. Компиляция и запуск программы	25
2. Влияние параметров модели и параметров расчета на характеристики джозефсоновского перехода	26
2.1. Джозефсоновский переход с малой диссипацией ( $\beta = 0.2$ )	26
2.2. Джозефсоновский переход с большой диссипацией ( $\beta = 1.5$ )	28
2.3. Влияние параметров расчета	29
2.3.1. Влияние шага по току	29
2.3.2. Влияние размера временного домена	30
2.3.3. Влияние шага по времени	30
2.3.4. Выбор интервала для усреднения	32

2.4. Временная зависимость компонент полного тока . . . . .	32
2.5. Фурье-анализ временных зависимостей напряжения . . . . .	34
2.6. Джозефсоновский переход под действием внешнего электромагнитного излучения . . . . .	34
2.7. Зависимость ширины ступеньки Шапиро от амплитуды излучения . . . . .	37
<b>3. Моделирование фазовой динамики системы связанных джозефсоновских переходов</b> . . . . .	<b>40</b>
3.1. Модели для описания системы связанных джозефсоновских переходов . . . . .	40
3.2. Методика расчета вольт-амперной характеристики и временных зависимостей характеристик системы связанных джозефсоновских переходов . . . . .	44
3.3. Решение системы дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты четвертого порядка . . . . .	45
3.4. Однопетлевые вольт-амперные характеристики системы связанных джозефсоновских переходов . . . . .	48
3.5. Анализ состояний системы в области ветвления . . . . .	50
3.6. Расчет полной ветвистой структуры системы связанных джозефсоновских переходов . . . . .	51
3.7. Параметрический резонанс . . . . .	52
<b>4. Моделирование фазовой динамики и вольт-амперных характеристик длинного джозефсоновского перехода</b> . . . . .	<b>55</b>
4.1. Система уравнений . . . . .	55
4.2. Решение системы дифференциальных уравнений . . . . .	56
4.2.1. Метод разностных схем . . . . .	56
4.2.2. Метод Рунге-Кутты четвертого порядка . . . . .	60
4.3. Расчет вольт-амперной характеристики . . . . .	63
4.4. Анализ результатов численного расчета . . . . .	64
4.4.1. Анализ вольт-амперной характеристики джозефсоновских переходов разной длины . . . . .	64
4.4.2. Флюксоны в длинном джозефсоновском переходе . . . . .	65
<b>Приложение 1.</b> . . . . .	<b>69</b>
Программа short.cpp для расчета вольт-амперной характеристики джозефсоновского перехода . . . . .	69
<b>Приложение 2.</b> . . . . .	<b>73</b>
Программа stack.cpp для системы связанных джозефсоновских переходов . . . . .	73
<b>Приложение 3.</b> . . . . .	<b>84</b>
Программа long.cpp для расчета характеристик длинного джозефсоновского перехода . . . . .	84

## Принятые сокращения

ДП – джозефсоновский переход  
СДП – связанные джозефсоновские переходы  
ВАХ – вольт-амперная характеристика

# Введение

## Эффект Джозефсона

Численные методы давно стали эффективным инструментом для физиков. Они позволяют находить ответы в задачах, которые не поддаются аналитическому решению. Примером может служить эффект Джозефсона, который является одним из наиболее важных эффектов современной физики конденсированного состояния.

Суть эффекта Джозефсона состоит в следующем. Рассмотрим контакт двух сверхпроводников, разделенных тонким диэлектрическим слоем и описываемых волновыми функциями Гинзбурга-Ландау  $\psi_n = |\psi_n| \exp i\theta_n$ , где  $n = 1, 2$ ,  $|\psi_n|$  – модуль, а  $\theta_n$  – фаза волновой функции.

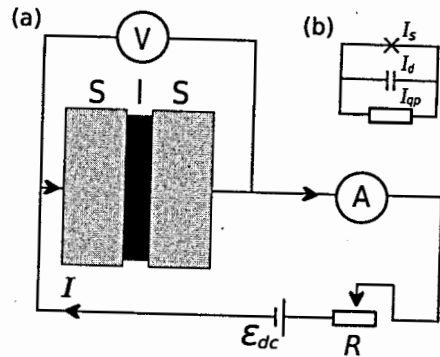


Рис. В.1. (а) Электрическая схема для исследования эффекта Джозефсона в контакте сверхпроводник-изолятор-сверхпроводник (SIS). Здесь  $R$  – переменное сопротивление;  $\epsilon_{dc}$  – источник постоянного тока;  $A$  – амперметр;  $V$  – вольтметр. (б) Джозефсоновский переход в резистивной модели

Пусть контакт включен в электрическую цепь, как это показано на рис. В.1. Как это было предсказано Джозефсоном, через данный контакт, который теперь называют джозефсоновским переходом (ДП), может протекать сверхпроводящий ток

$$I_s = I_c \sin \varphi, \quad (\text{В.1})$$

зависящий от разности фаз  $\varphi = \theta_1 - \theta_2$  этих сверхпроводников. В этом заключается стационарный эффект Джозефсона. Уменьшая переменное сопротивление  $R$ , мы увеличиваем ток через ДП, однако вольтметр  $V$  показывает нулевое значение напряжения. Если величина электрического тока становится больше определенного критического значения  $I_c$ , в контакте возникает электрическое напряжение  $V(t)$ , зависящее от производной разности фаз по времени:

$$\frac{\hbar}{2e} \frac{d\varphi}{dt} = V(t). \quad (\text{В.2})$$

В данном случае реализуется нестационарный эффект Джозефсона. Конечно, в реальном эксперименте измеряется усредненное по времени значение напряжения  $\langle V(t) \rangle = V$ .

Основные особенности рассматриваемого контакта двух сверхпроводников хорошо описываются резистивными моделями. Эти модели приводят к нелинейным дифференциальным уравнениям, решения которых не могут быть найдены аналитическими методами. В настоящем пособии нами демонстрируются возможности численных методов для описания структур, в которых проявляется эффект Джозефсона.

## Резистивная модель

В рамках резистивной модели Мак-Камбера-Стюарта полный ток через ДП определяется суммой токов – сверхпроводящего  $I_s$ , квазичастичного  $I_{qp}$  и тока смещения  $I_d$ :

$$I = I_s + I_{qp} + I_d = I_c \sin \varphi + V/R + C \frac{dV}{dt}, \quad (\text{В.3})$$

где  $C$  – емкость ДП, а  $R$  – его сопротивление в нормальном состоянии. Это соотношение вместе с джозефсоновским соотношением (В.2) образует основу для расчета вольт-амперной характеристики (ВАХ) ДП. Подставляя выражение (В.2) для  $V$  в выражение для тока (В.3), мы приходим к дифференциальному уравнению второго порядка

$$I = I_c \sin \varphi + \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{C\hbar}{2e} \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad (\text{В.4})$$

которое является нелинейным из-за члена с  $\sin \varphi$  и может быть решено только численно. Аналитическое решение этого уравнения существует в пределе  $C = 0$ . Имеются также другие системы, демонстрирующие динамическое поведение, описываемое тем же самым уравнением (В.4). В частности, нелинейный осциллятор (маятник) или частица в поле потенциала типа “стиральной доски”. В случае маятника  $I$  есть механический момент, действующий на маятник,

$\varphi$  – угол отклонения,  $I_c \sin \varphi = mgl \sin \varphi$  – восстанавливающий момент ( $l$  – длина,  $m$  – масса маятника),  $\frac{C\hbar}{2e} = ml^2$  есть момент инерции, член с  $\frac{\hbar}{2eR}$  описывает затухание. Угловая скорость  $\frac{d\varphi}{dt}$  соответствует напряжению в ДП.

Для упрощения уравнения (В.4) и его решения численными методами уравнение следует обезразмерить. Обычно используются следующие два типа нормировок времени:  $\tau = \omega_p^{-1}t$  или  $\tau = \omega_c^{-1}t$ , где  $\omega_p$  – джозефсоновская плазменная частота ( $\omega_p^2 = \frac{2eI_c}{\hbar C}$ ), имеющая порядок  $\sim 10^9 - 10^{12}$  Гц, а  $\omega_c$  – характерная частота, имеющая порядок  $\sim 10^{12} - 10^{14}$  Гц и связанная с характерным напряжением соотношением  $V_c = I_c R_N = \frac{\hbar \omega_c}{2e}$ .

Нормировка  $\tau = \omega_p^{-1}t$  приводит уравнение (В.4) к виду

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \sin \varphi = \frac{I}{I_c}, \quad (\text{В.5})$$

где  $\beta = \omega_p R C$ . При нормировке  $\tau = \omega_p^{-1}t / \beta = \omega_c^{-1}t$  имеем

$$\beta_c \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \sin \varphi = \frac{I}{I_c}, \quad (\text{В.6})$$

где  $\beta_c$  – параметр Мак-Камбера. Он характеризует джозефсоновскую систему и определяется следующими формулами:

$$\beta_c = \omega_p^2 R^2 C^2 = \frac{\omega_c^2}{\omega_p^2} = C R_N \omega_c, \quad \beta = \frac{1}{\omega_p R C}, \quad \beta^2 = \frac{1}{\beta_c}. \quad (\text{В.7})$$

Туннельный переход обладает емкостью  $C$ , т. е. является конденсатором, поэтому может иметь электрический заряд  $Q = CV$ , где  $C = \epsilon S / 4\pi d$ ,  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость,  $S$  – площадь обкладок конденсатора,  $d$  – толщина диэлектрического слоя. Пренебрегая диссипацией, уравнение (В.4) можно записать в виде

$$\partial^2 \varphi / \partial \tau^2 + \omega_p^2 \sin \varphi = 0. \quad (\text{В.8})$$

При малых значениях разности фаз,  $\sin \varphi$  можно заменить на  $\varphi$ . Получающееся уравнение описывает периодический обмен джозефсоновской энергии барьера  $\hbar I_c (1 - \cos \varphi) / 2e$  и электростатической энергии  $(2en)^2 / 2C$ . Такие колебания называются плазменными.

## Глава 1.

# Моделирование фазовой динамики и вольт-амперной характеристики джозефсоновского перехода

### 1.1. Методика расчета временных зависимостей разности фаз и напряжения

Исследование фазовой динамики ДП заключается в определении временной зависимости разности фаз  $\varphi(t)$  и ее производной либо разности фаз и напряжения  $V(t)$ . Далее будет показано, что в случае системы связанных ДП джозефсоновское соотношение обобщается и производная разности фаз не определяет напряжение в данном ДП. Поэтому в первом случае для определения ВАХ надо будет пересчитать напряжение на ДП по джозефсоновскому соотношению. Мы будем использовать второй метод и обсудим основные идеи, используемые при численном расчете  $\varphi(t)$  и  $V(t)$ .

Используя соотношение Джозефсона (В.2) и выражение для тока (В.5), мы получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = V, \\ \frac{dV}{dt} = I - \sin \varphi - \beta \frac{\partial \varphi}{\partial t} + A \sin(\omega t) \end{cases}$$

для расчета разности фаз и напряжения при фиксированном значении тока  $I$ . Здесь  $A$  и  $\omega$  – амплитуда и частота внешнего электромагнитного излучения соответственно.

Введем в рассмотрение временной домен размером  $Tf$  и разобьем его на интервалы с шагом  $TP$ . Согласно процедуре Рунге–Кутты, значения разности фаз  $\varphi(t+TP)$  и напряжения  $V(t+TP)$  на следующем шаге по времени  $t+TP$  можно определить на основе их значений в момент времени  $t$ :

$$\begin{cases} \varphi^{j+1} = \varphi^j + \Delta\varphi^j, \\ V^{j+1} = V^j + \Delta V^j, \end{cases} \begin{cases} \Delta\varphi^j = \frac{1}{6}(P_1^j + 2P_2^j + 2P_3^j + P_4^j), \\ \Delta V^j = \frac{1}{6}(K_1^j + 2K_2^j + 2K_3^j + K_4^j), \end{cases}$$

где коэффициенты Рунге-Кутта для разности фаз  $P_1, P_2, P_3, P_4$  и напряжения  $K_1, K_2, K_3, K_4$  определяются посредством

$$\begin{cases} P_1 = VTP, \\ K_1 = \{I - \sin\varphi\}TP - \beta P_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_2 = \left\{V + \frac{K_1}{2}\right\}TP, \\ K_2 = \left\{I - \sin\left(\varphi + \frac{P_1}{2}\right)\right\}TP - \beta P_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_3 = \left\{V + \frac{K_2}{2}\right\}TP, \\ K_3 = \left\{I - \sin\left(\varphi + \frac{P_2}{2}\right)\right\}TP - \beta P_3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_4 = \{V + K_3\}TP, \\ K_4 = \{I - \sin(\varphi + P_3)\}TP - \beta P_4. \end{cases}$$

На первом шаге по времени в качестве исходных значений  $\varphi_0$  и  $V_0$  используются начальные условия.

Расчет проводится в выбранном временном интервале  $(0, Tf)$  с шагом по времени  $TP$ . Затем мы увеличиваем величину тока на шаг  $JP$  и повторяем процедуру для тока  $I + JP$  в новом временном интервале  $(Tf, 2Tf)$ . Схема, определяющая методику расчета ВАХ и временных характеристик ДП, представлена на рис. 1.1. Значения разности фаз и напряжения в конце первого временного домена используются в качестве начальных условий для следующего временного интервала и т. д. В наших расчетах мы обычно полагаем  $Tf = 1000$ ,  $TP = 0.05$ ,  $JP = 0.0001$ , хотя в ряде случаев, когда необходимо согласование размера временного домена с периодом внешнего сигнала или требуется более высокая точность, эти параметры изменяются. Устойчивость решений проверяется влиянием на ВАХ изменения параметров задачи, в частности, удвоения и уменьшения вдвое шага по времени  $TP$ .

Временная зависимость напряжения в определенном интервале тока фактически складывается из изменения во времени на каждом шаге по току. Интервал времени, в течение которого записывается временная зависимость напряжения в ДП, определяется как  $TP + Tf(I_0 - I)/\delta I$ , где  $I_0$  является начальным

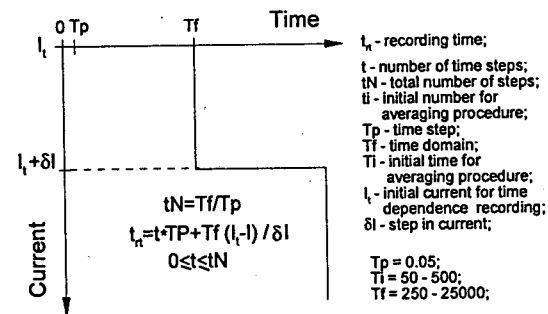


Рис. 1.1. Схема, определяющая методику расчета ВАХ и временных зависимостей характеристик ДП. Здесь использованы следующие обозначения:  $t_{rt}$  - время при записи временной зависимости;  $t$  - число шагов по времени;  $tN$  - количество шагов по времени в одном временном домене;  $t_i$  - номер шага, с которого начинается усреднение;  $TP$  - величина шага по времени;  $Tf$  - величина временного домена;  $Ti$  - значение времени, с которого начинается усреднение;  $I_i$  - начальное значение тока для записи временной зависимости;  $\delta I$  - шаг по току ( $JP$  в коде программы). Параметры берутся в интервалах  $Ti = 50 - 500$ ,  $Tf = 250 - 25000$ ,  $TP = 0.05$

значением тока, с которого временная зависимость регистрируется.

## 1.2. Усреднение напряжения и составляющих базового тока

Для нахождения напряжения на ДП при определенном значении базового тока необходимо усреднить полученную временную зависимость  $V(t)$ .

Как было отмечено выше, для определения ВАХ ДП нами решается система уравнений с использованием метода Рунге-Кутта четвертого порядка. В результате при фиксированном значении базового тока  $I$  определяются разность фаз  $\varphi(t)$  и напряжение  $V(t)$  как функции времени во временном интервале  $(0, T_{max})$  с шагом  $TP$ . Часть этого интервала, начиная с определенного значения  $T_{min}$ , используется для процедуры усреднения по времени.

Среднее по времени напряжение  $\langle V \rangle$  вычисляется посредством

$$\langle V \rangle = \frac{1}{T_{max} - T_{min}} \int_{T_{min}}^{T_{max}} V dt, \quad (1.1)$$

где  $T_{min}$  и  $T_{max}$  определяют начало и конец временного интервала для усреднения. Для расчета интеграла в правой части мы используем метод прямо-

угольников. Суть метода заключается в аппроксимации исходного интеграла суммой:

$$\int_{T_{\min}}^{T_{\max}} V(t) dt \approx \sum_{i=0}^{n-1} V_i(t_{i+1} - t_i). \quad (1.2)$$

Аналогично можно рассчитать средние значения составляющих базового тока  $I_{\text{disp}}$ ,  $I_{\text{qp}}$  и  $I_s$ :

$$I = I_{\text{disp}} + I_{\text{qp}} + I_s, \quad (1.3)$$

которые оказываются полезными для анализа динамики ДП.

### 1.3. Краткие сведения о командах программирования и языке C++

Здесь мы приводим основные сведения о языке C++, который используется в наших программах. Файл, содержащий код программы на языке C++, должен иметь расширение `.cpp`.

В основном программы на C++ начинаются со следующих строк:

```
#include<имя файла>
int main() {
```

*Тело программы*

```
return(0);
}
```

Вначале необходимо подключить заголовочные файлы из стандартной библиотеки C++ с помощью строки `#include<имя файла>`. Затем объявляется основная функция программы `int main()`, которая содержит тело программы.

Описание операторов.

#### 1. Оператор цикла `for`.

Тело цикла (т.е. то, что стоит в фигурных скобках после `for()`) будет выполняться до тех пор, пока условие истинно (`true`).

```
// Форма записи оператора цикла for:
for (/*выражение1*/; /*выражение2*/; /*выражение3*/ )
{
/*Один оператор или блок операторов*/;
}
```

#### 2. Оператор цикла `do while`.

В цикле `do while` сначала выполняется тело цикла, а затем проверяется условие продолжения цикла. Таким образом, если условие `do while` заведомо ложное, то хотя бы один раз блок операторов в теле цикла `do while` выполнится.

```
// Форма записи оператора цикла do while:
do // Начало цикла do while
{
/*Блок операторов*/;
}
while (/*Условие выполнения цикла*/); // Конец цикла do while
```

#### 3. Оператор условия `if else`.

Условный оператор реализует выполнение команд первого блока (первый блок операторов находится в фигурных скобках после `if`) при условии, что некоторое логическое выражение (условие, которое находится в круглых скобках после `if`) принимает значение "истина" (`true`). Если условие "ложно" (`false`), то выполняются команды из второго блока (второй блок операторов находится в фигурных скобках после `else`).

```
if (Условие) // Заголовок оператора и условие
{
//Если условие истинно, то...
//...выполняется первый блок операторов
}
else // А если условие ложно...
{
// ...то выполняется...
// ...второй блок операторов
}
```

#### 4. Операторы ввода/вывода `cin`, `cout`:

`cout` – стандартный поток вывода. Он используется для вывода текста и значений переменных на экран.

`cin` – стандартный поток ввода. Используется для ввода текста с клавиатуры.

При работе со стандартными потоками `cout` и `cin` нужно использовать последовательность символов `<` и `>`, удвоенные знаки "меньше" и "больше" соответственно. Символ `<` обозначает запись или помещения значения в указанный слева приемник, а символ `>` – выборку или извлечение значения из указанного слева источника.

#### 5. Оператор прерывания `break`.

Команда `break` прерывает выполнение ближайшего внешнего цикла или условного оператора, в котором она отображается. Управление передается следующему оператору после цикла.

#### 6. Оператор записи в файл `fprintf()`.

Функция `fprintf()` передает информацию (в нашем случае значение переменных) в поток. В простейшем случае эта функция имеет следующие аргументы, которые указываются в круглых скобках:

- имя потока;
- формат передаваемой информации;



- передаваемая информация.

Например, в случае `fprintf(f5, "%f\t", time)` `f5` – название потока, который передает информацию, `"%f\t"` – формат передаваемой информации. `"%f"` означает выбор десятичного числа с плавающей точкой, после точки записывается 6 цифр, `\t` означает вставку пробела. `time` – передаваемая информация, т.е. переменная, значение которой записывается в файл.

## 1.4. Составление программы для расчета вольт-амперной характеристики джозефсоновского перехода

Приведем пример составления программы, которая будет рассчитывать ВАХ ДП, а также временную зависимость разности фаз и напряжения при фиксированном значении базового тока (или в определенном его интервале).

### 1.4.1. Подключение стандартных библиотек C++

В нашей программе нам понадобится `iostream` – заголовочный файл с классами, функциями и переменными для организации ввода-вывода на языке программирования C++. Он включен в стандартную библиотеку C++. Название образовано от `Input/Output Stream` (поток ввода-вывода). Файл `iostream` управляет вводом-выводом, т.е. передачей информации в/из стандартных потоков ввода и вывода соответственно. Здесь также бывает полезно объявить пространство имен `using namespace std`, позволяющее напрямую работать с операторами, не обращаясь каждый раз к `std::`.

Для выполнения простых математических операций и вычисления элементарных функций вводится файл `math.h`. В этом файле функции принимают тип `double`, если не определено иначе.

Для работы с типами `float` и `long double` используются функции с постфиксами `f` и `l` соответственно. Функции, принимающие или возвращающие угол, работают с радианами.

Необходимо ввести также `stdio.h` – заголовочный файл стандартной библиотеки языка C++, содержащий определения макросов, константы и объявление функций и типов, используемых для различных операций стандартного ввода и вывода. Название образовано от `standard input/output header` – стандартный заголовочный файл ввода-вывода. В частности, мы используем `stdio.h`, чтобы иметь возможность записывать расчетные данные в файл.

Таким образом, первыми строками нашей программы являются:

```
#include<iostream>
#include<math.h>
#include<stdio.h>
```

```
using namespace std;
```

Остальная часть кода программы пишется внутри функции `main`:

```
int main() {
    return(0);
}
```

### 1.4.2. Объявление переменных

Каждой переменной выделяется ячейка оперативной памяти компьютера, в которой может храниться необходимая информация. В программировании переменная, как и в математике, может иметь название, состоящее из одной латинской буквы, из нескольких символов, целого слова или нескольких слов.

В языке C++ все переменные имеют определенный тип данных. Например, переменная, имеющая целочисленный тип, не может содержать ничего, кроме целых чисел, а переменная с плавающей точкой – только дробные числа. Тип данных присваивается переменной при ее объявлении или инициализации. При объявлении переменной в C++ сначала указывается тип данных для этой переменной, а затем ее название. В нашей программе мы используем переменные двух типов: `int` – целочисленный тип данных, `double` – тип данных с плавающей запятой двойной точности.

В программе, помимо переменных, которые фигурируют в математических выражениях (например, электрический ток  $I$ , напряжение  $V$ , разность фаз  $\varphi$  и т.д.), используются переменные, которые управляют процессом, например, задают направление тока или определяют состояние системы, в частности, порядковый номер отрезка времени на дискретной временной оси.

