

C332.3(04)

H-561



Учебно-  
методические  
пособия  
Учебно-научного  
центра ОИЯИ  
Дубна

УНЦ-2011-49

А. В. Нестеренко

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ФУНКЦИИ АДЛЕРА  
И ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННОЙ АННИГИЛЯЦИИ  
В АДРОНЫ

2011

C332.3(07)

H-561

А. В. Нестеренко

**ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ  
ФУНКЦИИ АДЛЕРА  
И ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННОЙ АННИГИЛЯЦИИ  
В АДРОНЫ**

*Учебное пособие*

Объединенный институт  
Дубна 2011  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА

Нестеренко А. В.

H56 Теоретическое описание функции Адлера и электрон-позитронной аннигиляции в адроны: Учебное пособие. — Дубна: ОИЯИ, 2011. — 144 с.

ISBN 978-5-9530-0310-0

В учебном пособии представлен метод теоретического описания процессов сильного взаимодействия, основывающийся на дисперсионных соотношениях. В частности, в рамках дисперсионного подхода в квантовой хромодинамике рассмотрено подробное вычисление функции Адлера и  $R$ -отношения электрон-позитронной аннигиляции в адроны. Приведено детальное описание эффектов, обусловленных продолжением результатов теории возмущений во времениподобную область, и эффектов, обусловленных ненулевой массой легчайшего адронного состояния. Учебное пособие также содержит подробное вычисление адронного тензора поляризации вакуума и бегущей константы связи сильного взаимодействия в рамках теории возмущений.

Для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся в физике элементарных частиц.

Nesterenko A. V.

Theoretical Description of the Adler Function and Electron-Positron Annihilation into Hadrons: Textbook. — Dubna: JINR, 2011. — 144 p.

ISBN 978-5-9530-0310-0

The textbook presents the method of theoretical description of strong interaction processes, which originates in the dispersion relations. Specifically, the calculation of the Adler function and  $R$ -ratio of electron-positron annihilation into hadrons within Dispersive approach to Quantum Chromodynamics is presented and discussed in detail. The effects due to continuation of perturbative results into timelike domain as well as the effects due to nonvanishing mass of the lightest hadronic state are thoroughly studied. The textbook also contains perturbative descriptions of hadronic vacuum polarization tensor and strong running coupling.

For graduate and postgraduate students specializing in elementary particle physics.

ISBN 978-5-9530-0310-0

© Объединенный институт  
ядерных исследований, 2011

## Оглавление

Предисловие	5
Введение	7
Глава 1 Электрон-позитронная аннигиляция в адроны	11
1.1 Сечение процесса $e^+e^-$ -аннигиляции в адроны	11
1.2 Адронная функция поляризации вакуума	14
1.3 $R$ -отношение $e^+e^-$ -аннигиляции в адроны	17
Глава 2 Функция Адлера	23
2.1 Дисперсионное соотношение для функции Адлера	23
2.2 Функция Адлера в рамках теории возмущений	26
2.3 Экспериментальное предсказание для $D(Q^2)$	36
Глава 3 Пертурбативный инвариантный заряд КХД	39
3.1 Пертурбативная $\beta$ -функция КХД	39
3.2 Однопетлевая бегущая константа связи КХД	41
3.3 Инвариантный заряд КХД в высших петлевых приближениях	46
Глава 4 Дисперсионный подход в КХД	55
4.1 Интегральные представления для $D(Q^2)$ и $R(s)$ ( $m_\pi = 0$ )	55
4.2 Вычисление функции Адлера и $R$ -отношения	64
4.3 Интегральные представления для $D(Q^2)$ и $R(s)$ ( $m_\pi \neq 0$ )	77

Приложение I Пертурбативные выражения для $D(Q^2)$ и $R(s)$	89
Приложение II Пертурбативная спектральная функция	93
Список литературы	103
Программа курса лекций "Квантовая хромодинамика"	121
Задачи к курсу лекций "Квантовая хромодинамика"	125

## Предисловие

Изучение процессов сильного взаимодействия во времениподобной области является одним из принципиально важных направлений исследований в современной адронной физике. Актуальность таких исследований обусловлена тем, что теоретическое описание ряда процессов сильного взаимодействия во времениподобной области не требует привлечения феноменологических моделей адронизации. Этот факт позволяет извлекать значения некоторых важных параметров теории из экспериментальных данных модельно-независимым способом, что, в свою очередь, играет определяющую роль при проверке самосогласованности квантовой хромодинамики. Последовательный анализ процессов сильного взаимодействия во времениподобной области может быть выполнен только с привлечением соответствующих дисперсионных соотношений. В современной научной литературе данной тематике уделяется значительное внимание. Однако учебная литература, содержащая полное систематическое изложение рассматриваемых вопросов, практически отсутствует.

Данное учебное пособие содержит подробное изложение метода теоретического описания процессов сильного взаимодействия, основывающегося на дисперсионных соотношениях. При этом особое внимание уделяется рассмотрению вопросов, связанных с применением дисперсионного подхода в различных задачах современной физики элементарных частиц. В частности, учебное пособие включает в себя детальное вычисление функции Адлера и  $R$ -отношения электрон-позитронной аннигиляции в адроны в рамках дисперсионного подхода в квантовой хромодинамике, а также содержит подробное описание эффектов, обусловленных продолжением результатов теории возму-

щений во времени подобную область, и эффектов, обусловленных ненулевой массой легчайшего адронного состояния.

В основу данного учебного пособия были положены курсы лекций, читаемых автором на протяжении нескольких лет для студентов 6-го курса кафедры фундаментальных и прикладных проблем физики микромира факультета общей и прикладной физики Московского физико-технического института (учебно-научный центр Объединенного института ядерных исследований, Дубна) и для студентов 5-го курса кафедры теоретической физики физического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, а также ряд оригинальных работ автора. Учебное пособие является переработанным и расширенным вариантом работы [1].

Учебное пособие предназначено для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся в области физики элементарных частиц. Пособие может использоваться как дополнение к стандартным курсам по квантовой теории поля [2–14], квантовой хромодинамике [15–20] и теории элементарных частиц [21–29]. Приведенный в пособии обширный и достаточно полный список оригинальных статей, обзоров и монографий может быть полезным для исследователей, работающих в данной области.

## Введение

В основе теоретического описания процессов сильного взаимодействия лежит квантовая неабелева теория поля — квантовая хромодинамика (КХД). Эта теория базируется на представлении о кварках, составных частях адронов, и глюонах, квантах калибровочного векторного поля, переносящего взаимодействие между кварками. Данные объекты обладают ключевым для адронной физики квантовым числом, которое было введено в середине 1960-х годов в работах [30, 31] и впоследствии названо цветом<sup>1</sup>. Теоретические и экспериментальные исследования выявили две характерные особенности сильных взаимодействий. Во-первых, при увеличении энергии процесса имеет место “уменьшение” интенсивности взаимодействия между кварками внутри адронов. Другими словами, при больших характерных переданных импульсах  $Q^2$  инвариантный заряд теории<sup>2</sup>  $\alpha_s(Q^2)$  стремится к нулю. Это явление получило название асимптотической свободы. Во-вторых, кварки и глюоны до настоящего времени не были экспериментально обнаружены в свободном состоянии. Данное явление получило название конфайнмента цвета. В свою очередь, эти два явления связаны с адронной динамикой в различных областях энергий. В первом случае это так называемая ультрафиолетовая область, характеризуемая большими значениями кинематических переменных. Эта область соответствует малым межкварковым расстояниям, а именно  $r \lesssim 0.1$  фм ( $1 \text{ фм} = 10^{-15} \text{ м}$ ). Конфайнмент цвета, на-

<sup>1</sup> В греческом языке “цвет” обозначается словом “хрома” (“ $\chi\rho\omega\mu\alpha$ ”).

<sup>2</sup> В некоторых случаях  $\alpha_s(Q^2) = g^2(Q^2)/(4\pi)$  также называется эффективной (бегущей) “константой” связи квантовой хромодинамики. Здесь нижний индекс “s” указывает на то, что бегущая константа связи  $\alpha_s(Q^2)$  характеризует интенсивность сильного взаимодействия.

против, связан с низкоэнергетической, или инфракрасной, областью, которая соответствует большим характерным межкварковым расстояниям:  $r \gtrsim 1$  фм.

Асимптотическая свобода в неабелевой калибровочной теории поля была открыта<sup>3</sup> в начале 1970-х годов в работах [32–34]. Это открытие послужило основой для широкого применения теории возмущений в анализе процессов сильного взаимодействия в асимптотической ультрафиолетовой области. Однако результаты пертурбативных вычислений в квантовой хромодинамике имеют ряд принципиальных ограничений. Действительно, весь формализм теории возмущений в квантовой теории поля основывается на предположении малости величины соответствующего инвариантного заряда. Для бегущей константы связи сильного взаимодействия  $\alpha_s(Q^2)$  это условие выполняется только в области больших энергий. В инфракрасной области квантовая хромодинамика выходит из режима слабой связи, и теория возмущений становится неприменимой для исследования процессов сильного взаимодействия. Таким образом, анализ адронной динамики в области малых энергий всецело остается вне рамок теории возмущений и может быть выполнен только в рамках непертурбативных подходов.

Теоретическое описание процессов сильного взаимодействия в инфракрасной области остается одной из актуальных проблем физики элементарных частиц на протяжении уже многих лет. Для исследования непертурбативных аспектов сильного взаимодействия широко применяются такие методы, как струнные модели адронов (см. книгу [35], раздел 14.2 книги [28], а также работу [36]), правила сумм [37–45], феноменологические потенциальные модели кварк-антикваркового взаимодействия [46–51], модели мешков [52–54], киральная теория возмущений [55–58] и расчеты на решетке [59–64]. Одним из важных источников непертурбативной информации об адронной динамике в области малых энергий также являются дисперсионные соотношения, которые играют ключевую роль в теоретическом анализе процессов физики элементарных частиц (см., например, главу 10

<sup>3</sup> Автор благодарен Prof. G. 't Hooft (Utrecht University, the Netherlands) за обсуждение этого вопроса и подробные комментарии.

книги [2], а также книги [65–70]). В частности, теоретическое описание процессов сильного взаимодействия во времениподобной области может быть выполнено только с привлечением соответствующих дисперсионных соотношений.

Основной целью данного учебного пособия является детальное изложение метода теоретического описания процессов сильного взаимодействия, основывающегося на дисперсионных соотношениях. При этом особое внимание будет уделено подробному анализу вопросов, связанных с применением дисперсионного подхода в различных задачах современной физики элементарных частиц, а также непертурбативным аспектам рассматриваемого подхода.

Данное пособие имеет следующую структуру. Глава 1 посвящена описанию процесса электрон-позитронной аннигиляции в адроны. В частности, в разделе 1.1 рассмотрена кинематика этого процесса, а в разделе 1.2 приведен подробный вывод дисперсионного соотношения для адронной функции поляризации вакуума. В разделе 1.3 дано определение  $R$ -отношения электрон-позитронной аннигиляции в адроны, приведены соответствующие экспериментальные данные, а также подробно рассмотрено вычисление сечения электрон-позитронной аннигиляции в мюон и антимюон. Глава 2 посвящена функции Адлера  $D(Q^2)$ . А именно в разделе 2.1 дано определение функции Адлера и выведено соответствующее дисперсионное соотношение, а в разделе 2.2 приведено вычисление адронного тензора поляризации вакуума и функции  $D(Q^2)$  в рамках теории возмущений. Экспериментальное предсказание для функции Адлера рассмотрено в разделе 2.3. Глава 3 посвящена описанию инвариантного заряда квантовой хромодинамики в рамках теории возмущений. В частности, в разделе 3.1 рассмотрена пертурбативная аппроксимация  $\beta$ -функции квантовой хромодинамики. В разделе 3.2 дано решение уравнения ренормализационной группы для бегущей константы связи сильного взаимодействия в однопетлевом приближении и приведено обсуждение ее свойств. В разделе 3.3 рассмотрены решения уравнения ренормализационной группы для инвариантного заряда квантовой хромодинамики на высших петлевых уровнях. Глава 4 посвящена теоретическому описанию функ-

ции Адлера и  $R$ -отношения электрон-позитронной аннигиляции в адроны в рамках дисперсионного подхода в квантовой хромодинамике. А именно в разделе 4.1 приведен детальный вывод интегральных представлений для функций  $D(Q^2)$  и  $R(s)$  в безмассовом приближении. В разделе 4.2 рассмотрено вычисление соответствующей спектральной функции и дано подробное описание эффектов, обусловленных продолжением пертурбативных результатов во времениподобную область. В разделе 4.3 приведен вывод интегральных представлений для функции Адлера и  $R$ -отношения электрон-позитронной аннигиляции в адроны в случае ненулевой массы легчайшего адронного состояния, а также представлено вычисление функций  $D(Q^2)$  и  $R(s)$  в рамках рассматриваемого подхода. В приложения вынесен вспомогательный материал. В частности, в приложении I даны пертурбативные выражения для функции Адлера и  $R$ -отношения электрон-позитронной аннигиляции в адроны. В приложении II приведены явные выражения для пертурбативной спектральной функции, используемой при построении функций  $D(Q^2)$  и  $R(s)$  в рамках дисперсионного подхода в квантовой хромодинамике. Учебное пособие также содержит полную программу вышеупомянутого курса лекций и список задач.

## Глава 1

### Электрон-позитронная аннигиляция в адроны

Исследование процесса электрон-позитронной аннигиляции в адроны играет существенную роль в современной физике элементарных частиц. Действительно, теоретическое описание этого процесса не требует привлечения феноменологических моделей адронизации. Этот факт позволяет извлекать значения ряда важных параметров теории из соответствующих экспериментальных данных модельно-независимым способом, что, в свою очередь, играет определяющую роль при проверке самосогласованности квантовой хромодинамики.

#### 1.1 Сечение процесса $e^+e^-$ -аннигиляции в адроны

В лидирующем порядке теории возмущений по константе связи электромагнитного взаимодействия  $\alpha_{\text{em}} = e^2/(4\pi)$  процесс электрон-позитронной аннигиляции в адроны определяется диаграммой, представленной на рисунке 1.1. Данный процесс может протекать как через промежуточный фотон (этот вклад является доминирующим), так и через промежуточный  $Z^0$ -бозон. Таким образом, матричный элемент рассматриваемого процесса может быть представлен в следующем виде:

$$M_{\text{if}} = i \bar{v}(p_2, \sigma_2) e \gamma^\mu u(p_1, \sigma_1) \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \langle \Gamma | J^\nu(q) | 0 \rangle. \quad (1.1)$$

В этом уравнении  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  обозначает метрический тензор,  $e$  — заряд электрона,  $\gamma_\mu$  — матрица Дирака,  $u(p_1, \sigma_1)$  и  $v(p_2, \sigma_2)$

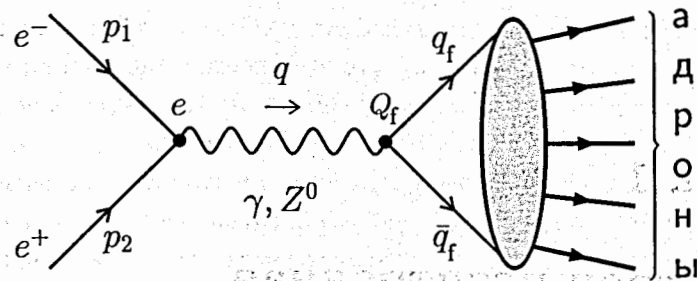


Рисунок 1.1. Диаграмма процесса электрон-позитронной аннигиляции в адроны

представляют собой дираковские спиноры электрона с импульсом  $p_1$  и спином  $\sigma_1$  и позитрона с импульсом  $p_2$  и спином  $\sigma_2$  соответственно,  $\Gamma$  обозначает конечное адронное состояние,  $J_\nu = \sum_{f=1}^{n_f} \bar{q}_f Q_f \gamma_\nu q_f$ : является электромагнитным током кварков,  $Q_f$  обозначает заряд кварка аромата  $f$  в единицах заряда позитрона,  $n_f$  — число активных ароматов<sup>4</sup>, а  $q^2 = (p_1 + p_2)^2 \equiv s > 0$  является энергией процесса аннигиляции в системе центра масс. В уравнении (1.1) выражение для фотонного пропагатора соответствует фейнмановской калибровке.

Полное сечение процесса электрон-позитронной аннигиляции в адроны, которое пропорционально просуммированному по всем конечным адронным состояниям квадрату матричного элемента (1.1), может быть представлено следующим образом (см., например, раздел 4.1 книги [16]):

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адроны}; s) = 8\pi^2 \frac{\alpha_{\text{em}}^2}{s^3} L_{\mu\nu} H_{\mu\nu}. \quad (1.2)$$

В этом уравнении  $L_{\mu\nu}$  обозначает лептонный тензор

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} \bar{v}(p_2, \sigma_2) \gamma_\mu u(p_1, \sigma_1) [\bar{v}(p_2, \sigma_2) \gamma_\nu u(p_1, \sigma_1)]^* = \\ &= \frac{1}{2} [q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2 - (p_1 - p_2)_\mu (p_1 - p_2)_\nu], \end{aligned} \quad (1.3)$$

<sup>4</sup> Числом активных ароматов называется число кварков, масса которых много меньше, чем характерная энергия рассматриваемого процесса (см. главу 3, а также работы [71; 72] и раздел 3.8 в книге [16]).

а  $H_{\mu\nu}$  — адронный тензор ( $p_\Gamma$  обозначает импульс конечного адронного состояния  $\Gamma$ )

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu}(q^2) &= (2\pi)^4 \sum_{\Gamma} \delta(p_1 + p_2 - p_\Gamma) \langle 0 | J_\mu(-q) | \Gamma \rangle \langle \Gamma | J_\nu(q) | 0 \rangle = \\ &= \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | [J_\mu(x), J_\nu(0)] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Отметим, что уравнение (1.3) было получено в безмассовом приближении, а при выводе уравнения (1.4) было использовано условие полноты набора адронных состояний  $\sum_{\Gamma} |\Gamma\rangle \langle \Gamma| = 1$ . Следует также упомянуть о том, что при рассмотрении процесса электрон-позитронной аннигиляции в адроны предполагается, что рождение кварк-антикварковой пары из виртуального фотона и ее последующая адронизация являются хорошо разделенными по времени процессами, протекающими независимо друг от друга.

Здесь удобно ввести так называемый адронный тензор поляризации вакуума, который определяется следующим образом:

$$\Pi_{\mu\nu}(q^2) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ J_\mu(x) J_\nu(0) \} | 0 \rangle \equiv \frac{i}{12\pi^2} (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \Pi(q^2). \quad (1.5)$$

В этом уравнении  $\Pi(q^2)$  обозначает адронную функцию поляризации вакуума. В силу того, что скалярная часть адронного тензора  $H_{\mu\nu}(q^2)$  (1.4) пропорциональна скачку мнимой части функции  $\Pi(q^2)$  на физическом разрезе, полное сечение процесса электрон-позитронной аннигиляции в адроны (1.2) может быть выражено в терминах  $\Pi(q^2)$  (1.5).

Необходимо подчеркнуть, что эксперименты по электрон-позитронной аннигиляции в адроны играют решающую роль при проверке самосогласованности пертурбативной квантовой хромодинамики (см., например, главу 3 книги [73] и работы [74, 75]). В первую очередь, это обусловлено тем, что теоретическое описание рассматриваемого процесса не требует привлечения феноменологических моделей адронизации. Следует также отметить, что специфика процесса электрон-позитронной аннигиляции в адроны накладывает



вает жесткое кинематическое ограничение<sup>5</sup> как на адронный тензор  $H_{\mu\nu}(q^2)$  (1.4), так и на адронную функцию поляризации вакуума  $\Pi(q^2)$  (1.5). А именно  $H_{\mu\nu}(q^2)$  существует только для энергий, превышающих порог рождения легчайшего адронного состояния  $q^2 \geq 4m_\pi^2$ . В частности,  $H_{\mu\nu}(q^2) \equiv 0$  для подпороговых значений энергии  $q^2 < 4m_\pi^2$  (здесь и далее  $m_\pi \simeq 139.57$  МэВ обозначает массу заряженного  $\pi$ -мезона [79]). Отсюда следует, что адронная функция поляризации вакуума  $\Pi(q^2)$  (1.5) является аналитической функцией во всей комплексной  $q^2$ -плоскости с разрезом  $q^2 \geq 4m_\pi^2$  вдоль положительной части действительной оси  $\text{Re } q^2$  (см. рисунок 1.2). Это свойство функции  $\Pi(q^2)$  (1.5) приводит к ряду важных непертурбативных ограничений на функцию Адлера  $D(Q^2)$  (2.1) и на так называемое  $R$ -отношение электрон-позитронной аннигиляции в адроны  $R(s)$  (1.13) (см. разделы 2.1 и 1.3 соответственно). В свою очередь, эти ограничения играют существенную роль при исследовании рассматриваемых величин в области малых энергий (см. также работы [80–82] и главу 4 далее).

## 1.2 Адронная функция поляризации вакуума

Перейдем к выводу дисперсионного соотношения для адронной функции поляризации вакуума  $\Pi(q^2)$  (1.5). Для достижения этой цели будем использовать формулу Коши. А именно для функции  $f(x)$  комплексной переменной  $x$ , аналитической в  $n$ -связной области  $G$  и непрерывной в замкнутой области  $\bar{G}$ , выполняется соотношение

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - x} d\xi, \quad (1.6)$$

где  $x$  — внутренняя точка области  $G$ , а  $C$  — граница этой области, проходимая так, что область  $G$  остается все время слева (см., например, книгу [83]). В силу того, что  $\Pi(q^2)$  является логарифмически растущей функцией своего аргумента при  $q^2 \rightarrow \infty$  (см. уравнение (2.39)

<sup>5</sup> Детальное обсуждение этого вопроса приведено в разделах 5 и 35 книги [76], а также в работах [77, 78].