Ниже мы приводим список переменных с комментариями, которые объявлены в нашей программе. Отметим, что при объявлении нескольких переменных одного типа они должны быть разделены между собой запятой, а после объявления последней переменной должна стоять точка с запятой. В нашей программе объявлены следующие целочисленные переменные:

```
int
    t, //Номер шага (индекс) по времени;
    ti, //Номер шага по времени, с которого начинается
интегрирование;
    a=1, //Параметр для определения направления тока;
    tN, //Количество шагов по времени;
    breakcurrent=0, //Параметр, определяющий условие остановки
расчета ВАХ;
    backcurrent=0, //Параметр, определяющий условие возврата тока;
    at=-1; // Направление тока при записи временной зависимости.
В случае 1 временная зависимость записывается при возрастании тока,
в случае -1 - при его убывании;
```

Переменные, имеющие математический характер (например, физические величины, значения переменных и т. д.), должны относиться к типу double:

```
double
Tf0=200, //Временной домен для одного шага по току;
Tf1=200, //Временной домен для одного шага по току при вычислении
временной зависимости;
TP=0.0125, //Шаг по времени;
Ti=50, //Время, с которого производится усреднение по времени;
JP0=0.005, //Шаг по току (вне интервала [Imore1,Imore2]);
JP1=0.001, //Шаг по току в интервале [Imore1,Imore2];
Imore1=0.5, //Начальное значение интервала с измененным шагом по
току;
Imore2=1, //Конечное значение интервала с измененным шагом по току;
IO=0.1, //Начальное значение тока;
Imax=1.1, //Максимальное значение тока;
Imin=0, //Минимальное значение тока;
Ibreak=0, //Ток, при котором вычисление останавливается;
beta=0.2, //Параметр диссипации;
Itime1=0.8, //Начальное значение интервала тока для записи
временной зависимости;
Itime2=0.8, //Конечное значение интервала тока для записи
временной зависимости;
I, //Входной ток
P1,P2,P3,P4, //Коэффициенты Рунге-Кутты для разности фаз;
V1,V2,V3,V4, //Коэффициенты Рунге-Кутты для напряжения;
Важно отметить следующий момент. Если значение переменной вычисляется в ходе программы, то достаточно объявить переменную. А если значение переменной используется в вычислениях, то сразу, после объявления, необходимо присвоить нужное значение переменной.
```

### 1.4.3. Задание начальных условий для дифференциального уравнения

Для вычислений мы должны задать начальные условия:

```
//Начальные условия;
v=0, // Среднее напряжение;
intV=0, //Переменная для интегрирования напряжения;
V=0, //Напряжение при фиксированном времени;
ph=0, //Разность фаз при фиксированном времени;
time=0, //Время для записи;
Tf=Tf0, //В начале расчета размер временного домена
приравнивается Tf0;
JP=JP0; //В начале расчета шаг по току JP0;
tN=(Tf/TP); //Расчет количества шагов в одном временном домене;
```

```
ti=tN*Ti/Tf; //Расчет номера шага, с которого начинается
усреднение;
ICounter=0; //Обнуление счетчика тока;
```

### 1.4.4. Создание файлов для записи численных данных

Рассмотрим процесс создания файлов. Для создания файлов используется строка FILE \*f. Здесь \*f обозначает название потока для работы с файлами. Строкой f=fopen("name.dat "w"); указывается файл, в который поток f передает данные. Пустой файл автоматически создается и открывается. Указатель w определяет режим открытия пустого файла, т.е. должен открыть пустой файл. При этом, если файл name.dat уже создан в результате предыдущей работы программы, то его содержимое уничтожается. В нашей программе файлы созданы следующим образом:

```
FILE *f,*f5,*f6;
f=fopen("Voltage.dat "w"); //Файл для записи ВАХ;
f5=fopen("V(time).dat "w"); //Файл для записи
ременной зависимости напряжения;
f6=fopen("ph(time).dat "w"); //Файл для записи
ременной зависимости разности фаз;
В конце программы, после того как работа с файлами закончена, все открытые потоки должны быть закрыты функцией fclose:
fclose(f);
fclose(f5);
fclose(f6);
Функция fclose закрывает файл и отключает поток.
```

### 1.4.5. Цикл по току

ВАХ определяет изменение напряжения  $V$  при изменении базового тока  $I$  в определенном его интервале. Каждое значение среднего  $V$  рассчитывается при определенном фиксированном значении базового тока. Таким образом, нам необходимо задать цикл по базовому току с определенным шагом его изменения. Цикл по току задается посредством оператора do while:

```
I=IO
do //Начало цикла
{
    Тело цикла
}while(I<=100); //Условие выхода из цикла;
```

При каждом значении базового тока выполняются следующие дополнительные операции:

- осуществляется полный цикл по времени, при котором решается система дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты четвертого порядка и вычисляются напряжения  $(t)$  и разности фаз  $(\varphi)$  в ДП как функции

времени, а также записываются временные зависимости разности фаз и напряжения;

- вычисляется среднее значение напряжения при данном значении тока. Вычисленные значения записываются в файл Voltage.dat и выводятся на экран при расчете.

#### 1.4.6. Цикл по времени

После того как проведена предварительная подготовка, объявлены переменные, заданы начальные условия и определены параметры, созданы файлы для записи данных, можно приступить к численному решению уравнения (или, как в нашем случае, системы уравнений). Фиксируя значение базового тока, начинаем цикл по времени в интервале заданного временного домена  $Tf_0$ .

Цикл по времени задается внутри цикла по току также с помощью оператора `do while`:

```
t=0; //Счетчик цикла
do //Начало цикла
{
    Тело цикла
}while(++t<tN+1); //Условие выхода из цикла;
```

Цикл по времени выполняется от  $t=0$  до  $t=tN$ . При каждом шаге проводятся следующие операции:

- вычисление значений напряжения  $V(t)$  и разности фаз  $\varphi(t)$  методом Рунге-Кутта на данном шаге;
- интегрирование напряжения по времени методом прямоугольников;
- запись значений напряжения  $V(t)$  и разности фаз  $\varphi(t)$  в соответствующие файлы "V(time).dat" и "ph(time).dat".

В п.3.3 описан метод Рунге-Кутта четвертого порядка и расписана по пунктам процедура решения нашей системы уравнений. Ниже приведена часть программы, ответственная за решение дифференциального уравнения методом Рунге-Кутта с конкретными коэффициентами:

```
//Начало метода Рунге-Кутта
//Первые коэффициенты метода Рунге-Кутта
V1=TP*(I+Amp*sin(Omega*(TP*t+TP/2+ICounter*tN*TP))
-sin(ph)-beta*V);
P1=TP*V;
//Вторые коэффициенты метода Рунге-Кутта
V2=TP*(I+Amp*sin(Omega*(TP*t+TP/2+ICounter*tN*TP))
-sin(ph+P1/2)-beta*(V+V1/2));
P2=TP*(V+V1/2);
//Третьи коэффициенты метода Рунге-Кутта
```

```
V3=TP*(I+Amp*sin(Omega*(TP*t+TP/2+ICounter*tN*TP))
-sin(ph+P2/2)-beta*(V+V2/2));
```

```
P3=TP*(V+V2/2);
```

```
//Четвертые коэффициенты метода Рунге-Кутта
```

```
V4=TP*(I+Amp*sin(Omega*(TP*t+TP/2+ICounter*tN*TP))
-sin(ph+P3)-beta*(V+V3));
```

```
P4=TP*(V+V3);
```

Далее происходит вычисление значения разности фаз

```
ph=ph+(P1+2*P2+2*P3+P4)/6
```

и напряжения

```
V=V+(V1+2*V2+2*V3+V4)/6
```

для данного шага по времени.

В результате процедуры Рунге-Кутта мы получаем  $\varphi(t)$  и  $V(t)$  как функции времени при фиксированном значении тока. Для нахождения среднего значения напряжения в ДП необходимо проинтегрировать напряжение по времени. Как указывалось выше, это интегрирование проводится методом прямоугольников (см. уравнение (1.2)). Следует отметить, что интегрирование начинается при  $t = t_i$ , а заканчивается при  $t = tN$ :

```
if(t>ti) intV=V*TP+intV; //Начиная с номера цикла ti,
интегрируется напряжение;
```

Здесь использован условный оператор `if()`.

#### 1.4.7. Запись временных зависимостей и их согласование с вольт-амперной характеристикой

В ряде случаев возникает необходимость исследовать динамику разности фаз и напряжения в ДП в определенном интервале базового тока. Для этого в программе вводятся значения токов  $I_{time1}$  и  $I_{time2}$ , определяющие границы данного интервала, в котором записывается временная зависимость. Обычно, чтобы получить более детальную информацию, в этом интервале берется уменьшенный шаг по току и увеличенный размер соответствующего временного домена. Поэтому важно согласовать начало и окончание записи с данным изменением шага по току, которое выражается в добавке и вычитании половинных величин шага по току к соответствующей границе. Внутри цикла по времени задается условие, которое сравнивает данное значение тока с границами интервала для записи временных зависимостей. Условие ( $a==at$ ) определяет, хотим ли мы записать временную зависимость при увеличении тока или при его уменьшении.

Можно предположить, что условие для границ записи можно задать в виде `if(I>=Itime1) && (I<=Itime2)`, т.е. с помощью операторов `<=` и `>=`. Но компиляторы используют число с плавающей точкой, поэтому равенства  $I=I_{time1}$  и  $I=I_{time2}$  выполняются не всегда. Это приводит к потере двух шагов по времени в процессе записи данных в файл при входе в интервал и выходе из него. Чтобы избежать этого, можно задать условие входа и выхода из интервала

[ $I_{time1}$ ,  $I_{time2}$ ] операторами  $<$  и  $>$ , а также добавлением и вычитанием половинного шага по току. Например,  $I < (I_{time2} + JP1/2)$  и  $I > (I_{time1} - JP1/2)$ .

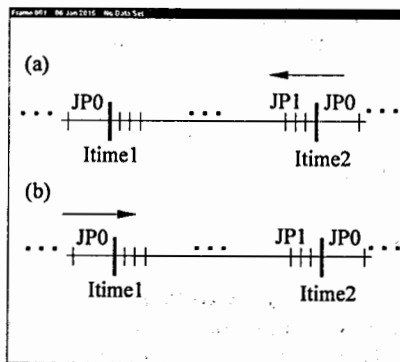


Рис. 1.2. Схема, определяющая методику записи временных зависимостей характеристик ДП

Запись в файл выполняется с помощью функции `fprintf`.

Мы используем следующие параметры форматирования:  $\backslash n$  - переход к следующей строке,  $\%e$  - экспоненциальная форма записи чисел, например, число 0.0123456789 записывается в виде  $1.23456789 \cdot 10^{-2}$ , т.е. дробное число, умноженное на 10 в определенной степени.

Таким образом, код записи временных зависимостей дается в виде

```
// Начало записи временных зависимостей
if((I < (I_time2 + JP1/2)) && (I > (I_time1 - JP1/2)) && (a == at))
{
    tN = Tf1 / TP;
    Tf = Tf1;
    // Формулы для вычисления записываемого времени
    if(at == -1)
    {
        time = t * TP - (TP * tN * (I_time2 - I) * at) / JP;
    }
    if(at == 1)
    {
        time = t * TP + (TP * tN * (I - I_time1) * at) / JP;
    }
    fprintf(f5, "%f\t", time); // Запись значения времени в файл,
    // где записывается V(t)
    fprintf(f6, "%f\t", time); // Запись значения времени в файл,
    // где записывается ph(t)
    fprintf(f6, "%e\t", ph); // Запись разности фаз в файл
    fprintf(f5, "%e\t", V); // Запись напряжения в файл
}
```

```
fprintf(f5, "%f\t", I); // Запись базового тока в файл
fprintf(f6, "%f\t", I); // Запись базового тока в файл
fprintf(f5, "\n"); // Переход на новую строку
fprintf(f6, "\n"); // Переход на новую строку
```

```
}else
{
    tN = Tf0 / TP;
    Tf = Tf0;
}
// Конец вычисления временных зависимостей
```

#### 1.4.8. Усреднение напряжения и запись вольт-амперной характеристики в файл

В цикле по времени программа рассчитывает значения интеграла (суммы произведений  $V \cdot TP$ ) во временном домене от  $T_i$  до  $T_f$ . Используя значения вычисленного интеграла, можно найти среднее напряжение. Код программы, который выполняет усреднение, имеет вид

```
v = intV / (Tf - Ti); // Усреднение напряжения
intV = 0;
```

Следует отметить, что переменная, которая хранит значения интеграла, должна приравняться нулю после ее использования, поскольку далее начинается процесс интегрирования следующего шага по току.

Результаты работы программы, а именно значение тока и вычисленное для данного тока напряжение, можно вывести на экран. В программе это реализуется посредством объекта `cout`:

```
cout << "\n\nI: " << I << "\tV: " << v; // Вывод результатов на экран;
```

В процессе работы на экране монитора мы видим: "I : значение тока", затем следует таблица "V : значение напряжения".

Далее вычисленное значение среднего напряжения с соответствующим значением тока записываются в файл:

```
fprintf(f, "%f\t%e\n", I, v);
```

При расчете ВАХ приходится изменять направление базового тока (т.е. увеличение тока сменяется на его уменьшение, и наоборот).

Эти условия в программе заданы следующим образом.

Условие для изменения направления тока на уменьшение при достижении

```
I_max:
if (I > I_max)
{
    cout << "here is max of current so we go back" << endl;
    a = -1;
}
```

Условие для изменения направления тока на возрастание при достижении

```
I_min:
```

```

if ((I<=Imin+JP1/2) && (backcurrent==0) && (a==1))
{
    backcurrent=1; //если backcurrent=1, следовательно,
    произошла смена направления расчета;
    breakcurrant=1; //если breakcurrant=1, следовательно,
    при достижении значения Ibreak программа будет остановлена;
    a=1;
}
Условие для остановки вычислений при достижении Ibreak:
if ((backcurrent==1) && (I>=Ibreak-JP1/2) && (a==1)) //Условие
для остановки вычислений
{
    break;
}
В программе изменение значения на каждом шаге по току задано в виде
I=I+a*JP;
Мы отмечали выше, что в определенной области ВАХ, для более детального
ее исследования, можно уменьшить шаг по току. Условие для изменения шага
по току в программе задано в виде
if ((I<=Imore2+JP1/2) && (I>=Imore1-JP1/2))
{
    JP=JP1;
    tN=Tf1/TP;
    Tf=Tf1;
}
else
{
    JP=JP0;
    tN=Tf0/TP;
    Tf=Tf0;
}
После цикла по току мы должны закрыть потоки:
fclose(f);
fclose(f5);
fclose(f6);

```

## 1.5. Шум в численных расчетах. Генераторы шума

Учет шума при моделировании динамики ДП играет большую роль. Можно выделить два источника шума: внутренние (собственные) флуктуации и внешние (наводки). Мы будем рассматривать воздействие лишь собственных флуктуаций, так как с использованием фильтров в эксперименте обычно удается снизить размах внешних флуктуаций. Источником внутренних флуктуаций

является нормальная составляющая тока. Таким образом, свойства флуктуационного тока  $I_{\text{noise}}$  такие же, как у контакта в нормальном состоянии. Для малых напряжений

$$eV \lesssim kT \quad (1.4)$$

основную роль играют тепловые флуктуации. В этом случае спектральная плотность  $S_i(\omega)$  тока  $I_{\text{noise}}$  постоянна:

$$S_i(\omega) = \frac{G_N}{\pi} kT = \text{const.} \quad (1.5)$$

Силу воздействия тепловых флуктуаций можно охарактеризовать величиной

$$\gamma \equiv \frac{kT}{E_c} = \frac{2ekT}{\hbar I_c} = \frac{I_T}{I_c}, \quad I_T = \frac{2ekT}{\hbar} \approx 0.084 T \text{ [K]}. \quad (1.6)$$

Таким образом, при температуре  $T \approx 4.2 \text{ K}$   $I_T \sim 0.3 \text{ мкА}$ . Если критический ток  $I_c$  существенно превышает  $I_T$ , то влияние тепловых флуктуаций относительно мало.

Если напряжение на контакте становится большим, то  $eV \gtrsim kT$ . Тогда существенную роль начинают играть так называемые дробовые флуктуации, связанные с дискретностью заряда квазичастиц. Их спектральная плотность

$$S_i(\omega) = \frac{eI_N}{2\pi} = \text{const.} \quad (1.7)$$

В нашей программе генерация шума состоит из двух частей. В первой части генерируется случайное число на основе номера такта процессора с момента последнего сброса. Определяется максимально возможное значение генерируемых случайных чисел  $\text{ranpx}$ , и это значение фиксируется. Определение значения  $\text{ranpx}$  нам необходимо для нормировки случайных чисел, поскольку мы хотим получить распределение случайных чисел в интервале  $[-1, 1]$ . Во второй части генерируются случайные числа в интервале от нуля до  $\text{ranpx}$  и нормируются на  $\text{ranpx}$ . Затем полученное распределение умножается на амплитуду шума  $\text{noise}$ , в результате чего мы получим значение шумового тока. В процессе выполнения программы первая часть генерации шума осуществляется всего один раз и определяется  $\text{ranpx}$ . А вторая часть выполняется при каждом значении внешнего тока и в коде программы находится внутри цикла по току.

Теперь поэтапно рассмотрим код программы, который генерирует шум. Вначале объявляются необходимые переменные для работы с шумом:

```
long int
```

```

    ranmax=0, //Максимальное значение случайного числа
    ran=0; //Значение случайного числа для определения ranmax
    long long x1; //Переменная для номера такта процессора
(зерно случайных чисел)
    float irand; //Значение случайного числа для нормировки случайных
чисел
    double
        Irand //Значение шумового тока, которое добавляется к базовому
току
        noisemax //Амплитуда шумового тока;

```

Определение номера такта процессора выполняется с помощью ассемблерной инструкции `rdtsc` (англ. Read Time Stamp Counter), которая возвращает количество тактов процессора с момента последнего сброса. В программном коде на языке C++ эта инструкция задается ключевым словом `asm`. Ключевое слово `asm` используется для вставки в C++-программу одной или нескольких инструкций ассемблерного кода. Общая форма записи оператора `asm` имеет вид `asm("инструкция")`. Тогда код, который определяет номер такта процессора, записывается в виде

```
asm("rdtsc": -A"(x1));
```

Следующим шагом является инициализация, т.е. создание генератора случайных чисел `rand()`. Это действие выполняется с помощью `srand` ("зерно генератора"). Как упомянуто выше, в нашем случае зерном генератора является `x1` – номер такта процессора. Для того чтобы несколько раз сгенерировать случайные числа и определить максимально возможное значение `ranmax`, задается цикл. Таким образом, код первой части генерации шума записывается следующим образом:

```

i=1;
do{ asm("rdtsc": -A"(x1));
    srand(x1);
    ran=rand(); //Генерация случайного числа;
    if(ranmax<ran)ranmax=ran; //Полученное случайное значение
сравнивается с максимальным;
}while(++i<=100000);
cout < "random max is : " < ranmax < endl;

```

В процессе выполнения цикла происходит сравнение значения полученного случайного числа `ran` с максимальным `ranmax`. Если полученное число больше `ranmax`, то значение `ranmax` заменяется этим числом. Нормировка случайных чисел проводится по формуле  $2[(\text{irand}/\text{ranmax}) - 0.5]$ . Таким образом, код для генерации шумового тока при фиксированном значении базового тока записывается так:

```
irand=rand();
```

```

irand=2*(irand/ranmax-0.5);
Irand=noisemax*irand;
cout<<"\n number:"<<i<<"\t random:"<<Irand;

```

В наших расчетах амплитуда шума нормируется на величину критического тока  $I_c$  и обычно принимается равной  $10^{-8}$ .

## 1.6. Компиляция и запуск программы

Для выполнения или запуска программы необходимо ее скомпилировать. В результате компиляции создается "исполняемый" файл, запуск которого и подразумевает запуск созданной программы. Программное обеспечение, которое необходимо для компиляции программного кода, называют компилятором. Существуют различные компиляторы языка C++: от простых, предназначенных только для компилирования, до комплексных, с дополнительными функциями, инструментами и редакторами. В частности, хорошо себя зарекомендовали GNU, Intel C++ compiler, minGW, Visual C++, Borland C++. В наших примерах можно использовать GNU compiler, Intel C++ compiler, minGW. Они достаточно просты в использовании и работают на разных платформах (Linux и Windows).

## Глава 2.

# Влияние параметров модели и параметров расчета на характеристики джозефсоновского перехода

При расчете программа Short-JJ.cpp, представленная в приложении, создает три dat-файла с данными: Voltage.dat, V(time).dat и ph(time).dat. В них содержатся ВАХ системы, временные зависимости напряжения и разности фаз соответственно. Мы рассмотрим отдельно случаи с малой и большой диссипацией и проанализируем результаты расчета ВАХ системы и временных зависимостей.

### 2.1. Джозефсоновский переход с малой диссипацией ( $\beta = 0.2$ )

Как указывалось выше, одной из основных характеристик ДП является диссипация, которая определяет емкость перехода, критический ток и сопротивление ДП в нормальном состоянии. Диссипация характеризуется параметром  $\beta$ , который связан с параметром Мак-Камбера  $\beta_c$  соотношением  $\beta = 1/\sqrt{\beta_c}$ .

На рис. 2.1(a) представлена ВАХ, рассчитанная при значении параметра диссипации  $\beta = 0.2$ . Расчет проводился с нулевого значения тока  $I = 0$  до  $I_{\max} = 4$  и обратно до нуля, затем работа программы прекращалась. Стрелки указывают направление изменения тока. Буквами на рисунке отмечены точки, в которых сохранялась временная зависимость напряжения и разности фаз. Полученная ВАХ отражает состояние ДП с нулевым напряжением в интервале тока  $[0, 1]$ , а также демонстрирует наличие гистерезиса в резистивном состоянии, характеризующее определенным значением тока возврата  $I_r$  в сверхпроводящее состояние (состояние с нулевым напряжением).

Временная зависимость разности фаз для трех значений тока  $I = 0, 0.0001, 0.0002$  показана на рис. 2.1(b). Она рассчитывалась при  $Tf = 500$  и  $TP = 0.05$ .

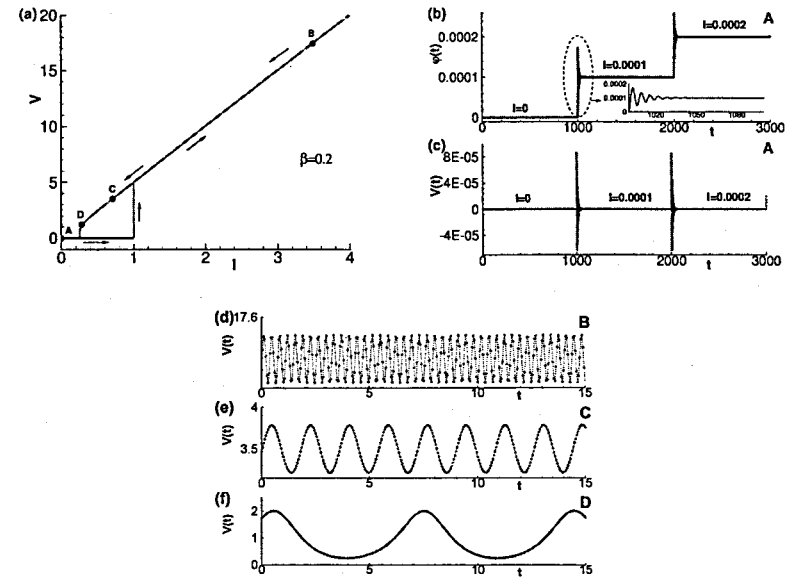


Рис. 2.1. (a) ВАХ одного ДП при  $\beta = 0.2$ ; (b) временная зависимость разности фаз в сверхпроводящей области; (c) временная зависимость напряжения в сверхпроводящей области; (d), (e) и (f) временная зависимость напряжения в точках В, С и D соответственно

Как можно видеть, увеличение тока  $I$  приводит к скачкообразному изменению разности фаз  $\varphi = \arcsin(I)$ . На вставке показаны осцилляции, возникающие при изменении тока, вызванные переходными процессами в системе. Как и следовало ожидать, при малых значениях тока  $\arcsin(I) = I$ .

На временной зависимости напряжения (см. рис. 2.1(c)) также наблюдаются переходные процессы, но значение напряжения колеблется около нуля, так как в сверхпроводящей области напряжение на переходе отсутствует (среднее напряжение равно нулю). При усреднении по времени осцилляции могут вносить определенную ошибку, поэтому усреднение должно проводиться в интервале  $Tf - Ti$ , где  $Ti$  – длина интервала по времени, в котором наблюдаются переходные осцилляции. Следовательно, этот интервал должен быть исключен из процесса усреднения.

Характер осцилляций напряжения в резистивном состоянии при различных значениях базового тока демонстрируется на рис. 2.1(d,e,f), где представлены временные зависимости напряжения в точках В, С и D, отмеченных на рис. 2.1(a). Ясно, что увеличение напряжения соответствует возрастанию частоты осцилляций, но здесь важно отметить существенное отличие характера колебаний напряжения от синусоидальной зависимости в области гистерезиса вблизи точки D. Это связано с сильным влиянием нелинейности в этой области.

## 2.2. Джозефсоновский переход с большой диссипацией ( $\beta = 1.5$ )

В случае большой диссипации картина существенно изменяется. На рис. 2.2(a) представлена ВАХ, рассчитанная при значении параметра диссипации  $\beta = 1.5$ . В данном случае расчет проведен как для положительных, так и для отрицательных значений тока. Полученная ВАХ отражает состояние ДП с нулевым напряжением в интервале тока  $[-1, +1]$  и резистивное состояние при остальных его значениях. Мы видим, что ВАХ ДП демонстрирует отсутствие гистерезиса и симметрична относительно  $I = 0$ . Временная зависимость напряжения и разности фаз для двух значений тока вблизи точки А показана на рис. 2.2(b,c). Как и следовало ожидать, разность фаз растет скачкообразно при переходе к следующему значению тока, при этом область переходных процессов существенно меньше (как показано на вставке), это связано с увеличением диссипации в системе.