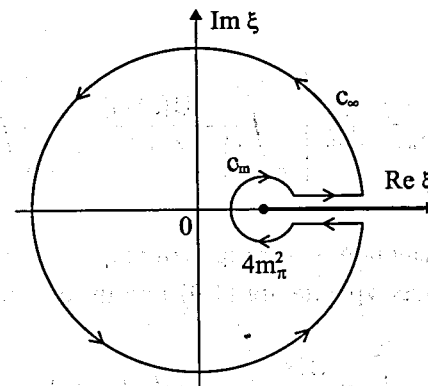


Рисунок 1.2. Контур интегрирования в комплексной  $\xi$ -плоскости в уравнении (1.8). Физический разрез  $\xi \geq 4m_\pi^2$  адронной функции поляризации вакуума  $\Pi(\xi)$  (1.5) показан вдоль положительной части действительной оси  $\text{Re } \xi$

далее), вместо уравнения (1.6) удобно использовать формулу Коши с вычитанием

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2\pi i} (x - x_0) \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - x)(\xi - x_0)} d\xi, \quad (1.7)$$

где  $x_0$  — некоторая внутренняя точка области  $G$ .

Как уже было упомянуто в предыдущем разделе, адронная функция поляризации вакуума  $\Pi(q^2)$  (1.5) имеет только правый разрез  $q^2 \geq 4m_\pi^2$  вдоль положительной части действительной оси  $\text{Re } q^2$  в комплексной  $q^2$ -плоскости. Следовательно, формула Коши (1.7) для функции  $\Pi(q^2)$  (1.5) с вычитанием в некоторой точке  $q_0^2$  принимает вид

$$\Pi(q^2) = \Pi(q_0^2) + \frac{1}{2\pi i} (q^2 - q_0^2) \int_C \frac{\Pi(\xi)}{(\xi - q^2)(\xi - q_0^2)} d\xi, \quad (1.8)$$

где контур интегрирования  $C$  представлен на рисунке 1.2. Так как интегрирование вдоль окружностей бесконечно большого ( $C_\infty$ ) и бесконечно малого ( $C_m$ ) радиусов не дает вклада в уравнение (1.8), адронная функция поляризации вакуума  $\Pi(q^2)$  может быть представлена следу-

ющим образом:

$$\Pi(q^2) = \Pi(q_0^2) + \frac{q^2 - q_0^2}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \left[ \int_{4m_\pi^2 + i\varepsilon}^{\infty + i\varepsilon} \frac{\Pi(\xi) d\xi}{(\xi - q^2)(\xi - q_0^2)} + \int_{\infty - i\varepsilon}^{4m_\pi^2 - i\varepsilon} \frac{\Pi(\xi) d\xi}{(\xi - q^2)(\xi - q_0^2)} \right]. \quad (1.9)$$

После замены переменной интегрирования  $\xi = s + i\varepsilon$  первое слагаемое в квадратных скобках уравнения (1.9) принимает вид

$$\int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{\Pi(s + i\varepsilon)}{(s - q^2)(s - q_0^2)} ds + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (1.10)$$

Аналогично, второе слагаемое в квадратных скобках уравнения (1.9) с помощью замены переменной  $\xi = s - i\varepsilon$  может быть представлено следующим образом:

$$-\int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{\Pi(s - i\varepsilon)}{(s - q^2)(s - q_0^2)} ds + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (1.11)$$

Таким образом, дисперсионное соотношение (1.9) для адронной функции поляризации вакуума  $\Pi(q^2)$  (1.5) с вычитанием в точке  $q_0^2$  принимает вид

$$\Pi(q^2) = \Pi(q_0^2) + (q^2 - q_0^2) \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{R(s)}{(s - q^2)(s - q_0^2)} ds, \quad (1.12)$$

где

$$R(s) \equiv \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} [\Pi(s + i\varepsilon) - \Pi(s - i\varepsilon)]. \quad (1.13)$$

Следует отметить, что для тех функций  $\Pi(\xi)$ , для которых выполняется соотношение  $\Pi(\xi^*) = \Pi^*(\xi)$ , уравнение (1.13) может быть также представлено в виде

$$R(s) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \Pi(s + i\varepsilon). \quad (1.14)$$

### 1.3 $R$ -отношение $e^+e^-$ -аннигиляции в адроны

Полученная в предыдущем разделе величина  $R(s)$  (1.13) может быть отождествлена с так называемым  $R$ -отношением электрон-позитронной аннигиляции в адроны, которое измеряется экспериментально:

$$R(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адроны}; s)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-; s)}. \quad (1.15)$$

Правая часть этого уравнения представляет собой отношение<sup>6</sup> полного сечения рассматриваемого процесса по сильному каналу (1.2) к сечению электрон-позитронной аннигиляции по электрослабому каналу в мюон и антимюон, см. рисунок 1.3.

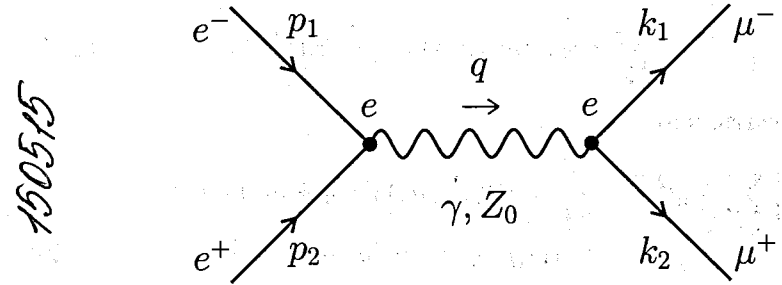


Рисунок 1.3. Диаграмма процесса электрон-позитронной аннигиляции по электрослабому каналу

Матричный элемент процесса электрон-позитронной аннигиляции в мюон и антимюон имеет вид

$$M_{if} = i \bar{u}^{(\mu)}(k_1, \sigma_1) \gamma^\mu v^{(\mu)}(k_2, \sigma_2) \frac{e^2}{(p_1 + p_2)^2} \bar{v}^{(e)}(p_2, \sigma_2') \gamma_\mu u^{(e)}(p_1, \sigma_1'), \quad (1.16)$$

где  $u^{(l)}(q_i, \lambda_i)$  и  $v^{(l)}(q_j, \lambda_j)$  обозначают дираковские спиноры лептона  $l^-$  с импульсом  $q_i$  и спином  $\lambda_i$  и антилептона  $l^+$  с импульсом  $q_j$  и спином  $\lambda_j$  соответственно. Сечение рассматриваемого процесса пропорционально квадрату матричного элемента (1.16), который может быть

<sup>6</sup>Здесь подразумевается, что оба сечения в правой части уравнения (1.15) соответствуют лидирующему порядку теории возмущений по константе связи электромагнитного взаимодействия  $\alpha_{em} = e^2/(4\pi)$ .

представлен следующим образом:

$$|M_{if}|^2 = \frac{e^4}{s^2} \bar{v}^{(\mu)}(k_2, \sigma_2) \gamma^\nu u^{(\mu)}(k_1, \sigma_1) \bar{u}^{(\mu)}(k_1, \sigma_1) \gamma^\mu v^{(\mu)}(k_2, \sigma_2) \times \\ \times \bar{u}^{(e)}(p_1, \sigma'_1) \gamma_\nu v^{(e)}(p_2, \sigma'_2) \bar{v}^{(e)}(p_2, \sigma'_2) \gamma_\mu u^{(e)}(p_1, \sigma'_1), \quad (1.17)$$

где  $s = q^2 = (p_1 + p_2)^2$ .

Для случая неполяризованных частиц квадрат матричного элемента (1.17) необходимо просуммировать по спинам конечных состояний и усреднить по спинам начальных состояний. Воспользовавшись соотношениями

$$\sum_{\sigma} u_{\alpha}(p, \sigma) \bar{u}^{\beta}(p, \sigma) = (\hat{p} + m)_{\alpha}^{\beta}, \quad (1.18)$$

$$\sum_{\sigma} v_{\alpha}(p, \sigma) \bar{v}^{\beta}(p, \sigma) = (\hat{p} - m)_{\alpha}^{\beta}, \quad (1.19)$$

можно показать, что

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |M_{if}|^2 = \frac{e^4}{4s^2} \text{Tr}[(\hat{k}_2 - m_{\mu}) \gamma^{\nu} (\hat{k}_1 + m_{\mu}) \gamma^{\mu}] \times \\ \times \text{Tr}[(\hat{p}_1 + m_e) \gamma_{\nu} (\hat{p}_2 - m_e) \gamma_{\mu}], \quad (1.20)$$

где  $m_e \simeq 0.511$  МэВ,  $m_{\mu} \simeq 105.66$  МэВ [79]. Принимая во внимание, что

$$\text{Tr}(\gamma_{\mu} \gamma_{\nu}) = 4g_{\mu\nu}, \quad (1.21)$$

$$\text{Tr}(\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \gamma_{\rho} \gamma_{\sigma}) = 4(g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}), \quad (1.22)$$

$$\text{Tr} \left[ \prod_{j=1}^{2r+1} \gamma_{\mu_j} \right] = 0, \quad (1.23)$$

где  $r = 0, 1, 2, 3, \dots$  — целое неотрицательное число (см. также раздел 2.2), представим сомножители в правой части уравнения (1.20) следующим образом:

$$\text{Tr}[(\hat{k}_2 - m_{\mu}) \gamma^{\nu} (\hat{k}_1 + m_{\mu}) \gamma^{\mu}] = 4[k_1^{\mu} k_2^{\nu} + k_2^{\mu} k_1^{\nu} - (k_1 k_2) g^{\mu\nu} - m_{\mu}^2 g^{\mu\nu}], \quad (1.24)$$

$$\text{Tr}[(\hat{p}_1 + m_e) \gamma_{\nu} (\hat{p}_2 - m_e) \gamma_{\mu}] = 4[p_{1\mu} p_{2\nu} + p_{2\mu} p_{1\nu} - (p_1 p_2) g_{\mu\nu} - m_e^2 g_{\mu\nu}]. \quad (1.25)$$

Таким образом, выражение (1.20) принимает вид

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |M_{if}|^2 = \frac{8e^4}{s^2} [(p_1 k_1)(p_2 k_2) + (p_1 k_2)(p_2 k_1) + \\ + m_e^2 (k_1 k_2) + m_{\mu}^2 (p_1 p_2) + 2m_e^2 m_{\mu}^2]. \quad (1.26)$$

Дальнейшие вычисления удобно проводить в системе центра масс. В этом случае 4-импульсы частиц, участвующих в рассматриваемом процессе, имеют вид

$$p_1 = (E, \vec{p}), \quad p_2 = (E, -\vec{p}), \quad k_1 = (E, \vec{k}), \quad k_2 = (E, -\vec{k}). \quad (1.27)$$

При этом

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (k_1 + k_2)^2 = 4E^2, \quad (1.28)$$

$$\vec{p}^2 = \frac{s}{4} \left(1 - \frac{4m_e^2}{s}\right), \quad \vec{k}^2 = \frac{s}{4} \left(1 - \frac{4m_{\mu}^2}{s}\right), \quad (1.29)$$

$$(p_1 p_2) = E^2 + \vec{p}^2 = \frac{s}{2} - m_e^2, \quad (k_1 k_2) = E^2 + \vec{k}^2 = \frac{s}{2} - m_{\mu}^2, \quad (1.30)$$

$$(p_1 k_1) = (p_2 k_2) = E^2 - \vec{p} \vec{k} = \frac{s}{4} \left(1 - \cos \theta \sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{s}} \sqrt{1 - \frac{4m_{\mu}^2}{s}}\right), \quad (1.31)$$

$$(p_1 k_2) = (p_2 k_1) = E^2 + \vec{p} \vec{k} = \frac{s}{4} \left(1 + \cos \theta \sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{s}} \sqrt{1 - \frac{4m_{\mu}^2}{s}}\right), \quad (1.32)$$

где  $\theta$  обозначает угол между импульсом электрона  $\vec{p}$  и импульсом мюона  $\vec{k}$ . В этом случае уравнение (1.26) может быть представлено следующим образом:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |M_{if}|^2 = e^4 \left[1 + \cos^2 \theta \left(1 - \frac{4m_e^2}{s}\right) \left(1 - \frac{4m_{\mu}^2}{s}\right) + \frac{4}{s} (m_e^2 + m_{\mu}^2)\right]. \quad (1.33)$$

В системе центра масс дифференциальное сечение рассматриваемого процесса имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{s} \frac{|\vec{k}|}{|\vec{p}|} \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |M_{if}|^2 = \frac{e^4}{(4\pi)^2} \frac{1}{4s} \frac{\sqrt{1 - \frac{4m_{\mu}^2}{s}}}{\sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{s}}} \times \\ \times \left[1 + \cos^2 \theta \left(1 - \frac{4m_e^2}{s}\right) \left(1 - \frac{4m_{\mu}^2}{s}\right) + \frac{4}{s} (m_e^2 + m_{\mu}^2)\right]. \quad (1.34)$$

В безмассовом пределе ( $m_e = 0, m_\mu = 0$ ) это уравнение может быть представлено следующим образом

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha_{em}^2}{4s} (1 + \cos^2 \theta). \quad (1.35)$$

При этом полное сечение процесса электрон-позитронной аннигиляции в мюон и антимюон принимает вид

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-; s) = \frac{\alpha_{em}^2}{4s} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 (1 + \cos^2 \theta) d\cos \theta = \frac{4\pi \alpha_{em}^2}{3s}. \quad (1.36)$$

Необходимо подчеркнуть, что полученное уравнение (1.36) применимо только для энергий  $4m_\mu^2 \ll s \ll M_Z^2$ . Для энергий  $s \sim M_Z^2$  необходимо дополнительно рассматривать процесс электрон-позитронной аннигиляции в мюон и антимюон, протекающий через  $Z^0$ -бозон, см. рисунок 1.3.

В асимптотической ультрафиолетовой области (при  $s \rightarrow \infty$ ) эффекты, обусловленные массами частиц, участвующих в процессах, представленных на рисунках 1.1 и 1.3, не играют существенной роли. В этом случае единственное различие между сечениями вышеупомянутых процессов заключается в произведении двух факторов:

$$R^{(0)}(s) = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2, \quad s \rightarrow \infty. \quad (1.37)$$

В этом уравнении фактор  $N_c = 3$  учитывает тот факт, что каждый кварк может находиться в трех цветовых состояниях, а факторы  $Q_f^2$  учитывают различие в электрических зарядах кварка аромата  $f$  и мюона.

Уравнение (1.37) представляет собой так называемое “предсказание партонной модели” для  $R$ -отношения (1.15) (см. работу [84] и разделы 5 и 35 книги [76]). Полный вывод уравнения (1.37) включает в себя вычисление адронной функции поляризации вакуума  $\Pi(q^2)$  (1.5) и функции Адлера  $D(Q^2)$  (2.1) в лидирующем порядке теории возмущений (выражения (2.39) и (2.40) соответственно) и последующее

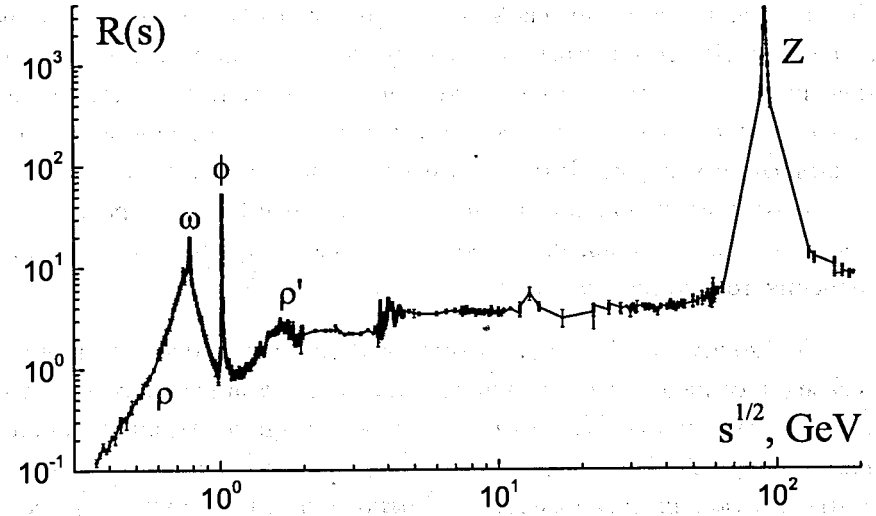


Рисунок 1.4. Экспериментальные данные [79] по  $R$ -отношению электрон-позитронной аннигиляции в адроны (1.15)

продолжение полученных результатов во времениподобную область<sup>7</sup> (см. уравнения (4.8)–(4.10) далее). Для детального сравнения теоретического предсказания для  $R$ -отношения электрон-позитронной аннигиляции в адроны с соответствующими экспериментальными данными в области умеренных энергий (см. рисунок 1.4) необходимо провести вычисление вкладов высших порядков теории возмущений по константе связи сильного взаимодействия в адронную функцию поляризации вакуума  $\Pi(q^2)$  (1.5). Подробное изложение данных вопросов приведено в главах 2 и 4.

Необходимо также отметить, что как из физических, так и из математических рассуждений следует, что вышеупомянутое  $R$ -отношение электрон-позитронной аннигиляции в адроны принимает нулевые значения для энергий меньших порога рождения пионной пары (см., например, обсуждение этого вопроса в разделах 5 и 35 книги [76]):

$$R(s) \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq s < 4m_\pi^2. \quad (1.38)$$

<sup>7</sup>Заметим, что выражение (1.37) может быть также получено с помощью уравнений (1.13) и (2.39).

Действительно, с физической точки зрения сечение в числителе выражения (1.15) тождественно равно нулю для подпороговых значений энергии  $0 \leq s < 4m_\pi^2$ . В свою очередь, математической реализацией этого физического условия является тот факт, что адронная функция поляризации вакуума  $\Pi(s)$  (1.5) имеет только правый разрез  $s \geq 4m_\pi^2$  вдоль положительной части действительной оси  $\text{Re } s$  (см. раздел 1.1). Следовательно, выражение  $R(s)$  (1.13) может принимать ненулевые значения только на этом разрезе.

Необходимо особо подчеркнуть, что самосогласованное теоретическое описание процессов сильного взаимодействия во времениподобной области, в частности,  $R$ -отношения электрон-позитронной аннигиляции в адроны (1.15), может быть выполнено только с привлечением соответствующих дисперсионных соотношений, (см., например, работы [77, 78, 85, 86], а также раздел 2.1 и главу 4 далее).

## Глава 2

### Функция Адлера

В современной физике элементарных частиц важную роль играет так называемая функция Адлера. В частности, на этой функции базируется теоретический анализ таких процессов сильного взаимодействия, как электрон-позитронная аннигиляция в адроны и инклюзивный распад  $\tau$ -лептона по адронному каналу. Кроме этого, функция Адлера играет существенную роль при сравнении высокоточных экспериментальных измерений некоторых электрослабых наблюдаемых с соответствующими теоретическими предсказаниями. В свою очередь, это представляет собой одну из определяющих проверок как квантовой хромодинамики, так и всей Стандартной Модели и налагает ряд жестких ограничений на эффекты, которые могут быть связаны с так называемой “новой физикой” вне рамок последней.

#### 2.1 Дисперсионное соотношение для функции Адлера

На практике оказывается удобным работать с так называемой функцией Адлера [77], которая определяется как логарифмическая производная адронной функции поляризации вакуума (1.5)

$$D(Q^2) = - \frac{d\Pi(-Q^2)}{d \ln Q^2}, \quad (2.1)$$

и, следовательно, не зависит от выбора точки вычитания  $q_0^2$  в дисперсионном соотношении (1.12). Заметим, что  $D(Q^2)$  (2.1) по определе-

нию является функцией от пространственноподобной кинематической переменной  $Q^2 = -q^2 \geq 0$ .

Как уже было упомянуто ранее, функция Адлера (2.1) играет важную роль в анализе экспериментальных данных адронной физики во времениподобной области. Действительно, теория возмущений и метод ренормализационной группы применимы для изучения процессов сильного взаимодействия, зависящих только от пространственноподобной кинематической переменной. Следовательно, для самосогласованного описания адронной динамики во времениподобной области, необходимо сначала провести сопоставление между результатами теории возмущений и соответствующими экспериментальными данными. Эта цель может быть достигнута с помощью дисперсионного соотношения для функции Адлера [77]

$$D(Q^2) = Q^2 \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{R(s)}{(s + Q^2)^2} ds, \quad (2.2)$$

которое может быть получено из уравнений (1.12) и (2.1).

Необходимо отметить, что дисперсионное соотношение (2.2) налагает ряд строгих непertурбативных<sup>8</sup> ограничений на функцию Адлера (2.1). В частности, из уравнения (2.2) следует, что функция  $D(Q^2)$  имеет только левый разрез  $Q^2 \leq -4m_\pi^2$  вдоль отрицательной части действительной оси  $\text{Re } Q^2$  в комплексной  $Q^2$ -плоскости. Далее, функция  $R(s)$  (1.15), являясь физически наблюдаемой величиной, принимает конечные неотрицательные значения во всем интервале энергий  $0 \leq s < \infty$ . В свою очередь, из этого следует, что функция Адлера (2.1) принимает конечные положительные значения в области  $0 < Q^2 < \infty$  и равна нулю в инфракрасном пределе:  $D(Q^2) \rightarrow 0$  при  $Q^2 \rightarrow 0$ . Подробное изложение этих вопросов приведено в работах [80–82] и в разделе 4.3.