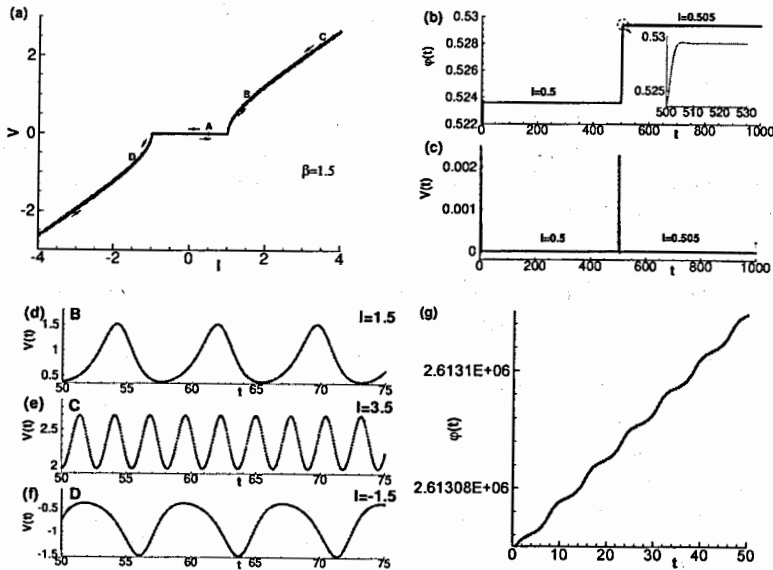


Рис. 2.2. (a) ВАХ одного ДП при  $\beta = 1.5$ ; (b) временная зависимость разности фаз в сверхпроводящей области; (c) временная зависимость напряжения в сверхпроводящей области; (d), (e) и (f) временная зависимость напряжения в точках В, С и D соответственно; (g) временная зависимость разности фаз в точке В

На рис. 2.2(d,e,f) показаны временные зависимости напряжения в точках В, С и D соответственно. Как и в случае с малой диссипацией, при больших значениях тока (точка С) осцилляции напряжения имеют синусоидальный характер,

тогда как в точках В и D (рис. 2.2(a,c)) характер осцилляций сильно отличается от синусоидального, это также связано с нелинейностью в этих областях. На рис. 2.2(g) представлена зависимость разности фаз от времени при значении тока  $I = 1.5$  вблизи точки В, демонстрирующая монотонно осциллирующий рост разности фазы для перехода с большой диссипацией.

## 2.3. Влияние параметров расчета

Численный расчет ВАХ имитирует ее экспериментальное измерение. Как и в эксперименте, при численном расчете изменяется электрический ток и определяется напряжение на ДП. Для получения ВАХ, согласующихся с экспериментальными, важно правильно задать параметры расчета.

### 2.3.1. Влияние шага по току

Одним из таких параметров является шаг по току. На рис. 2.3 представлены ВАХ ДП с параметром диссипации  $\beta = 0.2$  при различных значениях шага по току:  $JP = 0.1(a), 0.01(b), 0.001(c), 0.0001(d)$ . Символы указывают расчетные значения, которые соединены линиями для наглядности. Расчет проводился при одних и тех же значениях параметров:  $Tf = 1000, Ti = 50, Tr = 0.05, I0 = 0.1, I_{max} = 2$ . На вставках к рис. 2.3 показана часть ВАХ, соответствующая сверхпроводящему состоянию ДП, как при увеличении базового тока, так и при его уменьшении. Таким образом, уменьшение шага по току приводит к сглаживанию характеристики и уменьшению амплитуды осцилляций напряжения в сверхпроводящем состоянии (вблизи нуля) перед переходом в резистивное состояние.

### 2.3.2. Влияние размера временного домена

В соответствии с программой Short-JJ (см. приложение 1), на каждом шаге по току рассчитывается временная зависимость разности фаз и напряжения в ДП. Этот расчет ведется в определенном временном домене  $Tf$ . На рис. 2.4 показаны временные зависимости напряжения вблизи значения тока  $I = 0.7$  для следующих размеров временного домена: (a)  $Tf = 50$ ; (b)  $Tf = 100$ ; (c)  $Tf = 250$ . Видно, что осцилляции напряжения, возникающие при переходе к следующему значению тока, связаны с тем, что ток изменяется скачкообразно и при интервале усреднения  $Tf = 50$  решения не успевают выйти в область стабильности (рис. 2.4(a)). Как результат, среднее напряжение флуктуирует достаточно сильно. В таких случаях говорят о большом вкладе переходных процессов. При  $Tf = 100$  решения выходят на значение  $V = 0$  (рис. 2.4(b)), однако соответствующий интервал сравним с областью переходного процесса и при усреднении их влияние будет велико. В случае  $Tf = 250$  (см. рис. 2.4(c)) среднее напряжение практически равно нулю. Таким образом, для получения правильного результата необходимо следить за выбором интервала усреднения.



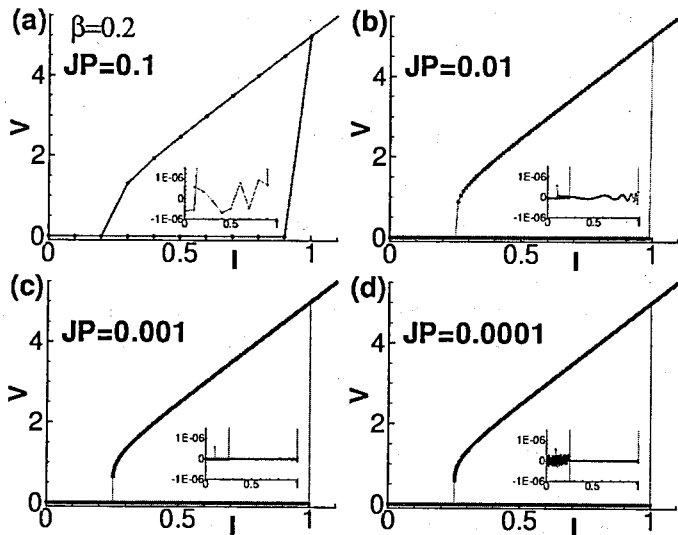


Рис. 2.3. ВАХ ДП при  $\beta = 0.2$  и разных значениях шага по току: (a)  $JP = 0.1$ , (b)  $0.01$ , (c)  $0.001$ , (d)  $0.0001$

### 2.3.3. Влияние шага по времени

Одной из важнейших процедур при исследовании динамики системы численными методами является дискретизация по времени, т.е. выбор шага по времени.

Рассмотрим влияние выбора шага по времени  $TP$  на результат численного расчета. На рис. 2.5 представлены ВАХ ДП, рассчитанные при значениях шага по времени  $TP = 0.05$ (a),  $0.5$ (b),  $1$ (c). Расчет проводился для ДП с  $\beta = 0.2$  и при значениях параметров  $Tf = 1000$ ,  $Ti = 50$ ,  $JP = 0.0001$ ,  $I_0 = 0.1$ ,  $I_{max} = 2$ .

ВАХ при  $TP = 0.05$ , представленная на рис. 2.5(a), отражает переключение ДП из сверхпроводящего состояния в резистивное при  $I = 1$ . Данная характеристика соответствует экспериментально измеряемым ВАХ. Легко видеть, что значение напряжения  $V = 8.49$  при  $I = 1.7$  соответствует среднему значению на временной зависимости, представленной на рис. 2.5(e).

ВАХ при  $TP = 0.5$ , представленная на рис. 2.5(b), качественно совпадает с предыдущим случаем, однако мы видим на рис. 2.5(f), что временная зависимость в данном случае оказывается "модулированной", что приводит к отличающемуся значению напряжения  $V = 8.4507$  при  $I = 1.7$ . Также на ВАХ наблюдается ступенька тока при  $V \approx 6.283$ . Дальнейшее увеличение шага по времени ведет к возникновению дефектов в виде ступенек тока на всей ВАХ (рис. 2.5(c)). Это связано с тем, что ограничение точности, которое является неизбежным при численных расчетах, может приводить к нефизическим результатам.

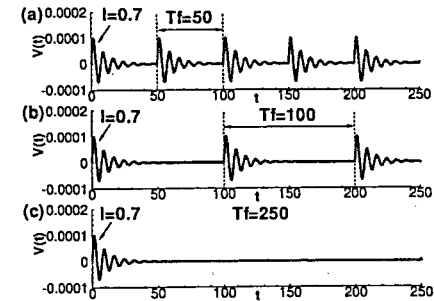


Рис. 2.4. Временные зависимости напряжения в точке  $I = 0.7$ , рассчитанные при: (a)  $Tf = 50$ , (b)  $100$ , (c)  $250$

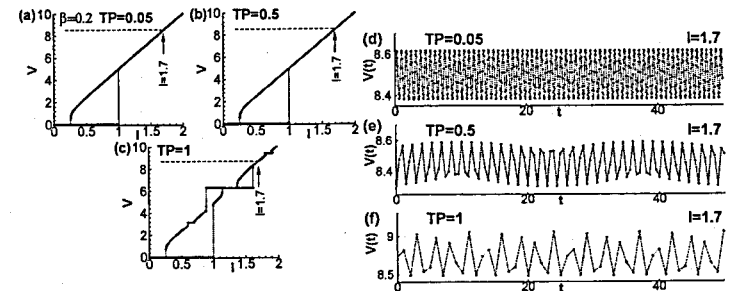


Рис. 2.5. ВАХ ДП при  $\beta = 0.2$  и разных значениях шага по времени: (a)  $TP = 0.05$ , (b)  $0.5$ , (c)  $1$ . Временные зависимости напряжения в точке  $I = 1.7$ , рассчитанные при: (d)  $TP = 0.05$ , (e)  $0.5$ , (f)  $1$

На рис.2.6(a), (b) и (c) показаны ВАХ ДП, рассчитанные с помощью программы Short-JJ.cpp при  $TP = 0.05$  и при значениях параметра диссипации  $\beta = 0.01$ ,  $0.05$  и  $0.1$ . На всех рисунках ВАХ демонстрирует ступеньку при  $V = 125.6$ .

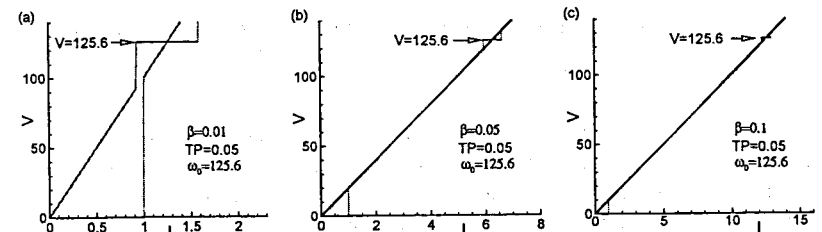


Рис. 2.6. ВАХ ДП при различных значениях параметра диссипации: (a)  $\beta = 0.01$ ; (b)  $0.05$ ; (c)  $0.1$

Обычно, как мы убедимся далее (в п. 2.6), ступеньки на ВАХ возникают

при наличии периодического сигнала в системе. Однако в нашем случае его нет. Следовательно, существует другой механизм, приводящий к появлению ступеньки при  $V = 125.6$ . Ответ заключается в возникновении дополнительной частоты из-за применяемой дискретизации по времени. Действительно, если рассчитать частоту по формуле  $\omega_0 = \frac{2\pi}{TP}$ , то мы и получим величину  $\omega_0 = V = 125.6$ .

### 2.3.4. Выбор интервала для усреднения

В результате решения системы уравнений (1.1) мы получаем зависящие от времени разность фаз  $\varphi(t)$  и напряжение  $V(t)$  для данного значения тока. Как уже отмечалось ранее, на этой временной зависимости в начале каждого временного интервала есть осцилляции, связанные с переходными процессами. При усреднении по времени эти осцилляции будут добавлять ошибки в численный расчет. Чтобы избежать этого, усреднение должно проводиться не по всему временному домену, а начиная с  $Ti$ , когда переходный процесс уже закончился. Таким образом, интервал усреднения следует выбирать равным  $Tf - Ti$ .

На рис. 2.7(a) продемонстрированы ВАХ ДП при значениях  $Ti = 0, 10, 50$ . Расчет проводился для ДП с  $\beta = 0.2$  и при значениях параметров  $Tf = 1000$ ,  $JP = 0.0001$ ,  $I_0 = 0.1$ ,  $I_{max} = 2$ . На вставке показана временная зависимость напряжения в сверхпроводящем состоянии при  $I = 0.7$ . Видно, что при  $Ti = 0$  и  $Ti = 10$  интервал усреднений включает переходный процесс, тогда как при  $Ti = 50$  напряжение уже практически становится постоянным (равным нулю). На рис. 2.7(b,c,d) увеличена часть ВАХ, соответствующая сверхпроводящему состоянию, рассчитанная при вышеуказанных значениях  $Ti$ . Штриховой линией отмечено напряжение  $V = 0$ . Мы видим, что в случаях  $Ti = 0$  и  $Ti = 10$  напряжение отличается от нуля, тогда как для  $Ti = 50$  напряжение равно нулю на протяжении всей области сверхпроводящего состояния.

## 2.4. Временная зависимость компонент полного тока

Для того чтобы лучше представить динамику ДП в RCSJ-модели, мы рассчитали временную динамику токов в сверхпроводящей и резистивной областях. Временная зависимость токов в сверхпроводящей области показана на рис. 2.8. Расчет проведен при малом значении параметра диссипации  $\beta = 0.2$  и соответствует  $I_{bias} = 0.4$ . Как можно видеть, в сверхпроводящей области токи не зависят от времени. Среднее значение сверхпроводящего тока  $I_s = I_{bias} = 0.4$  (см. рис. 2.8(a)). Временная зависимость квазичастичного тока  $I_{qp}$  и тока смещения  $I_{disp}$  показана на рис. 2.8(b). Среднее значение этих токов в сверхпроводящей области равно нулю.

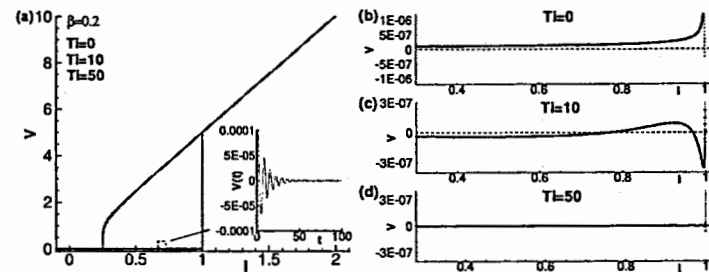


Рис. 2.7. (а) ВАХ одного ДП при  $\beta = 0.2$  и разных значениях начала интервала усреднения  $Ti = 0, 10, 50$ . На вставке показана временная зависимость напряжения в области нулевого напряжения ( $I = 0.7$ ). Область нулевого напряжения на ВАХ при разных значениях начала интервала усреднения: (b)  $Ti = 0$ ; (c) 10; (d) 50

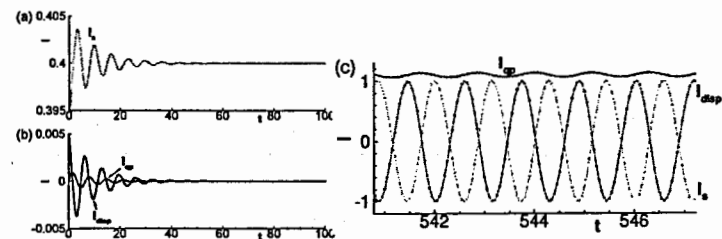


Рис. 2.8. Временная зависимость токов: (а) сверхпроводящего  $I_s$ ; (b) квазичастичного  $I_{qp}$  и тока смещения  $I_{disp}$  в ДП при  $\beta = 0.2$  и  $I_{bias} = 0.4$ . (с) Временная зависимость токов  $I_s$ ,  $I_{qp}$  и  $I_{disp}$  в ДП при  $\beta = 0.2$  и  $I_{bias} = 1.1$

Когда ток, протекающий через переход  $I_{bias}$ , становится больше критического ( $I_{bias} > 1$ ), ДП переходит в резистивное состояние. Как хорошо видно на рис. 2.8(c), в резистивной области сверхпроводящий ток начинает осциллировать вокруг нуля с постоянной амплитудой. В системе возникает переменная составляющая тока, что приводит к появлению тока смещения. Амплитуда и частота сверхпроводящего тока  $I_s$  и тока смещения  $I_{disp}$  одинаковы, но осцилляции находятся в противофазе. Сумма  $I_s + I_{disp}$  равна нулю в резистивной области. Среднее значение квазичастичного тока, в свою очередь, соответствует полному току, протекающему через ДП:  $\langle I_{qp} \rangle = I_{bias} = 1.1$ .

Для ДП с сильной диссипацией при  $\beta = 1.5$  вблизи критического тока  $I_{bias} = 1.1$  характерны несинусоидальные осцилляции токов (см. рис. 2.9). Среднее значение  $I_s$  не равно нулю (см. рис. 2.9(a)), несмотря на то, что ДП находится в резистивном состоянии:  $I_{bias} = 1.1$ .

Характер осцилляций токов изменяется при удалении от критического тока  $I_{bias} = 1$ . На рис. 2.9(c) и (d) показаны временные зависимости токов, соответствующие  $I_{bias} = 2$ . Среднее значение суммы  $I_s + I_{disp}$  приближается к нулю (см.

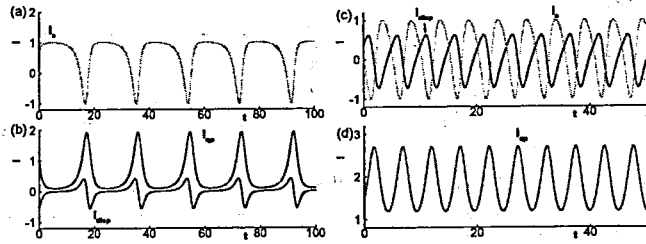


Рис. 2.9. Временная зависимость токов: (а)  $I_s$ ; (б)  $I_{qp}$  и  $I_{disp}$  в ДП при  $\beta = 1.5$  и  $I_{bias} = 1.1$ ; (с)  $I_s$  и  $I_{disp}$ ; (д)  $I_{qp}$  в ДП при  $\beta = 1.5$  и  $I_{bias} = 2$

рис. 2.9(с)). Среднее значение квазичастичного тока  $I_{qp}$  соответствует  $I_{bias} = 2$ .

## 2.5. Фурье-анализ временных зависимостей напряжения

В ряде задач при анализе временной зависимости напряжения возникает необходимость определения частот в системе. Их можно определить с помощью преобразования Фурье, которое широко используется для различных приложений в технике и науке. Быстрое преобразование Фурье (FFT) есть алгоритм для вычисления дискретного преобразования Фурье. Фурье-анализ преобразует время (пространство) в частоту (волновой вектор). Имеется ряд коммерческих программ, которые позволяют проводить FFT-анализ.

Приведем пример использования FFT в наших задачах. На рис. 2.10 (а) показана ВАХ ДП с параметром диссипации  $\beta = 0.2$ . Стрелкой отмечено значение тока, при котором записывалась временная зависимость напряжения, приведенная на рис. 2.10 (б). Результат FFT показан на рис. 2.10 (с). Он свидетельствует о наличии осцилляций напряжения с одной джозефсоновской частотой. Выше отмечалось, что время в наших расчетах  $\tau = t\omega_p$ , т.е. истинное время нормировано на обратную плазменную частоту  $t/\omega_p^{-1}$ , поэтому результат FFT дает нам отношение  $\omega/2\pi\omega_p$ , т.е. то, что мы видим по оси абсцисс. Следовательно, его надо умножить на  $2\pi$ , чтобы получить  $\omega/\omega_p$ . Тогда мы можем определить напряжение, так как  $\omega/\omega_p = V/V_0$ . Умножая полученное значение частоты 0.393 на  $2\pi$ , находим отношение  $\omega/\omega_p = 2.469$ , что практически совпадает с напряжением  $V/V_0 = 2.467$  на ВАХ.

## 2.6. Джозефсоновский переход под действием внешнего электромагнитного излучения

Внешнее электромагнитное излучение создает дополнительный переменный электрический ток через ДП, равный  $A \sin \omega t$ , где  $A$  – амплитуда внешнего из-

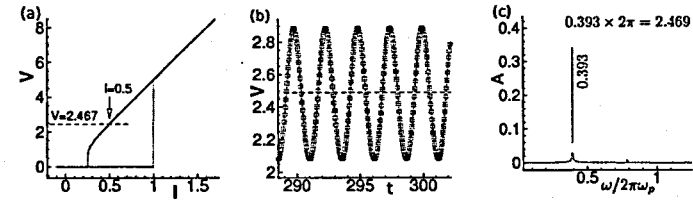


Рис. 2.10. (а) ВАХ ДП при  $\beta = 0.2$ ; (б) временная зависимость напряжения для тока  $I = 0.5$ ; (с) результат FFT-анализа для тока  $I = 0.5$  и напряжения  $V = 2.467$

лучения, нормированная на величину критического тока;  $\omega$  – его частота, нормированная на плазменную частоту. Таким образом, в данном случае система уравнений (B.4) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = V, \\ \frac{\partial V}{\partial \tau} = I - \sin \varphi - \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + A \sin \omega \tau + I^{noise}. \end{cases} \quad (2.1)$$

При численном решении данной системы следует обратить внимание на следующее новое обстоятельство в сравнении со случаем без излучения: добавлена явно зависящая от времени периодическая функция. Это приводит к необходимости согласования временных характеристик с периодом внешнего воздействия  $T = 2\pi/\omega$ , т.е. период разбивается на целое число шагов по времени, а временной домен  $Tf$  должен содержать целое число периодов  $T$ .

В процедуре Рунге-Кутты решение системы уравнений ищется во временном интервале  $[0, Tf]$  при фиксированном значении тока. Чтобы нарастание времени  $\tau$  в аргументе функции  $\sin \omega \tau$  было непрерывным, необходимо учитывать сделанное количество шагов по току с помощью счетчика тока  $I_{counter}$ . Тогда полное время определяется выражением  $\tau = t \times T_p + I_{counter} \times T_f$ , где  $I_{counter}$  начинается с нуля;  $t$  – целое число, пробегает значения от 0 до  $tN = Tf/T_p$ .

Когда при изменении базового тока джозефсоновская частота приближается к частоте внешнего излучения, происходит ее захват внешним излучением и на ВАХ ДП наблюдается ступенька тока. Этот эффект наблюдался экспериментально впервые С. Шапиро, поэтому данные ступеньки тока называются ступеньками Шапиро. В принципе, в зависимости от величины амплитуды внешнего излучения и емкости ДП, возможно наблюдение на ВАХ как гармоник, так и субгармоник Шапиро при условии  $n\omega_J = m\omega$ , где  $n$  и  $m$  – целые числа.

ВАХ одиночного ДП при  $\omega = 2$  и  $A = 0.5$  для случая с большой диссипацией при  $\beta = 0.2$  представлена на рис. 2.11(а). Мы видим ступеньку Шапиро при  $V = \omega = 2$ , а также ее субгармоники при  $V = (m/n)\omega$ .

Временные зависимости напряжения и сверхпроводящего тока  $I_s$  в области ступеньки Шапиро при  $I = 0.4$  представлены на рис. 2.11(б) и (с). Колебания

напряжения в этой области происходят с одной частотой и амплитудой. Частота этих колебаний равна частоте внешнего воздействия, наблюдается так называемый захват частоты. Сверхпроводящий ток в этой области представляет собой обычную синусоиду с амплитудой, равной единице. Вдали от ступеньки Шапиро при  $I = 0.8$  (рис. 2.11(d) и (e)) осцилляции напряжения модулированы внешним воздействием, а частота колебаний  $I_s$  больше, что соответствует большему напряжению на ВАХ.

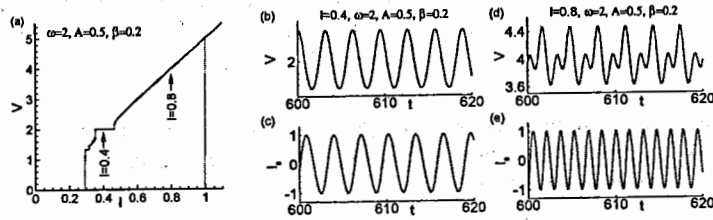


Рис. 2.11. (a) ВАХ ДП при  $\beta = 0.2$  под действием внешнего электромагнитного излучения с частотой  $\omega = 2$  и амплитудой  $A = 0.5$ ; (b) временная зависимость напряжения для тока  $I = 0.4$ ; (c) временная зависимость сверхпроводящего тока при  $I = 0.4$ ; (d) и (e) то же самое, что в (b) и (c), для тока  $I = 0.8$

ВАХ для случая с большим затуханием при  $\beta = 1.5$ , рассчитанная при  $\omega = 0.5$  и  $A = 0.5$ , представлена на рис.2.12(a). Она демонстрирует ступеньку Шапиро при  $V = \omega = 0.5$  и ряд субгармоник. На временных зависимостях напряжения и сверхпроводящего тока  $I_s$  в области ступеньки Шапиро при  $I = 1.2$  наблюдается модуляция колебаний напряжения (рис.2.12(b)), вызванная несинусоидальным поведением сверхтока (см. рис.2.12(c)). Вдали же от ступеньки Шапиро при  $I = 1.52$  (рис.2.12(d) и (e)) модуляции как  $I_s$ , так и напряжения только усиливаются, так как накладываются осцилляции, вызванные внешним воздействием.

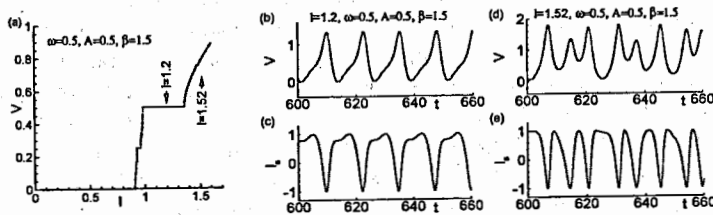


Рис. 2.12. (a) ВАХ ДП при  $\beta = 1.5$  под действием внешнего электромагнитного излучения с частотой  $\omega = 0.5$  и амплитудой  $A = 0.5$ ; (b) временная зависимость напряжения для тока  $I = 1.2$ ; (c) временная зависимость сверхпроводящего тока при  $I = 1.2$ ; (d) и (e) то же самое, что в (b) и (c), для тока  $I = 1.52$

## 2.7. Зависимость ширины ступеньки Шапиро от амплитуды излучения

Происхождение ступенек Шапиро можно понять, проведя приближенный анализ сверхпроводящего тока  $I_s = I_c \sin \varphi$  с учетом внешнего излучения. Предполагая, что под действием внешнего излучения в ДП появляется дополнительное напряжение  $A \cos \omega t$ , где  $A$ —амплитуда и  $\omega$  — частота внешнего излучения, и подставляя суммарное напряжение

$$V = V_J + A \cos \omega t, \quad (2.2)$$

из соотношения Джозефсона находим возникающую разность фаз

$$\varphi(t) = \int \frac{2e}{\hbar} V dt = \int \frac{2e}{\hbar} (V_J + A \cos \omega t) dt = \frac{2e}{\hbar} V_J t + \frac{2e A}{\hbar \omega} \sin \omega t + \varphi_0. \quad (2.3)$$

Тогда выражение для сверхпроводящего тока

$$I_s = I_c \sin \varphi = I_c \sin \left( \frac{2e}{\hbar} V_J t + \frac{2e A}{\hbar \omega} \sin \omega t + \varphi_0 \right) \quad (2.4)$$

с учетом преобразований

$$\sin(z \sin x) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(z) \sin(2k+1)x,$$

$$\cos(z \sin x) = J_0(z) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(z) \cos 2kx$$

запишем так:

$$I_s = I_c \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_n \left( \frac{2e A}{\hbar \omega} \right) \sin \left[ \frac{2e}{\hbar} V_J t - n \omega t + \varphi_0 \right]. \quad (2.5)$$

Отсюда видно, что при выполнении условия  $\frac{2e}{\hbar} V_J = n \omega$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) сверхпроводящий ток не зависит от времени. Таким образом, в сумме остается член, не зависящий от времени, который добавляется к сверхпроводящему току, что и проявляется на ВАХ ДП в виде ступеньки тока при постоянном напряжении, следующем из данного условия. Зависимость ширины ступеньки Шапиро от амплитуды и частоты внешнего излучения задается выражением

$$\Delta I = 2 |J_n(f)|; \quad f = \frac{2e A}{\hbar \omega}. \quad (2.6)$$

Более подробное исследование сверхпроводящего тока с учетом внешнего излучения приводит к формуле

$$\Delta I = 2|J_n(f)|; \quad f = \frac{2eA}{\hbar\omega} \frac{R}{\sqrt{1+(R\omega C)^2}}, \quad (2.7)$$

где  $R$  – сопротивление ДП в нормальном состоянии;  $C$  – емкость ДП. В безразмерных величинах выражение (2.7) принимает вид

$$\Delta I = 2|J_n(f)|, \quad f = \frac{A}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + \omega^2}}. \quad (2.8)$$

Численный метод определения амплитудной зависимости ширины ступеньки Шапиро при фиксированной частоте внешнего излучения основан на расчете ВАХ для каждого значения амплитуды. При этом на каждом шаге по току определяется совпадение джозефсоновской частоты с частотой излучения, и, если оно выполняется, данное значение тока записывается в соответствующий файл. Вначале расчет проводится при уменьшении тока, затем, при повторном расчете, после перехода на ступеньку Шапиро направление тока изменяется на его увеличение. Результаты расчета зависимости ширины ступеньки Шапиро от амплитуды в интервале  $[0, 10]$  при фиксированной частоте  $\omega = 0.5$  в случае безгистерезисного режима ( $\beta = 1.5$ , overdamped case) приведены на рис.2.13(а).

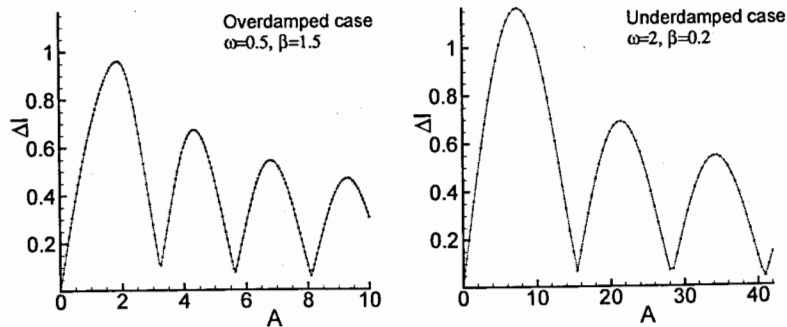


Рис. 2.13. (а) Зависимость ширины ступеньки Шапиро от амплитуды при  $\beta = 1.5$ ; (б) то же самое при  $\beta = 0.2$

На рис.2.13(б) приведена зависимость ширины ступеньки Шапиро от амплитуды при частоте  $\omega = 2$  в случае с гистерезисом ( $\beta = 0.2$ , underdamped case). Сравнивая зависимости при разных параметрах диссипации, можно отметить, что первый бесселевский максимум в случае с большой диссипацией наблюдается при гораздо меньшей амплитуде, т.е. при гораздо меньшей мощности внешнего излучения. Этот факт определяет возможность использования ДП с большой диссипацией в качестве стандарта вольта.

## ТЕМЫ ДЛЯ ДАЛЬНЕЙШЕГО ИССЛЕДОВАНИЯ.

1. Моделирование фазовой динамики и вольт-амперных характеристик джозефсоновского перехода, шунтированного резонансным LC-контуром, во внешнем электромагнитном поле.
2. Хаотические состояния джозефсоновского перехода во внешнем электромагнитном поле.
3. Моделирование фазовой динамики и вольт-амперных характеристик двух параллельно соединенных джозефсоновских переходов.

## Глава 3.

# Моделирование фазовой динамики системы связанных джозефсоновских переходов

### 3.1. Модели для описания системы связанных джозефсоновских переходов

Глава 1 была посвящена моделированию физических явлений в отдельном ДП. Здесь же мы рассмотрим систему связанных джозефсоновских переходов (СДП), электрическая схема для исследования которой представлена на рис.3.1.

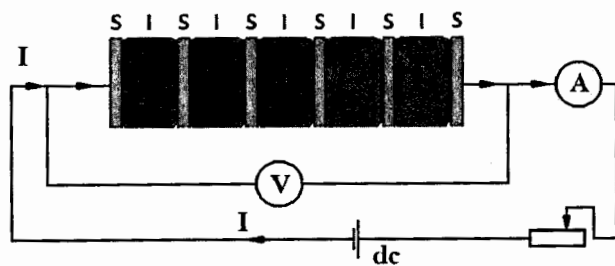


Рис. 3.1. Электрическая схема для исследования системы СДП

Исследование такой системы приводит к ряду новых явлений, которые отсутствуют в отдельном ДП. С ее помощью можно моделировать физические явления в слоистых сверхпроводниках, в ряде высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП), в частности в BSCCO. В этих материалах возникает внутренний эффект Джозефсона, заключающийся в туннелировании куперовских

пар между смежными сверхпроводящими плоскостями  $\text{CuO}_2$ , что дает основания рассматривать ВТСП как систему СДП. Данный эффект является составной частью многих теорий ВТСП и имеет первостепенное значение для определения ВАХ туннельных структур на основе ВТСП. Система СДП является одним из перспективных объектов сверхпроводящей электроники, интенсивно исследуемых в настоящее время. В частности, широкие возможности для различных применений представляет когерентное электромагнитное излучение в терагерцовой области частот из системы внутренних ДП.

Одной из наиболее широко используемых моделей для описания свойств внутренних ДП в ВТСП является модель с емкостной связью (ССJJ-модель). В этой модели полный ток, протекающий через слоистую систему, представляет собой сумму сверхпроводящего, квазичастичного токов и тока смещения. В ней также произведено обобщение джозефсоновского соотношения на основе неравновесности системы. Позже ССJJ-модель была дополнена диффузионным током (DC) и названа как ССJJ+DC-модель. Возникающая при этом система нелинейных дифференциальных уравнений для разности фаз находит свое обоснование в рамках микроскопической теории. С помощью ССJJ+DC-модели был получен ряд новых и интересных результатов, в частности, показано наличие параметрического резонанса и рождение продольной плазменной волны в системе СДП. Важным является также тот факт, что, в отличие от ССJJ-модели, в ССJJ+DC-модели ветвистая структура на ВАХ является эквидистантной, что обычно и наблюдается в эксперименте.

Перейдем к более подробному описанию внутренних джозефсоновских переходов, реализующихся в слоистых ВТСП. В этих материалах система  $N + 1$  сверхпроводящих слоев (S-слоев), характеризующихся параметрами порядка  $\Delta_l(t) = |\Delta| \exp(i\theta_l(t))$  с зависящей от времени фазой  $\theta_l(t)$ , образует  $N$  ДП. Схема такой слоистой системы ДП представлена на рис. 3.2. Толщина S-слоев в ВТСП ( $\sim 3 \text{ \AA}$ ) сравнима с дебаевской длиной экранирования электрического заряда  $r_D$ , поэтому в отдельном S-слое нет полной экранировки заряда и электрическое поле, наведенное в отдельном ДП, проникает в соседние переходы. Электрическая нейтральность S-слоев оказывается динамически нарушенной, и в случае переменного эффекта Джозефсона возникает емкостная связь между переходами. Отсутствие полного экранирования заряда в S-слое приводит к обобщенному скалярному потенциалу слоя  $\Phi_l$ , определяемому через скалярный потенциал  $\phi_l$  и производную фазы сверхпроводящего параметра порядка  $\theta_l$  как  $\Phi_l(t) = \phi_l - V_0 \frac{d\theta_l}{dt}$ , где  $V_0 = \hbar\omega_p / (2e)$ ,  $\omega_p = \sqrt{2eI_c / \hbar C}$  есть плазменная частота,  $I_c$  – критический ток и  $C$  – емкость ДП. Обобщенный скалярный потенциал связан с величиной плотности заряда  $Q_l$  на S-слое посредством  $Q_l = -\frac{1}{4\pi r_D^2} \Phi_l$ .

Возникновение связи между электрическим зарядом  $l$ -го слоя  $Q_l$  и обобщенным скалярным потенциалом этого слоя  $\Phi_l$  выражает неравновесную природу переменного эффекта Джозефсона в слоистых сверхпроводниках. При этом соотношение Джозефсона обобщается и принимает вид

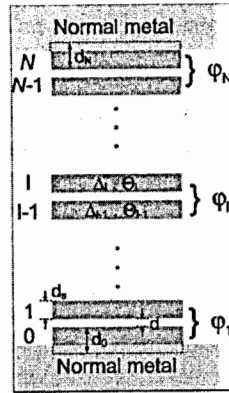


Рис. 3.2. Схема формирования системы внутренних ДП в ВТСП. Сверхпроводящие слои, нумеруемые числами от 0 до  $N$  и характеризующиеся параметром порядка  $s$  к модулю  $\Delta_i$  и фазой  $\theta_i$ , образуют систему ДП с разностями фаз  $\varphi_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ . Толщина  $S$ -слоев обозначена как  $d_s$ , а толщина диэлектрического слоя — через  $d$

$$\frac{\hbar}{2e} \frac{d\varphi_i}{dt} = V_i - \alpha(V_{i+1} + V_{i-1} - 2V_i), \quad (3.1)$$

где  $V_i \equiv V_{i,l-1}$  есть напряжение между сверхпроводящими слоями  $l$  и  $l-1$ , а  $\varphi_i \equiv \varphi_{i,l-1} = \theta_i(t) - \theta_{i-1}(t) - \frac{2e}{\hbar} \int_{l-1}^l dz A_z(z, t)$  есть калибровочно-инвариантная разность фаз между слоями  $l$  и  $l-1$ ;  $R$  — сопротивление перехода;  $A_z$  — векторный потенциал в барьере. В равновесном состоянии  $\Phi_i(t) = 0$  и выполняется обычное соотношение Джозефсона  $V_i \equiv \phi_i - \phi_{i-1} = \frac{\hbar}{2e} \frac{d(\theta_i - \theta_{i-1})}{dt} \equiv \frac{\hbar}{2e} \frac{d\varphi_i}{dt}$ .

Уравнение (3.1) вместе с выражением для полного тока через систему ДП, складывающегося из джозефсоновского  $I_s$ , квазичастичного  $I_{qp}$  и тока смещения  $I_{dif}$

$$I = C \frac{dV_i}{dt} + I_c \sin \varphi_i + \frac{V_i}{R}, \quad (3.2)$$

определяет модель СДП с емкостной связью (ССJJ-модель).

Когда через слоистую систему связанных ДП проходит внешний электрический ток, сверхпроводящие слои оказываются в неравновесном состоянии из-за инжекции квазичастиц и куперовских пар. Наличие в них нескомпенсированного электрического заряда приводит к необходимости учета дополнительного тока между сверхпроводящими слоями. Этот вклад в квазичастичный ток, обусловленный разностью обобщенных скалярных потенциалов, называют диффузионным током  $I_{dif}^i$ . Можно записать следующие выражения для диф-

фузионного тока:

$$I_{dif}^i = \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{I_c R} = -\frac{(Q_i - Q_{i-1})}{4\pi r_D^2 I_c R} = -\frac{(Q_i - Q_{i-1})}{2e^2 N(0) I_c R}. \quad (3.3)$$

В этих выражениях диффузионный ток нормирован на величину критического тока  $I_c$ , а  $N(0)$  обозначает плотность состояний на уровне Ферми.

С учетом диффузионного тока выражение для полного тока приобретает следующий вид:

$$I = C \frac{dV_i}{dt} + I_c \sin \varphi_i + \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi_i}{dt}. \quad (3.4)$$

Оно отличается от соответствующего выражения для полного тока в ССJJ-модели третьим членом в правой части уравнения (3.4). В ССJJ-модели он равен  $V_i/R$ .

Нормируя выражения (3.1) и (3.4), мы получаем систему безразмерных уравнений для разности фаз и напряжений во всех ДП:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \tau} = V_i - \alpha(V_{i+1} + V_{i-1} - 2V_i), \\ \frac{\partial V_i}{\partial \tau} = I - \sin \varphi_i - \beta \frac{\partial \varphi_i}{\partial \tau}, \end{cases} \quad (3.5)$$

где  $\tau = \omega_p t$  — безразмерное время;  $\beta = \hbar \omega_p / (2e R I_c) = 1/\sqrt{\beta_c}$ ,  $\beta_c$  — параметр Мак-Камбера. В системе (3.5) ток  $I$  нормирован на критический ток  $I_c$ , а напряжение нормировано на  $V_0 = \frac{\hbar \omega_p}{2e}$ . Как указывалось выше, в ССJJ-модели последний член в правой части второго уравнения равен  $\beta V_i$ , что, согласно первому уравнению этой системы, отличается от  $\beta \frac{d\varphi_i}{dt}$  на член  $\alpha \beta (V_{i+1} + V_{i-1} - 2V_i)$ .

Учитывая равенство  $1/I_c R = \beta/V_0$  и обобщенное соотношение Джозефсона (3.1), мы можем записать выражение для диффузионного тока в виде

$$I_{dif}^i = \frac{\beta}{V_0} (\Phi_i - \Phi_{i-1}) = \beta \varphi_i - \beta V_i \quad (3.6)$$

или в виде

$$I_{dif}^i = -\alpha \beta (V_{i+1} + V_{i-1} - 2V_i). \quad (3.7)$$

Таким образом, в ССJJ+DC-модели выражение для полного тока через слоистую систему складывается из джозефсоновского  $I_s$ , квазичастичного  $I_{qp}$ , диффузионного  $I_{dif}$  токов и тока смещения  $I_{disp}$ :

$$I_s^i = \sin \varphi_i; \quad I_{qp}^i = \beta V_i; \quad I_{disp}^i = \frac{dV_i}{d\tau}; \quad I_{dif}^i = \beta \left( \frac{d\varphi_i}{d\tau} - V_i \right). \quad (3.8)$$

Дифференцируя обобщенное соотношение Джозефсона по времени и используя выражение (3.8) для полного тока, можно получить следующую систему динамических уравнений для разности фаз  $\varphi_i$  в ССJJ+DC-модели:

$$d^2\varphi_l/dt^2 = \sum_{\nu} A_{l\nu}[I - \sin\varphi_{\nu} - \beta d\varphi_{\nu}/dt], \quad (3.9)$$

где матрица  $A$  при периодических граничных условиях имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1+2\alpha & -\alpha & 0 & \dots & & & -\alpha \\ -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & 0 & \dots & & \\ 0 & -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & 0 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ -\alpha & & & & & 0 & -\alpha & 1+2\alpha \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Здесь и в дальнейшем мы используем  $t$  для обозначения безразмерного времени. Отметим, что расчеты проводятся при условии, что величина критического тока одинакова во всех переходах:  $I_c^i = I_c$ .

### 3.2. Методика расчета вольт-амперной характеристики и временных зависимостей характеристик системы связанных джозефсоновских переходов

Для определения ВАХ системы связанных ДП нами решается система уравнений (3.5) с использованием метода Рунге-Кутты четвертого порядка. При фиксированном значении базового тока  $I$  определяются разность фаз  $\varphi_l(t)$  и напряжение  $V_l$  как функции времени во временном интервале  $[0, T_{\max}]$ . Затем вычисляется среднее по времени напряжение

$$\langle V_i \rangle = \frac{1}{T_{\max} - T_{\min}} \int_{T_{\min}}^{T_{\max}} V_i dt, \quad (3.11)$$

где  $T_{\min}$  и  $T_{\max}$  определяют начало и конец временного интервала для усреднения. Полное напряжение  $V$  находится как сумма напряжений на всех ДП:

$$V = \sum_{l=1}^N \langle V_l \rangle. \quad (3.12)$$

Итак, мы решаем систему динамических уравнений для разности фаз при фиксированном значении тока  $I$  в некотором временном интервале  $[0, T_{\max}]$  с шагом  $\delta t$ . Часть этого интервала, начиная с определенного значения  $T_{\min}$ , используется для процедуры усреднения по времени. Затем мы меняем величину тока на шаг  $\delta I$  и повторяем процедуру для тока  $I + \delta I$  в новом временном интервале  $[T_{\max}, 2T_{\max}]$ . Значения разности фаз и ее производной (или разности фаз и

напряжения) для каждого ДП в конце первого временного интервала используются в качестве начальных условий для следующего временного интервала и т.д. В наших расчетах мы обычно полагали  $T_{\max} = 1000$ ,  $\delta t = 0.05$ ,  $\delta I = 0.0001$ , хотя в ряде случаев, когда требовалась более высокая точность, эти параметры менялись. Устойчивость решений проверяется влиянием на ВАХ изменения параметров задачи, в частности увеличения и уменьшения вдвое шага по времени  $\delta t$ .

В расчетах к базовому току добавлялся шум, генерируемый случайным образом. Для этого использовался генератор случайных чисел. Амплитуда шума нормировалась на величину критического тока  $I_c$ .

Исследования временной зависимости заряда в сверхпроводящих слоях в системе связанных ДП проводятся следующим образом. Используя уравнение Максвелла  $\text{div}(\epsilon\epsilon_0 E) = Q$ , мы выражаем плотность заряда  $Q_l$  (в дальнейшем называем ее просто зарядом) на  $S$ -слое  $l$  через напряжения  $V_l$  и  $V_{l+1}$  в соседних диэлектрических слоях:  $Q_l = Q_0\alpha(V_{l+1} - V_l)$ , где  $Q_0 = \epsilon\epsilon_0 V_0/r_D^2$ . Решение системы динамических уравнений для калибровочно-инвариантной разности фаз между  $S$ -слоями дает нам напряжение  $V_l$  как функцию времени на всех ДП, и это позволяет исследовать временную зависимость электрического заряда на каждом  $S$ -слое. Полная временная зависимость заряда на слое складывается из изменения во времени на каждом шаге по току. Интервал времени, в течение которого записывается временная зависимость заряда на слое, определяется как  $t + T_{\max}|I_0 - I|/\delta I$ , где  $I_0$  является начальным значением тока, с которого регистрируется временная зависимость.

Расчет временной зависимости токов и их усредненных значений проводится аналогичным образом. На основе выражений (3.8) вычисляются токи  $I_s$ ,  $I_{gp}$ ,  $I_{disp}$  и  $I_{dir}$  как функции времени при фиксированном значении базового тока. Усреднение токов по времени проводится аналогично усреднению напряжения (3.11).