Как будет показано далее (см. раздел 2.3), дисперсионное соотношение (2.2) позволяет восстановить функцию Адлера (2.1) с помощью

<sup>8</sup> Т.е., не основывающихся на теории возмущений.

экспериментальных данных по  $R$ -отношению электрон-позитронной аннигиляции в адроны (1.15). Однако для продолжения результатов теории возмущений во времениподобную область необходимо располагать обратным соотношением между рассматриваемыми величинами<sup>9</sup>. Для получения такого соотношения разделим переменные в выражении (2.1) и проинтегрируем полученное уравнение в конечных пределах:

$$\frac{\Pi(-Q_1^2)}{\Pi(-Q_2^2)} = \int_{Q_1^2}^{Q_2^2} D(Q^2) \frac{dQ^2}{Q^2}. \quad (2.3)$$

Далее, выберем границы интегрирования в точках  $Q_1^2 = -(s + i\epsilon)$  и  $Q_2^2 = -(s - i\epsilon)$ . В правой части уравнения (2.3) сделаем замену переменной  $Q^2 = -\zeta$  и умножим обе части полученного уравнения на  $-1/(2\pi i)$ . В итоге, устремляя  $\epsilon \rightarrow 0_+$  и учитывая определение (1.13), приходим к искомому соотношению

$$R(s) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \int_{s+i\epsilon}^{s-i\epsilon} D(-\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}. \quad (2.4)$$

Это уравнение позволяет найти явный вид функции  $R(s)$  по известному теоретическому выражению для функции Адлера  $D(Q^2)$  (см. также работы [91, 92]). В правой части уравнения (2.4) контур интегрирования должен лежать в области аналитичности подинтегрального выражения  $D(-\zeta)/\zeta$  (см. рисунок 4.3).

Необходимо также отметить, что вывод уравнений (2.2) и (2.4) основывается исключительно на кинематике рассматриваемого процесса сильного взаимодействия и не использует каких-либо дополнительных предположений модельного характера.

<sup>9</sup> Действительно, исходя только из пертурбативного выражения (2.42) для функции Адлера  $D(Q^2)$ , полученного с помощью теории возмущений для пространственноподобных значений кинематической переменной  $Q^2 \geq 0$ , невозможно установить, какое выражение для  $R(s)$  является адекватным продолжением  $D(Q^2)$  во времениподобную область  $s = -Q^2 \geq 0$ . Попытки построения функции  $R(s)$  без использования соответствующих дисперсионных соотношений могут быть найдены, например, в работах [87–90].

## 2.2 Функция Адлера в рамках теории возмущений

Как было отмечено выше, для вычисления функции Адлера (2.1) необходимо рассмотреть вклады квантовой хромодинамики в собственную энергию фотона. В лидирующем порядке теории возмущений (а именно в первом порядке по константе связи электромагнитного взаимодействия и в нулевом порядке по константе связи сильного взаимодействия) этот вклад определяется кварк-антикварковой петлей (см. рисунок 2.1).

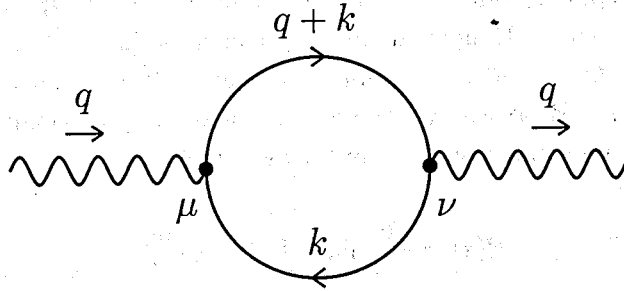


Рисунок 2.1. Вклад нулевого порядка по константе связи сильного взаимодействия в адронный тензор поляризации вакуума  $\Pi_{\mu\nu}(q^2)$  (1.5)

Адронный тензор поляризации вакуума  $\Pi_{\mu\nu}(q^2)$ , соответствующий диаграмме, представленной на рисунке 2.1, имеет вид:

$$\Pi_{\mu\nu}^{(0)}(q^2) = -N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{\hat{q} + \hat{k} - m_f + i\eta} \gamma_\nu \frac{1}{\hat{k} - m_f + i\eta} \right\}. \quad (2.5)$$

В этом уравнении  $N_c = 3$  — число цветов,  $n_f$  — число активных ароматов,  $Q_f$  — заряд кварка аромата  $f$ ,  $m_f$  — масса кварка аромата  $f$ ,  $\eta \rightarrow 0_+$ . Фактор  $(-1)$  в выражении (2.5) обусловлен тем, что рассматриваемая диаграмма содержит нечетное число замкнутых фермионных циклов (см., например, раздел 23.2 книги [2]). В дальнейших выкладках бесконечно малая мнимая добавка  $i\eta$  в кварковом пропагаторе будет опущена. Уравнение (2.5) удобно представить в

следующем виде:

$$\Pi_{\mu\nu}^{(0)}(q^2) = -N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}[\gamma_\mu(\hat{k} + \hat{q} + m_f)\gamma_\nu(\hat{k} + m_f)]}{[(k+q)^2 - m_f^2][k^2 - m_f^2]}. \quad (2.6)$$

При вычислении адронного тензора поляризации вакуума (2.6) будем использовать так называемую фейнмановскую параметризацию. Последняя основывается на тождественном преобразовании знаменателя подинтегрального выражения (2.6) к виду, позволяющему выполнить импульсное интегрирование по  $d^4 k$ . В общем случае, произведение  $n$  произвольных множителей  $1/v_j$  может быть представлено следующим образом (см., например, главу 15 книги [3]):

$$\frac{1}{v_1 v_2 \dots v_n} = (n-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \dots \int_0^1 dx_n \left( \sum_{j=1}^n v_j x_j \right)^{-n}, \quad \sum_{j=1}^n x_j = 1. \quad (2.7)$$

В рассматриваемом случае  $v_j$  представляют собой функции от квадратов импульсов  $k^2$  и квадратов масс  $m_f^2$  фермионов. Дополнительное условие, наложенное на переменные  $x_j$ , снимает одно интегрирование в правой части уравнения (2.7), в частности,

$$\frac{1}{v_1 v_2} = \int_0^1 \frac{dx}{[v_1 x + v_2(1-x)]^2}. \quad (2.8)$$

Таким образом, знаменатель подинтегрального выражения (2.6) можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{(k+q)^2 - m_f^2} \frac{1}{k^2 - m_f^2} = \int_0^1 \frac{dx}{\left\{ [(k+q)^2 - m_f^2]x + [k^2 - m_f^2](1-x) \right\}^2}. \quad (2.9)$$

После алгебраических преобразований правой части этого уравнения адронный тензор поляризации вакуума (2.6) принимает вид

$$\Pi_{\mu\nu}^{(0)}(q^2) = -N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}\{\gamma_\mu[\hat{k} + \hat{q} + m_f]\gamma_\nu[\hat{k} + m_f]\}}{[(k+qx)^2 + q^2x(1-x) - m_f^2]^2}. \quad (2.10)$$

Дальнейшие вычисления будем проводить в приближении безмассовых кварков ( $m_f = 0$ ). Следует отметить, что в безмассовом пределе единственное отличие между вкладом в собственную энергию фотона, обусловленными лептонной петлей и кварк-антикварковой петлей, заключается в факторе  $N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2$  (см. раздел 1.3).

В уравнении (2.10) удобно ввести новую переменную интегрирования  $p_\mu = k_\mu + q_\mu x$ . В этом случае

$$\Pi_{\mu\nu}^{(0)}(q^2) = -N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}\{\gamma_\mu [\hat{p} + \hat{q}(1-x)] \gamma_\nu [\hat{p} - \hat{q}x]\}}{[p^2 + q^2 x(1-x)]^2}. \quad (2.11)$$

Далее, возьмем след по  $\gamma$ -матрицам Дирака. Принимая во внимание, что (см. также раздел 1.3)

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) = 4(g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}), \quad (2.12)$$

представим числитель подинтегрального выражения (2.11) в виде

$$\text{Tr}\{\gamma_\mu [\hat{p} + \hat{q}(1-x)] \gamma_\nu [\hat{p} - \hat{q}x]\} = 4\{(g_{\mu\nu} q^2 - 2q_\mu q_\nu)x(1-x) + 2p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2 + [p_\mu q_\nu + q_\mu p_\nu - g_{\mu\nu}(pq)](1-2x)\}. \quad (2.13)$$

Заметим, что для вычисления адронного тензора поляризации вакуума (2.10) в случае  $m_f \neq 0$  потребовалось бы дополнительно воспользоваться соотношениями (1.21) и (1.23).

Необходимо также принять во внимание то, что левая часть уравнения (2.13) является частью подинтегрального выражения (2.11). Так, из соображений симметрии следует, что интеграл по  $d^4 p$  от произведения некоторой функции  $f(p^2)$  и нечетного числа векторов  $p_\mu$  равен нулю:

$$\int d^4 p f(p^2) \prod_{j=1}^{2r+1} p_{\mu_j} = 0, \quad (2.14)$$

где  $r = 0, 1, 2, 3, \dots$  — целое неотрицательное число. Кроме этого, интеграл по  $d^4 p$  от произведения некоторой функции  $f(p^2)$  и четного числа векторов  $p_\mu$  может быть представлен в более простом виде

(см., например, главу 15 книги [3]), в частности,

$$\int d^4 p f(p^2) p_\mu p_\nu = \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \int d^4 p f(p^2) p^2. \quad (2.15)$$

С учетом уравнений (2.13)–(2.15) адронный тензор поляризации вакуума (2.11) принимает следующий вид:

$$\Pi_{\mu\nu}^{(0)}(q^2) = 4 N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu} p^2/2 + (2q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})(1-x)x}{[p^2 + q^2 x(1-x)]^2}. \quad (2.16)$$

В уравнении (2.16) перейдем к интегрированию по четырехмерному Евклидовому импульсному пространству:

$$p_\mu = (p_0, \vec{p}) \rightarrow (ip_0, \vec{p}), \quad \int d^4 p \rightarrow i \int (d^4 p)_E, \quad p^2 \rightarrow -p^2. \quad (2.17)$$

В этом случае уравнение (2.16) может быть представлено следующим образом:

$$\Pi_{\mu\nu}^{(0)}(q^2) = -4i N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \int_0^1 dx \int \frac{(d^4 p)_E}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu} p^2/2 - (2q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})(1-x)x}{[p^2 - q^2 x(1-x)]^2}. \quad (2.18)$$

В дальнейших выкладках индекс “E”, обозначающий интегрирование по Евклидовому импульсному пространству, будет опущен. Нетрудно убедиться в том, что в полученном выражении для адронного тензора поляризации вакуума (2.18) импульсный интеграл по  $d^4 p$  является расходящимся в ультрафиолетовой области.

Для выделения из уравнения (2.18) расходящейся части<sup>10</sup> будем использовать метод размерной регуляризации (см. работу [93], обзор [94] и раздел 3.1 книги [16]). Этот метод основывается на переходе от интегрирования по четырехмерному импульсному пространству  $d^4 p$  к интегрированию по пространству размерности  $n = 4 - 2\epsilon$ . В этом

<sup>10</sup> Следует отметить, что в общем случае не существует каких-либо строгих критериев, позволяющих сделать выбор в пользу того или иного метода регуляризации расходящихся импульсных интегралов.



случае расходимости в регуляризованном выражении будут соответствовать полюсам по параметру  $\epsilon$  в пределе  $\epsilon \rightarrow 0_+$ . Итак, в рамках метода размерной регуляризации адронный тензор поляризации вакуума (2.18) принимает следующий вид:

$$\text{reg } \Pi_{\mu\nu}^{(0)}(q^2) = -4i N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \int_0^1 dx \mu^{4-n} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p^2 - q^2 x(1-x)]^2} \times \\ \times \left[ g_{\mu\nu} \frac{p^2}{2} - (2q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})(1-x)x \right]. \quad (2.19)$$

В этом выражении параметр  $\mu$  размерности массы введен для сохранения размерности исходного интеграла.

В уравнении (2.19) импульсное интегрирование по  $d^n p$  может быть выполнено с использованием базового интеграла

$$\int \frac{(p^2)^a}{(p^2 + M^2)^b} d^n p = \pi^{n/2} \frac{\Gamma(b-a-n/2) \Gamma(a+n/2)}{\Gamma(n/2) \Gamma(b)} (M^2)^{a-b+n/2}, \quad (2.20)$$

где  $\Gamma(y)$  обозначает  $\Gamma$ -функцию Эйлера (см., например, книгу [95]):

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-t} t^{y-1} dt, \quad \Gamma(y+1) = y \Gamma(y). \quad (2.21)$$

Интегрирование по  $d^n p$  первого слагаемого в квадратных скобках второй строки уравнения (2.19) соответствует выбору параметров  $a = 1$ ,  $b = 2$  и  $M^2 = -q^2 x(1-x)$  в уравнении (2.20):

$$\int \frac{p^2 d^n p}{[p^2 - q^2 x(1-x)]^2} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} [-q^2 x(1-x)]^{-1+n/2} \frac{\Gamma(1-n/2) \Gamma(1+n/2)}{\Gamma(2)}. \quad (2.22)$$

В свою очередь, интегрирование по  $d^n p$  второго слагаемого в квадратных скобках второй строки уравнения (2.19) соответствует случаю  $a = 0$ ,  $b = 2$  и  $M^2 = -q^2 x(1-x)$ :

$$\int \frac{d^n p}{[p^2 - q^2 x(1-x)]^2} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(2)} [-q^2 x(1-x)]^{-2+n/2} \Gamma(2-n/2). \quad (2.23)$$

С учетом выражений (2.22) и (2.23) адронный тензор поляризации вакуума (2.19) принимает вид

$$\text{reg } \Pi_{\mu\nu}^{(0)}(q^2) = 4i N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \mu^{4-n} \frac{\pi^{n/2}}{(2\pi)^4} (-q^2)^{-2+n/2} \int_0^1 [x(1-x)]^{-1+n/2} dx \times \\ \times \left[ g_{\mu\nu} \frac{q^2 \Gamma(1-n/2) \Gamma(1+n/2)}{2 \Gamma(n/2)} + (2q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \Gamma(2-n/2) \right]. \quad (2.24)$$

В этом уравнении интегрирование по  $dx$  может быть выполнено с использованием так называемой бета-функции Эйлера, или интеграла Эйлера 1-го рода (см., например, книгу [95]):

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}. \quad (2.25)$$

В частности, в силу того, что

$$\int_0^1 [x(1-x)]^m dx = B(m+1, m+1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m+1}} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+3/2)}, \quad (2.26)$$

выражение (2.24) можно представить следующим образом:

$$\text{reg } \Pi_{\mu\nu}^{(0)}(q^2) = \frac{i}{2\pi^4} N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \mu^{4-n} \pi^{(n+1)/2} (-q^2)^{-2+n/2} \frac{1}{2^n \Gamma[(n+1)/2]} \times \\ \times \left[ g_{\mu\nu} \frac{q^2 \Gamma(1-n/2) \Gamma(1+n/2)}{2 \Gamma(n/2)} + (2q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \Gamma(2-n/2) \right]. \quad (2.27)$$

Как уже упоминалось ранее, в рассматриваемом случае  $n = 4 - 2\epsilon$ . Поэтому уравнение (2.27) принимает вид

$$\text{reg } \Pi_{\mu\nu}^{(0)}(q^2) = \frac{i}{2^5 \pi^{3/2}} N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left( \frac{\mu^2}{-q^2} \right)^\epsilon \left( \frac{4}{\pi} \right)^\epsilon \frac{\Gamma(2-\epsilon)}{\Gamma(-\epsilon+5/2)} \times \\ \times \left[ g_{\mu\nu} \frac{q^2 \Gamma(-1+\epsilon) \Gamma(3-\epsilon)}{2 \Gamma(2-\epsilon)} + (2q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \Gamma(\epsilon) \right]. \quad (2.28)$$

Для выделения из адронного тензора поляризации вакуума (2.28) расходящейся части, рассмотрим предел уравнения (2.28) при  $\epsilon \rightarrow 0_+$ .

В пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеют место разложения

$$\Gamma(-1 + \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} + (\gamma - 1) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (2.29)$$

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (2.30)$$

$$\Gamma(2 - \varepsilon) = 1 + (\gamma - 1)\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (2.31)$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2} - \varepsilon\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left[ 3 + (3\gamma + 6 \ln 2 - 8)\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right], \quad (2.32)$$

$$\Gamma(3 - \varepsilon) = 2 + (2\gamma - 3)\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (2.33)$$

где  $\gamma \simeq 0.5772$  — постоянная Эйлера. Следовательно, выражение (2.28) может быть представлено следующим образом:

$$\text{reg } \Pi_{\mu\nu}^{(0)}(q^2) = \frac{i}{12\pi^2} (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left( \frac{\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \left( \frac{4}{\pi} \right)^\varepsilon \left[ \frac{1}{\varepsilon} + \text{const} \right]. \quad (2.34)$$

Далее, в силу того, что

$$y^\varepsilon = 1 + \varepsilon \ln y + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.35)$$

адронный тензор поляризации вакуума (2.34) принимает вид

$$\text{reg } \Pi_{\mu\nu}^{(0)}(q^2) = \frac{i}{12\pi^2} (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[ \frac{1}{\varepsilon} - \ln \left( \frac{-q^2}{\mu^2} \right) + \text{const} \right]. \quad (2.36)$$

Заметим, что при переходе от уравнения (2.34) к (2.36) некоторые постоянные слагаемые были включены в константу в квадратных скобках выражения (2.36).

Для устранения расходимости из уравнения (2.36) будем использовать модифицированную схему минимального вычитания, или так называемую  $\overline{\text{MS}}$ -схему. Последняя заключается в вычитании из расходящегося выражения (2.36) как слагаемого, пропорционального  $\varepsilon^{-1}$  (что соответствовало бы обычной схеме минимального вычитания, или так называемой MS-схеме), так и слагаемого, пропорционального константе в квадратных скобках (2.36). В этом случае адронный тензор

поляризации вакуума (2.36) принимает следующий вид:

$$\text{reg } \Pi_{\mu\nu}^{(0)}(q^2) = -\frac{i}{12\pi^2} (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \ln \left( \frac{-q^2}{\mu^2} \right). \quad (2.37)$$

Использование схемы импульсного вычитания<sup>11</sup> для устранения расходимости из уравнения (2.36) приводит к результату, идентичному (2.37). Необходимо также отметить, что, в общем случае, процедура регуляризации расходящихся импульсных интегралов и последующее вычитание расходимостей приводит в теорию зависимость от дополнительного параметра — точки нормировки  $\mu^2$ .

В соответствии с определением (1.5), адронная функция поляризации вакуума  $\Pi(q^2)$  связана с адронным тензором поляризации вакуума  $\Pi_{\mu\nu}(q^2)$  соотношением

$$\Pi_{\mu\nu}(q^2) = \frac{i}{12\pi^2} (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \Pi(q^2). \quad (2.38)$$

Следовательно, в рассматриваемом порядке теории возмущений

$$\Pi^{(0)}(q^2) = -N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \ln \left( \frac{-q^2}{\mu^2} \right). \quad (2.39)$$

В свою очередь, функция Адлера (2.1) определяется как логарифмическая производная адронной функции поляризации вакуума (1.5). Таким образом, в нулевом порядке теории возмущений по константе связи сильного взаимодействия

$$D_{\text{pert}}^{(0)}(Q^2) = -\frac{d\Pi^{(0)}(-Q^2)}{d \ln Q^2} = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2, \quad Q^2 \rightarrow \infty. \quad (2.40)$$

Здесь  $Q^2 = -q^2 \geq 0$  обозначает квадрат пространственноподобной кинематической переменной. Полученное выражение для функции Адлера (2.40) соответствует так называемому предсказанию партонной модели, которое имеет силу только в асимптотике  $Q^2 \rightarrow \infty$ .

<sup>11</sup> Схема импульсного вычитания, или так называемая MOM-схема, заключается в вычитании из рассматриваемого выражения (2.36) его значения в некоторой точке  $q_0^2$ .

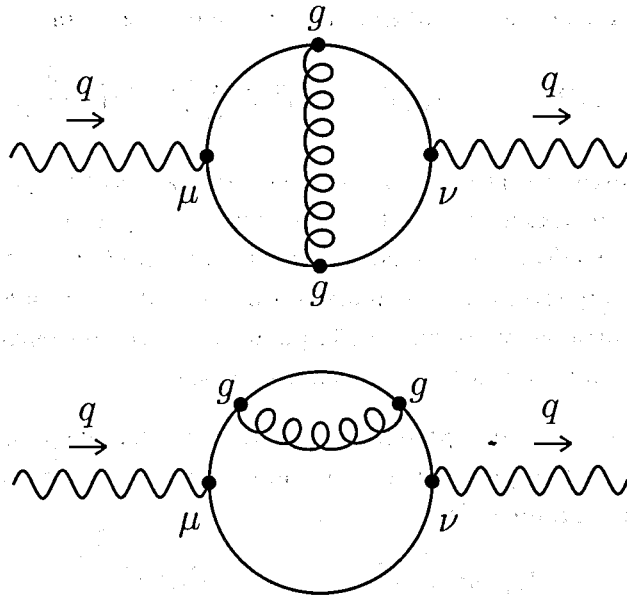


Рисунок 2.2. Вклады первого порядка по константе связи сильного взаимодействия  $\alpha_s = g^2/(4\pi)$  в адронный тензор поляризации вакуума  $\Pi_{\mu\nu}(q^2)$  (1.5)

Для вычисления функции Адлера (2.1) в следующем порядке теории возмущений (а именно в первом порядке по константе связи сильного взаимодействия  $\alpha_s = g^2/(4\pi)$ , или в однопетлевом приближении), необходимо рассмотреть поправки к адронному тензору поляризации вакуума  $\Pi_{\mu\nu}(q^2)$ , которые соответствуют диаграммам, представленным на рисунке 2.2. В конечном итоге это приводит к следующему выражению для функции Адлера [96, 97]:

$$D_{\text{pert}}^{(1)}(Q^2) = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[ 1 + \frac{1}{\pi} \alpha_s^{(1)}(Q^2) \right], \quad Q^2 \rightarrow \infty, \quad (2.41)$$

где  $\alpha_s^{(1)}(Q^2) = 4\pi/[\beta_0 \ln(Q^2/\Lambda^2)]$  обозначает пертурбативную однопетлевую бегущую константу связи квантовой хромодинамики (3.15), а  $\beta_0 = 11 - 2n_f/3$  является однопетлевым коэффициентом пертурбативного разложения  $\beta$ -функции, см. главу 3.