### 3.3. Решение системы дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты четвертого порядка

Как указывалось выше, в случае системы связанных ДП соотношение Джозефсона обобщается и принимает следующий вид:

$$\frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = V_i - \alpha(V_{i+1} + V_{i-1} - 2V_i),$$

где  $\alpha = \frac{\epsilon r_D^2}{d_I d_s}$  — параметр емкостной связи между ДП. Ток через каждый ДП складывается из

$$I_{disp}^i = C_j \frac{\partial V_i}{\partial t}; \quad I_{gp}^i = \frac{V_i}{R_j}; \quad I_s^i = I_c \sin \varphi_i;$$



$$I_{\text{dif}}^i = \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{R_j} = \frac{1}{R_j} \left( \frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - V_i \right).$$

Следовательно,

$$I = I_{\text{disp}}^i + I_{\text{qp}}^i + I_s^i + I_{\text{dif}}^i.$$

Таким образом, в случае ССJJ+DC-модели обобщенное соотношение Джозефсона вместе с выражением для полного тока образует систему дифференциальных уравнений, которая описывает динамику системы ДП с емкостной связью:

$$\begin{cases} \frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = V_i - \alpha(V_{i+1} + V_{i-1} - 2V_i), \\ I = C_j \frac{\partial V_i}{\partial t} + I_c \sin \varphi_i + \frac{\hbar}{2e R_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}. \end{cases}$$

Производя соответствующую нормировку

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \tau} = \frac{V_i}{V_0} - \alpha \left( \frac{V_{i+1}}{V_0} + \frac{V_{i-1}}{V_0} - 2 \frac{V_i}{V_0} \right), \\ \frac{I}{I_c} = \frac{C_j V_0 \omega_p}{I_c} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{V_i}{V_0} \right) + \sin \varphi_i + \frac{\hbar \omega_p}{2e I_c R_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \tau}, \end{cases}$$

$$V_0 = \frac{\hbar \omega_p}{2e}; \quad \tau = \omega_p t; \quad \beta = \frac{1}{R_j} \sqrt{\frac{\hbar}{2e I_c C_j}}; \quad \frac{I}{I_c} \rightarrow I; \quad \frac{V_i}{V_0} \rightarrow V_i,$$

мы приходим к системе уравнений в безразмерных единицах:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = V_i - \alpha(V_{i+1} + V_{i-1} - 2V_i), \\ \frac{\partial V_i}{\partial t} = I - \sin \varphi_i - \beta \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}. \end{cases}$$

Как и в случае одиночного ДП, для решения этой системы уравнений используется метод Рунге-Кутты. В данном случае коэффициенты Рунге-Кутты принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \varphi_i^{j+1} = \varphi_i^j + \Delta \varphi_i^j, \\ V_i^{j+1} = V_i^j + \Delta V_i^j, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta \varphi_i^j = \frac{1}{6} (P_i^{(1)j} + 2P_i^{(2)j} + 2P_i^{(3)j} + P_i^{(4)j}), \\ \Delta V_i^j = \frac{1}{6} (K_i^{(1)j} + 2K_i^{(2)j} + 2K_i^{(3)j} + K_i^{(4)j}). \end{cases}$$

Первые коэффициенты Рунге-Кутты:

$$\begin{cases} P_i^{(1)} = \{V_i - \alpha(V_{i+1} + V_{i-1} - 2V_i)\} h_t, \\ K_i^{(1)} = \{I - \sin \varphi_i\} h_t - \beta P_i^{(1)}. \end{cases}$$

Вторые коэффициенты Рунге-Кутты:

$$\begin{cases} P_i^{(2)} = \left\{ \left( V_i + \frac{K_i^{(1)}}{2} \right) - \alpha \left[ \left( V_{i+1} + \frac{K_{i+1}^{(1)}}{2} \right) + \left( V_{i-1} + \frac{K_{i-1}^{(1)}}{2} \right) - 2 \left( V_i + \frac{K_i^{(1)}}{2} \right) \right] \right\} h_t, \\ K_i^{(2)} = \left\{ I - \sin \left( \varphi_i + \frac{P_i^{(1)}}{2} \right) \right\} h_t - \beta P_i^{(2)}. \end{cases}$$

Третьи коэффициенты Рунге-Кутты:

$$\begin{cases} P_i^{(3)} = \left\{ \left( V_i + \frac{K_i^{(2)}}{2} \right) - \alpha \left[ \left( V_{i+1} + \frac{K_{i+1}^{(2)}}{2} \right) + \left( V_{i-1} + \frac{K_{i-1}^{(2)}}{2} \right) - 2 \left( V_i + \frac{K_i^{(2)}}{2} \right) \right] \right\} h_t, \\ K_i^{(3)} = \left\{ I - \sin \left( \varphi_i + \frac{P_i^{(2)}}{2} \right) \right\} h_t - \beta P_i^{(3)}. \end{cases}$$

Четвертые коэффициенты Рунге-Кутты:

$$\begin{cases} P_i^{(4)} = \left\{ \left( V_i + K_i^{(3)} \right) - \alpha \left[ \left( V_{i+1} + K_{i+1}^{(3)} \right) + \left( V_{i-1} + K_{i-1}^{(3)} \right) - 2 \left( V_i + K_i^{(3)} \right) \right] \right\} h_t, \\ K_i^{(4)} = \left\{ I - \sin \left( \varphi_i + P_i^{(3)} \right) \right\} h_t - \beta P_i^{(4)}. \end{cases}$$

В случае периодических граничных условий

$$\begin{cases} \varphi_{i-1} = \varphi_N \text{ при } i = 1; \\ V_{i-1} = V_N \text{ при } i = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{i-1}^{(1)} = P_N^{(1)}; P_{i-1}^{(2)} = P_N^{(2)}; P_{i-1}^{(3)} = P_N^{(3)}; P_{i-1}^{(4)} = P_N^{(4)} \text{ при } i = 1; \\ K_{i-1}^{(1)} = K_N^{(1)}; K_{i-1}^{(2)} = K_N^{(2)}; K_{i-1}^{(3)} = K_N^{(3)}; K_{i-1}^{(4)} = K_N^{(4)} \text{ при } i = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_{i+1} = \varphi_1 \text{ при } i = N; \\ V_{i+1} = V_1 \text{ при } i = N; \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{i+1}^{(1)} = P_1^{(1)}; P_{i+1}^{(2)} = P_1^{(2)}; P_{i+1}^{(3)} = P_1^{(3)}; P_{i+1}^{(4)} = P_1^{(4)} \text{ при } i = N; \\ K_{i+1}^{(1)} = K_1^{(1)}; K_{i+1}^{(2)} = K_1^{(2)}; K_{i+1}^{(3)} = K_1^{(3)}; K_{i+1}^{(4)} = K_1^{(4)} \text{ при } i = N. \end{cases}$$

В случае неперiodических граничных условий коэффициенты Рунге-Кутты определяются следующим образом:

при  $i = 1$

$$\begin{cases} P_i^{(1)} = \{V_i - \alpha[V_{i+1} - (1 + \gamma)V_i]\}h_t, \\ P_i^{(2)} = \left\{ \left( V_i + \frac{K_i^{(1)}}{2} \right) - \alpha \left[ \left( V_{i+1} + \frac{K_{i+1}^{(1)}}{2} \right) - (1 + \gamma) \left( V_i + \frac{K_i^{(1)}}{2} \right) \right] \right\} h_t, \\ P_i^{(3)} = \left\{ \left( V_i + \frac{K_i^{(2)}}{2} \right) - \alpha \left[ \left( V_{i+1} + \frac{K_{i+1}^{(2)}}{2} \right) - (1 + \gamma) \left( V_i + \frac{K_i^{(2)}}{2} \right) \right] \right\} h_t, \\ P_i^{(4)} = \{(V_i + K_i^{(3)}) - \alpha[(V_{i+1} + K_{i+1}^{(3)}) - (1 + \gamma)(V_i + K_i^{(3)})]\}h_t; \end{cases}$$

при  $i = N$

$$\begin{cases} P_i^{(1)} = \{V_i - \alpha[V_{i-1} - (1 + \gamma)V_i]\}h_t, \\ P_i^{(2)} = \left\{ \left( V_i + \frac{K_i^{(1)}}{2} \right) - \alpha \left[ \left( V_{i-1} + \frac{K_{i-1}^{(1)}}{2} \right) - (1 + \gamma) \left( V_i + \frac{K_i^{(1)}}{2} \right) \right] \right\} h_t, \\ P_i^{(3)} = \left\{ \left( V_i + \frac{K_i^{(2)}}{2} \right) - \alpha \left[ \left( V_{i-1} + \frac{K_{i-1}^{(2)}}{2} \right) - (1 + \gamma) \left( V_i + \frac{K_i^{(2)}}{2} \right) \right] \right\} h_t, \\ P_i^{(4)} = \{(V_i + K_i^{(3)}) - \alpha[(V_{i-1} + K_{i-1}^{(3)}) - (1 + \gamma)(V_i + K_i^{(3)})]\}h_t. \end{cases}$$

### 3.4. Однопетлевые вольт-амперные характеристики системы связанных джозефсоновских переходов

Здесь мы рассмотрим результаты расчетов так называемых однопетлевых ВАХ, получаемых в результате одного цикла увеличения базового тока от нуля до некоторого максимального значения и далее его уменьшения опять до нуля.

В приложении можно найти код программы, моделирующей динамику системы СДП. При расчете программа создает пять *dat*-файлов с данными: *Voltage.dat*, *Voltage\_j.dat*, *Ch(time).dat*, *V\_j(time).dat* и *ph(time).dat*. В них содержатся ВАХ системы, ВАХ каждого отдельного перехода, временные зависимости заряда, напряжения и разности фаз соответственно.

На рис. 3.3(а) представлена ВАХ пяти ДП, рассчитанная при параметре

диссипации  $\beta = 0.2$  и параметре связи  $\alpha = 1$ . Стрелки указывают направление изменения тока при расчете. ВАХ демонстрирует ветвление в области гистерезиса. Эта область увеличена на вставке. При уменьшении тока переключение ДП из R-состояния в O-состояние происходит не одновременно, ДП могут переключаться поодиночке или частями. Это приводит к возникновению состояний, когда один или несколько переходов находятся в O-состоянии, остальные же все еще находятся в R-состоянии. Этим состояниям соответствуют ветви на ВАХ, которые и проявились в нашем расчете (см. вставку к рисунку).

Свойства системы СДП определяются величиной параметра связи. На рис. 3.3(б) изображены ВАХ той же системы при различных значениях параметра связи  $\alpha = 0.1; 0.5; 1; 3$ . Мы видим, что с увеличением  $\alpha$  уменьшается область гистерезиса, а также усиливается ветвление ВАХ.

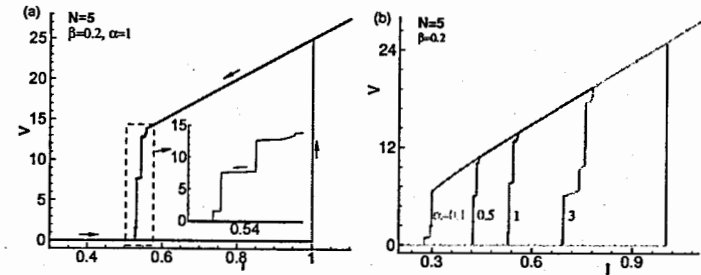


Рис. 3.3. (а) ВАХ системы с  $N = 5$  ДП при  $\beta = 0.2$  и  $\alpha = 1$ . (б) ВАХ системы с  $N = 5$  СДП при  $\beta = 0.2$  и  $\alpha = 0.1; 0.5; 1; 3$

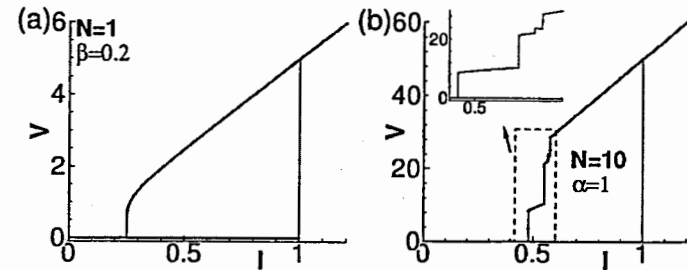


Рис. 3.4. ВАХ системы с  $N = 1$  (а),  $N = 10$  СДП (б) при  $\beta = 0.2$  и  $\alpha = 1$

На рис. 3.4 представлены ВАХ для одиночного ДП и системы с 10 СДП при  $\beta = 0.2$  и  $\alpha = 1$ . Естественно, что при увеличении числа переходов  $N$  все большее число ветвей проявляется на ВАХ. На рис. 3.4(а) мы показываем ВАХ одного ДП для сравнения с ВАХ системы с 10 ДП, представленной на рис. 3.4(б). Следует обратить внимание на большие числа на оси  $V$  в случае десяти переходов, так как напряжение системы СДП равно сумме напряжений

всех переходов:  $V = \sum V_l$ , где  $l = 1, 2, \dots, N$ . На вставке увеличена область ветвления.

### 3.5. Анализ состояний системы в области ветвления

Чтобы определить состояние СДП, соответствующее каждой ветви ВАХ, нужно провести анализ величин средней производной разности фаз и напряжения на каждом ДП. На рис. 3.5(a,b) приведен пример такого анализа в случае

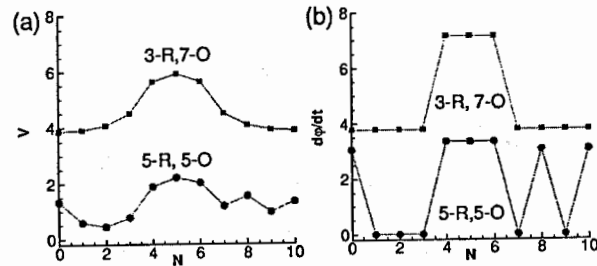


Рис. 3.5. (а) Распределение напряжения на ДП вдоль стека. Верхние кривые с квадратиками сдвинуты на 4 по оси  $Y$  относительно нижних кривых; (б) распределение средней производной разности фаз для соответствующих ветвей при увеличении и уменьшении базового тока

ВАХ, представленной на рис. 3.6. В данном случае ток с шагом  $\delta I = 0.0001$

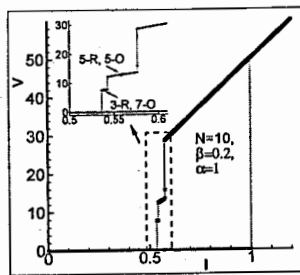


Рис. 3.6. Рассчитанная в рамках ССJJ+DC-модели ВАХ системы с 10 СДП, полученная при одном цикле изменения базового тока. На вставке в увеличенном размере показаны переходы между ветвями в гистерезисной области

увеличивался до значения  $I/I_c = 1.5$  и затем уменьшался до нуля. В процессе возрастания тока ВАХ претерпевает скачок при  $I/I_c = 1.0$ . При уменьшении тока наблюдается три скачка, когда величина тока становится меньше 0.6.

Определение усредненной по времени производной разности фаз позволяет однозначно указать, находится данный ДП в R- или O-состоянии. Так, например, в состоянии 3-R, 7-O, соответствующем нижней ветви, имеется напряжение на всех переходах, однако, согласно рис. 3.5(b), лишь 3 перехода находятся в R-состоянии.

### 3.6. Расчет полной ветвистой структуры системы связанных джозефсоновских переходов

При определенном значении тока  $I$  некоторый контакт (или сразу несколько контактов) переходит из R-состояния в O-состояние или наоборот, что приводит к переходу между ветвями на ВАХ. Как рассчитать полную ВАХ (демонстрирующую всевозможные ветви, т.е. отражающую всевозможные состояния ДП) для стеков с различным числом контактов при различных значениях параметров системы?

Приведем один из возможных способов расчета. При каждом значении базового тока  $I$  делался вывод о состоянии системы на основе данных о величине средней производной разности фаз  $\langle d\varphi/dt \rangle$  в каждом ДП. С учетом того, что полное число состояний и, соответственно, число ветвей ВАХ в системе с  $N$  ДП равно  $2^N$ , каждой ветви приписывался номер, определяемый как  $n_b = n_{b-1} + s_j 2^{j-1}$ , где  $s_j = 0$  для ДП в O-состоянии и  $s_j = 1$  для ДП в R-состоянии;  $j$  изменяется от 1 до  $N$ . При этом данное состояние фиксируется. При следующем значении базового тока состояние системы сравнивается с предыдущим, и если произошел скачок на другую ветвь, то это определяется сравнением номеров ветвей. Если происходит скачок на другую ветвь, то значение средней производной разности фаз на каком-то ДП меняется на определенную, достаточно сильно отличающуюся от предыдущего значения величину. Эта величина прыжка является параметром задачи. Новая ветвь фиксируется, и процесс повторяется. Если состояние системы (и, соответственно, ветвь ВАХ) после прыжка оказывается тем состоянием, в котором система уже находилась в прежних циклах по току, то это состояние (ветвь) игнорируется в процессе изменения базового тока. В программе вводятся числа, характеризующие факт определения ветви при увеличении и при уменьшении величины базового тока, а также соответствующие числа, определяющие направление тока.

Количество ветвей ВАХ, определяемых в процессе численного эксперимента, зависит от параметров системы  $\alpha$ ,  $\beta$  и граничных условий  $\gamma$ , а также от параметров численного эксперимента: шага по току, величины временного домена, интервала усреднения, величины амплитуды шума по току. Этим же, в принципе, определяется число ветвей в реальном эксперименте, где также задается шаг по току, время перехода от одного его значения к другому. Конечно, в реальном эксперименте всегда присутствует шум в базовом токе.

Ветвистая структура ВАХ, полученная в рамках ССJJ+DC-модели для стека из 11 СДП при  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0.2$  и  $\gamma = 0$ , представлена на рис. 3.7 (слева).

Рис. 3.7 (справа) показывает ВАХ системы с 10 СДП при периодических граничных условиях.

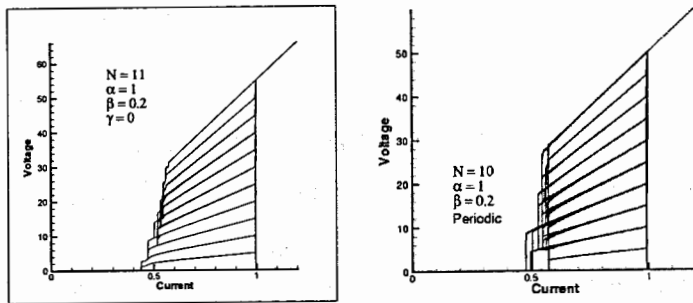


Рис. 3.7. Ветвистая структура ВАХ, рассчитанная в рамках ССJJ+DC-модели при  $\gamma = 0$  (слева) и периодических граничных условиях (справа)

В ССJJ+DC-модели изменение параметра  $\beta$  в широких пределах не изменяет эквидистантность ветвей ВАХ.

### 3.7. Параметрический резонанс

Детальное исследование системы СДП позволило указать на реализацию в ней параметрического резонанса, при котором джозефсоновские осцилляции возбуждают перпендикулярно S-слоям продольную плазменную волну. При этом сверхпроводящие слои оказываются заряженными и зарядовая динамика определяет особенности возникающей здесь тонкой структуры на ВАХ, появление которой связано с биениями продольной плазменной волны в дискретной системе сверхпроводящих слоев.

На рис. 3.8 представлена временная зависимость электрического заряда в сверхпроводящем слое (L7) в области параметрического резонанса, рассчитанная в рамках ССJJ+DC-модели. Светлые стрелки с буквенными обозначениями демонстрируют проявление особенностей тонкой структуры, которые отражаются на ВАХ. Сама же ВАХ показана жирной линией.

Наличие заряда в сверхпроводящих слоях приводит к появлению диффузионного тока  $I_{diff}^l = -\frac{(Q_l - Q_{l-1})}{4\pi r_D^2 I_c R}$ . Возникает вопрос: какое влияние оказывает диффузионный ток на поведение системы СДП и ее ВАХ в этой области? На рис. 3.9 представлена зависимость всех рассматриваемых усредненных токов, а именно, (а) сверхпроводящего  $I_s^l = \sin \varphi_l$ , (б) квазичастичного  $I_{qp}^l = \beta V_l$ , (с) диффузионного  $I_{diff}^l = \beta \left( \frac{d\varphi_l}{dt} - V_l \right)$  токов и (д) тока смещения  $I_{disp}^l = \frac{dV_l}{dt}$  от величины базового тока через первый ДП в области параметрического резонанса. В остальных переходах эта зависимость имеет аналогичный характер.

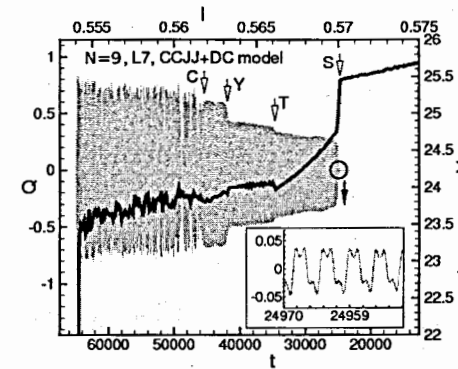


Рис. 3.8. ВАХ и временная зависимость электрического заряда на слое в области параметрического резонанса, рассчитанная в рамках ССJJ+DC-модели. Светлые стрелки демонстрируют проявление особенностей тонкой структуры. Вставка показывает характер осцилляций заряда в выделенной кружком области резонанса

Мы здесь также видим проявление тонкой структуры в области параметрического резонанса, связанной с характерным поведением продольной плазменной волны в дискретной системе. Характерные точки отмечены на рис. 3.9 стрелками. Основной вклад в величину базового тока дает квазичастичный ток, который более чем на порядок превышает сверхпроводящий. Усредненный ток смещения, приведенный на рис. 3.9(d), существенно меньше сверхпроводящего и квазичастичного по величине и осциллирует при уменьшении базового тока.

Диффузионный ток (см. рис. 3.9(c)) до начала области параметрического резонанса отсутствует (существует на уровне шума). При подходе к резонансу (при уменьшении полного тока через слоистую систему) амплитуда зарядовых осцилляций в сверхпроводящих слоях нарастает, и это приводит к появлению диффузионного тока. В резонансной области усредненный диффузионный ток осциллирует, меняя свое направление в данном ДП. Вклад диффузионного тока в базовый ток в этой области достаточно мал по величине. Однако этот вклад качественно меняет тонкую структуру ВАХ в области параметрического резонанса.

Подчеркнем, что наличие параметрического резонанса в системе связанных ДП не есть следствие учета диффузионного тока: он возникает и в ССJJ-модели, не учитывающей диффузионный ток. Отсутствие диффузионного тока сказывается на тонкой структуре ВАХ в данной области. В ССJJ+DC-модели ширина области тонкой структуры по току составляет около 0.015 единицы, тогда как в ССJJ-модели ее величина значительно больше и равна примерно 0.2 единицы базового тока.

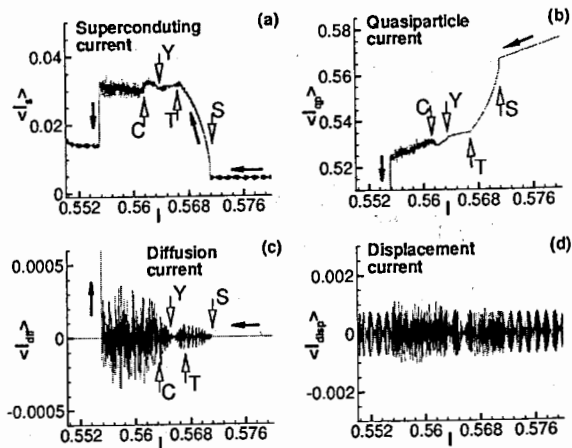


Рис. 3.9. Зависимость усредненных значений (а) сверхпроводящего  $I_s$ , (b) квазичастичного  $I_{qp}$ , (c) диффузионного  $I_{diff}$  токов и (d) тока смещения  $I_{disp}$  от величины базового тока через первый ДП в области параметрического резонанса, рассчитанная в рамках ССJJ+DC-модели. Темные стрелки указывают направление изменения базового тока, светлые стрелки демонстрируют проявление особенностей тонкой структуры

#### ТЕМЫ ДЛЯ ДАЛЬНЕЙШЕГО ИССЛЕДОВАНИЯ.

1. Моделирование фазовой динамики и ВАХ внутренних ДП в высокотемпературных сверхпроводниках.
2. Влияние внешнего электромагнитного излучения на длину продольной плазменной волны в системе связанных ДП.
3. Моделирование фазовой динамики и ВАХ системы связанных ДП, шунтированной резонансным LC-контуром, во внешнем электромагнитном поле.
4. Влияние параметров емкостной и индуктивной связи на фазовую динамику и ВАХ внутренних ДП в высокотемпературных сверхпроводниках.

## Глава 4.

# Моделирование фазовой динамики и вольт-амперных характеристик длинного джозефсоновского перехода

Среди численных методов решения дифференциальных уравнений одними из наиболее широко распространенных являются разностные методы (методы разностных схем). Они основаны на введении некоторой разностной сетки для переменных выбранной модели. Значения производных, начальные и граничные условия выражаются через значения функций в узлах сетки, в результате чего получается система алгебраических уравнений, называемая разностной схемой. Решая эту систему уравнений, в узлах сетки находят значения сеточных функций, которые приблизительно полагаются равными значениям искомых функций.

### 4.1. Система уравнений

Система уравнений, описывающая фазовую динамику ДП длиной  $L$  (длина нормирована на джозефсоновскую глубину проникновения  $\lambda_J$ ), имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = V, \\ \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \sin \varphi - \beta V + I. \end{cases} \quad (4.1)$$

Эта система уравнений отличается от случая коротких ДП наличием производной второго порядка от разности фаз по координате. Как и в случае коротких ДП, время нормировано на плазменную частоту  $\omega_p$ , базовый ток – на критический ток  $I_c$ , напряжение – на  $V_0 = \hbar\omega_p/(2e)$ . Координата  $x$  нормирована

на джозефсоновскую глубину проникновения  $\lambda_J$ . Начальные условия, как и в случае короткого ДП, выбираются нулевыми:

$$\varphi(x, t)|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (4.2)$$

а граничные условия

$$\left. \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = H_{\text{ext}}, \quad \left. \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = H_{\text{ext}} \quad (4.3)$$

определяются заданием внешнего магнитного поля  $H_{\text{ext}}$  на концах ДП.

Мы будем рассматривать случай  $H_{\text{ext}} = 0$ . Решение системы уравнений (4.1) заключается в определении разности фаз  $\varphi(x, t)$  и напряжения  $V(x, t)$  как функций координаты и времени. Используя найденные  $\varphi(x, t)$  и  $V(x, t)$ , мы рассчитываем ВАХ. Существует несколько методов численного решения дифференциальных уравнений. Мы остановимся только на двух наиболее популярных методах: методе разностных схем и методе Рунге–Кутты четвертого порядка.