Вычисление функции Адлера  $D(Q^2)$  (2.1) в высших порядках теории возмущений по константе связи сильного взаимодействия  $\alpha_s(Q^2)$  приводит к представлению функции  $D(Q^2)$  в виде ряда по степеням  $\alpha_s(Q^2)$ . А именно в  $\ell$ -петлевом приближении в ультрафиолетовой асимптотике  $Q^2 \rightarrow \infty$

$$D_{\text{pert}}^{(\ell)}(Q^2) = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[ 1 + d_{\text{pert}}^{(\ell)}(Q^2) \right], \quad d_{\text{pert}}^{(\ell)}(Q^2) = \sum_{j=1}^{\ell} d_j \left( \frac{4}{\beta_0} \right)^j \left[ \alpha_s^{(\ell)}(Q^2) \right]^j. \quad (2.42)$$

Здесь и далее  $\alpha_s^{(\ell)}(Q^2) \equiv \alpha_s^{(\ell)}(Q^2) \beta_0 / (4\pi)$  обозначает так называемую пертурбативную  $\ell$ -петлевую “функцию связи” квантовой хромодинамики,  $\beta_0 = 11 - 2n_f/3$  (см. главу 3). Явные выражения для коэффициентов  $d_j$  степенного разложения (2.42) приведены в приложении I.

Необходимо отметить, что пертурбативная аппроксимация функции Адлера (2.42) применима исключительно в области больших энергий  $Q^2 \rightarrow \infty$ . В области малых энергий выражение (2.42) содержит нефизические особенности по кинематической переменной  $Q^2$ . Этот факт находится в противоречии с дисперсионным соотношением (2.2) для функции Адлера и приводит к существенным затруднениям при теоретическом описании соответствующих экспериментальных данных в инфракрасной области.

Таким образом, в асимптотической ультрафиолетовой области  $Q^2 \rightarrow \infty$  теория возмущений позволяет аппроксимировать функцию Адлера  $D(Q^2)$  (2.1) суммой предсказания партонной модели и логарифмических поправок (2.42). В свою очередь, степенные поправки<sup>12</sup> к функции Адлера могут быть рассмотрены в рамках таких пертурбативных подходов, как, например, правила сумм [37–45] и так называемой модели инстантонной жидкости [98–102]. Кроме этого, дополнительная информация о поведении функции Адлера в области малых энергий может быть также получена из соответствующих расчетов на решетке [103–107]. Однако детальное обсуждение вышеупомянутых подходов находится вне рамок данной работы.

<sup>12</sup> Т.е., пертурбативные поправки вида  $(\mu^2/Q^2)^n$ .

### 2.3 Экспериментальное предсказание для $D(Q^2)$

Ни адронная функция поляризации вакуума  $\Pi(q^2)$  (1.5), ни функция Адлера  $D(Q^2)$  (2.1) не являются величинами, значения которых можно было бы непосредственно измерить на эксперименте. Тем не менее, полученное выше дисперсионное соотношение (2.2) позволяет восстановить поведение функции  $D(Q^2)$  для всех значений своего аргумента  $0 \leq Q^2 < \infty$ . А именно в области умеренных и малых энергий величина  $R(s)$  в подинтегральном выражении (2.2) может быть аппроксимирована экспериментальными данными по  $R$ -отношению электрон-позитронной аннигиляции в адроны (см. рисунок 1.4). В свою очередь, поведение функции  $R(s)$  в области больших энергий может быть найдено на основании пертурбативного выражения для функции Адлера  $D_{\text{pert}}(Q^2)$  (2.42) с помощью соотношения (2.4) (см. раздел 2.1 и главу 4).

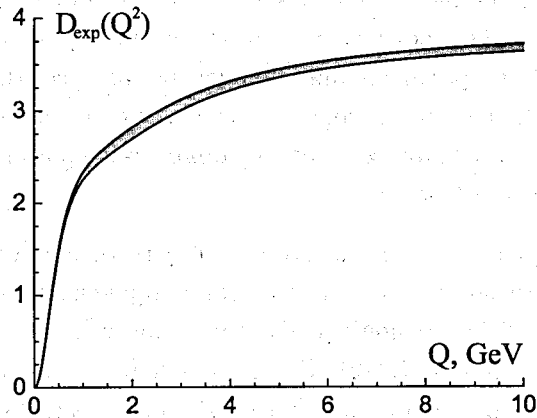


Рисунок 2.3. Экспериментальное предсказание (2.43) для функции Адлера (2.1)

С учетом вышесказанного, дисперсионное соотношение для функции Адлера (2.2) может быть представлено в следующем виде:

$$D_{\text{exp}}(Q^2) = Q^2 \int_{4m_\tau^2}^{s_0} \frac{R_{\text{exp}}(s)}{(s+Q^2)^2} ds + Q^2 \int_{s_0}^{\infty} \frac{R_{\text{theor}}(s)}{(s+Q^2)^2} ds, \quad (2.43)$$

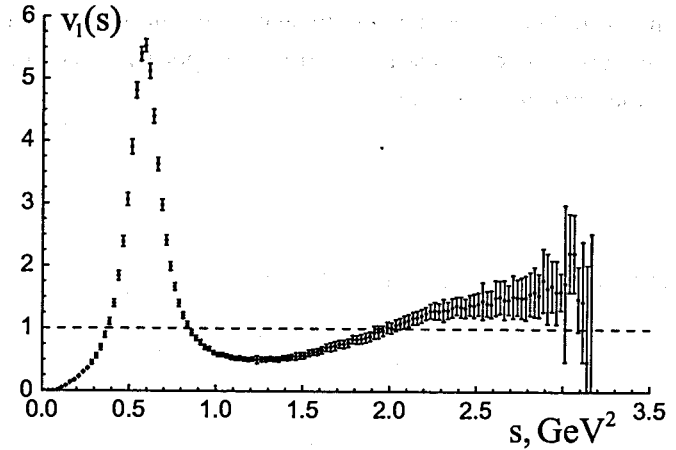


Рисунок 2.4. Инклюзивная векторная спектральная функция, полученная на основе экспериментальных данных по адронным распадам  $\tau$ -лептона [110]

где  $R_{\text{exp}}(s)$  представляет собой экспериментальные значения  $R$ -отношения (1.15) (см. раздел 1.3), а  $R_{\text{theor}}(s)$  обозначает теоретическое выражение для этой величины (см. главу 4). В уравнении (2.43) параметр  $s_0$  размерности квадрата массы обозначает некоторый энергетический масштаб “сшивки” величин  $R_{\text{exp}}(s)$  и  $R_{\text{theor}}(s)$ . Результаты вычисления<sup>13</sup> функции Адлера (2.43) представлены на рисунке 2.3 (см. также работы [108, 109]). Следует упомянуть о том, что, в общем случае, экспериментальное предсказание для функции Адлера (2.43) зависит от выбора значения  $s_0$ , от рассматриваемого петлевого приближения для  $R_{\text{theor}}(s)$  и, на высших петлевых уровнях, от выбора схемы вычитания, используемой в теоретических расчетах.

Отметим также, что в области энергий ниже массы  $\tau$ -лептона ( $s < M_\tau^2$ ,  $M_\tau \simeq 1.777 \text{ ГэВ}$  [79]) в первом слагаемом правой части уравнения (2.43) вместо  $R_{\text{exp}}(s)$  (1.15) может быть использована более точная инклюзивная векторная спектральная функция  $v_1(s)$ , извлекаемая из экспериментальных данных по адронным распадам  $\tau$ -лептона [110–115] (см. рисунок 2.4). Однако в этом случае необходи-

<sup>13</sup> Автор благодарен Prof. F. Jegerlehner (DESY Zeuthen, Germany) за предоставленные данные по  $D_{\text{exp}}(Q^2)$ .

мо учитывать эффекты, обусловленные нарушением изоспиновой симметрии (см. детальное обсуждение этого вопроса в работах [116–119] и цитируемой там литературе).

## Глава 3

### Пертурбативный инвариантный заряд КХД

Инвариантный заряд квантовой хромодинамики  $\alpha_s(Q^2)$ , являясь мерой интенсивности сильного взаимодействия между цветными объектами, играет одну из центральных ролей в современной физике элементарных частиц. В частности, совокупный анализ теоретических предсказаний различных наблюдаемых величин адронной физики и соответствующих экспериментальных данных, основывающийся на бегущей константе связи квантовой хромодинамики  $\alpha_s(Q^2)$ , является одной из решающих проверок самосогласованности описания сильных взаимодействий в рамках теории возмущений и позволяет определить границы применимости последней.

#### 3.1 Пертурбативная $\beta$ -функция КХД

Бегущая константа связи квантовой хромодинамики  $\alpha_s(\mu^2) = g^2(\mu^2)/(4\pi)$  удовлетворяет уравнению ренормализационной группы (см. главу 9 книги [2], обзор [120] и цитируемую там литературу)

$$\frac{d \ln [g^2(\mu^2)]}{d \ln \mu^2} = \beta(g(\mu^2)). \quad (3.1)$$

В рамках теории возмущений, в предположении малости  $g^2(\mu^2)$ ,  $\beta$ -функция в правой части этого уравнения может быть представлена в виде степенного ряда (см., например, обзоры [121, 122])

$$\beta(g(\mu^2)) \simeq - \left\{ \beta_0 \left[ \frac{g^2(\mu^2)}{16\pi^2} \right] + \beta_1 \left[ \frac{g^2(\mu^2)}{16\pi^2} \right]^2 + \beta_2 \left[ \frac{g^2(\mu^2)}{16\pi^2} \right]^3 + \dots \right\}. \quad (3.2)$$

В настоящее время известно четыре первых коэффициента пертурбативного разложения  $\beta$ -функции (см. работы [33, 34, 123–129]):

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f, \quad (3.3)$$

$$\beta_1 = 102 - \frac{38}{3}n_f, \quad (3.4)$$

$$\beta_2 = \frac{2857}{2} - \frac{5033}{18}n_f + \frac{325}{54}n_f^2, \quad (3.5)$$

$$\beta_3 = \frac{149753}{6} + 3564\zeta(3) - \left[ \frac{1078361}{162} + \frac{6508}{27}\zeta(3) \right]n_f + \left[ \frac{50065}{162} + \frac{6472}{81}\zeta(3) \right]n_f^2 + \frac{1093}{729}n_f^3. \quad (3.6)$$

В этих уравнениях  $n_f$  — число активных ароматов, а  $\zeta(x)$  обозначает  $\zeta$ -функцию Римана,  $\zeta(3) \simeq 1.202$  (см., например, книгу [95]). Значения коэффициентов (3.3)–(3.6) соответствуют калибровочной группе SU(3). Первые два коэффициента пертурбативного разложения  $\beta$ -функции (3.3) и (3.4) являются схемно-независимыми величинами, в то время как выражения для трехпетлевого (3.5) и четырехпетлевого (3.6) коэффициентов приведены для случая  $\overline{\text{MS}}$  схемы вычитания (см. работу [93] и раздел 3.3 книги [16]). Вычисление коэффициентов (3.3)–(3.6) было проведено в приближении безмассовых фермионов. Такая аппроксимация применима для интервалов энергий  $m_f^2 \ll Q^2 \ll m_{f+1}^2$ , т.е., вдали от порогов рождения кварков. В этом случае параметр  $n_f$  (число активных ароматов) представляет собой кусочно-непрерывную функцию пространственноподобной кинематической переменной  $Q^2 > 0$  (см., например, раздел 3.8 в книге [16]):

$$n_f(Q^2) = \sum_{j=1}^6 \theta\left(1 - \frac{m_j^2}{Q^2}\right). \quad (3.7)$$

В этом уравнении  $\theta(x)$  обозначает функцию Хевисайда:  $\theta(x) = 1$  при  $x \geq 0$  и  $\theta(x) = 0$  при  $x < 0$ .

В правой части уравнения (3.2) число членов пертурбативного разложения определяется петлевым приближением. Вводя обозначение

для так называемой “функции связи”  $a(\mu^2) \equiv \alpha(\mu^2)\beta_0/(4\pi)$ , в рамках теории возмущений уравнение ренормализационной группы для инвариантного заряда (3.1) на  $\ell$ -петлевом уровне можно представить следующим образом:

$$\frac{d \ln [a_s^{(\ell)}(\mu^2)]}{d \ln \mu^2} = - \sum_{j=0}^{\ell-1} B_j [a_s^{(\ell)}(\mu^2)]^{j+1}, \quad B_j = \frac{\beta_j}{\beta_0^{j+1}}. \quad (3.8)$$

Следует упомянуть о том, что для физических значений числа активных ароматов  $0 \leq n_f \leq 6$  в рассматриваемых петлевых приближениях (несмотря на то, что коэффициенты пертурбативного разложения  $\beta$ -функции (3.3)–(3.6) могут принимать большие значения) коэффициенты  $B_j$  (3.8) принимают значения порядка единицы. Также отметим, что для  $0 \leq n_f \leq 6$  коэффициенты  $\beta_j$  (3.3)–(3.6) и  $B_j$  ( $0 \leq j \leq 3$ ) являются положительными величинами, за исключением  $\beta_2$  и  $B_2$ , которые принимают отрицательные значения в случае  $n_f = 6$ .

### 3.2 Однопетлевая бегущая константа связи КХД

Рассмотрим сначала однопетлевое приближение. В этом случае уравнение ренормализационной группы для инвариантного заряда квантовой хромодинамики (3.8) принимает вид

$$\frac{d \ln [a_s^{(1)}(\mu^2)]}{d \ln \mu^2} = -B_0 a_s^{(1)}(\mu^2), \quad (3.9)$$

где  $B_0 = 1$  по определению. Далее, разделяя переменные

$$-\frac{d a_s^{(1)}(\mu^2)}{[a_s^{(1)}(\mu^2)]^2} = d \ln \mu^2 \quad (3.10)$$

и интегрируя уравнение (3.10) в конечных пределах, приходим к следующему соотношению между значениями бегущей константы связи в некоторой точке нормировки  $Q_0^2$  и в интересующей нас точке  $Q^2$ :

$$\frac{1}{a_s^{(1)}(Q^2)} - \frac{1}{a_s^{(1)}(Q_0^2)} = \ln\left(\frac{Q^2}{Q_0^2}\right). \quad (3.11)$$

Это уравнение позволяет выразить однопетлевой пертурбативный инвариантный заряд  $\alpha_s^{(1)}(Q^2)$  как функцию от переменных  $Q^2$ ,  $Q_0^2$  и  $\alpha_s^{(1)}(Q_0^2)$ , а именно

$$\alpha_s^{(1)}(Q^2) = \frac{\alpha_s^{(1)}(Q_0^2)}{1 + \alpha_s^{(1)}(Q_0^2) \ln(Q^2/Q_0^2) \beta_0/(4\pi)}. \quad (3.12)$$

Здесь необходимо подчеркнуть, что формализм ренормализационной группы и теория возмущений применимы исключительно для описания процессов сильного взаимодействия, зависящих от пространственноподобной кинематической переменной  $Q^2 = -q^2 > 0$ .

Бегущая константа связи сильного взаимодействия  $\alpha_s(Q^2)$  не является величиной, значение которой можно было бы непосредственно измерить на эксперименте. Тем не менее, многие характеристики адронных процессов могут быть параметризованы в терминах  $\alpha_s(Q^2)$  в рамках теории возмущений. В свою очередь, это позволяет извлечь значение инвариантного заряда  $\alpha_s(Q^2)$  на рассматриваемом масштабе энергий из соответствующих экспериментальных данных. Например, допустим, что некоторая величина  $P(Q^2)$  в рамках теории возмущений в  $\ell$ -петлевом приближении может быть представлена в виде

$$P_{\text{pert}}^{(\ell)}(Q^2) = 1 + \sum_{j=1}^{\ell} p_j \left[ \alpha_s^{(\ell)}(Q^2) \right]^j, \quad (3.13)$$

где  $p_j$  — соответствующие численные коэффициенты пертурбативного разложения. Далее, предположим, что на масштабе энергии  $Q_0^2$ , допуская применение теории возмущений, было проведено экспериментальное измерение значения рассматриваемой величины:  $P(Q_0^2) = P_{\text{exp}}$ . В этом случае в однопетлевом приближении (т.е., для  $\ell = 1$ ) значение бегущей константы связи на масштабе энергии  $Q_0^2$  определяется соотношением  $\alpha_s^{(1)}(Q_0^2) = (P_{\text{exp}} - 1)/p_1$ . В свою очередь, это позволяет определить  $\alpha_s^{(1)}(Q^2)$  для произвольных значений  $Q^2$  с помощью уравнения (3.12). Отметим, что из вышеизложенного следует, что для экспериментальной проверки квантовой хромодинамики требуется, как минимум, либо два измерения некоторой наблюдаемой величины на разных масштабах энергии, либо два

измерения разных наблюдаемых величин на произвольных масштабах энергии.

На практике анализ бегущей константы связи сильного взаимодействия удобно проводить с помощью так называемого масштабного параметра квантовой хромодинамики  $\Lambda_{\text{QCD}}$ . А именно в уравнении (3.11) удобно ввести параметр  $\Lambda$ , который имеет размерность массы<sup>14</sup> и включает в себя все члены уравнения (3.11), зависящие от точки нормировки  $Q_0^2$  и от значения бегущей константы связи в этой точке:

$$\frac{1}{\alpha_s^{(1)}(Q^2)} \equiv \ln \left( \frac{Q^2}{\Lambda_{(1)}^2} \right), \quad \Lambda_{(1)}^2 \equiv Q_0^2 \exp \left[ -\frac{4\pi}{\beta_0} \frac{1}{\alpha_s^{(1)}(Q_0^2)} \right]. \quad (3.14)$$

В этом случае решение уравнения ренормализационной группы (3.8) для инвариантного заряда квантовой хромодинамики в рассматриваемом однопетлевом приближении принимает известный вид

$$\alpha_s^{(1)}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0} \frac{1}{\ln z}, \quad z = \frac{Q^2}{\Lambda^2}. \quad (3.15)$$

Очевидно, что полученные выражения для однопетлевой бегущей константы связи (3.12) и (3.15) эквивалентны друг другу. Техника извлечения численных значений инвариантного заряда квантовой хромодинамики из различных экспериментальных данных в высших петлевых приближениях, усредненное значение бегущей константы связи сильного взаимодействия на масштабе массы  $Z^0$ -бозона и соответствующее значение масштабного параметра  $\Lambda_{\text{QCD}}$  могут быть найдены в обзорах, посвященных экспериментальной проверке квантовой хромодинамики в рамках теории возмущений (см., например, работы [130–132] и раздел 9 обзора [79]).

Однопетлевая пертурбативная бегущая константа связи (3.15) представлена на рисунке 3.1 пунктирной линией. В силу того, что первый член пертурбативного разложения  $\beta$ -функции (3.2) отрицателен<sup>15</sup>, инвариантный заряд  $\alpha_s(Q^2)$  (3.15) является убывающей функ-

<sup>14</sup> Заметим, что масштабный параметр квантовой хромодинамики  $\Lambda$  возникает даже в безмассовом пределе теории.

<sup>15</sup> Формально, это условие выполняется для  $n_f \leq 16$ . В настоящее время известно всего 6 ароматов кварков, а экспериментальные поиски кварков четвертого поколения пока не привели к положительному результату (см., например, обзор [79]).

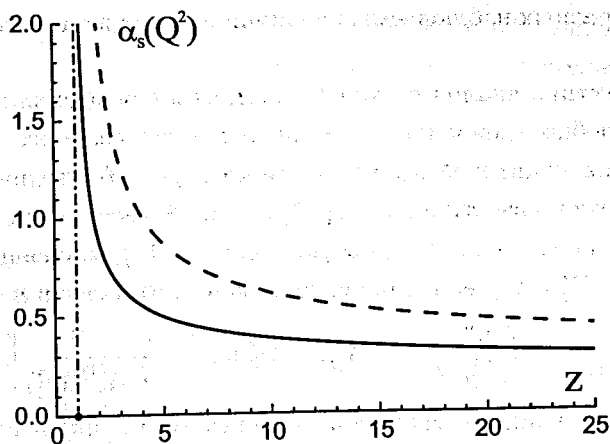


Рисунок 3.1. Пертурбативный инвариантный заряд квантовой хромодинамики в однопетлевом (пунктирная линия, уравнение (3.15)) и двухпетлевом (непрерывная линия, уравнение (3.29)) приближениях. Значения параметров:  $n_f = 3$ ,  $z = Q^2/\Lambda^2$ . Положение “призрачного” полюса ( $Q^2 = \Lambda^2$ ) обозначено штрихпунктирной линией

цией своего аргумента. В частности, это отражает свойство асимптотической свободы квантовой хромодинамики [33, 34], которое заключается в “уменьшении” интенсивности взаимодействия между цветными объектами при увеличении характерной энергии рассматриваемого процесса. В свою очередь, эта особенность квантовой хромодинамики позволяет использовать теорию возмущений для вычисления тех поправок к наблюдаемым величинам, которые обусловлены сильным взаимодействием. В этом случае роль малого параметра пертурбативного степенного разложения играет бегущая константа связи  $\alpha_s(Q^2)$  (см., например, уравнение (2.42)).

Здесь следует отметить, что однопетлевой пертурбативный инвариантный заряд (3.15) содержит, помимо физического разреза по кинематической переменной  $Q^2$  вдоль отрицательной части действительной оси  $\text{Re } Q^2$ , нефизическую особенность в точке  $Q^2 = \Lambda^2$  — так называемый “призрачный полюс” или “полюс Ландау”, см. рисунок 3.2 А. Существование таких нефизических особенностей противоречит общим принципам локальной квантовой теории поля и существенно

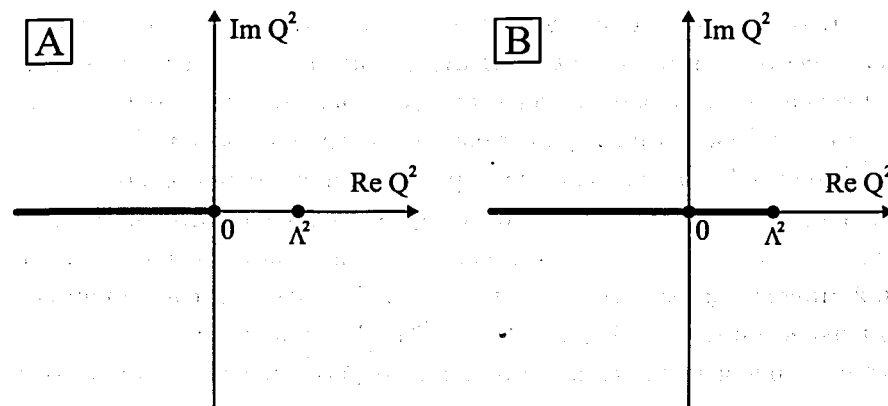


Рисунок 3.2. Особенности пертурбативной бегущей константы связи сильного взаимодействия  $\alpha_s(Q^2)$  в комплексной  $Q^2$ -плоскости. Однопетлевое приближение (уравнение (3.15), рисунок “А”): физический разрез  $Q^2 \leq 0$  вдоль отрицательной части действительной оси  $\text{Re } Q^2$  и нефизическая особенность (полюс первого порядка) в точке  $Q^2 = \Lambda^2$ . Двухпетлевое приближение (уравнение (3.29), рисунок “В”): физический разрез  $Q^2 \leq 0$  вдоль отрицательной части действительной оси  $\text{Re } Q^2$  и нефизический разрез  $0 < Q^2 \leq \Lambda^2$  вдоль положительной части действительной оси  $\text{Re } Q^2$

усложняет анализ экспериментальных данных адронной физики в области малых энергий.

Возникновение нефизических особенностей в решениях уравнения ренормализационной группы (3.1) в первую очередь обусловлено использованием приближенного пертурбативного выражения для  $\beta$ -функции (3.2). Последнее имеет силу только для малых значений инвариантного заряда квантовой хромодинамики  $\alpha_s(Q^2)$ , что выполняется только в области больших энергий  $Q^2 \gg \Lambda^2$ . Однако в области малых энергий ( $Q^2 \simeq \Lambda^2$ ) теория выходит из режима слабой связи, аппроксимация (3.2) становится неприменимой, и полученное решение уравнения ренормализационной группы (3.15) теряет физический смысл. На практике, теория возмущений дает адекватное описание процессов сильного взаимодействия для  $Q \gtrsim 2$  ГэВ. Таким образом, теоретический анализ адронной динамики в области малых энергий может быть выполнен только с привлечением пертурбативных методов.



Необходимо также упомянуть о том, что аналогичная проблема существует и в квантовой электродинамике. Так, пертурбативное выражение для инвариантного заряда спинорной электродинамики в асимптотической ультрафиолетовой области содержит нефизические особенности<sup>16</sup>, что находится в противоречии с общими положениями теории (см. раздел 50.2 книги [2]). Однако в квантовой электродинамике (в отличие от квантовой хромодинамики) теория возмущений становится неприменимой на масштабах энергий, сопоставимых с Планковской массой  $M_{Pl} \simeq 1.22 \times 10^{19}$  ГэВ [136, 137]. В силу того, что максимальная энергия, достигаемая в современных экспериментах по физике элементарных частиц, несоизмеримо меньше, чем  $M_{Pl}$ , теоретический анализ процессов электромагнитного взаимодействия может быть выполнен в рамках пертурбативного подхода без привлечения каких-либо непертурбативных методов.

### 3.3 Инвариантный заряд КХД в высших петлевых приближениях

Перейдем теперь к рассмотрению решения уравнения ренормализационной группы для инвариантного заряда квантовой хромодинамики в двухпетлевом приближении. В этом случае уравнение (3.8) записывается следующим образом:

$$\frac{d \ln[a_s^{(2)}(\mu^2)]}{d \ln \mu^2} = -a_s^{(2)}(\mu^2) - B_1 [a_s^{(2)}(\mu^2)]^2, \quad (3.16)$$

где  $B_1 = \beta_1/\beta_0^2$ . Действуя аналогично рассмотренному выше однопетлевому приближению, разделим переменные

$$\frac{d a_s^{(2)}(\mu^2)}{[a_s^{(2)}(\mu^2)]^2 [1 + B_1 a_s^{(2)}(\mu^2)]} = d \ln \mu^2. \quad (3.17)$$

<sup>16</sup> Обсуждение вопросов, которые касаются построения выражения для инвариантного заряда квантовой электродинамики, не содержащего нефизических особенностей, может быть найдено в работах [133-135].

Далее, интегрируя (3.17) в конечных пределах, приходим к трансцендентному уравнению<sup>17</sup>, определяющему вид двухпетлевой пертурбативной бегущей константы связи

$$\frac{1}{a_s^{(2)}(Q^2)} - B_1 \ln \left[ 1 + \frac{1}{B_1 a_s^{(2)}(Q^2)} \right] = \ln \left( \frac{Q^2}{\Lambda_{(2)}^2} \right). \quad (3.18)$$

В этом уравнении масштабный параметр  $\Lambda$  отличается от рассмотренного выше однопетлевого выражения (3.14), а именно

$$\Lambda_{(2)}^2 = \mu^2 \exp \left\{ -\frac{4\pi}{\beta_0} \frac{1}{\alpha_s^{(2)}(\mu^2)} + B_1 \ln \left[ 1 + \frac{1}{B_1} \frac{4\pi}{\beta_0} \frac{1}{\alpha_s^{(2)}(\mu^2)} \right] \right\}. \quad (3.19)$$

Здесь необходимо отметить, что теоретический анализ экспериментальных данных для некоторой наблюдаемой величины на различных петлевых уровнях будет приводить к разным значениям масштабного параметра теории. В высших петлевых приближениях, в силу того, что коэффициенты пертурбативного разложения рассматриваемой величины становятся схемно-зависимыми величинами, извлекаемые значения параметра  $\Lambda$  будут зависеть также и от используемой схемы вычитания. Помимо этого, значение масштабного параметра  $\Lambda$ , которое получено для некоторого фиксированного числа активных ароматов  $n_f$ , не может быть использовано в интервалах энергий, соответствующих другим значениям  $n_f$ . Действительно, коэффициенты пертурбативного разложения рассматриваемой величины, будучи зависимыми от числа активных ароматов  $n_f$ , меняют свои значения при переходе через порог рождения очередного кваркового аромата. Следовательно, для обеспечения непрерывности рассматриваемой величины на пороге рождения кварка, значение масштабного параметра  $\Lambda$  также должно измениться соответствующим образом<sup>18</sup>.

<sup>17</sup> Следует упомянуть о том, что существуют и другие первообразные левой части уравнения (3.17), отличающиеся от левой части уравнения (3.18) на аддитивную константу. Тем не менее, весь возможный произвол в этом случае устраняется соответствующим переопределением параметра  $\Lambda$  в правой части уравнения (3.18).

<sup>18</sup> Отметим, что в общем случае из непрерывности бегущей константы связи на пороге рождения очередного кваркового аромата не следует непрерывности всей пертурбативной аппроксимации рассматриваемой величины на этом пороге.

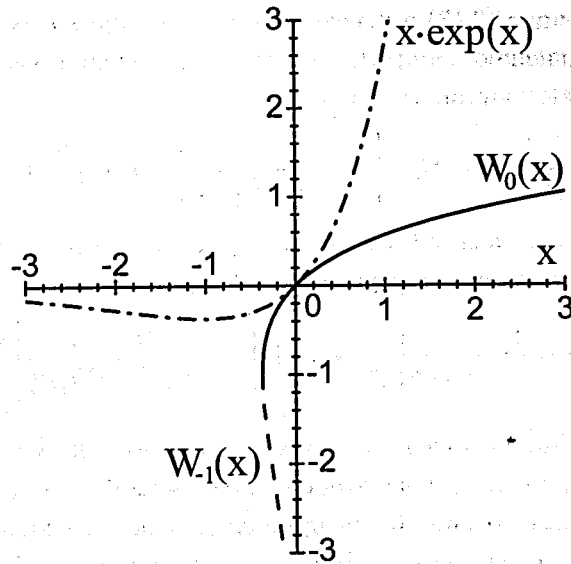


Рисунок 3.3. Функция  $x e^x$  (штрихпунктирная линия) и две действительные ветви  $W$ -функции Ламберта (3.20):  $W_0(x)$  (непрерывная линия) и  $W_{-1}(x)$  (пунктирная линия)

Подробное изложение метода переопределения параметра  $\Lambda$  при переходе через порог рождения кварка приведено в разделе 3.8 книги [16] и в разделе 2.3 обзора [122].

Решение уравнения (3.18) может быть представлено в явном виде [138, 139] в терминах так называемой  $W$ -функции Ламберта, которая определяется как многолистная функция  $W_k(x)$ , удовлетворяющая уравнению

$$W_k(x) \exp[W_k(x)] = x. \quad (3.20)$$

Здесь индекс  $k$  обозначает соответствующую ветвь  $W$ -функции Ламберта. Эта функция находит применение в различных областях физики с середины XVIII века [140]. Главная ветвь  $W$ -функции Ламберта  $W_0(x)$  и ветвь  $W_{-1}(x)$  принимают действительные значения на действительной оси  $\text{Re } x$  при  $-1/e \leq x < \infty$  и при  $-1/e \leq x < 0$  соответственно (см. рисунок 3.3). Все остальные ветви  $W$ -функции Ламберта (3.20) принимают мнимые значения. Для ветвей  $W_0(x)$  и  $W_{-1}(x)$

имеют место следующие разложения:

$$W_0(x) \simeq \ln x - \ln(\ln x) + \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} + \frac{\ln(\ln x)[\ln(\ln x) - 2]}{2 \ln^2 x} + \mathcal{O}\left[\frac{\ln^3(\ln x)}{\ln^3 x}\right], \quad x \rightarrow \infty, \quad (3.21)$$

$$W_0(x) \simeq x - x^2 + \frac{3}{2} x^3 - \frac{8}{3} x^4 + \mathcal{O}(x^5), \quad x \rightarrow 0, \quad (3.22)$$

$$W_0\left(-\frac{1}{e} + x\right) \simeq -1 + \sqrt{2ex} - \frac{1}{3} 2ex + \frac{11}{72} (2ex)^{3/2} + \mathcal{O}(x^2), \quad x \rightarrow 0_+, \quad (3.23)$$

$$W_{-1}\left(-\frac{1}{e} + x\right) \simeq -1 - \sqrt{2ex} - \frac{1}{3} 2ex - \frac{11}{72} (2ex)^{3/2} + \mathcal{O}(x^2), \quad x \rightarrow 0_+, \quad (3.24)$$

$$W_{-1}(-x) \simeq \ln x - \ln(-\ln x) + \frac{\ln(-\ln x)}{\ln x} + \frac{\ln(-\ln x)[\ln(-\ln x) - 2]}{2 \ln^2 x} + \mathcal{O}\left[\frac{\ln^3(-\ln x)}{\ln^3 x}\right], \quad x \rightarrow 0_+, \quad (3.25)$$

где  $e \simeq 2.718$  обозначает основание натурального логарифма. Детальный обзор свойств  $W$ -функции Ламберта и ее приложений приведен в работах [140–142].

Двухпетлевую пертурбативную бегущую константу связи  $\alpha_s^{(2)}(Q^2)$  можно выразить в терминах  $W$ -функции Ламберта, преобразовав уравнение (3.18) к виду (3.20). Для этого умножим обе части соотношения (3.18) на  $(-B_1^{-1})$  и добавим к левой и правой части полученного выражения  $(-1)$ :

$$-\left[1 + \frac{1}{B_1 a_s^{(2)}(Q^2)}\right] + \ln\left[1 + \frac{1}{B_1 a_s^{(2)}(Q^2)}\right] = -\left(1 + \frac{\ln z}{B_1}\right), \quad z = \frac{Q^2}{\Lambda^2}. \quad (3.26)$$

Далее, проэкспоненцируем уравнение (3.26) и умножим обе части полученного соотношения на  $(-1)$ :

$$-\left[1 + \frac{1}{B_1 a_s^{(2)}(Q^2)}\right] \exp\left\{-\left[1 + \frac{1}{B_1 a_s^{(2)}(Q^2)}\right]\right\} = -\exp\left[-\left(1 + \frac{\ln z}{B_1}\right)\right]. \quad (3.27)$$

Из сравнения уравнений (3.27) и (3.20) следует, что

$$-\left[1 + \frac{1}{B_1 a_s^{(2)}(Q^2)}\right] = W_k \left\{ -\exp \left[ -\left(1 + \frac{\ln z}{B_1}\right) \right] \right\}. \quad (3.28)$$

В силу того, что бегущая константа связи  $\alpha_s(Q^2)$  является вещественной функцией, в правой части уравнения (3.28) индекс ветви  $W$ -функции Ламберта может принимать значения  $k = 0$  или  $k = -1$ . При этом только то решение уравнения (3.28), которое соответствует значению  $k = -1$ , удовлетворяет физическому условию асимптотической свободы<sup>19</sup>  $\alpha_s(Q^2) \rightarrow 0$  при  $Q^2 \rightarrow \infty$ .

Таким образом, решение уравнения ренормализационной группы (3.8) для инвариантного заряда квантовой хромодинамики в двухпетлевом приближении принимает следующий вид [138, 139]:

$$\alpha_s^{(2)}(Q^2) = -\frac{4\pi}{\beta_0} \frac{1}{B_1} \frac{1}{1 + W_{-1} \left\{ -\exp \left[ -(1 + B_1^{-1} \ln z) \right] \right\}}, \quad z = \frac{Q^2}{\Lambda^2}, \quad (3.29)$$

где  $B_1 = \beta_1/\beta_0^2$ . Двухпетлевая пертурбативная бегущая константа связи (3.29) представлена на рисунке 3.1 непрерывной линией. Отметим, что, аналогично рассмотренному выше однопетлевому приближению (3.12), двухпетлевая бегущая константа связи квантовой хромодинамики  $\alpha_s^{(2)}(Q^2)$  также может быть выражена в терминах переменных  $Q^2$ ,  $Q_0^2$  и  $\alpha_s^{(2)}(Q_0^2)$ , а именно

$$\alpha_s^{(2)}(Q^2) = -\frac{4\pi}{\beta_0} \frac{1}{B_1} \frac{1}{1 + W_{-1} \left[ -y_0 \exp(-y_0) (Q^2/Q_0^2)^{-1/B_1} \right]}, \quad (3.30)$$

где

$$y_0 = 1 + \frac{1}{B_1} \frac{4\pi}{\beta_0} \frac{1}{\alpha_s^{(2)}(Q_0^2)}. \quad (3.31)$$

При этом выражения (3.29) и (3.30) являются полностью эквивалентными друг другу.

<sup>19</sup> Решение уравнения (3.28), соответствующее главной ветви  $W$ -функции Ламберта ( $k = 0$ ), обладает асимптотическим поведением  $\alpha_s^{(2)}(Q^2) \rightarrow -4\pi\beta_0/\beta_1$  при  $Q^2 \rightarrow \infty$ , которое является нефизическим.

Анализ аналитических свойств двухпетлевого инвариантного заряда квантовой хромодинамики  $\alpha_s^{(2)}(Q^2)$  (3.29) по кинематической переменной  $Q^2$  (см., например, работу [138]) показывает, что учет высших петлевых поправок не приводит к устранению нефизических особенностей у решения уравнения ренормализационной группы (3.8) для бегущей константы связи сильного взаимодействия  $\alpha_s(Q^2)$ . Напротив, на двухпетлевом уровне пертурбативный инвариантный заряд  $\alpha_s^{(2)}(Q^2)$  (3.29) приобретает дополнительную нефизическую особенность по кинематической переменной  $Q^2$ , а именно разрез  $0 < Q^2 \leq \Lambda^2$  вдоль положительной части действительной оси  $\text{Re } Q^2$  (см. рисунок 3.2 В).

Следует также отметить, что на практике вместо выражения (3.29) часто используется как итеративное решение уравнения (3.18)

$$\alpha_{\text{iter}}^{(2)}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0} \frac{1}{\ln z + B_1 \ln(1 + B_1^{-1} \ln z)}, \quad (3.32)$$

так и его приближенный вид (см., например, раздел 3.7 книги [16])

$$\alpha_{\text{appr}}^{(2)}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0} \left[ \frac{1}{\ln z} - B_1 \frac{\ln(\ln z)}{\ln^2 z} \right]. \quad (3.33)$$

Бегущая константа связи (3.33) представляет собой разложение итеративного решения (3.32) при  $Q^2 \rightarrow \infty$ .

В трехпетлевом приближении уравнение ренормализационной группы для инвариантного заряда квантовой хромодинамики (3.8) принимает следующий вид:

$$\frac{d \ln[a_s^{(3)}(\mu^2)]}{d \ln \mu^2} = -a_s^{(3)}(\mu^2) - B_1 [a_s^{(3)}(\mu^2)]^2 - B_2 [a_s^{(3)}(\mu^2)]^3, \quad (3.34)$$

где  $B_1 = \beta_1/\beta_0^2$  и  $B_2 = \beta_2/\beta_0^3$ . Действуя аналогично рассмотренным выше случаям, можно проинтегрировать уравнение (3.34) в конечных пределах. Однако это приводит к трансцендентному уравнению, определяющему вид трехпетлевой бегущей константы связи, решение которого не может быть выражено в терминах известных функций. Тем не менее, решение уравнения ренормализацион-

ной группы для инвариантного заряда (3.34) может быть представлено [138] в терминах  $W$ -функции Ламберта (3.20) при использовании так называемой Паде-аппроксимации для пертурбативного разложения  $\beta$ -функции<sup>20</sup>. А именно для малых значений бегущей константы связи правая часть уравнения (3.34) может быть аппроксимирована функцией

$$\beta_{\text{Padé}}^{(3)}(a) = -a \frac{1 + a(B_1 - B_2/B_1)}{1 - aB_2/B_1}. \quad (3.35)$$

Действительно, при малых значениях инвариантного заряда  $\alpha_s$  выражение (3.35) совпадает с трехпетлевой пертурбативной  $\beta$ -функцией (3.2) с точностью до неконтролируемых в рассматриваемом трехпетлевом приближении поправок порядка  $\mathcal{O}[(\alpha_s)^4]$ :

$$\beta_{\text{Padé}}^{(3)}(a) \simeq -a - B_1 a^2 - B_2 a^3 + \mathcal{O}(a^4) = \beta_{\text{pert}}^{(3)}(a) + \mathcal{O}(a^4), \quad a \rightarrow 0_+. \quad (3.36)$$

Итак, рассмотрим решение уравнения ренормализационной группы (3.8) для бегущей константы связи сильного взаимодействия, соответствующее приближенному выражению (3.35) для трехпетлевой пертурбативной  $\beta$ -функции

$$\frac{d \ln [a_{\text{Padé}}^{(3)}(\mu^2)]}{d \ln \mu^2} = -a_{\text{Padé}}^{(3)}(\mu^2) \frac{1 + a_{\text{Padé}}^{(3)}(\mu^2)(B_1 - B_2/B_1)}{1 - a_{\text{Padé}}^{(3)}(\mu^2)B_2/B_1}. \quad (3.37)$$

Разделяя переменные и интегрируя в конечных пределах полученное уравнение, приходим к соотношению

$$\frac{1}{a_{\text{Padé}}^{(3)}(Q^2)} - B_1 \ln \left[ \frac{1}{B_1 a_{\text{Padé}}^{(3)}(Q^2)} + 1 - \frac{B_2}{B_1} \right] = \ln \left( \frac{Q^2}{\Lambda_{(3)}^2} \right), \quad (3.38)$$

где масштабный параметр  $\Lambda$  по определению включает в себя все слагаемые, содержащие зависимость от точки нормировки  $Q_0^2$  и от значения бегущей константы связи в этой точке. Действуя аналогично

<sup>20</sup> Необходимо отметить, что использование Паде-аппроксимации для пертурбативного разложения  $\beta$ -функции приводит к изменению вида нефизической особенности бегущей константы связи в области малых энергий.