## 4.2. Решение системы дифференциальных уравнений

### 4.2.1. Метод разностных схем

Для того чтобы решить систему уравнений (4.1) методом разностных схем, перепишем ее в виде одного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \beta \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sin \varphi - I. \quad (4.4)$$

Построим сетку в области изменения переменных  $x$  и  $t$  с шагом по координате  $\Delta x$  и шагом по времени  $\Delta t$ , как это показано на рис.4.1(a). Номера узлов сетки по координате будем нумеровать индексом  $i$ , а по времени – индексом  $j$ . Введем следующие обозначения для значений функции  $\varphi(x, t)$  в узлах сетки:

$$\varphi(x, t) = \varphi_i^j, \quad \varphi(x \pm \Delta x, t) = \varphi_{i \pm 1}^j, \quad \varphi(x, t \pm \Delta t) = \varphi_i^{j \pm 1}. \quad (4.5)$$

С учетом (4.5) точки  $x = 0$  и  $x = L$  соответствуют узлам с индексами  $i = 1$  и  $i = N_x$ . Будем называть эти точки левым и правым краями сетки соответственно, а промежуточные точки в интервале  $0 < x < L$  – внутренними точками. Точки при  $t = 0$  соответствуют узлам с индексом  $j = 1$ .

В методе разностных схем производные функции приближенно определяются через ее значения в узлах сетки. Чтобы показать это, воспользуемся разложением Тейлора. Для аппроксимации производных по координате разложим  $\varphi(x + \Delta x, t)$  и  $\varphi(x - \Delta x, t)$  в окрестности  $x$  и ограничимся членами второй степени по  $\Delta x$ :

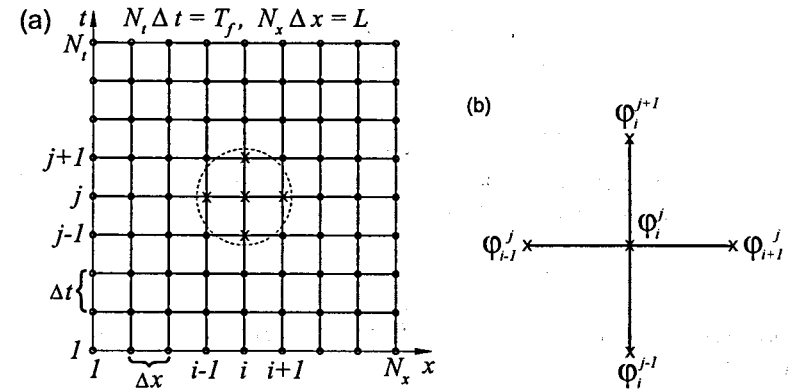


Рис. 4.1. (a) Сеточная функция; (b) узлы сетки

$$\begin{cases} \varphi(x + \Delta x, t) = \varphi(x, t) + \Delta x \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2}, \\ \varphi(x - \Delta x, t) = \varphi(x, t) + (-\Delta x) \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} + \frac{(-\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2}. \end{cases}$$

Переписав эти выражения с учетом (4.5), получим

$$\begin{cases} \varphi_{i+1}^j = \varphi_i^j + \Delta x \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2}, \\ \varphi_{i-1}^j = \varphi_i^j - \Delta x \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2}. \end{cases} \quad (4.6)$$

Складывая и вычитая эти выражения, найдем производные  $\varphi(x, t)$  первого и второго порядка по координате:

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} = \frac{\varphi_{i+1}^j - \varphi_{i-1}^j}{2\Delta x}, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\varphi_{i+1}^j - 2\varphi_i^j + \varphi_{i-1}^j}{\Delta x^2}. \quad (4.8)$$

Аналогичным образом можно аппроксимировать производные по времени. Разложив  $\varphi(x, t + \Delta t)$  и  $\varphi(x, t - \Delta t)$  в ряд Тейлора в окрестности  $t$ :

$$\begin{cases} \varphi_i^{j+1} = \varphi_i^j + \Delta t \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2}, \\ \varphi_i^{j-1} = \varphi_i^j - \Delta t \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (4.9)$$

находим

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \frac{\varphi_i^{j+1} - \varphi_i^{j-1}}{2\Delta t}, \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\varphi_i^{j+1} - 2\varphi_i^j + \varphi_i^{j-1}}{\Delta t^2}. \quad (4.11)$$

Аналогично можно аппроксимировать производную первого порядка, пренебрегая квадратичным членом во втором выражении системы (4.9):

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \frac{\varphi_i^j - \varphi_i^{j-1}}{\Delta t}. \quad (4.12)$$

Используя найденные выражения (4.5), (4.8), (4.10), (4.11), уравнение (4.4) записывается в виде

$$\frac{\varphi_{i+1}^j - 2\varphi_i^j + \varphi_{i-1}^j}{\Delta x^2} - \frac{\varphi_i^{j+1} - 2\varphi_i^j + \varphi_i^{j-1}}{\Delta t^2} = \beta \frac{\varphi_i^{j+1} - \varphi_i^{j-1}}{2\Delta t} + \sin \varphi_i^j - I. \quad (4.13)$$

Из уравнения (4.13) можно найти  $\varphi_i^{j+1}$ :

$$\varphi_i^{j+1} = \frac{2\varphi_i^j + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (\varphi_{i+1}^j - 2\varphi_i^j + \varphi_{i-1}^j) - \left(1 - \frac{\beta \Delta t}{2}\right) \varphi_i^{j-1} + \Delta t^2 (I - \sin \varphi_i^j)}{\left(1 + \frac{\beta \Delta t}{2}\right)}. \quad (4.14)$$

Отсюда следует, что, зная значения функции в четырех узлах, можно определить ее значение на пятом узле, т.е., зная  $\varphi_i^{j-1}$ ,  $\varphi_{i-1}^j$ ,  $\varphi_i^j$  и  $\varphi_{i+1}^j$ , можно вычислить  $\varphi_i^{j+1}$ . Эти узлы отмечены крестиками и выделены пунктирной окружностью в сеточной функции на рис.4.1(a), а на рис.4.1 (b) они показаны в увеличенном масштабе.

Следует отметить, что вычисления по формуле (4.14) должны начинаться с  $j = 2$  и  $i = 2$ . Дело в том, что в уравнении имеются члены  $\varphi_i^{j-1}$ ,  $\varphi_{i-1}^j$ , и если бы вычисления начинались с  $j = 1$  и  $i = 1$ , то мы получили бы члены  $\varphi_0^0$ ,  $\varphi_0^1$ , которых не существует. Кроме того, вычисления по координате должны проводиться до индекса  $i = N_x - 1$ , поскольку в уравнении (4.14) имеется член  $\varphi_{i+1}^j$ .

Значения функции  $\varphi(x, t)$  в моменты времени, соответствующие индексам  $j = 1$ ,  $j = 2$ , вычисляются с использованием начальных условий. При  $j = 1$

$$\varphi(x, t)|_{t=0} = \varphi_i^1 = 0, \quad (4.15)$$

т.е. во всех точках по координате, кроме граничных, функция принимает нулевые значения.

Для нахождения значения функции при  $j = 2$  следует использовать вторую часть (4.2), т.е. значение первой производной  $\varphi(x, t)$  по времени при  $t = 0$ , а также аппроксимацию производной первого порядка (4.12)

$$\left. \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{\varphi_i^2 - \varphi_i^1}{\Delta t} = 0, \quad (4.16)$$

что приводит к  $\varphi_i^2 = 0$ .

Значения функции  $\varphi(x, t)$  при  $i = 1$  и  $i = N_x$ , т.е. на левом и правом краю по координате, вычисляются с использованием граничных условий (4.3). Для этого мы должны разложить  $\varphi(x + \Delta x, t)$  и  $\varphi(x + 2\Delta x, t)$  в окрестности  $x$  при вычислении на левом краю,  $\varphi(x - \Delta x, t)$  и  $\varphi(x - 2\Delta x, t)$  при вычислении на правом краю:

$$\begin{cases} \varphi(x + \Delta x, t) = \varphi_{i+1}^j = \varphi_i^j + \Delta x \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2}, \\ \varphi(x + 2\Delta x, t) = \varphi_{i+2}^j = \varphi_i^j + 2\Delta x \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} + \frac{4\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (4.17)$$

$$\begin{cases} \varphi(x - \Delta x, t) = \varphi_{i-1}^j = \varphi_i^j - \Delta x \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2}, \\ \varphi(x - 2\Delta x, t) = \varphi_{i-2}^j = \varphi_i^j - 2\Delta x \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} + \frac{4\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2}. \end{cases} \quad (4.18)$$

Учитывая граничные условия (4.3), перепишем (4.17) при  $i = 1$  и (4.18) при  $i = N_x$ :

$$\begin{cases} \varphi_2^j = \varphi_1^j + \Delta x H_{\text{ext}} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2}, \\ \varphi_3^j = \varphi_1^j + 2\Delta x H_{\text{ext}} + \frac{4\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (4.19)$$

$$\begin{cases} \varphi_{N_x-1}^j = \varphi_{N_x}^j - \Delta x H_{\text{ext}} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2}, \\ \varphi_{N_x-2}^j = \varphi_{N_x}^j - 2\Delta x H_{\text{ext}} + \frac{4\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2}. \end{cases} \quad (4.20)$$

Исключая вторую производную по координате  $\frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2}$  из выражений (4.19) и (4.20), находим значения функции в искомым точках  $i = 1$  и  $i = N_x$ :

$$\varphi_1^j = \frac{4\varphi_2^j - \varphi_3^j - 2H_{\text{ext}}\Delta x}{3}, \quad (4.21)$$

$$\varphi_{N_x}^j = \frac{4\varphi_{N_x-1}^j - \varphi_{N_x-2}^j + 2H_{\text{ext}}\Delta x}{3}. \quad (4.22)$$

Таким образом, мы определили значения функции при  $j = 1$  и  $j = 2$  во всех узлах по координате. Используя уравнение (4.14) и значения в узлах  $j = 1$

и  $j = 2$ , можно вычислить значения функции во всех узлах  $j = 3$ , с  $i = 2$  до  $i = N_x - 1$ . Далее следует найти значение функции в граничных узлах с использованием выражений (4.21) и (4.22). Таким же способом вычисляются значения функции во всех узлах  $j = 3$  с использованием значений в узлах  $j = 1$  и  $j = 2$ .

#### 4.2.2. Метод Рунге–Кутта четвертого порядка

Систему уравнений (4.1) можно также решить методом Рунге–Кутта четвертого порядка. Для этого необходимо дискретизировать производную второго порядка по координате, т.е. выразить производную второго порядка через значения функции в узлах сетки. Как и ранее, можно решить уравнения для внутренних точек, а граничные значения вычислить с помощью выражений (4.21) и (4.22). Также можно записать производную второго порядка по координате для левого края, внутренних точек и правого края и вставить в систему уравнений. Дискретизация производной второго порядка для внутренних точек определяется выражением (4.8). Остается дискретизировать ее на левом и правом краях. Из первого выражения системы (4.19) для левого края получим

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = \frac{2(\varphi_2 - \varphi_1)}{\Delta x^2} - \frac{2H_{\text{ext}}}{\Delta x}. \quad (4.23)$$

Аналогично, из первого выражения системы (4.20), для производной второго порядка на правом краю найдем

$$\frac{\partial^2 \varphi_{N_x}}{\partial x^2} = \frac{2(\varphi_{N_x-1} - \varphi_{N_x})}{\Delta x^2} + \frac{2H_{\text{ext}}}{\Delta x}. \quad (4.24)$$

Подставляя выражения (4.8), (4.23), (4.24) в систему уравнений (4.1), получаем три системы уравнений для левого края, внутренних точек и правого края соответственно:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = V_1, \\ \frac{\partial V_1}{\partial t} = \frac{2(\varphi_2 - \varphi_1)}{\Delta x^2} - \frac{2H_{\text{ext}}}{\Delta x} - \sin \varphi_1 - \beta V_1 + I, \end{cases} \quad (4.25)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = V_i, \\ \frac{\partial V_i}{\partial t} = \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{\Delta x^2} - \sin \varphi_i - \beta V_i + I, \end{cases} \quad (4.26)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_{N_x}}{\partial t} = V_{N_x}, \\ \frac{\partial V_{N_x}}{\partial t} = \frac{2(\varphi_{N_x-1} - \varphi_{N_x})}{\Delta x^2} + \frac{2H_{\text{ext}}}{\Delta x} - \sin \varphi_{N_x} - \beta V_{N_x} + I. \end{cases} \quad (4.27)$$

Системы уравнений (4.25), (4.26) и (4.27) решаются методом Рунге–Кутта так же, как для коротких ДП:

$$\begin{cases} \varphi_i^{j+1} = \varphi_i^j + \Delta \varphi_i^j, \\ V_i^{j+1} = V_i^j + \Delta V_i^j, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta \varphi_i^j = \frac{1}{6}(P_{(1)i}^j + 2P_{(2)i}^j + 2P_{(3)i}^j + P_{(4)i}^j), \\ \Delta V_i^j = \frac{1}{6}(K_{(1)i}^j + 2K_{(2)i}^j + 2K_{(3)i}^j + K_{(4)i}^j), \end{cases} \quad (4.28)$$

где  $P_{(n)i}^j$  и  $K_{(n)i}^j$  –  $n$ -е коэффициенты Рунге–Кутта в узлах сетки с номерами  $i$  и  $j$  для разности фаз  $\varphi$  и напряжения  $V$  соответственно. Они определяются следующими выражениями:

первые коэффициенты Рунге–Кутта

$$\begin{cases} P_{(1)1}^j = \{V_1^j\} \Delta t, \\ K_{(1)1}^j = \left\{ \frac{2(\varphi_2^j - \varphi_1^j)}{\Delta x^2} - \frac{2H_{\text{ext}}}{\Delta x} - \sin \varphi_1^j - \beta V_1^j + I \right\} \Delta t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{(1)i}^j = \{V_i^j\} \Delta t, \\ K_{(1)i}^j = \left\{ \frac{(\varphi_{i+1}^j - 2\varphi_i^j + \varphi_{i-1}^j)}{\Delta x^2} - \sin \varphi_i^j - \beta V_i^j + I \right\} \Delta t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{(1)N_x}^j = \{V_{(1)N_x}^j\} \Delta t, \\ K_{(1)N_x}^j = \left\{ \frac{2(\varphi_{N_x-1}^j - \varphi_{N_x}^j)}{\Delta x^2} + \frac{2H_{\text{ext}}}{\Delta x} - \sin \varphi_{N_x}^j - \beta V_{N_x}^j + I \right\} \Delta t; \end{cases}$$

вторые коэффициенты Рунге–Кутта

$$\begin{cases} P_{(2)1}^j = \left\{ V_1^j + \frac{K_{(1)1}^j}{2} \right\} \Delta t, \\ K_{(2)1}^j = \left\{ \frac{2}{\Delta x^2} \left[ \left( \varphi_2^j + \frac{P_{(1)2}^j}{2} \right) - \left( \varphi_1^j + \frac{P_{(1)1}^j}{2} \right) \right] - \frac{2H_{\text{ext}}}{\Delta x} - \sin \left( \varphi_1^j + \frac{P_{(1)1}^j}{2} \right) - \beta \left( V_1^j + \frac{K_{(1)1}^j}{2} \right) + I \right\} \Delta t, \end{cases}$$



$$\begin{cases} P_{(2)i}^j = \left\{ V_i^j + \frac{K_{(1)i}^j}{2} \right\} \Delta t, \\ K_{(2)i}^j = \left\{ \frac{1}{\Delta x^2} \left[ \left( \varphi_{i+1}^j + \frac{P_{(1)i+1}^j}{2} \right) - 2 \left( \varphi_i^j + \frac{P_{(1)i}^j}{2} \right) + \left( \varphi_{i-1}^j + \frac{P_{(1)i-1}^j}{2} \right) \right] - \right. \\ \left. - \sin \left( \varphi_i^j + \frac{P_{(1)i}^j}{2} \right) - \beta \left( V_i^j + \frac{K_{(1)i}^j}{2} \right) + I \right\} \Delta t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{(2)N_x}^j = \left\{ V_{N_x}^j + \frac{K_{(1)N_x}^j}{2} \right\} \Delta t, \\ K_{(2)N_x}^j = \left\{ \frac{2}{\Delta x^2} \left[ \left( \varphi_{N_x-1}^j + \frac{P_{(1)N_x-1}^j}{2} \right) - \left( \varphi_{N_x}^j + \frac{P_{(1)N_x}^j}{2} \right) \right] + \frac{2H_{\text{ext}}}{\Delta x} - \right. \\ \left. - \sin \left( \varphi_{N_x}^j + \frac{P_{(1)N_x}^j}{2} \right) - \beta \left( V_{N_x}^j + \frac{K_{(1)N_x}^j}{2} \right) + I \right\} \Delta t; \end{cases}$$

третьи коэффициенты Рунге-Кутта

$$\begin{cases} P_{(3)1}^j = \left\{ V_1^j + \frac{K_{(2)1}^j}{2} \right\} \Delta t, \\ K_{(3)1}^j = \left\{ \frac{2}{\Delta x^2} \left[ \left( \varphi_2^j + \frac{P_{(2)2}^j}{2} \right) - \left( \varphi_1^j + \frac{P_{(2)1}^j}{2} \right) \right] - \frac{2H_{\text{ext}}}{\Delta x} - \right. \\ \left. - \sin \left( \varphi_1^j + \frac{P_{(2)1}^j}{2} \right) - \beta \left( V_1^j + \frac{K_{(2)1}^j}{2} \right) + I \right\} \Delta t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{(3)i}^j = \left\{ V_i^j + \frac{K_{(2)i}^j}{2} \right\} \Delta t, \\ K_{(3)i}^j = \left\{ \frac{1}{\Delta x^2} \left[ \left( \varphi_{i+1}^j + \frac{P_{(2)i+1}^j}{2} \right) - 2 \left( \varphi_i^j + \frac{P_{(2)i}^j}{2} \right) + \left( \varphi_{i-1}^j + \frac{P_{(2)i-1}^j}{2} \right) \right] - \right. \\ \left. - \sin \left( \varphi_i^j + \frac{P_{(2)i}^j}{2} \right) - \beta \left( V_i^j + \frac{K_{(2)i}^j}{2} \right) + I \right\} \Delta t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{(3)N_x}^j = \left\{ V_{N_x}^j + \frac{K_{(2)N_x}^j}{2} \right\} \Delta t, \\ K_{(3)N_x}^j = \left\{ \frac{2}{\Delta x^2} \left[ \left( \varphi_{N_x-1}^j + \frac{P_{(2)N_x-1}^j}{2} \right) - \left( \varphi_{N_x}^j + \frac{P_{(2)N_x}^j}{2} \right) \right] + \frac{2H_{\text{ext}}}{\Delta x} - \right. \\ \left. - \sin \left( \varphi_{N_x}^j + \frac{P_{(2)N_x}^j}{2} \right) - \beta \left( V_{N_x}^j + \frac{K_{(2)N_x}^j}{2} \right) + I \right\} \Delta t; \end{cases}$$

четвертые коэффициенты Рунге-Кутта

$$\begin{cases} P_{(4)1}^j = \{ V_1^j + K_{(3)1}^j \} \Delta t, \\ K_{(4)1}^j = \left\{ \frac{2}{\Delta x^2} [(\varphi_2^j + P_{(3)2}^j) - (\varphi_1^j + P_{(3)1}^j)] - \frac{2H_{\text{ext}}}{\Delta x} - \right. \\ \left. - \sin(\varphi_1 + P_{(3)1}^j) - \beta(V_1^j + K_{(3)1}^j) + I \right\} \Delta t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{(4)i}^j = \{ V_i^j + K_{(3)i}^j \} \Delta t, \\ K_{(4)i}^j = \left\{ \frac{1}{\Delta x^2} [(\varphi_{i+1}^j + P_{(3)i+1}^j) - 2(\varphi_i^j + P_{(3)i}^j) + (\varphi_{i-1}^j + P_{(3)i-1}^j)] - \right. \\ \left. - \sin(\varphi_i^j + P_{(3)i}^j) - \beta(V_i^j + K_{(3)i}^j) + I \right\} \Delta t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_{(4)N_x}^j = \{ V_{N_x}^j + K_{(3)N_x}^j \} \Delta t, \\ K_{(4)N_x}^j = \left\{ \frac{2}{\Delta x^2} [(\varphi_{N_x-1}^j + P_{(3)N_x-1}^j) - (\varphi_{N_x}^j + P_{(3)N_x}^j)] + \frac{2H_{\text{ext}}}{\Delta x} - \right. \\ \left. - \sin(\varphi_{N_x}^j + P_{(3)N_x}^j) - \beta(V_{N_x}^j + K_{(3)N_x}^j) + I \right\} \Delta t. \end{cases}$$

### 4.3. Расчет вольт-амперной характеристики

Расчет ВАХ проводится аналогично случаю коротких ДП. При расчете ВАХ величина внешнего тока  $I$  возрастает от  $I_0$  с шагом  $\Delta I$  до  $I_{\text{max}}$  и затем уменьшается до нуля. На каждом шаге по току процесс расчета ВАХ состоит из двух этапов. Первым этапом является решение дифференциального уравнения при фиксированном значении внешнего тока  $I$ . Как упоминалось выше, на этом этапе вычисляются разность фаз  $\varphi(x, t)$  и напряжение  $V(x, t)$  как функции координаты и времени. На втором этапе рассчитывается среднее значение

напряжения для данного значения тока. В процессе усреднения возникает необходимость интегрирования напряжения  $V(x, t)$  по координате и времени:

$$\bar{V} = \frac{1}{T_{\max} - T_{\min}} \int_{T_{\min}}^{T_{\max}} \bar{V}_x(t) dt, \quad (4.29)$$

$$\bar{V}_x(t) = \frac{1}{L} \int_0^L V(x, t) dx, \quad (4.30)$$

где  $\bar{V}$  – среднее напряжение,  $\bar{V}_x(t)$  – напряжение, усредненное только по координате. При усреднении по времени в (4.29) интегрирование проводится методом прямоугольников:

$$\int_{T_{\min}}^{T_{\max}} \bar{V}_x(t) dt = \sum_{m=1}^{N_t} \bar{V}_x^m \Delta t.$$

При усреднении по координате в (4.30) интегрирование проводится методом Симпсона:

$$\int_0^L V(x, t) dx = \frac{\Delta x}{3} \left[ V_1^j + V_{N_x}^j + \sum_{n=2}^{N_x-1} \left( (-1)^n + 3 \right) V_n^j \right].$$

Вышеприведенная процедура повторяется на каждом шаге по току, и полученные значения записываются в файл.

## 4.4. Анализ результатов численного расчета

### 4.4.1. Анализ вольт-амперной характеристики джозефсоновских переходов разной длины

Обсудим вначале результаты численного расчета ВАХ и ее особенности.

Для того чтобы понять, к чему приводит изменение длины ДП, мы рассчитали ВАХ ДП при трех значениях  $L$ . На рис.4.2 показана ВАХ ДП длиной: (а)  $L = 0.1$ , (б)  $L = 3$  и (с)  $L = 5$ . Расчеты проведены при  $\beta = 0.2$  при отсутствии внешнего магнитного поля  $H_{ext} = 0$ . ВАХ, показанная на рис.4.2(а), демонстрирует гистерезис и согласуется с ВАХ короткого ДП (см. рис.2.1). В случае  $L = 3$  и  $L = 5$  на ВАХ при отсутствии внешнего магнитного поля образуются ступенчатые структуры. Они отмечены горизонтальными стрелками. В специальной литературе их называют ступеньками нулевого поля. Происхождение этих ступенек связано с образованием флюксонных состояний.

На самом деле эти ступеньки являются ветками ВАХ. В этом можно убедиться, если в процессе расчета, при попадании на ступеньку, поменять направление базового тока. В результате получается ветка ВАХ, соответствующая

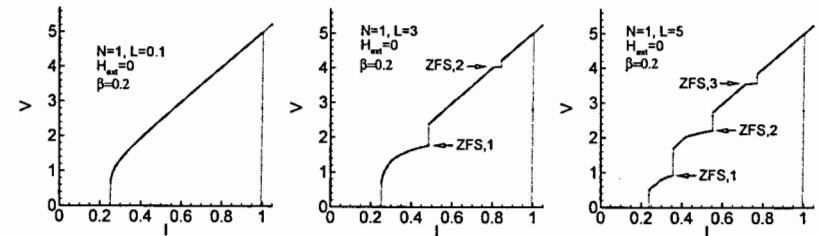


Рис. 4.2. ВАХ длинного ДП: (а) с  $L = 0.1$  (приближение короткого ДП); (б) с  $L = 3$ ; (с) с  $L = 5$

определенному флюксонному состоянию. На рис.4.3 показана полная ветвистая структура ВАХ ДП длиной  $L = 5$ .

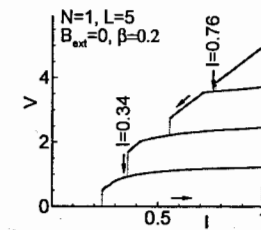


Рис. 4.3. Демонстрация флюксонных ветвей на ВАХ одиночного ДП длиной  $L = 5$

### 4.4.2. Флюксоны в длинном джозефсоновском переходе

Перейдем к обсуждению флюксонных состояний в ДП. Для того чтобы продемонстрировать наличие флюксонных состояний, рассмотрим более детально фазовую динамику ДП в области ВАХ, соответствующей ступенькам нулевого поля.

На рис.4.4 показано распределение разности фаз и ее производных первого и второго порядка по координате при  $I = 0.34$ , соответствующее первой ступеньке при фиксированном значении времени. Рис.4.5(а) демонстрирует возникновение флюксона. Рис.4.5(б) показывает, что в центре флюксона значение магнитного поля максимально. Из рис.4.5(с) видно, что слева от центра кинка сверхпроводящий ток положителен, а справа он отрицателен. Это демонстрирует наличие в ДП циркулирующего сверхпроводящего тока.

Динамику образованного флюксонного состояния демонстрируют пространственно-временные зависимости разности фаз и ее производных первого и второго порядка при  $I = 0.34$ , которые представлены на рис.4.5.

Рис.4.5(а) демонстрирует движение образованного флюксона от одного конца ДП к другому, который, отражаясь, превращается в антифлюксон. Таким

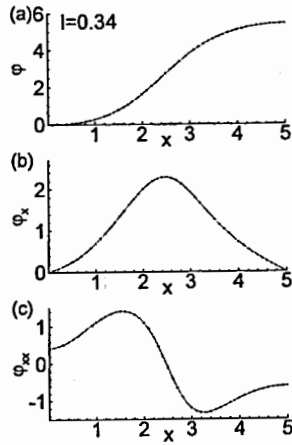


Рис. 4.4. Распределение  $\varphi$  (a);  $\varphi_x$  (b);  $\varphi_{xx}$  (c) по координате при  $I = 0.34$  и фиксированном значении времени

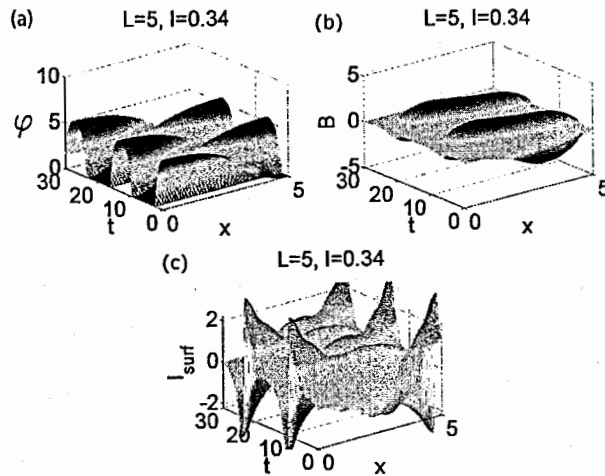


Рис. 4.5. Пространственно-временные зависимости разности фаз (a), магнитного поля (b) и поверхностного сверхпроводящего тока (c) в ДП длиной  $L = 5$  при значении базового тока  $I = 0.34$

образом, в области ступеньки нулевого поля повторяется периодическое движение флюксона от одного конца ДП к другому, его превращение в антифлюксон и обратно при отражении на границе ДП. Такое поведение демонстрируют также магнитное поле в ДП (рис.4.5 (b)) и циркулирующий сверхпроводящий ток (рис.4.5(c)).

Для того чтобы показать различие разных ступенек нулевого поля, мы рассчитали пространственно-временные зависимости при  $I = 0.76$ , соответствующие третьей ступеньке нулевого поля. На рис.4.6 показано распределение разности фаз и ее производных первого и второго порядка по координате в фиксированный момент времени. Рис.4.6(a) демонстрирует состояние с двумя флюксонами (в интервалах по координате  $[0,1.8]$  и  $[3.2,5]$ ) и одного антифлюксона (в интервале по координате  $[1.8,3.2]$ ). Рис.4.6(b) демонстрирует два максимума, соответствующие двум флюксонам, и минимум, соответствующий антифлюксону. Рис.4.6(c) показывает, что циркуляции сверхпроводящего тока, соответствующие флюксону и антифлюксону, противоположны друг другу.

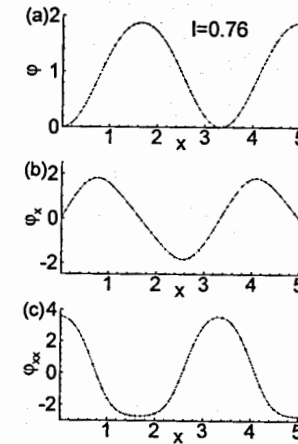


Рис. 4.6. Распределение  $\varphi$  (a);  $\varphi_x$  (b);  $\varphi_{xx}$  (c) по координате при  $I = 0.76$  и фиксированном значении времени

На рис.4.7 представлены пространственно-временные зависимости разности фаз и ее производных первого и второго порядка при  $I = 0.76$ , соответствующие трехфлюксонному состоянию. В отличие от однофлюксонного состояния, здесь отражение флюксона и его превращение в антифлюксон происходит не только на границе, но и при столкновении флюксона и антифлюксона. Рис.4.7(a) демонстрирует отражение образованного флюксона от антифлюксона, в результате чего флюксон превращается в антифлюксон. В свою очередь, антифлюксон превращается во флюксон. Подобное поведение демонстрирует также магнитное поле в ДП (рис.4.7 (b)) и циркулирующий сверхпроводящий ток (рис.4.7(c)).

Теперь обсудим коротко вопрос о том, как образование флюксонов приводит к появлению ступенек на ВАХ. Скорость флюксона в нормированных величинах выражается как  $u = [1 - (4\beta/\pi I)^2]^{-1/2}$ . Она нормирована на скорость Свихарта  $c_j = \omega_p \lambda_j$ . При выполнении условия  $u = 1$  (когда скорость флюксона равна скорости Свихарта) периодическое движение флюксона приводит к

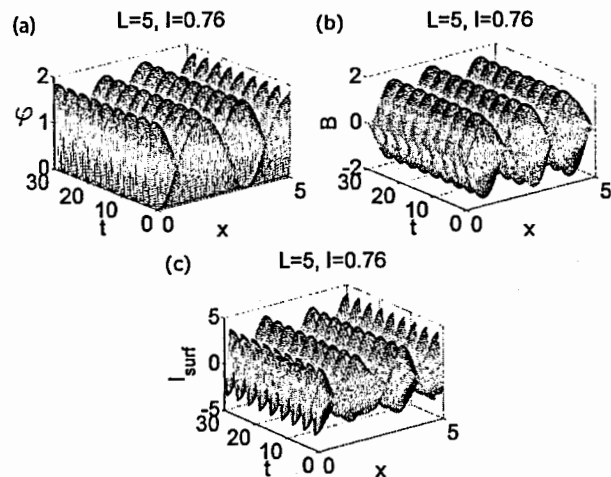


Рис. 4.7. Пространственно-временные зависимости разности фаз (а), магнитного поля (б) и поверхностного сверхпроводящего тока (с) в ДП длиной  $L = 5$  при значении базового тока  $I = 0.76$

среднему значению напряжения

$$V_{zfs} = 2\pi n/L,$$

где  $n$  – число флюксонов, что проявляется на ВАХ как ступенька.

## Приложение 1.

Программа short.cpp для расчета вольт-амперной характеристики джозефсоновского перехода

```
//подключение стандартных библиотек
#include<iostream>
#include<math.h>
#include<iomanip>
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
using namespace std;
int main()
{
    int
        t, //индекс по времени
        ti, //номер цикла по времени, с которого начинается
интегрирование
        a=1, //параметр для определения направления тока
        tN, //количество точек (циклов) по времени
        ICounter, //счетчик тока
        breakcurrent=0, //переменная "флажок" для прекращения
расчета
        backcurrent=0, //переменная "флажок" для смены направления
расчета
        at=-1; //запись временной зависимости: при возрастании тока 1,
при убывании -1

    double
        Ti=50, //начальное значение времени для усреднения
        Tf0=250, //временной домен для одного шага по току
        Tf1=250, //временной домен для одного шага по току при
вычислении временной зависимости
        TP=0.05, //шаг по времени
        JP0=0.005, //шаг по току вне интервала [Imore1,Imore2]
        JP1=0.001, //шаг по току в интервале [Imore1,Imore2]
        Imore1=0.1, //с этого значения шаг по току изменяется
```

```

Imore2=1, //до этого значения шаг по току изменен
I0=0.1, //начальное значение тока
Imax=1.2, //максимальное значение тока
Imin=0, //минимальное значение тока
Ibreak=0, //ток, при котором вычисление останавливается
Omega=0, //частота внешнего излучения
Amp=0, //амплитуда внешнего излучения
beta=0.2, //параметр диссипации
Itime1=0.8, //минимальное значение тока для записи временной
зависимости
Itime2=0.8, //максимальное значение тока для записи временной
зависимости
I, //входной ток
//коэффициенты Рунге-Кутта
P1,P2,P3,P4,
V1,V2,V3,V4,
//начальные условия
v=0, // напряжение
intV=0, //переменная для интегрирования напряжения
V=0, //переменная для напряжения при фиксированном времени
ph=0, //переменная для разности фаз при фиксированном времени
time=0, //время для записи
Tf=Tf0,JP=JP0; //начальный выбор временного домена и шага по току
tN=(Tf/TP); //расчет количества шагов в одном временном домене
ti=tN*Ti/Tf; //расчет номера шага, с которого начинается усреднение
ICounter=0; //обнуление счетчика тока;

//создание файлов для записи результатов
FILE *f, *f5, *f6;
f=fopen("Voltage.dat","w"); //файл для ВАХ
f5=fopen("V(time).dat","w"); //файл для временной зависимости напряжения
f6=fopen("ph(time).dat","w"); //файл для временной зависимости разности
фаз

I=I0;

do{ //здесь начинается цикл по току
t=0;
do{ //здесь начинается цикл по времени

//начало метода Рунге-Кутта
//первые коэффициенты метода Рунге-Кутта
V1=TP*(I+Amp*sin(Omega*(t*TP+ICounter*tN*TP))-sin(ph)-beta*V);
P1=TP*V;

//вторые коэффициенты метода Рунге-Кутта

```

```

V2=TP*(I+Amp*sin(Omega*(TP*t+TP/2+ICounter*tN*TP))
-sin(ph+P1/2)-beta*(V+V1/2));
P2=TP*(V+V1/2);

//третьи коэффициенты метода Рунге-Кутта
V3=TP*(I+Amp*sin(Omega*(TP*t+TP/2+ICounter*tN*TP))
-sin(ph+P2/2)-beta*(V+V2/2));
P3=TP*(V+V2/2);

//четвертые коэффициенты метода Рунге-Кутта
V4=TP*(I+Amp*sin(Omega*(TP*t+TP+ICounter*tN*TP))
-sin(ph+P3)-beta*(V+V3));
P4=TP*(V+V3);

ph=ph+(P1+2*P2+2*P3+P4)/6;
V=V+(V1+2*V2+2*V3+V4)/6;
//конец метода Рунге-Кутта

if (t>ti)intV=V*TP+intV;// интегрирование напряжения

// начало вычисления временных зависимостей
if((I<(Itime2+JP1/2))&&(I>(Itime1-JP1/2))&&(a==at))
{pt=1; tN=Tf1/TP; Tf=Tf1;

//формула записываемого времени
if(at==-1){time=t*TP-(TP*tN*(Itime2-I)*at)/JP;}
if(at==1){time=t*TP+(TP*tN*(I-Itime1)*at)/JP;}

//запись времени
fprintf(f5,"%f\t",time);
fprintf(f6,"%f\t",time);
fprintf(f6,"%e\t",ph); //здесь записывается разность фаз
fprintf(f5,"%e\t",V); //здесь записывается напряжение

//здесь записывается входной ток
fprintf(f5,"%f\t",I);
fprintf(f6,"%f\t",I);

//переход на новую строку
fprintf(f5,"\n");
fprintf(f6,"\n");
}else{tN=Tf0/TP; Tf=Tf0;};

//конец вычисления временных зависимостей
//здесь заканчивается цикл по времени
}while(++t<tN+1);

//усреднение напряжения
v=intV/(Tf-Ti);
intV=0;

//вывод результатов на экран
cout << "\n\nI:" << I << "\n\nV:" << v;

//здесь записываются входной ток и суммарное напряжение

```

```

    fprintf(f,"%f\t%e\n",I,v);
//условие для возврата тока
if((I<=Imin+JP1/2)&&(backcurrent==0)&&(a==-1))
    {backcurrent=1;
    breakcurrant=1;
    a=1;
};

//условие для изменения направления тока
if(I>Imax)
    {cout < "here is max of current so we go back" < endl;
    a=-1; };

ICounter=ICounter+1;

//здесь изменяется направление тока
I=I+a*JP;

if((backcurrent==1)&&(I>=Ibreak-JP1/2)&&(a==1))
    {break;};

//условие для изменения шага по току
if((I<=Imore2+JP1/2)&&(I>=Imore1-JP1/2))
    {JP=JP1;tN=Tf1/TP;Tf=Tf1;};
else{JP=JP0;tN=Tf0/TP;Tf=Tf0;};
//здесь заканчивается цикл по току
}while(I<=100);

//здесь все файлы закрываются
fclose(f);
fclose(f5);
fclose(f6);
return(0);
}

```

## Приложение 2.

### Программа stack.cpp для системы связанных джозефсоновских переходов

```

//подключение стандартных библиотек
#include<iostream>
#include<math.h>
#include<iomanip>
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>

using namespace std;

int main()
{
    const int N=5; //количество контактов
    char c='p'; //в случае периодических граничных условий вставьте
    'p', а непериодических - 'n'

    int
        i, //индекс по контактам
        g1, //параметр для вывода результатов на экран
        t, //индекс по времени
        ti, //номер цикла по времени, с которого начинается
интегрирование
        a=1, //параметр для определения направления тока
        tN, //количество точек (циклов) по времени
        ICounter, //счетчик тока
        M=N, //M используется как номер ДП(JJ) при учете граничных
условий
        Itimefinish=0, //если вы хотите приостановить программу
после записи временной зависимости, вставьте '1' в место '0'
        pt=0, //параметр для проверки записи временной зависимости
        at=-1; //запись временной зависимости: при возрастании тока 1,
при убывании -1

    double
        Ti=50, //начальное значение времени усреднения

```

```

Tf0=250, //временной домен для одного шага по току
Tf1=250, //временной домен для одного шага по току при вычислении
временной зависимости
TP=0.05, //шаг по времени
JP0=0.005, //шаг по току вне интервала [Imore1,Imore2]
JP1=0.001, //шаг по току в интервале [Imore1,Imore2]
Imore1=0.1, //с этого значения шаг по току изменяется
Imore2=1, //до этого значения шаг по току изменен
I0=0.1, //начальное значение тока
Imax=1.2, //максимальное значение тока
poismax=1e-8, //амплитуда шума тока
Omega=0, //частота внешнего излучения
Amp=0, //амплитуда внешнего излучения
alpha =1, //параметр связи
beta=0.2, //параметр диссипации
gamma=0, //параметр для неперидических граничных условий
Itime1=0.8, //минимальное значение тока для записи временной
зависимости
Itime2=0.8, //максимальное значение тока для записи временной
зависимости
v, // напряжение
Irand[N+2], //шум тока
intV[N+2], //переменная для интегрирования напряжения
Vav[N+2], //переменная для усреднения напряжения

//коэффициенты Рунге-Кутта
P1[N+2],V1[N+2],
P2[N+2],V2[N+2],
P3[N+2],V3[N+2],
P4[N+2],V4[N+2],

V[N+2], //переменная для напряжения при фиксированном времени
dph[N+2], //переменная для производной от разности фаз
ph[N+2], //переменная для разности фаз при фиксированном времени
Ch[N+2], //переменная для заряда на каждом контакте при
фиксированном времени
time=0, //время для записи
I, //входной ток
Tf=Tf0,JP=JP0,Jc=1; //начальный выбор временного домена, шага по
току и задание критического тока

//создание файлов
FILE *f, *f1, *f11, *f5, *f6;
f=fopen("Voltage.dat","w"); //файл для ВАХ
f1=fopen("Voltage_j.dat","w"); //файл для ВАХ в каждом контакте

```

```

f11=fopen("Ch(time).dat","w"); //файл для временной зависимости
заряда в каждом слое
f5=fopen("V_j(time).dat","w"); //файл для временной зависимости
напряжения
f6=fopen("ph(time).dat","w"); //файл для временной зависимости
разности фаз

tN=(Tf/TP); //расчет количества шагов в одном временном домене
ti=tN*Ti/Tf; //расчет номера шага, с которого начинается
усреднение
//цикл для вычисления начальных условий
i=0;
do
{
ph[i]=0;
dph[i]=0;
intV[i]=0;
Vav[i]=0;
V[i]=0;
Ch[i]=0;
}while(++i<=N);

ICounter=0; //обнуление счетчика тока
v=0; //обнуление среднего напряжения
I=I0; //задание начального значения тока

//Генерация шума
char *a12;
unsigned i1,i2=1;
long int ranmax=0,ran=0;
i=0;
do
{
initstate(i1,a12,i2);
ran=random();

if(ranmax<ran) ranmax=ran;
}while(++i<=100000);

cout << "random max is :" << ranmax << endl;

float rand;
int randa[2000];

i=1;
do
{

```

```

initstate(i1,a12,i2);
rand=random();
rand=2*(rand/ranmax-0.5);
ran=100*rand;
randa[ran+100]=randa[ran+100]+1;
}while(++i<=1000000);

do
{ //здесь начинается цикл по току
t=0;
do
{ //здесь начинается цикл по времени
//вычисление шума
i=1;
do
{
initstate(i1,a12,i2);
rand=random();
rand=2*(rand/ranmax-0.5);
Irand[i]=noismax*rand*Jc;
}while(++i<=N);

//начало метода Рунге-Кутта
//первые коэффициенты метода Рунге-Кутта
if(c=='n')
{//при использовании неперидических граничных условий первое
и последнее уравнения отличаются
i=1; //расчет первого уравнения
dph[i]=(V[i])-alpha*(V[i+1]-(1+gamma)*V[i]);
V1[i]=TP*(I+Irand[i]+Amp*sin(Omega*(t*TP+ICounter*tN*TP))
-Jc*sin(ph[i])-beta*dph[i]);
P1[i]=TP*dph[i];
i=N; //расчет последнего уравнения
dph[i]=(V[i])-alpha*(V[i-1]-(1+gamma)*V[i]);
V1[i]=TP*(I+Irand[i]+Amp*sin(Omega*(t*TP+ICounter*tN*TP))
-Jc*sin(ph[i])-beta*dph[i]);
P1[i]=TP*dph[i];
i=2; //переход к остальным уравнениям
}
if(c=='p')
{//задание периодических граничных условий
i=1;
M=N+1;
V[0]=V[N];
V[N+1]=V[1];
}
}
}

```

```

}
do
{//расчет первых коэффициентов (для всех ДП при периодических
граничных условиях и средних при неперидических граничных условиях)
dph[i]=(V[i])-alpha*(V[i-1]+V[i+1]-2*V[i]);
V1[i]=TP*(I+Irand[i]+Amp*sin(Omega*(t*TP+ICounter*tN*TP))
-Jc*sin(ph[i])-beta*dph[i]);
P1[i]=TP*dph[i];
}while(++i<M);
//вторые коэффициенты метода Рунге-Кутта
if(c=='n')
{//неперидические граничные условия для первого и последнего
ДП
i=1;
dph[i]=(V[i]+V1[i]/2)-alpha*((V[i+1]+V1[i+1])/2)
-(1+gamma)*(V[i]+V1[i]/2));
V2[i]=TP*(I+Irand[i]+Amp*sin(Omega*
(TP*t+TP/2+ICounter*tN*TP)) -Jc*sin(ph[i]+P1[i]/2)-beta*dph[i]);
P2[i]=TP*dph[i];
i=N;
dph[i]=(V[i]+V1[i]/2)-alpha*((V[i-1]+V1[i-1])/2)
-(1+gamma)*(V[i]+V1[i]/2));
V2[i]=TP*(I+Irand[i]+Amp*sin(Omega*
(TP*t+TP/2+ICounter*tN*TP)) -Jc*sin(ph[i]+P1[i]/2)-beta*dph[i]);
P2[i]=TP*dph[i];
i=2;
}
if(c=='p')
{//периодические граничные условия
i=1;
M=N+1;
V[0]=V[N];
V[N+1]=V[1];
V1[0]=V1[N];
V1[N+1]=V1[1];
}
do
{
dph[i]=(V[i]+V1[i]/2)-alpha*((V[i-1]+V1[i-1])/2)
+(V[i+1]+V1[i+1]/2)-2*(V[i]+V1[i]/2));
V2[i]=TP*(I+Irand[i]+Amp*sin(Omega*
(TP*t+TP/2+ICounter*tN*TP)) -Jc*sin(ph[i]+P1[i]/2)-beta*dph[i]);
P2[i]=TP*dph[i];
}
}
}

```



```

}while(++i<M);
//Третьи коэффициенты метода Рунге-Кутта
if(c=='n')
{ //непериодические граничные условия для первого и последнего
ДП
    i=1;
    dph[i]=(V[i]+V2[i]/2)-alpha*((V[i+1]+V2[i+1])/2)
-(1+gamma)*(V[i]+V2[i]/2));
    V3[i]=TP*(I+Irand[i]+Amp*sin(Omega*
(TP*t+TP/2+ICounter*tN*TP)) -Jc*sin(ph[i]+P2[i]/2)-beta*dph[i]);
    P3[i]=TP*dph[i];
    i=N;
    dph[i]=(V[i]+V2[i]/2)-alpha*((V[i-1]+V2[i-1])/2)
-(1+gamma)*(V[i]+V2[i]/2));
    V3[i]=TP*(I+Irand[i]+Amp*sin(Omega*
(TP*t+TP/2+ICounter*tN*TP)) -Jc*sin(ph[i]+P2[i]/2)-beta*dph[i]);
    P3[i]=TP*dph[i];
    i=2;
}
if(c=='p')
{ //периодические граничные условия
    i=1;
    M=N+1;
    V[0]=V[N];
    V[N+1]=V[1];
    V2[0]=V2[N];
    V2[N+1]=V2[1];
}
do
{
    dph[i]=(V[i]+V2[i]/2)-alpha*((V[i-1]+V2[i-1])/2)
+(V[i+1]+V2[i+1]/2)-2*(V[i]+V2[i]/2));
    V3[i]=TP*(I+Irand[i]+Amp*sin(Omega*
(TP*t+TP/2+ICounter*tN*TP)) -Jc*sin(ph[i]+P2[i]/2)-beta*dph[i]);
    P3[i]=TP*dph[i];
}while(++i<M);
//Четвертые коэффициенты метода Рунге-Кутта
if(c=='n')
{ //непериодические граничные условия для первого и последнего
ДП
    i=1;
    dph[i]=(V[i]+V3[i])-alpha*((V[i+1]+V3[i+1])
-(1+gamma)*(V[i]+V3[i]));

```

```

    V4[i]=TP*(I+Irand[i]+Amp*sin(Omega*
(TP*t+TP+ICounter*tN*TP)) -Jc*sin(ph[i]+P3[i])-beta*dph[i]);
    P4[i]=TP*dph[i];
    i=N;
    dph[i]=(V[i]+V3[i])-alpha*((V[i-1]+V3[i-1])
-(1+gamma)*(V[i]+V3[i]));
    V4[i]=TP*(I+Irand[i]+Amp*sin(Omega*
(TP*t+TP+ICounter*tN*TP)) -Jc*sin(ph[i]+P3[i])-beta*dph[i]);
    P4[i]=TP*dph[i];
    i=2;
}
if(c=='p')
{ //периодические граничные условия
    i=1;
    M=N+1;
    V[0]=V[N];
    V[N+1]=V[1];
    V3[0]=V3[N];
    V3[N+1]=V3[1];
}
do
{
    dph[i]=(V[i]+V3[i])-alpha*((V[i-1]+V3[i-1])
+(V[i+1]+V3[i+1])-2*(V[i]+V3[i]));
    V4[i]=TP*(I+Irand[i]+Amp*sin(Omega*
(TP*t+TP+ICounter*tN*TP)) -Jc*sin(ph[i]+P3[i])-beta*dph[i]);
    P4[i]=TP*dph[i];
}while(++i<M);
//цикл для расчета значений функций V(t) и ph(t) для
заданного шага по времени
    i=1;
    do
    {
        ph[i]=ph[i]+(P1[i]+2*P2[i]+2*P3[i]+P4[i])/6;
        V[i]=V[i]+(V1[i]+2*V2[i]+2*V3[i]+V4[i])/6;
        //интегрирование напряжения методом прямоугольника
        if(t>ti) intV[i]=V[i]*TP+intV[i];
    }while(++i<=N);
//конец метода Рунге-Кутта
// начало вычисления временных зависимостей
if((I<(Itime2+JP1/2)) && (I>(Itime1-JP1/2)) && (a==at))
{
    pt=1;