но рассмотренному выше двухпетлевому случаю, представим уравнение (3.38) в виде

$$\left[ \frac{B_2}{B_1^2} - 1 - \frac{1}{B_1 a_{\text{Padé}}^{(3)}(Q^2)} \right] \exp \left[ \frac{B_2}{B_1^2} - 1 - \frac{1}{B_1 a_{\text{Padé}}^{(3)}(Q^2)} \right] = - \exp \left[ \frac{B_2}{B_1^2} - 1 - \frac{\ln z}{B_1} \right]. \quad (3.39)$$

Из сравнения уравнений (3.39) и (3.20) следует, что

$$\frac{B_2}{B_1^2} - 1 - \frac{1}{B_1 a_{\text{Padé}}^{(3)}(Q^2)} = W_k \left\{ - \exp \left[ \frac{B_2}{B_1^2} - 1 - \frac{\ln z}{B_1} \right] \right\}. \quad (3.40)$$

Таким образом, решение уравнения ренормализационной группы (3.37) для инвариантного заряда квантовой хромодинамики, соответствующее приближенному выражению (3.35) для трехпетлевой пертурбативной  $\beta$ -функции, принимает вид [138]:

$$\alpha_{\text{Padé}}^{(3)}(Q^2) = - \frac{4\pi}{\beta_0} \frac{1}{B_1} \frac{1}{1 + W_{-1} \left\{ - \exp \left[ -(1 + B_1^{-1} \ln z - B_2/B_1^2) \right] \right\} - B_2/B_1^2}, \quad (3.41)$$

где  $z = Q^2/\Lambda^2$ ,  $B_1 = \beta_1/\beta_0^2$  и  $B_2 = \beta_2/\beta_0^3$ . Аналогично рассмотренному выше двухпетлевому случаю, решение уравнения (3.40), соответствующее главной ветви  $W$ -функции Ламберта ( $k = 0$ ), не удовлетворяет физическому условию асимптотической свободы  $\alpha_s(Q^2) \rightarrow 0$  при  $Q^2 \rightarrow \infty$ . Заметим, что в случае  $\beta_2 = 0$  приближенная  $\beta$ -функция (3.35) совпадает с двухпетлевым пертурбативным выражением (3.2), а бегущая константа связи (3.41) совпадает с уравнением (3.29). Следует также отметить, что для практических целей вместо уравнения (3.41), как правило, используется приближенный вид итеративного решения уравнения ренормализационной группы (3.34) (см., например, раздел 3.7 книги [16]):

$$\alpha_{\text{appr}}^{(3)}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0} \left\{ \frac{1}{\ln z} - B_1 \frac{\ln(\ln z)}{\ln^2 z} + \frac{1}{\ln^3 z} \left[ B_1^2 (\ln^2(\ln z) - \ln(\ln z) - 1) + B_2 \right] \right\}. \quad (3.42)$$

На четырехпетлевом уровне, в силу громоздкости выкладок, приведем только приближенное выражение для итеративного решения уравнения ренормализационной группы (3.8) для бегущей константы связи сильного взаимодействия [128, 129]:

$$\alpha_{\text{appr}}^{(4)}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0} \left\{ \frac{1}{\ln z} - B_1 \frac{\ln(\ln z)}{\ln^2 z} + \frac{1}{\ln^3 z} \left[ B_1^2 (\ln^2(\ln z) - \ln(\ln z) - 1) + B_2 \right] + \frac{1}{\ln^4 z} \left[ B_1^3 \left( -\ln^3(\ln z) + \frac{5}{2} \ln^2(\ln z) + 2 \ln(\ln z) - \frac{1}{2} \right) - 3B_1 B_2 \ln(\ln z) + \frac{B_3}{2} \right] \right\}. \quad (3.43)$$

Необходимо отметить, что в трехпетлевом и четырехпетлевом приближениях как точные решения пертурбативного уравнения ренормализационной группы (3.8) для инвариантного заряда квантовой хромодинамики, так и их приближенные выражения (3.42) и (3.43) также содержат нефизические особенности по кинематической переменной  $Q^2$  в области малых энергий. Следует упомянуть о том, что различие между приближенными выражениями для бегущей константы связи сильного взаимодействия  $\alpha_{\text{appr}}^{(\ell)}(Q^2)$  ( $\ell \geq 2$ ) (3.33), (3.42), (3.43) и соответствующими точными решениями пертурбативного уравнения ренормализационной группы (3.8) заключается в слагаемых, неконтролируемых в каждом из рассмотренных порядков теории возмущений.

## Глава 4

### Дисперсионный подход в КХД

В теоретической физике элементарных частиц важную роль играют дисперсионные соотношения, которые представляют собой один из источников непертурбативной информации о рассматриваемых процессах. Кроме этого, теоретическое описание адронной динамики во времениподобной области может быть выполнено только с привлечением дисперсионных соотношений.

#### 4.1 Интегральные представления для $D(Q^2)$ и $R(s)$ ( $m_\pi = 0$ )

Как уже отмечалось ранее, теория возмущений и метод ренормализационной группы применимы для описания процессов сильного взаимодействия, зависящих только от пространственноподобной кинематической переменной. В свою очередь, последовательный анализ адронной динамики во времениподобной области может быть выполнен только с дополнительным привлечением дисперсионных соотношений (см. раздел 2.1). В частности, для самосогласованного описания функции Адлера (2.1) и  $R$ -отношения электрон-позитронной аннигиляции в адроны (1.13) необходимо использовать уравнения (2.2) и (2.4), которые позволяют выразить рассматриваемые величины  $D(Q^2)$  и  $R(s)$  в терминах друг друга. Для практических целей оказывается более удобным выразить функцию Адлера (2.1) и  $R$ -отношение (1.13) в терминах так называемой спектральной функ-

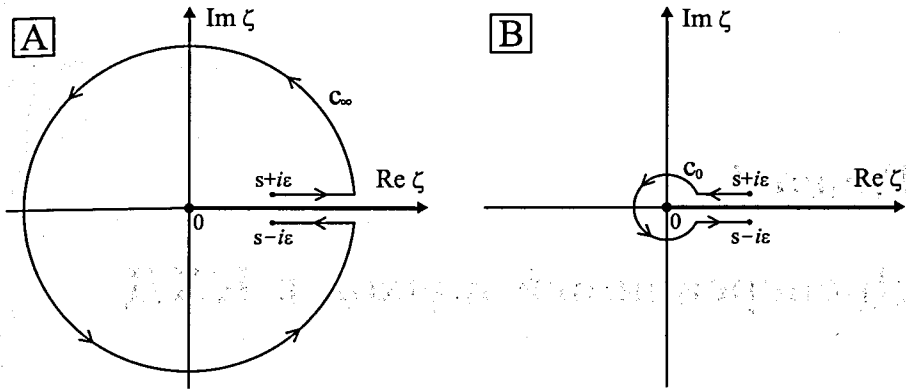


Рисунок 4.1. Возможные контуры интегрирования в комплексной  $\zeta$ -плоскости в уравнениях (4.2) и (4.14) в пределе безмассового  $\pi$ -мезона. Физический разрез  $\zeta \geq 0$  функции Адлера  $D(-\zeta)$  показан вдоль положительной части действительной оси  $\text{Re } \zeta$ .

ции, которая может быть определена либо как скачок мнимой части теоретического выражения для  $D(Q^2)$  на физическом разрезе, либо как логарифмическая производная экспериментальных данных по  $R$ -отношению (см. уравнение (4.25) далее).

Для того, чтобы представить функцию Адлера и  $R$ -отношение электрон-позитронной аннигиляции в адроны в терминах общей спектральной функции, будем использовать соотношения (2.2) и (2.4), которые в пределе безмассового  $\pi$ -мезона ( $m_\pi = 0$ ) принимают следующий вид:

$$D(Q^2) = Q^2 \int_0^\infty \frac{R(s)}{(s + Q^2)^2} ds, \quad (4.1)$$

$$R(s) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{s+i\epsilon}^{s-i\epsilon} D(-\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}. \quad (4.2)$$

Возможные контуры интегрирования в уравнении (4.2) представлены на рисунке 4.1. Здесь необходимо особо подчеркнуть, что пренебрегать эффектами, обусловленными массой легчайшего адронного состояния, допустимо только в области промежуточных и высоких

энергий  $Q^2 \gg 4m_\pi^2$ . Так, например, в безмассовом пределе ( $m_\pi = 0$ ) одно из важных непertурбативных ограничений на низкоэнергетическое поведение функции Адлера, следующих из дисперсионного соотношения (2.2), а именно  $D(Q^2) \rightarrow 0$  при  $Q^2 \rightarrow 0$  (см. раздел 2.1), оказывается исключенным из рассмотрения.

Для начала, пренебрежем сильными поправками к адронной функции поляризации вакуума (1.5) и рассмотрим функцию Адлера (2.1) и  $R$ -отношение (1.13) в нулевом порядке теории возмущений по константе связи сильного взаимодействия. Как было показано выше, в этом случае  $D(Q^2)$  определяется предсказанием партонной модели для функции Адлера (2.40)

$$\bar{D}^{(0)}(Q^2) = 1, \quad (4.3)$$

где

$$\bar{D}(Q^2) = D(Q^2) \left( N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \right)^{-1}. \quad (4.4)$$

В свою очередь, в силу того, что в пределе больших энергий единственное отличие между сечениями процессов электрон-позитронной аннигиляции по сильному и электрослабому каналам заключается в факторе  $N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2$ , предсказание партонной модели для  $R$ -отношения (1.15) имеет вид (1.37)

$$\bar{R}^{(0)}(s) = 1, \quad (4.5)$$

где

$$\bar{R}(s) = R(s) \left( N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \right)^{-1}. \quad (4.6)$$

Здесь необходимо отметить, что, строго говоря, выражения (4.3) и (4.5) имеют силу исключительно в ультрафиолетовой асимптотике  $|Q^2| \rightarrow \infty$ . Однако далее будем считать, что уравнения (4.3) и (4.5) верны во всей энергетической области  $|Q^2| \geq 0$ , что, разумеется, является довольно грубым предположением.

Очевидно, что в рассматриваемом безмассовом пределе для функций  $\bar{D}(Q^2)$  (4.4) и  $\bar{R}(s)$  (4.6) также выполняются соотношения вида (4.1) и (4.2). В частности, нетрудно убедиться в том, что выражения (4.3) и (4.5) могут быть получены друг из друга с помощью соотношений (4.1) и (4.2). Действительно, выражение (4.3) непосредственно следует из уравнений (4.1) и (4.5):

$$\bar{D}^{(0)}(Q^2) = Q^2 \int_0^\infty \frac{\bar{R}^{(0)}(s)}{(s+Q^2)^2} ds = Q^2 \int_0^\infty \frac{ds}{(s+Q^2)^2} = 1. \quad (4.7)$$

В свою очередь, из выражений (4.2) и (4.3) следует, что

$$\bar{R}^{(0)}(s) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int_{s+i\varepsilon}^{s-i\varepsilon} \bar{D}^{(0)}(-\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int_{s+i\varepsilon}^{s-i\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta}. \quad (4.8)$$

Выберем в этом уравнении контур интегрирования, представленный на рисунке 4.1 А. В этом случае

$$\bar{R}^{(0)}(s) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \left[ \int_{s+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{\infty-i\varepsilon}^{s-i\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta} \right]. \quad (4.9)$$

В силу того, что подынтегральное выражение в уравнении (4.8) не имеет разреза вдоль положительной части действительной оси  $\text{Re } \zeta$ , первое слагаемое в квадратных скобках в уравнении (4.9) сокращается с третьим слагаемым. Во втором слагаемом в квадратных скобках в уравнении (4.9) сделаем замену переменной интегрирования  $\zeta = r e^{i\varphi}$ ,  $r \rightarrow \infty$ :

$$\bar{R}^{(0)}(s) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \frac{r i e^{i\varphi}}{r e^{i\varphi}} d\varphi = 1. \quad (4.10)$$

Таким образом, полученное уравнение совпадает с выражением (4.5). Аналогично можно показать, что интегрирование уравнения (4.8) по контуру, представленному на рисунке 4.1 В, приводит к результату, идентичному (4.10).

Перейдем теперь к рассмотрению сильных поправок к функции Адлера (2.1) и  $R$ -отношению электрон-позитронной аннигиляции в адроны (1.13):

$$\bar{D}(Q^2) = \bar{D}^{(0)}(Q^2) + d(Q^2), \quad (4.11)$$

$$\bar{R}(s) = \bar{R}^{(0)}(s) + r(s). \quad (4.12)$$

В силу того, что интегральные соотношения (4.1) и (4.2) между функциями  $D(Q^2)$  и  $R(s)$  обладают свойством аддитивности, сильные поправки (4.11) и (4.12) также связаны между собой аналогичными соотношениями. А именно в рассматриваемом приближении безмассового  $\pi$ -мезона

$$d(Q^2) = Q^2 \int_0^\infty \frac{r(s)}{(s+Q^2)^2} ds, \quad (4.13)$$

$$r(s) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int_{s+i\varepsilon}^{s-i\varepsilon} d(-\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}. \quad (4.14)$$

Возможные контуры интегрирования в уравнении (4.14) представлены на рисунке 4.1.

Соотношение (4.14) позволяет выразить сильную поправку  $r(s)$  к  $R$ -отношению электрон-позитронной аннигиляции в адроны в терминах сильной поправки  $d(Q^2)$  к функции Адлера. В уравнении (4.14) удобно выбрать контур интегрирования, представленный на рисунке 4.1 А. В этом случае

$$r(s) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \left[ \int_{s+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} d(-\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{\infty}^{\infty} d(-\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{\infty-i\varepsilon}^{s-i\varepsilon} d(-\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \right]. \quad (4.15)$$

Первое слагаемое в квадратных скобках этого уравнения с помощью замены переменной  $\zeta = \sigma + i\varepsilon$  может быть преобразовано следующим образом:

$$\int_{s+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} d(-\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_s^\infty d(-\sigma - i\varepsilon) \frac{d\sigma}{\sigma} + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (4.16)$$

Аналогично, после замены переменной  $\zeta = \sigma - i\varepsilon$  третье слагаемое в квадратных скобках уравнения (4.15) принимает вид

$$\int_{\infty - i\varepsilon}^{s - i\varepsilon} d(-\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = - \int_s^{\infty} d(-\sigma + i\varepsilon) \frac{d\sigma}{\sigma} + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (4.17)$$

В свою очередь, интегрирование выражения  $d(-\zeta)/\zeta$  вдоль окружности бесконечно большого радиуса (второе слагаемое в квадратных скобках уравнения (4.15)) не дает вклада в  $r(s)$  в силу асимптотической свободы квантовой хромодинамики. Таким образом, уравнение (4.15) может быть представлено следующим образом:

$$r(s) = \int_s^{\infty} \rho_D(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma}. \quad (4.18)$$

Здесь

$$\rho_D(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \left[ d_{\text{theor}}(-\sigma - i\varepsilon) - d_{\text{theor}}(-\sigma + i\varepsilon) \right] \quad (4.19)$$

представляет собой вышеупомянутую спектральную функцию. Заметим, что для тех функций  $d(Q^2)$ , для которых выполняется условие  $d(\zeta^*) = d^*(\zeta)$ , уравнение (4.19) принимает вид

$$\rho_D(\sigma) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} d_{\text{theor}}(-\sigma - i\varepsilon). \quad (4.20)$$

Следует также упомянуть о том, что интегрирование уравнения (4.14) по контуру, представленному на рисунке 4.1 В, приводит к результату, совпадающему<sup>21</sup> с уравнением (4.18). Действительно, в этом случае

$$r(s) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \left[ \int_{s+i\varepsilon}^{0+i\varepsilon} d(-\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{c_0}^{\infty} d(-\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{0-i\varepsilon}^{s-i\varepsilon} d(-\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \right]. \quad (4.21)$$

<sup>21</sup> Это верно только в том случае, когда в уравнении (4.14) используется сильная поправка к функции Адлера, обладающая корректными аналитическими свойствами по кинематической переменной  $Q^2$ .

С помощью преобразований, аналогичных (4.16) и (4.17), можно представить уравнение (4.21) следующим образом:

$$r(s) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int_{c_0}^s d(-\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} - \int_0^s \rho_D(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma}, \quad (4.22)$$

где спектральная функция  $\rho_D(\sigma)$  определена в уравнении (4.19). В приближении безмассового  $\pi$ -мезона для сильной поправки к функции Адлера имеет место интегральное представление (4.30). Этот факт позволяет представить уравнение (4.22) в следующем виде:

$$r(s) = \int_0^{\infty} \rho_D(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} - \int_0^s \rho_D(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} = \int_s^{\infty} \rho_D(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma}, \quad (4.23)$$

что совпадает с полученным выше результатом (4.18). Идентичность выражений (4.18) и (4.23) обусловлена тем фактом, что контуры интегрирования в уравнении (4.14), представленные на рисунках 4.1 А и 4.1 В, могут быть непрерывно деформированы<sup>22</sup> друг в друга.

Необходимо отметить, что в рамках рассматриваемого подхода спектральная функция  $\rho_D(\sigma)$  (4.19) может быть также определена из экспериментальных данных по  $R(s)$  (1.15). А именно дифференцирование уравнения (4.18) по  $d \ln s$  приводит к следующему результату [80–82]:

$$\rho_D(\sigma) = - \frac{dr_{\text{exp}}(\sigma)}{d \ln \sigma}. \quad (4.24)$$

Это соотношение позволяет найти значения спектральной функции  $\rho_D(\sigma)$  в том интервале энергий, в котором проводились экспериментальные измерения  $R$ -отношения электрон-позитронной аннигиляции в адроны (см. разделы 1.3 и 2.3).

<sup>22</sup> Заметим, что это выполняется исключительно для тех функций  $d(Q^2)$ , которые обладают корректными аналитическими свойствами по кинематической переменной  $Q^2$ . А именно в рассматриваемом приближении безмассового  $\pi$ -мезона из дисперсионного соотношения для функции Адлера (4.1) и уравнения (4.11) следует, что сильная поправка  $d(Q^2)$  должна иметь только левый разрез  $Q^2 \leq 0$  вдоль отрицательной части действительной оси  $\text{Re } Q^2$ .



Следует упомянуть о том, что предсказание партонной модели для функции Адлера (4.3) не обладает разрезом по кинематической переменной  $Q^2$  вдоль отрицательной части действительной оси  $\text{Re } Q^2$ . Кроме этого, предсказание партонной модели для  $R$ -отношения (4.5) не содержит зависимости от энергии процесса аннигиляции  $s$ . Поэтому выражения для спектральной функции  $\rho_D(\sigma)$  (4.19) и (4.24) могут быть также представлены в виде (см. работы [80–82]):

$$\rho_D(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \left[ \bar{D}_{\text{theor}}(-\sigma - i\epsilon) - \bar{D}_{\text{theor}}(-\sigma + i\epsilon) \right] = -\frac{d\bar{R}_{\text{exp}}(\sigma)}{d \ln \sigma}. \quad (4.25)$$

Из того факта, что  $R$ -отношение электрон-позитронной аннигиляции в адроны имеет резонансную структуру (см. рисунок 1.4) следует, что  $\rho_D(\sigma)$  (4.25) является знакопеременной функцией. Так, для резонанса вида Брейта–Вигнера (см., например, работу [143])

$$R_{\text{BW}}(s) \simeq \frac{\Gamma M^3}{(s - M^2)^2 + \Gamma^2 M^2} \quad (4.26)$$

выражение (4.25) принимает вид

$$\rho_{\text{BW}}(\sigma) \simeq \frac{2\Gamma M^3 \sigma(\sigma - M^2)}{[(\sigma - M^2)^2 + \Gamma^2 M^2]^2}. \quad (4.27)$$

В уравнениях (4.26) и (4.27) параметры  $M$  и  $\Gamma$  характеризуют массу и ширину резонансного состояния соответственно. Здесь следует также отметить, что  $\rho_{\text{BW}}(M^2) = 0$ .

В свою очередь, сильную поправку к функции Адлера (4.11) можно представить в терминах спектральной функции  $\rho_D(\sigma)$  с помощью соотношений (4.13) и (4.18):

$$d(Q^2) = Q^2 \int_0^\infty \frac{ds}{(s + Q^2)^2} \int_s^\infty \rho_D(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma}. \quad (4.28)$$

Здесь удобно воспользоваться техникой интегрирования по частям. В этом случае уравнение (4.28) может быть представлено следующим

образом:

$$d(Q^2) = -\frac{Q^2}{s + Q^2} \int_s^\infty \rho_D(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} \Big|_{s=0}^{s=\infty} - Q^2 \int_0^\infty \frac{\rho_D(s)}{s + Q^2} \frac{ds}{s}. \quad (4.29)$$

После несложных алгебраических преобразований выражение (4.29) принимает вид спектрального интеграла Челлена–Леманна

$$d(Q^2) = \int_0^\infty \frac{\rho_D(\sigma)}{\sigma + Q^2} d\sigma. \quad (4.30)$$

Здесь  $\rho_D(\sigma)$  может быть определена либо как скачок мнимой части теоретического выражения для функции Адлера на физическом разрезе (4.19), либо как логарифмическая производная экспериментальных данных по  $R$ -отношению (4.24).

Таким образом, в рассматриваемом приближении безмассового  $\pi$ -мезона для функции Адлера (2.1) и для  $R$ -отношения электрон-позитронной аннигиляции в адроны (1.13) имеют место следующие интегральные представления<sup>23</sup>:

$$D(Q^2) = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[ 1 + \int_0^\infty \frac{\rho_D(\sigma)}{\sigma + Q^2} d\sigma \right], \quad (4.31)$$

$$R(s) = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[ 1 + \int_s^\infty \rho_D(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} \right], \quad (4.32)$$

где

$$\rho_D(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \left[ \bar{D}_{\text{theor}}(-\sigma - i\epsilon) - \bar{D}_{\text{theor}}(-\sigma + i\epsilon) \right] = -\frac{d\bar{R}_{\text{exp}}(\sigma)}{d \ln \sigma}. \quad (4.33)$$

Отметим, что уравнение (4.31) автоматически учитывает непertурбативное ограничение на функцию Адлера, вытекающее из соответствующего дисперсионного соотношения в пределе безмассового  $\pi$ -мезона.

<sup>23</sup> Здесь необходимо подчеркнуть, что, при определенном выборе выражения для спектральной функции  $\rho_D(\sigma)$ , уравнения (4.31) и (4.32) совпадают с результатами так называемой Аналитической теории возмущений [144, 145], см. раздел 4.2.

А именно из уравнения (4.1) следует, что функция Адлера  $D(Q^2)$  имеет только левый разрез  $Q^2 \leq 0$  по кинематической переменной  $Q^2$  вдоль отрицательной части действительной оси  $\text{Re } Q^2$  (см. раздел 2.1), что, очевидно, выполняется для выражения (4.31). В свою очередь, уравнение (4.32) по построению учитывает эффекты, обусловленные продолжением теоретических результатов из пространственноподобной во времениподобную область (см. обсуждение этого вопроса в разделе 4.2).

Интегральные представления (4.31) и (4.32) были получены для функций  $D(Q^2)$  и  $R(s)$ , которые удовлетворяют соотношениям (4.1) и (4.2). Дополнительно были сделаны предположения о предсказаниях партонной модели<sup>24</sup> для рассматриваемых функций (4.3) и (4.5), а также был учтен тот факт, что сильная поправка к функции Адлера стремится к нулю в ультрафиолетовом пределе ( $d(Q^2) \rightarrow 0$  при  $Q^2 \rightarrow \infty$ ) в силу асимптотической свободы квантовой хромодинамики. Никаких других предположений о функциях  $D(Q^2)$  и  $R(s)$  для вывода уравнений (4.31) и (4.32) не требуется.

## 4.2 Вычисление функции Адлера и $R$ -отношения

Для вычисления функции Адлера  $D(Q^2)$  и  $R$ -отношения электрон-позитронной аннигиляции в адроны  $R(s)$  с помощью полученных в предыдущем разделе интегральных представлений (4.31) и (4.32) необходимо располагать соответствующим выражением для спектральной функции  $\rho_D(\sigma)$  (4.33). Однако ни один из вышеперечисленных способов определения спектральной функции не позволяет найти  $\rho_D(\sigma)$  для произвольных значений своего аргумента. В частности, на основании выражения (4.24) можно найти значения  $\rho_D(\sigma)$  лишь в том интервале энергий  $\sigma$ , в котором проводились экспериментальные измерения  $R$ -отношения (1.15). В свою очередь, вычисление спектральной функции с помощью определения (4.19) сопряже-

<sup>24</sup> Фактически здесь достаточно сделать предположение только для одной из функций (4.3) или (4.5), так как они могут быть получены друг из друга с помощью соотношений (4.1) и (4.2), см. уравнения (4.7)–(4.10).

но с трудностями, обусловленными отсутствием “точного” теоретического выражения для функции Адлера  $D_{\text{theor}}(Q^2)$ . Действительно, теория возмущений позволяет найти только приближенное выражение  $D_{\text{pert}}(Q^2)$  (2.42) для функции Адлера, которое имеет силу исключительно в области больших энергий  $Q^2 \rightarrow \infty$ . Из того факта, что пертурбативная аппроксимация  $D_{\text{pert}}(Q^2)$  функции Адлера содержит нефизические особенности по кинематической переменной  $Q^2$  в области малых энергий (см. раздел 2.2) вытекает, что выражение  $D_{\text{pert}}(Q^2)$  (2.42) несовместимо ни с дисперсионным соотношением (2.2), ни с полученным выше интегральным представлением (4.31). В частности, из этого следует, что при использовании пертурбативного выражения  $d_{\text{pert}}(Q^2)$  в уравнении (4.14) контур интегрирования, представленный на рисунке 4.1 А, уже не может быть непрерывно деформирован в контур интегрирования, представленный на рисунке 4.1 В. В конечном итоге, вышеупомянутое несоответствие между результатом теории возмущений  $D_{\text{pert}}(Q^2)$  (2.42) и дисперсионным соотношением для функции Адлера (2.2) приводит к неоднозначности<sup>25</sup> определения спектральной функции  $\rho_D(\sigma)$  (4.33) на основании пертурбативного выражения  $D_{\text{pert}}(Q^2)$ . Обсуждение этого вопроса представлено в работах [146–151] и цитируемой там литературе.

В дальнейшем, для спектральной функции  $\rho_D(\sigma)$  будем использовать определение (4.19). При этом, несмотря на вышеперечисленные замечания, в качестве “точного” выражения для сильной поправки к функции Адлера  $d_{\text{theor}}(Q^2)$  будем использовать пертурбативную аппроксимацию  $d_{\text{pert}}(Q^2)$  (2.42):

$$\rho_{\text{pert}}(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ d_{\text{pert}}(-\sigma - i\epsilon) - d_{\text{pert}}(-\sigma + i\epsilon) \right], \quad (4.34)$$

что является довольно грубым предположением. Здесь и далее мы ограничимся только пертурбативной аппроксимацией спектральной

<sup>25</sup> Действительно, задача по определению явного вида функции Адлера  $D(Q^2)$  на основании только интегрального представления (4.31) и асимптотического выражения (2.42) не имеет единственного решения.

функции  $\rho(\sigma) = \rho_{\text{pert}}(\sigma)$  (4.34) и не будем рассматривать другие возможные способы определения  $\rho(\sigma)$  на основании результатов теории возмущений, см., например, работы [146–148].

Интегральные представления для функции Адлера  $D(Q^2)$  (4.31) и  $R$ -отношения электрон-позитронной аннигиляции в адроны  $R(s)$  (4.32) в случае  $\rho_D(\sigma) = \rho_{\text{pert}}(\sigma)$  (4.34) совпадают с выражениями для функций  $D(Q^2)$  и  $R(s)$ , полученными в рамках так называемой Аналитической теории возмущений, которая была предложена в работах [144, 145] и активно развивается в последнее время. Использование Аналитической теории возмущений позволяет расширить границы применимости пертурбативных вычислений в квантовой хромодинамике в области малых энергий. В частности, этот метод предоставляет возможность устранить пертурбативные нефизические особенности у рассматриваемых величин. Помимо этого, полученные в рамках Аналитической теории возмущений результаты обладают повышенной<sup>26</sup> устойчивостью по отношению как к высшим петлевым поправкам, так и к выбору схемы вычитания. Аналитическая теория возмущений успешно применяется при изучении таких актуальных задач современной физики элементарных частиц, как мезонный спектр [152–155], конфайнмент кварков [146, 148, 156, 157], правила сумм [158–161], нарушение киральной симметрии [162–164], электромагнитный форм-фактор пиона [165–168] и многих других. Детальный обзор Аналитической теории возмущений и ее приложений может быть найден в работах [145, 169–171] и цитируемой там литературе.

Перейдем теперь к вычислению спектральной функции (4.34), соответствующей однопетлевому пертурбативному выражению для сильной поправки к функции Адлера (2.41). В этом случае

$$\rho_{\text{pert}}^{(1)}(\sigma) = \frac{4}{\beta_0} \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \left\{ \frac{1}{\ln[-(\sigma/\Lambda^2) - i\varepsilon]} - \frac{1}{\ln[-(\sigma/\Lambda^2) + i\varepsilon]} \right\}, \quad (4.35)$$

где  $\beta_0 = 11 - 2n_f/3$ . С учетом того, что  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \ln(-x \pm i\varepsilon) = \ln x \pm i\pi$  при  $x > 0$ , уравнение (4.35) может быть представлено следующим

<sup>26</sup> По сравнению с результатами стандартной теории возмущений.

образом:

$$\rho_{\text{pert}}^{(1)}(\sigma) = \frac{4}{\beta_0} \frac{1}{2\pi i} \left[ \frac{1}{\ln(\sigma/\Lambda^2) - i\pi} - \frac{1}{\ln(\sigma/\Lambda^2) + i\pi} \right]. \quad (4.36)$$

После несложных алгебраических преобразований это выражение принимает вид

$$\rho_{\text{pert}}^{(1)}(\sigma) = \frac{4}{\beta_0} \varrho_1^{(1)}(\sigma), \quad \varrho_1^{(1)}(\sigma) = \frac{1}{\ln^2(\sigma/\Lambda^2) + \pi^2}. \quad (4.37)$$

На высших петлевых уровнях сильная поправка к функции Адлера  $d_{\text{pert}}(Q^2)$  (2.42) представляет собой ряд по степеням бегущей константы связи сильного взаимодействия  $\alpha_s^{(\ell)}(Q^2)$  в рассматриваемом петлевом приближении. Явные выражения для пертурбативной спектральной функции  $\rho_{\text{pert}}^{(\ell)}(\sigma)$  (4.34), которые соответствуют  $\ell$ -петлевой сильной поправке к функции Адлера  $d_{\text{pert}}^{(\ell)}(Q^2)$  ( $1 \leq \ell \leq 4$ ), приведены в приложении II.

Итак, в рассматриваемом приближении безмассового  $\pi$ -мезона теоретическое выражение для  $R$ -отношения электрон-позитронной аннигиляции в адроны (4.32) на однопетлевом уровне принимает вид

$$R_{\text{АПТ}}^{(1)}(s) = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[ 1 + \int_s^{\infty} \rho_{\text{pert}}^{(1)}(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} \right], \quad (4.38)$$

где  $\rho_{\text{pert}}^{(1)}(\sigma)$  обозначает пертурбативную спектральную функцию (4.37). С учетом того<sup>27</sup>, что

$$\int \frac{1}{\ln^2 \sigma + \pi^2} \frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{\ln \sigma}{\pi}\right), \quad (4.39)$$

выражение (4.38) может быть представлено следующим образом:

$$R_{\text{АПТ}}^{(1)}(s) = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[ 1 + \frac{1}{\pi} \alpha_{\text{ПТ}}^{(1)}(s) \right]. \quad (4.40)$$

<sup>27</sup> Здесь и далее подразумевается, что  $\arctan(x)$  является непрерывной монотонно возрастающей функцией своего аргумента,  $-\pi/2 \leq \arctan(x) \leq \pi/2$  при  $-\infty < x < \infty$ .

В этом уравнении  $\alpha_{\text{TL}}^{(1)}(s)$  обозначает однопетлевую эффективную бегущую константу связи сильного взаимодействия во времениподобной области (см. также работы [91, 172, 173]):

$$\alpha_{\text{TL}}^{(1)}(s) = \frac{4\pi}{\beta_0} a_{\text{TL}}^{(1)}(s), \quad a_{\text{TL}}^{(1)}(s) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{\ln w}{\pi}\right), \quad w = \frac{s}{\Lambda^2}. \quad (4.41)$$

Таким образом, полученное выражение для  $R$ -отношения (4.40) отличается от "наивного" продолжения результатов теории возмущений во времениподобную область:  $R_{\text{naive}}(s) = D(|s|)$ ,  $s = q^2 = -Q^2 \geq 0$ ,

$$R_{\text{naive}}^{(\ell)}(s) = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[ 1 + d_{\text{pert}}^{(\ell)}(|s|) \right], \quad d_{\text{pert}}^{(\ell)}(|s|) = \sum_{j=1}^{\ell} d_j \left( \frac{4}{\beta_0} \right)^j \left[ a_s^{(\ell)}(|s|) \right]^j, \quad (4.42)$$

см. раздел 2.2. Детальное обсуждение вопросов, касающихся различия между функциями  $R(s)$  и  $R_{\text{naive}}(s)$ , может быть найдено, например, в работах [86, 170, 173–177].

В свою очередь, в двухпетлевом приближении  $R$ -отношение электрон-позитронной аннигиляции в адроны (4.32) может быть представлено следующим образом:

$$\begin{aligned} R_{\text{APT}}^{(2)}(s) &= N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[ 1 + \int_s^{\infty} \rho_{\text{pert}}^{(2)}(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} \right] = \\ &= N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[ 1 + \frac{1}{\pi} \alpha_{\text{TL}}^{(2)}(s) + d_2 \left( \frac{4}{\beta_0} \right)^2 A_{\text{TL},2}^{(2)}(s) \right], \end{aligned} \quad (4.43)$$

где  $d_2$  — двухпетлевой коэффициент (I.3) пертурбативного разложения функции Адлера. В уравнении (4.43)  $\alpha_{\text{TL}}^{(2)}(s)$  обозначает эффективную двухпетлевую бегущую константу связи сильного взаимодействия во времениподобной области:

$$\alpha_{\text{TL}}^{(2)}(s) = \frac{4\pi}{\beta_0} \int_s^{\infty} \rho_1^{(2)}(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{4\pi}{\beta_0} a_{\text{TL}}^{(2)}(s). \quad (4.44)$$

Здесь  $a_{\text{TL}}^{(2)}(s)$  представляет собой эффективную двухпетлевую функцию связи во времениподобной области

$$a_{\text{TL}}^{(2)}(s) = a_{\text{TL}}^{(1)}(s) - \frac{B_1}{\ln^2 w + \pi^2} \left[ 1 + \ln \sqrt{\ln^2 w + \pi^2} - a_{\text{TL}}^{(1)}(s) \ln w \right], \quad (4.45)$$

$a_{\text{TL}}^{(1)}(s)$  определена в уравнении (4.41),  $B_1 = \beta_1/\beta_0^2$  обозначает отношение коэффициентов пертурбативного разложения  $\beta$ -функции (см. раздел 3.1),  $w = s/\Lambda^2$ , а спектральные функции  $\rho_j^{(\ell)}(\sigma)$  приведены в приложении II. В уравнении (4.43)  $A_{\text{TL},2}^{(2)}(s)$  обозначает эффективную двухпетлевую функцию разложения второго порядка, которая является продолжением квадрата двухпетлевой пертурбативной функции связи сильного взаимодействия  $[a_s^{(2)}(Q^2)]^2$  во времениподобную область:

$$A_{\text{TL},2}^{(2)}(s) = \int_s^{\infty} \rho_2^{(2)}(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma}. \quad (4.46)$$

Необходимо подчеркнуть, что функция (4.46) не является квадратом "времяподобной" функции связи (4.45),  $A_{\text{TL},2}^{(2)}(s) \neq [a_{\text{TL}}^{(2)}(s)]^2$ , т.е., выражение (4.43) не является степенным рядом.

Таким образом, продолжение результатов теории возмущений во времениподобную область приводит к существенному изменению исходного пертурбативного выражения для рассматриваемой величины. Так, в  $\ell$ -петлевом приближении  $R$ -отношение электрон-позитронной аннигиляции в адроны (4.32) может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} R_{\text{APT}}^{(\ell)}(s) &= N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[ 1 + \int_s^{\infty} \rho_{\text{pert}}^{(\ell)}(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} \right] = \\ &= N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[ 1 + \sum_{j=1}^{\ell} d_j \left( \frac{4}{\beta_0} \right)^j A_{\text{TL},j}^{(\ell)}(s) \right], \end{aligned} \quad (4.47)$$

где

$$A_{\text{TL},j}^{(\ell)}(s) = \int_s^{\infty} \rho_j^{(\ell)}(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma}. \quad (4.48)$$

Безусловно, уравнение (4.47) отличается от “наивного” продолжения пертурбативного выражения  $D_{\text{pert}}^{(\ell)}(Q^2)$  (2.42) во времениподобную область  $R_{\text{naive}}^{(\ell)}(s)$  (4.42). В частности, в силу того, что  $A_{\text{TL},j}^{(\ell)}(s) \neq [A_{\text{TL},1}^{(\ell)}(s)]^j$ , выражение  $R_{\text{APT}}^{(\ell)}(s)$  (4.47), в отличие от  $R_{\text{naive}}^{(\ell)}(s)$  (4.42), не является степенным рядом. В уравнении (4.47)  $A_{\text{TL},j}^{(\ell)}(s)$  представляет собой “безмассовую” эффективную  $\ell$ -петлевую функцию разложения  $j$ -го порядка, которая является продолжением  $j$ -й степени  $\ell$ -петлевой пертурбативной функции связи  $[a_s^{(\ell)}(Q^2)]^j$  во времениподобную область  $s = q^2 = -Q^2 \geq 0$ ,  $d_j$  обозначает коэффициент пертурбативного разложения функции Адлера (см. приложение I), а явные выражения для спектральных функций  $\rho_j^{(\ell)}(\sigma)$  приведены в приложении II. Заметим, что функция разложения  $A_{\text{TL},j}^{(\ell)}(s)$  (4.48) первого порядка ( $j = 1$ ) по определению является “времениподобной” эффективной функцией связи в рассматриваемом петлевом приближении:  $A_{\text{TL},1}^{(\ell)}(s) \equiv a_{\text{TL}}^{(\ell)}(s)$ . Отметим также, что, в отличие от “наивного” продолжения<sup>28</sup> членов ряда теории возмущений во времениподобную область,  $[a_s^{(\ell)}(|s|)]^j$ , функции  $A_{\text{TL},j}^{(\ell)}(s)$  (4.48) не имеют нефизических особенностей в области малых энергий. Детальное обсуждение вопросов, касающихся свойств нестепенного разложения (4.47), может быть найдено в работах [170, 178].

Перейдем теперь к рассмотрению поведения  $R$ -отношения электрон-позитронной аннигиляции в адроны (4.47) в асимптотической ультрафиолетовой области  $s \rightarrow \infty$  в различных петлевых приближениях. Как было отмечено выше, полученное выражение для однопетлевой эффективной “времениподобной” бегущей константы связи (4.41) отличается от “наивного” продолжения пертурбативного “пространственноподобного” однопетлевого инвариантного заряда (3.15) во времениподобную область,  $\alpha_{\text{TL}}^{(1)}(s) \neq \alpha_s^{(1)}(|s|)$ . Тем не менее, в ультрафиолетовом пределе  $|s| \rightarrow \infty$  выражение (4.41) стремится к функции  $\alpha_s^{(1)}(|s|)$ . Действительно, в силу

<sup>28</sup> См. уравнение (4.42).

того, что

$$\arctan x \simeq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^5}\right), \quad x \rightarrow \infty, \quad (4.49)$$

в области больших энергий уравнение (4.41) может быть представлено следующим образом:

$$a_{\text{TL}}^{(1)}(s) \simeq a_s^{(1)}(|s|) - \frac{\pi^2}{3} \frac{1}{\ln^3 w} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln^5 w}\right), \quad w = \frac{s}{\Lambda^2}, \quad s \rightarrow \infty, \quad (4.50)$$

где  $a_s^{(1)}(Q^2) = 1/\ln(Q^2/\Lambda^2)$ . В правой части уравнения (4.50) все слагаемые, отличные от  $a_s^{(1)}(|s|)$ , называются<sup>29</sup>  $\pi^2$ -членами. Подробное обсуждение этого вопроса можно найти, например, в работах [86, 179] и цитируемой там литературе. Заметим, что в области больших энергий различие между выражениями  $\alpha_{\text{TL}}^{(1)}(s)$  (4.41) и  $\alpha_s^{(1)}(|s|)$  (3.15) заключается в слагаемых, неконтролируемых в однопетлевом приближении. Таким образом, в асимптотической ультрафиолетовой области  $s \rightarrow \infty$  на однопетлевом уровне<sup>30</sup>  $R$ -отношение электрон-позитронной аннигиляции в адроны (4.40) может быть аппроксимировано выражением (4.42):

$$\begin{aligned} R_{\text{APT}}^{(1)}(s) &\simeq N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[ 1 + \frac{1}{\pi} \alpha_s^{(1)}(|s|) \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln^3 w}\right) = \\ &= R_{\text{naive}}^{(1)}(s) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln^3 w}\right), \quad w = \frac{s}{\Lambda^2}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

В высших петлевых приближениях в области больших энергий “времениподобные” функции разложения (4.48) также стремятся к соответствующим степеням пертурбативной функции связи, а имен-

<sup>29</sup> В общем случае,  $\pi^2$ -членами называются члены ряда, получаемого в результате разложения выражения  $\bar{R}_{\text{APT}}^{(\ell)}(s) - \bar{R}_{\text{naive}}^{(\ell)}(s)$  в асимптотической ультрафиолетовой области  $s \rightarrow \infty$ .

<sup>30</sup> Однопетлевое выражение для  $R(s)$  (4.40) может быть использовано в области энергий  $s$ , для которых слагаемые порядка  $\ln^{-2}(s/\Lambda^2)$  являются пренебрежимо малыми.