```

```

tN=Tf1/TP;
Tf=Tf1;
time=t*TP-(TP*tN*(Itime2-I)*at)/JP; //формула
записываемого времени
//запись времени
fprintf(f11,"%f\t",time);
fprintf(f5,"%f\t",time);
fprintf(f6,"%f\t",time);
//здесь записывается разность фаз
i=1;
do
{
    fprintf(f6,"%e\t",ph[i]);
}while(++i<=N);
//вычисление значения заряда в промежуточных слоях
i=1;
do
{
    Ch[i]=alpha*(V[i+1]-V[i]);
}while(++i<=N-1);
//вычисление значения заряда на последнем слое при
периодических граничных условиях
if(c=='p')
{
    Ch[N]=alpha*(V[1]-V[N]);
}
if(c=='n')
{
    //вычисление значения заряда на первом слое при
непериодических граничных условиях
    Ch[0]=alpha*(V[1]);
    //вычисление значения заряда на последнем слое при
непериодических граничных условиях
    Ch[N]=-alpha*(V[N]);
    //здесь записывается заряд на первом слое при
непериодических граничных условиях
    fprintf(f11,"%e\t",Ch[0]);
}
i=1;
do
{
    //здесь записывается заряд на всех слоях
    fprintf(f11,"%e\t",Ch[i]);
    //здесь записывается напряжение на всех контактах
    fprintf(f5,"%e\t",V[i]);

```

```

}while(++i<=N);
//здесь записывается входной ток
fprintf(f11,"%f\t",I);
fprintf(f5,"%f\t",I);
fprintf(f6,"%f\t",I);
//переход на новую строку
fprintf(f11,"\n");
fprintf(f5,"\n");
fprintf(f6,"\n");
}
else
{
    tN=Tf0/TP;
    Tf=Tf0;
}
//конец вычисления временных зависимостей
//здесь цикл по времени заканчивается
}while(++t<tN+1);
//усреднение напряжения
i=1;
do
{
    Vav[i]=intV[i]/(Tf-Ti);
    intV[i]=0;
}while(++i<=N);
//вычисление суммарного напряжения
v=0;
i=1;
do
{
    v=Vav[i]+v;
}while(++i<=N);
//вывод результатов на экран
if((g1==0))
{
    cout << "\n\nI:" << I << "\tV:" << v;
}
//здесь записываются входной ток и суммарное напряжение
fprintf(f,"%f\t%e\n",I,v);
fprintf(f1,"%f\t%e\t",I,v);
//здесь записывается напряжение на каждом контакте
i=1;
do
{

```

```

    fprintf(f1,"%e\t",Vav[i]);
}while(++i<=N);

//переход на новую строку
fprintf(f1,"\n");

//условие для приостановления
if((I<=0) && (a==1)) break;

//условие для изменения направления тока
if(I>Imax)
{
    cout < "here is max of current so we go back" < endl;
    a=-1;
}

ICounter=ICounter+1;

//здесь изменяется направление тока
I=I+a*JP;
//условие для приостановления после записи временных зависимостей
if((pt==1) && (Itimelfinish==1) && (a==at) && (v>0.1))
    if((I>Itime2+JP1/2) || (I<Itime1-JP1/2))
    {
        cout < "\n" < "the program is written to "
            < "finish here, if you don't like so change Itimelfinish
to 0" < "\n";
        break;
    }

//условие для изменения шага по току
if((I<=Imore2+JP1/2) && (I>=Imore1-JP1/2) && (a==1))
{
    JP=JP1;
    tN=Tf1/TP;
    Tf=Tf1;
}
else
{
    JP=JP0;
    tN=Tf0/TP;
    Tf=Tf0;
}
//здесь заканчивается цикл по току
}while(I<=100);

//здесь все файлы закрываются
fclose(f);
fclose(f1);

```

```

fclose(f11);
fclose(f5);
fclose(f6);
return(0);
}

```

## Приложение 3.

### Программа long.cpp для расчета характеристик длинного джозефсоновского перехода

```
//подключение стандартных библиотек
#include<iostream>
#include<math.h>
#include<stdio.h>

using namespace std;
int main(){
    double
        //Точки для записи пространственно-временных зависимостей H, rh
        и V
        Ix[]={0.74, 0.65, 0.5, 0.32};
    char str[50];
    int a=1, //параметр определения направления тока
        i, //индекс по ДП
        t, x, //индекс по времени и по координате
        tN, xN, //количество точек по времени и по координате
        ti, //номер цикла по времени, от которого начинается
интегрирование по времени
        f, nt, nx, F,
        deltaT=5, //количество шагов по времени, которые пропускаются
        //при записи пространственно-временной зависимости
        deltaX=2, //количество шагов по координате, которые
пропускаются
        //при записи пространственно-временной зависимости
        at=-1, //направление тока для записи временных зависимостей
        ax=-1, //направление тока для записи пространственно-временных
зависимостей
        time_dep=0, //выключатель записи временных зависимостей
        currents=0, //выключатель записи отдельных токов
        spatiotemporal_dep=1; //выключатель записи пространственно-
временных зависимостей
```

```
double
    Ti=5, //начало интервала интегрирования по времени
    Tf0=300, //максимальное значение времени
    Tf1=300, //максимальное значение времени в
интервале [itime1-|-itime2]
    JP0=0.005, //шаг по току
    JP1=0.001, //шаг по току в интервале Imore1-Imore2
    length=5, //длина контакта
    XP=0.05, //шаг по координате
    TP=XP/5, //шаг по времени
    IO=0.01, //начальное значение тока
    Next=0, //значение внешнего магнитного поля
    Imax=1.1, //максимальное значение тока
    Imore1=0.25, //начало интервала, при котором меняется шаг
по току
    Imore2=0.9, //конец интервала, при котором меняется шаг
по току
    beta=0.2, //параметр диссипации
    Itime1=0.8, //интервал для записи временной зависимости
(усредненной по координате)
    Itime2=0.8,
    time, //значение времени для записи
    int_Is_x, //интеграл от сверхпроводящего тока по координате при
фиксированном времени
    int_Iqr_x, //интеграл от квазичастичного тока по координате при
фиксированном времени
    int_Idisp_x, //интеграл от тока смещения по координате при
фиксированном времени
    Isav_x, //значение сверхпроводящего тока, усредненное
по координате
    Iqrav_x, //значение квазичастичного тока, усредненное
по координате
    Idispav_x, //значение тока смещения, усредненное по координате
    drhtav_x,
    int_Isav_t, //интеграл по времени от сверхпроводящего тока
(усредненного по координате)
    int_Iqrav_t, //интеграл по времени от квазичастичного тока
(усредненного по координате)
    int_Idispav_t, //интеграл по времени от тока смещения
(усредненного по координате)
    Isav, //среднее значение сверхпроводящего тока
    Iqrav, //среднее значение квазичастичного тока
    Idispav, //среднее значение тока смещения
    Isum, //сумма токов (параметр вводился для проверки расчета,
если Isum=I, то результат правильный)
```

```

int_V_x, //интеграл от напряжения по координате при
фиксированном времени
Vav_x, //значение напряжения, усредненное по координате
int_Vav_t, //интеграл по времени от напряжения
(усредненного по координате)
Vav, //среднее значение напряжения в отдельном контакте
I,JP,Tf;
I=I0; JP=JP0; Tf=Tf0; xN = 1 + length / XP;
tN = Tf / TP; ti=tN*Ti/Tf;

F=sizeof(Ix)/sizeof(double); //вычисление количества ячеек Ix
//создание динамических переменных
double
*ph,
*P1, *P2, *P3, *P4,
*dphx, *dphxx,
*V,
*V1, *V2, *V3, *V4,
*Is, *Iqp, *Idisp,
*V0;
P1 = new double [xN+2]; V1 = new double [xN+2];
P2 = new double [xN+2]; V2 = new double [xN+2];
P3 = new double [xN+2]; V3 = new double [xN+2];
P4 = new double [xN+2]; V4 = new double [xN+2];
ph = new double [xN+2]; V = new double [xN+2];
dphx = new double [xN+2]; dphxx = new double [xN+2];
Is = new double [xN+2];
Iqp = new double [xN+2];
Idisp = new double [xN+2];
V0 = new double [xN+2];

//начало процедуры создания файлов
FILE *cvc,*vt,
*fvxt, *fphxt, *fdphxt,
*fIsxt, *fIqpxt,*fIdispxt,*fdphxxt,
*fIs, *fIqp,*fIdisp,*fdpht,*fIsum;
//создание файлов
cvc=fopen("Voltage.dat","w");//создать файл для полной ВАХ
if(currents==1){
fIs=fopen("Is_j.dat","w");
fIqp=fopen("Iqp_j.dat","w");
fIdisp=fopen("Idisp_j.dat","w");
fIsum=fopen("Isum.dat","w");
}
if(time_dep==1){vt=fopen("Voltage_time.dat","w");}

```

```

if(spatiotemporal_dep==1){
for(f=0; f<F; ++f){
sprintf(str,"H(t-x)_I-%f.dat Ix[f]");
fdphxt=fopen(str,"w");
fclose(fdphxt);
sprintf(str,"Isurf(t-x)_I-%f.dat",Ix[f]);
fdphxxt=fopen(str,"w");
fclose(fdphxxt);
sprintf(str,"Phase(t-x)_I-%f.dat",Ix[f]);
fphxt=fopen(str,"w");
fclose(fphxt);
sprintf(str,"Voltage(t-x)_I-%f.dat",Ix[f]);
fvxt=fopen(str,"w");
fclose(fvxt);
}
if(currents==1){
for(f=0; f<F; ++f){
sprintf(str,"Is(t-x)_I-%f.dat",Ix[f]);
fIsxt=fopen(str,"w");
fclose(fIsxt);
sprintf(str,"Iqp(t-x)_I-%f.dat",Ix[f]);
fIqpxt=fopen(str,"w");
fclose(fIqpxt);
sprintf(str,"Idisp(t-x)_I-%f.dat",Ix[f]);
fIdispxt=fopen(str,"w");
fclose(fIdispxt);
}
}
}
//конец процедуры создания файлов

//нулевые начальные условия
if(currents==1){
int_Isav_t=0;
int_Iqpav_t=0;
int_Idispav_t=0;
int_Vav_t=0;
x=0;
do{ V[x]=0;
ph[x]=0;
}while(++x<=xN);
}

//начало цикла по току
do{

```

```

if((spatiotemporal_dep==1)&&(a==ax)){
  for(i=0; i<F; ++i){
    if(I<(Ix[i]+JP1/2)&&I>(Ix[i]-JP1/2)){f=i;}
  }
}
//начало цикла по времени
nt=0;
t=0;
do{//здесь сохраняется значение напряжения на предыдущем
шаге по времени
  if(currents==1){
    x=1;
    do{V0[x]=V[x];
      }while(++x<=xN);
  }
//начало процедуры Рунге-Кутта
//первые коэффициенты Рунге-Кутта
//левый край по координате
dphxx[1]=(2*(ph[2]-ph[1])-2*Hext*XP)/pow(XP,2);
V1[1]=TP*(dphxx[1]-beta*V[1]-sin(ph[1])+I);
P1[1]=TP*V[1];
//внутренние точки по координате
x=2;
do{dphxx[x]=(ph[x+1]-2*ph[x]+ph[x-1])/pow(XP,2);
  V1[x]=TP*(dphxx[x]-beta*V[x]-sin(ph[x])+I);
  P1[x]=TP*V[x];
}while(++x<=xN-1);
//правый край по координате
dphxx[xN]=(2*(ph[xN-1]-ph[xN])+2*Hext*XP)/pow(XP,2);
V1[xN]=TP*(dphxx[xN]-beta*V[xN]-sin(ph[xN])+I);
P1[xN]=TP*V[xN];
//вторые коэффициенты Рунге-Кутта
//левый край по координате
dphxx[1]=(2*((ph[2]+P1[2]/2)-(ph[1]+P1[1]/2))
-2*Hext*XP)/pow(XP,2);
V2[1]=TP*(dphxx[1]-beta*(V[1]+V1[1]/2)
-sin(ph[1]+P1[1]/2)+I);
P2[1]=TP*(V[1]+V1[1]/2);
//внутренние точки по координате
x=2;
do{dphxx[x]=((ph[x+1]+P1[x+1]/2)-2*(ph[x]+P1[x]/2)
+(ph[x-1]+P1[x-1]/2))/pow(XP,2);
  V2[x]=TP*(dphxx[x]-beta*(V[x]+V1[x]/2)
-sin(ph[x]+P1[x]/2)+I);
  P2[x]=TP*(V[x]+V1[x]/2);
}

```

```

}while(++x<=xN-1);
//правый край по координате
dphxx[xN]=(2*((ph[xN-1]+P1[xN-1]/2)-(ph[xN]+P1[xN]/2))
+2*Hext*XP)/pow(XP,2);
V2[xN]=TP*(dphxx[xN]-beta*(V[xN]+V1[xN]/2)
-sin(ph[xN]+P1[xN]/2)+I);
P2[xN]=TP*(V[xN]+V1[xN]/2);
//третьи коэффициенты Рунге-Кутта
//левый край по координате
dphxx[1]=(2*((ph[2]+P2[2]/2)-(ph[1]+P2[1]/2))
-2*Hext*XP)/pow(XP,2);
V3[1]=TP*(dphxx[1]-beta*(V[1]+V2[1]/2)
-sin(ph[1]+P2[1]/2)+I);
P3[1]=TP*(V[1]+V2[1]/2);
//внутренние точки по координате
x=2;
do{ dphxx[x]=((ph[x+1]+P2[x+1]/2)-2*(ph[x]+P2[x]/2)
+(ph[x-1]+P2[x-1]/2))/pow(XP,2);
  V3[x]=TP*(dphxx[x]-beta*(V[x]+V2[x]/2)
-sin(ph[x]+P2[x]/2)+I);
  P3[x]=TP*(V[x]+V2[x]/2);
}while(++x<=xN-1);
//правый край по координате
dphxx[xN]=(2*((ph[xN-1]+P2[xN-1]/2)-(ph[xN]+P2[xN]/2))
+2*Hext*XP)/pow(XP,2);
V3[xN]=TP*(dphxx[xN]-beta*(V[xN]+V2[xN]/2)
-sin(ph[xN]+P2[xN]/2)+I);
P3[xN]=TP*(V[xN]+V2[xN]/2);
//четвертые коэффициенты Рунге-Кутта
//левый край по координате
dphxx[1]=(2*((ph[2]+P3[2])-(ph[1]+P3[1]))
-2*Hext*XP)/pow(XP,2);
V4[1]=TP*(dphxx[1]-beta*(V[1]+V3[1])
-sin(ph[1]+P3[1])+I);
P4[1]=TP*(V[1]+V3[1]);
//внутренние точки по координате
x=2;
do{dphxx[x]=((ph[x+1]+P3[x+1])-2*(ph[x]+P3[x])
+(ph[x-1]+P3[x-1]))/pow(XP,2);
  V4[x]=TP*(dphxx[x]-beta*(V[x]+V3[x])
-sin(ph[x]+P3[x])+I);
  P4[x]=TP*(V[x]+V3[x]);
}while(++x<=xN-1);
//правый край по координате

```

```

dphxx[xN]=(2*((ph[xN-1]+P3[xN-1])-(ph[xN]+P3[xN])));
+2*Hext*XP);
V4[xN]=TP*(dphxx[xN]-beta*(V[xN]+V3[xN])
-sin(ph[xN]+P3[xN])+I);
P4[xN]=TP*(V[xN]+V3[xN]);
x=1;
do{
    ph[x]=ph[x]+(P1[x]+2*P2[x]+2*P3[x]+P4[x])/6;
    V[x]=V[x]+(V1[x]+2*V2[x]+2*V3[x]+V4[x])/6;
}while(++x<=xN);
//конец процедуры Рунге-Кутты
//начало усреднения по координате
//начало интегрирования по координате по методу Симпсона
int_V_x=V[1]+V[xN];
x=2;
do{int_V_x=int_V_x+((pow(-1,x)+3)*V[x]);
}while(++x<=xN-1);
int_V_x=int_V_x*(XP/3);
//конец интегрирования по координате
Vav_x=int_V_x/length; //усреднение по координате
//конец усреднения по координате
if (t>ti){int_Vav_t=Vav_x*TP+int_Vav_t;} //интегрирование по
времени
//начало процедуры вычисления отдельных токов через ДП
if(currents==1){
    x=1;
    do{//вычисление сверхпроводящего тока
        Is[x]=sin(ph[x]);
        //вычисление квазичастичного тока
        Iqp[x]=beta*V[x];
        //вычисление тока смещения
        Idisp[x]=(V[x]-V0[x])/TP;
    }while(++x<=xN);
    //начало усреднения по координате
    //начало интегрирования по координате по методу Симпсона
    int_Is_x=Is[1]+Is[xN];
    int_Iqp_x=Iqp[1]+Iqp[xN];
    int_Idisp_x=Idisp[1]+Idisp[xN];
    x=2;
    do{int_Is_x=int_Is_x+((pow(-1,x)+3)*Is[x]);
        int_Iqp_x=int_Iqp_x+((pow(-1,x)+3)*Iqp[x]);
        int_Idisp_x=int_Idisp_x+((pow(-1,x)+3)*Idisp[x]);
    }while(++x<=xN-1);
    int_Is_x=int_Is_x*(XP/3);
    int_Iqp_x=int_Iqp_x*(XP/3);

```

```

int_Idisp_x=int_Idisp_x*(XP/3);
//конец интегрирования по координате
//усреднение по координате
Isav_x=int_Is_x/length;
Iqpav_x=int_Iqp_x/length;
Idispav_x=int_Idisp_x/length;
//конец усреднения по координате
//интегрирование по времени
if (t>ti){
    int_Isav_t=int_Isav_t+Isav_x*TP;
    int_Iqpav_t=int_Iqpav_t+Iqpav_x*TP;
    int_Idispav_t=int_Idispav_t+Idispav_x*TP;
}
}
//конец процедуры вычисления отдельных токов через ДП
if((spatiotemporal_dep==1)&&(I<(Ix[f]+JP1/2))
&&(I>(Ix[f]-JP1/2))&&(a==ax)){
    //начало вычисления производной разности фаз
по координате
    //левый край по координате
    dphx[1]=(-3*ph[1]+4*ph[2]-ph[3])/(2*XP);
    //внутренние точки по координате
    x=2;
    do{dphx[x]=(ph[x+1]-ph[x-1])/(2*XP);
    }while(++x<=xN-1);
    //правый край по координате
    dphx[xN]=(3*ph[xN]-4*ph[xN-1]+ph[xN-2])/(2*XP);
    //конец вычисления производной разности фаз по координате
    //начало вычисления второй производной разности фаз
по координате
    //левый край по координате
    dphxx[1]=(-3*dphx[1]+4*dphx[2]-dphx[3])/(2*XP);
    //внутренние точки по координате
    x=2;
    do{dphxx[x]=(dphx[x+1]-dphx[x-1])/(2*XP);
    }while(++x<=xN-1);
    //правый край по координате
    dphxx[xN]=(3*dphx[xN]-4*dphx[xN-1]+dphx[xN-2])/(2*XP);
    //конец вычисления второй производной разности фаз
по координате
    if(t==nt){
        nt=nt+deltaT;
        sprintf(str,"H(t-x)_I-%f.dat",Ix[f]);
        fdphxt=fopen(str,"a");
        sprintf(str,"Isurf(t-x)_I-%f.dat",Ix[f]);

```

```

fdphxxt=fopen(str,"a");
sprintf(str,"Phase(t-x)_I-%f.dat",Ix[f]);
fphxt=fopen(str,"a");
sprintf(str,"Voltage(t-x)_I-%f.dat",Ix[f]);
fvxt=fopen(str,"a");
x=1;
nx=1;
do{
    if(x==nx){
        nx=nx+deltaX;
        fprintf(fdphxt,"% .15f\t",dphx[x]);
        fprintf(fdphxxt,"% .15f\t",dphxx[x]);
        fprintf(fphxt,"% .15f\t",ph[x]);
        fprintf(fvxt,"% .15f\t",V[x]);
    }
}while(++x<=xN);
fprintf(fdphxt,"\n");
fprintf(fdphxxt,"\n");
fprintf(fphxt,"\n");
fprintf(fvxt,"\n");
fclose(fdphxt);
fclose(fdphxxt);
fclose(fphxt);
fclose(fvxt);
if(currents==1){
    sprintf(str,"Is(t-x)_I-%f.dat",Ix[f]);
    fIsxt=fopen(str,"a");
    sprintf(str,"Iqp(t-x)_I-%f.dat",Ix[f]);
    fIqpxt=fopen(str,"a");
    sprintf(str,"Idisp(t-x)_I-%f.dat",Ix[f]);
    fIdispxt=fopen(str,"a");
    x=1;
    nx=1;
    do{
        if(x==nx){
            nx=nx+deltaX;
            fprintf(fIsxt,"% .15f\t",Is[x]);
            fprintf(fIqpxt,"% .15f\t",Iqp[x]);
            fprintf(fIdispxt,"% .15f\t",Idisp[x]);
        }
    }
}while(++x<=xN);
fprintf(fIsxt,"\n");
fprintf(fIqpxt,"\n");
fprintf(fIdispxt,"\n");
fclose(fIsxt);

```

```

        fclose(fIqpxt);
        fclose(fIdispxt);
    }
}
// начало вычисления временных зависимостей
if((time_dep==1)&&(I>(Itime1-JP1/2))
&&(I<(Itime2+JP1/2))&&(a==at)){
    tN=Tf1/TP;Tf=Tf1;
    //Recording time Formula
    //формула записываемого времени
    if(at==-1){time=t*TP-(TP*tN*(Itime2-I)*at)/JP;}
    if(at==1){time=t*TP+(TP*tN*(I-Itime1)*at)/JP;}
    fprintf(vt,"%f\t",time);
    fprintf(vt,"% .15f\t",Vav_x);
    fprintf(vt,"%f\t\n",I);
}
else{tN=Tf0/TP;Tf=Tf0;};
//Ending of time dependence calculation
//конец вычисления временных зависимостей
}while(++t<tN+1);
//конец цикла по времени
//начало записи среднего значения отдельных токов через ДП
if(currents==1){
    fprintf(fIs,"%f\t",I);
    fprintf(fIqp,"%f\t",I);
    fprintf(fIdisp,"%f\t",I);
    fprintf(fIsum,"%f\t",I);
    Isav=int_Isav_t/(Tf-Ti);
    int_Isav_t=0;
    Iqpav=int_Iqpav_t/(Tf-Ti);
    int_Iqpav_t=0;
    Idispav=int_Idispav_t/(Tf-Ti);
    int_Idispav_t=0;
    Isum=Idispav+Isav+Iqpav; //суммирование токов
    fprintf(fIs,"% .15f\t",Isav);
    fprintf(fIqp,"% .15f\t",Iqpav);
    fprintf(fIdisp,"% .15f\t",Idispav);
    fprintf(fIsum,"% .15f\t",Isum);
    fprintf(fIs,"\n");
    fprintf(fIqp,"\n");
    fprintf(fIdisp,"\n");
    fprintf(fIsum,"\n");
}
//конец записи среднего значения отдельных токов через ДП
//начало усреднения по времени

```



```

Vav=int_Vav_t/(Tf-Ti);
int_Vav_t=0;
//конец усреднения по времени
cout<<"\n\nI:"<I<"\t V:"<Vav;//вывод результатов на экран
//запись ВАХ
fprintf(cvc,"%f\t%.15f\n",I,Vav);
//условие для изменения направления тока
if (I>Imax){
    cout<<"\n\n Here is max of current so we go back<<endl;
    a=-1;
}
I=I+a*JP; //счетчик тока
if (I<0)break; //условие для остановки вычисления
if ((I<=Imore2+JP1/2)&&(I>=Imore1-JP1/2)&&(a==-1)){
    JP=JP1;}
else{JP=JP0;};
}while(I<=100);
//конец цикла по току
//здесь закрываются файлы
fclose(cvc);
if(time_dep==1){fclose(vt);}
if(currents==1){
    fclose(fIs);
    fclose(fIqp);
    fclose(fIdisp);
    fclose(fIsum);
}
// удаление динамических переменных
delete [] P1; delete [] V1; delete [] ph; delete [] V;
delete [] P2; delete [] V2; delete [] dphx; delete [] dphxx;
delete [] P3; delete [] V3;
delete [] P4; delete [] V4;
delete [] Is; delete [] Iqp; delete [] Idisp;
delete [] V0;
return(0);
}

```