но  $A_{\text{TL},j}^{(\ell)}(s) \rightarrow [a_s^{(\ell)}(|s|)]^j$  при  $s \rightarrow \infty$ . Так, на двухпетлевом уровне

$$a_{\text{TL}}^{(2)}(s) \simeq a_s^{(2)}(|s|) - \frac{\pi^2}{3} \frac{1}{\ln^3 w} + \pi^2 \frac{B_1}{\ln^4 w} \left( \ln \ln w - \frac{5}{6} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln^5 w}\right), \quad (4.52)$$

$$A_{\text{TL},2}^{(2)}(s) \simeq [a_s^{(2)}(|s|)]^2 - \frac{\pi^2}{\ln^4 w} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln^5 w}\right), \quad w = \frac{s}{\Lambda^2}, \quad s \rightarrow \infty, \quad (4.53)$$

где функция связи  $a_s^{(2)}(Q^2) = \alpha_s^{(2)}(Q^2)\beta_0/(4\pi)$  определена в уравнении (3.33),  $B_1 = \beta_1/\beta_0^2$ . Из уравнений (4.52) и (4.53) следует, что, аналогично рассмотренному выше однопетлевому случаю, в асимптотической ультрафиолетовой области  $s \rightarrow \infty$  различие между  $R_{\text{АПТ}}^{(2)}(s)$  (4.43) и  $R_{\text{наиве}}^{(2)}(s)$  (4.42) заключается в слагаемых, неконтролируемых в двухпетлевом приближении. Таким образом, в области энергий  $s$ , для которых слагаемые порядка  $\ln^{-3}(s/\Lambda^2)$  являются пренебрежимо малыми, двухпетлевое выражение для  $R$ -отношения (4.43) может быть аппроксимировано пертурбативным выражением для функции Адлера (2.42):

$$\begin{aligned} R_{\text{АПТ}}^{(2)}(s) &\simeq N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left\{ 1 + \sum_{j=1}^2 d_j \left(\frac{4}{\beta_0}\right)^j [a_s^{(2)}(|s|)]^j \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln^3 w}\right) = \\ &= R_{\text{наиве}}^{(2)}(s) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln^3 w}\right). \end{aligned} \quad (4.54)$$

В свою очередь, в трехпетлевом приближении

$$a_{\text{TL}}^{(3)}(s) \simeq a_s^{(3)}(|s|) - \frac{\pi^2}{3} \frac{1}{\ln^3 w} + \pi^2 \frac{B_1}{\ln^4 w} \left( \ln \ln w - \frac{5}{6} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln^5 w}\right), \quad (4.55)$$

$$A_{\text{TL},2}^{(3)}(s) \simeq [a_s^{(3)}(|s|)]^2 - \frac{\pi^2}{\ln^4 w} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln^5 w}\right), \quad (4.56)$$

$$A_{\text{TL},3}^{(3)}(s) \simeq [a_s^{(3)}(|s|)]^3 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln^5 w}\right), \quad w = \frac{s}{\Lambda^2}, \quad s \rightarrow \infty, \quad (4.57)$$

где функция связи  $a_s^{(3)}(Q^2) = \alpha_s^{(3)}(Q^2)\beta_0/(4\pi)$  определена в уравнении (3.42),  $B_1 = \beta_1/\beta_0^2$ . В этом случае в асимптотической ультрафиолетовой области  $s \rightarrow \infty$  различие между  $R_{\text{АПТ}}^{(3)}(s)$  (4.47)

и  $R_{\text{наиве}}^{(3)}(s)$  (4.42) заключается в слагаемых порядка  $\ln^{-3}(s/\Lambda^2)$  (см. уравнение (4.55)), которыми уже нельзя пренебрегать на трехпетлевом уровне. Тем не менее, в области больших энергий  $R_{\text{АПТ}}^{(3)}(s)$  (4.47) также можно представить в виде ряда по степеням  $a_s^{(3)}(|s|)$ . Однако коэффициенты этого степенного ряда уже не будут совпадать с соответствующими коэффициентами пертурбативного разложения функции Адлера (1.2)–(1.4). Так, с учетом того факта, что  $[a_s^{(3)}(|s|)]^3 \simeq \ln^{-3} w + \mathcal{O}(\ln^{-4} w)$  при  $s \rightarrow \infty$ , выражение  $R_{\text{АПТ}}^{(3)}(s)$  (4.47) может быть представлено в следующем виде (см., например, раздел 4.1 книги [16]):

$$R_{\text{АПТ}}^{(3)}(s) \simeq N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left\{ 1 + \sum_{j=1}^3 r_j \left(\frac{4}{\beta_0}\right)^j [a_s^{(3)}(|s|)]^j \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln^4 w}\right), \quad (4.58)$$

где  $r_1 = d_1$ ,  $r_2 = d_2$ ,  $r_3 = d_3 - (\pi^2/3)(\beta_0/4)^2$ . Такая аппроксимация может быть использована в области энергий  $s$ , в которой поправки порядка  $\ln^{-4}(s/\Lambda^2)$  являются пренебрежимо малыми, см. приложение I.

Таким образом, как было отмечено выше, продолжение результатов теории возмущений из пространственноподобной во времениподобную область оказывает существенное влияние на исходное пертурбативное выражение для рассматриваемой величины. Так, в высших петлевых приближениях такая процедура изменяет структуру ряда теории возмущений даже в асимптотической ультрафиолетовой области  $s \rightarrow \infty$ , см. уравнение (4.58). Более того, в области умеренных и малых энергий теоретическое выражение для  $R$ -отношения (4.47) представляет собой функциональное разложение по набору функций  $A_{\text{TL},j}^{(\ell)}(s)$ , что не имеет ничего общего с пертурбативным степенным разложением функции Адлера (2.42). Детальный анализ свойств нестепенного разложения (4.47) и функций  $A_{\text{TL},j}^{(\ell)}(s)$  (4.48) приведен в работах [170, 178].

Перейдем теперь к вычислению функции Адлера  $D(Q^2)$  (2.1) с помощью полученного в предыдущем разделе интегрального представления (4.31). Как уже упоминалось ранее, при использовании в качестве спектральной плотности  $\rho_b(\sigma)$  (4.33) пертурбативного выражения  $\rho_{\text{pert}}(\sigma)$  (4.34), уравнение (4.31) принимает вид, идентичный

результатам, полученным в рамках Аналитической теории возмущений [144, 145], а именно

$$D_{\text{АРТ}}^{(\ell)}(Q^2) = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[ 1 + \int_0^{\infty} \frac{\rho_{\text{pert}}^{(\ell)}(\sigma)}{\sigma + Q^2} d\sigma \right] = \\ = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[ 1 + \sum_{j=1}^{\ell} d_j \left( \frac{4}{\beta_0} \right)^j A_{\text{SL},j}^{(\ell)}(Q^2) \right]. \quad (4.59)$$

Здесь

$$A_{\text{SL},j}^{(\ell)}(Q^2) = \int_0^{\infty} \frac{\varrho_j^{(\ell)}(\sigma)}{\sigma + Q^2} d\sigma. \quad (4.60)$$

представляет собой “безмассовую” эффективную “пространственно-подобную”  $\ell$ -петлевую функцию разложения  $j$ -го порядка, которая является аналогом  $j$ -й степени пертурбативной  $\ell$ -петлевой функции связи  $[a_s^{(\ell)}(Q^2)]^j$ . Явные выражения для спектральных функций  $\varrho_j^{(\ell)}(\sigma)$  приведены в приложении II.

Заметим, что, в отличие от пертурбативной бегущей константы связи  $\alpha_s^{(\ell)}(Q^2)$ , функции разложения  $A_{\text{SL},j}^{(\ell)}(Q^2)$  (4.60) обладают корректными для рассматриваемого безмассового приближения аналитическими свойствами по кинематической переменной<sup>31</sup>. Далее, в силу того, что  $A_{\text{SL},j}^{(\ell)}(Q^2) \neq [A_{\text{SL},1}^{(\ell)}(Q^2)]^j$ , выражение (4.59) представляет собой нестепенное разложение по набору функций (4.60). Тем не менее, в асимптотической ультрафиолетовой области функции (4.60) стремятся к соответствующим степеням пертурбативной функции связи в рассматриваемом петлевом приближении, а именно  $A_{\text{SL},j}^{(\ell)}(Q^2) \rightarrow [a_s^{(\ell)}(Q^2)]^j$  при  $Q^2 \rightarrow \infty$ . Отметим также, что “пространственно-подобные” функции разложения  $A_{\text{SL},j}^{(\ell)}(Q^2)$  (4.60) отличаются от “временноподобных” функций разложения  $A_{\text{TL},j}^{(\ell)}(|Q^2|)$  (4.48). Тем не менее, в инфракрасном пределе  $A_{\text{SL},j}^{(\ell)}(0) = A_{\text{TL},j}^{(\ell)}(0)$  для всех значе-

<sup>31</sup> А именно функции  $A_{\text{SL},j}^{(\ell)}(Q^2)$  (4.60) имеют только левый разрез  $Q^2 \leq 0$  вдоль отрицательной части действительной оси  $\text{Re } Q^2$ .

ний  $\ell$  и  $j$ . Так, например, в любом петлевом приближении

$$\bar{D}_{\text{АРТ}}^{(\ell)}(0) = \bar{R}_{\text{АРТ}}^{(\ell)}(0) = 1 + \frac{4}{\beta_0}. \quad (4.61)$$

Детальное обсуждение вопросов, касающихся свойств нестепенного разложения (4.59), приведено в работах [170, 178].

В общем случае, интегрирование в уравнении (4.59) не может быть выполнено в явном виде за исключением однопетлевого приближения:

$$D_{\text{АРТ}}^{(1)}(Q^2) = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[ 1 + \frac{1}{\pi} \alpha_{\text{ан}}^{(1)}(Q^2) \right]. \quad (4.62)$$

В этом уравнении

$$\alpha_{\text{ан}}^{(1)}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0} \int_0^{\infty} \frac{\varrho_1^{(1)}(\sigma)}{\sigma + Q^2} d\sigma = \frac{4\pi}{\beta_0} \left( \frac{1}{\ln z} + \frac{1}{1-z} \right), \quad z = \frac{Q^2}{\Lambda^2} \quad (4.63)$$

обозначает однопетлевую аналитическую бегущую константу связи Ширкова-Соловцова [144]. Заметим, что выражение (4.63) может быть также представлено следующим образом:

$$\alpha_{\text{ан}}^{(1)}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0} \left\{ a_s^{(1)}(Q^2) + \frac{1}{1 - \exp[1/a_s^{(1)}(Q^2)]} \right\}. \quad (4.64)$$

Здесь  $a_s^{(1)}(Q^2) = 1/\ln(Q^2/\Lambda^2)$  является однопетлевой пертурбативной функцией связи. Первое слагаемое в фигурных скобках в уравнении (4.64) содержит так называемый полюс Ландау в точке  $Q^2 = \Lambda^2$ , см. раздел 3.2. Эта нефизическая особенность вычитается вторым слагаемым в фигурных скобках в уравнении (4.64), которое имеет существенно пертурбативную природу. Действительно, в силу того, что функция  $[1 - \exp(1/a)]^{-1}$  не может быть представлена в виде ряда<sup>32</sup> по степеням  $a$  при  $a \rightarrow 0_+$ , второе слагаемое в фигурных скобках в уравнении (4.64) не может быть описано в рамках теории возмущений.

<sup>32</sup> Коэффициенты разложения функции  $[1 - \exp(1/a)]^{-1}$  в ряд Тейлора при  $a \rightarrow 0_+$  тождественно равны нулю.

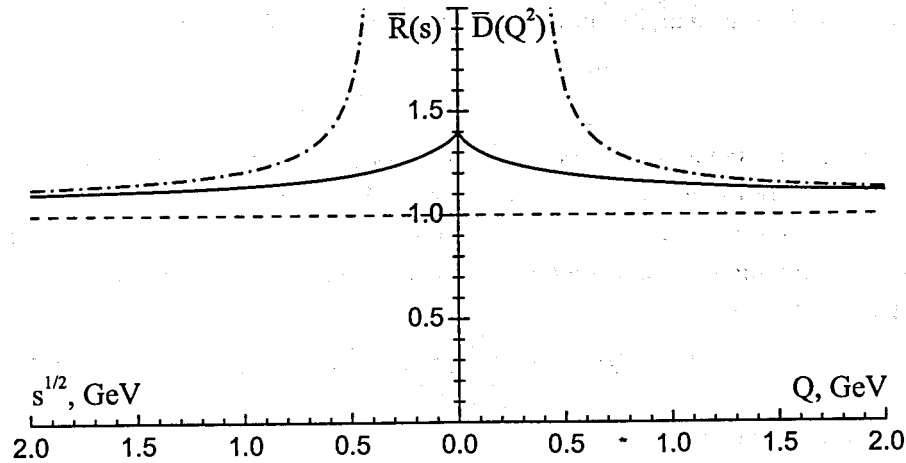


Рисунок 4.2. Графики функции Адлера  $\bar{D}_{\text{АРТ}}^{(1)}(Q^2)$  (4.62) и  $R$ -отношения электрон-позитронной аннигиляции в адроны  $\bar{R}_{\text{АРТ}}^{(1)}(s)$  (4.40) в однопетлевом приближении (непрерывные линии). Предсказания партонной модели  $\bar{D}^{(0)}(Q^2)$  (4.3) и  $\bar{R}^{(0)}(s)$  (4.5) показаны пунктирными линиями. Пертурбативные аппроксимации  $\bar{D}_{\text{pert}}^{(1)}(Q^2)$  (2.41) и  $\bar{R}_{\text{naive}}^{(1)}(s)$  (4.42) обозначены штрихпунктирными линиями. Значения параметров:  $n_f = 3$ ,  $\Lambda = 350$  МэВ

На рисунке 4.2 представлены графики функций  $\bar{D}_{\text{АРТ}}^{(1)}(Q^2)$  (4.62) и  $\bar{R}_{\text{АРТ}}^{(1)}(s)$  (4.40) в однопетлевом приближении. В отличие от выражений  $\bar{D}_{\text{pert}}^{(1)}(Q^2)$  (2.41) и  $\bar{R}_{\text{naive}}^{(1)}(s)$  (4.42), функции (4.62) и (4.40) не содержат нефизических особенностей в области малых энергий. Однако в силу того, что интегральные представления (4.31) и (4.32) были выведены в приближении безмассового  $\pi$ -мезона, рассматриваемые функции  $D_{\text{АРТ}}(Q^2)$  (4.59) и  $R_{\text{АРТ}}(s)$  (4.47) не удовлетворяют кинематическим ограничениям<sup>33</sup>  $D(Q^2) \rightarrow 0$  при  $Q^2 \rightarrow 0$  и  $R(s) = 0$  при  $0 \leq s < 4m_\pi^2$  (см. разделы 1.2 и 2.1). Интегральные представления для функции Адлера и  $R$ -отношения электрон-позитронной аннигиляции в адроны, учитывающие вышеупомянутые кинематические ограничения, будут рассмотрены в следующем разделе.

<sup>33</sup> Следует также упомянуть о том, что попытки привести низкоэнергетическое поведение функции  $D_{\text{АРТ}}(Q^2)$  (4.59), полученной в рамках “безмассовой” Аналитической теории возмущений [144, 145], в соответствие с экспериментальным предсказанием для функции Адлера предпринимались в работах [171, 180–184].

### 4.3 Интегральные представления для $D(Q^2)$ и $R(s)$ ( $m_\pi \neq 0$ )

Как было отмечено ранее, теоретическое исследование адронной динамики в области больших энергий может быть выполнено в приближении безмассового  $\pi$ -мезона. Однако эффекты, обусловленные ненулевой массой легчайшего адронного состояния, играют существенную роль при описании процессов сильного взаимодействия в области малых энергий (см. раздел 2.1). Для вывода интегральных представлений для функции Адлера (2.1) и  $R$ -отношения электрон-позитронной аннигиляции в адроны (1.13) в случае ненулевой массы  $\pi$ -мезона ( $m_\pi \neq 0$ ) будем использовать соотношения (2.2) и (2.4). Возможные контуры интегрирования в уравнении (2.4) представлены на рисунке 4.3.

Аналогично изложенному в разделе 4.1 безмассовому пределу, для начала рассмотрим функции  $D(Q^2)$  и  $R(s)$  в нулевом порядке теории возмущений по константе связи сильного взаимодействия. Предсказание партонной модели для  $R$ -отношения, учитывающее кинематическое ограничение (1.38), имеет вид<sup>34</sup> [76]:

$$\bar{R}^{(0)}(s, m^2) = \theta\left(1 - \frac{m^2}{s}\right). \quad (4.65)$$

Здесь и далее  $\theta(x)$  обозначает функцию Хевисайда:  $\theta(x) = 1$  при  $x \geq 0$  и  $\theta(x) = 0$  при  $x < 0$ . В свою очередь, предсказание партонной модели для функции Адлера, соответствующее уравнению (4.65), может быть найдено с помощью дисперсионного соотношения (2.2) [80–82]:

$$\bar{D}^{(0)}(Q^2, m^2) = Q^2 \int_{m^2}^{\infty} \frac{\bar{R}^{(0)}(s, m^2)}{(s + Q^2)^2} ds = Q^2 \int_{m^2}^{\infty} \frac{\theta(1 - m^2/s)}{(s + Q^2)^2} ds = \frac{Q^2}{Q^2 + m^2}. \quad (4.66)$$

Заметим, что выражение (4.65) также может быть получено из

<sup>34</sup> Во всех уравнениях этого раздела используется обозначение  $m^2 = 4m_\pi^2$ , а также подразумевается, что кинематическая переменная  $s$  принимает только положительные значения.



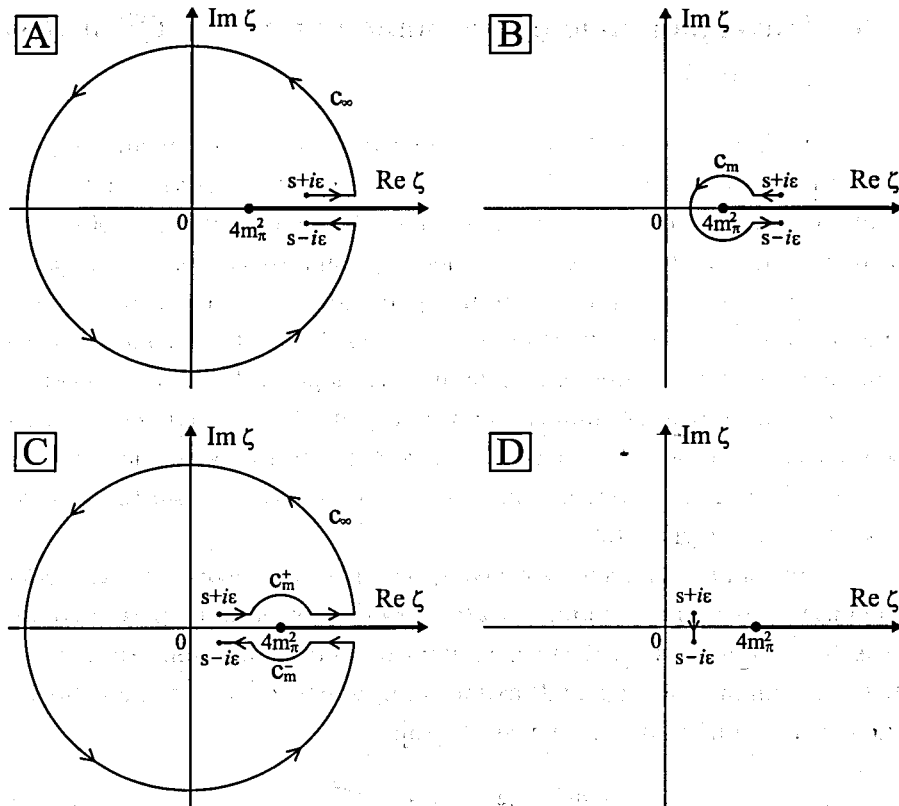


Рисунок 4.3. Возможные контуры интегрирования в комплексной  $\zeta$ -плоскости в уравнениях (2.4) и (4.74) в случае ненулевой массы легчайшего адронного состояния ( $m_\pi \neq 0$ ) для надпороговых ( $4m_\pi^2 \leq s$ , рисунки "А" и "В") и подпороговых ( $0 \leq s < 4m_\pi^2$ , рисунки "С" и "D") значений энергии. Физический разрез  $\zeta \geq 4m_\pi^2$  функции Адлера  $D(-\zeta)$  показан вдоль положительной части действительной оси  $\text{Re } \zeta$

уравнений (2.4) и (4.66):

$$\bar{R}^{(0)}(s, m^2) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \int_{s+i\epsilon}^{s-i\epsilon} \bar{D}^{(0)}(-\zeta, m^2) \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \int_{s+i\epsilon}^{s-i\epsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - m^2}. \quad (4.67)$$

Рассмотрим сначала случай подпороговых энергий ( $4m_\pi^2 \leq s$ ) и выберем в уравнении (4.67) контур интегрирования, представленный на

рисунке 4.3 В:

$$\bar{R}^{(0)}(s, m^2) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \left[ \int_{s+i\epsilon}^{m^2+i\epsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - m^2} + \int_{C_m} \frac{d\zeta}{\zeta - m^2} + \int_{m^2-i\epsilon}^{s-i\epsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - m^2} \right]. \quad (4.68)$$

Первое и третье слагаемые в квадратных скобках этого уравнения взаимно сокращаются. Во втором слагаемом в квадратных скобках в уравнении (4.68) сделаем замену переменной интегрирования  $\zeta = m^2 + r e^{i\varphi}$ ,  $r \rightarrow 0_+$ :

$$\bar{R}^{(0)}(s, m^2) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \lim_{r \rightarrow 0_+} \int_{\epsilon}^{2\pi - \epsilon} \frac{r i e^{i\varphi}}{r e^{i\varphi}} d\varphi = 1, \quad m^2 \leq s. \quad (4.69)$$

Можно также показать, что интегрирование уравнения (4.67) по контуру, представленному на рисунке 4.3 А, приводит к результату, идентичному выражению (4.69).

Далее, для подпороговых значений энергии ( $0 \leq s < 4m_\pi^2$ ) уравнение (4.67) принимает вид<sup>35</sup>

$$\bar{R}^{(0)}(s, m^2) = 0, \quad 0 \leq s < m^2. \quad (4.70)$$

Таким образом, из уравнений (2.4) и (4.66) следует, что

$$\bar{R}^{(0)}(s, m^2) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \int_{s+i\epsilon}^{s-i\epsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - m^2} = \theta\left(1 - \frac{m^2}{s}\right), \quad s \geq 0, \quad (4.71)$$

что совпадает с выражением (4.65).

Необходимо отметить, что предсказания партонной модели (4.65) и (4.66) учитывают только поведение рассматриваемых функций в асимптотической ультрафиолетовой области (при  $|Q^2| \rightarrow \infty$ ) и вышеупомянутое кинематическое ограничение на  $R$ -отношение (1.38) (см. также работы [76, 80–82]).

<sup>35</sup> Возможные контуры интегрирования в уравнении (4.67) для подпороговых значений энергии  $0 \leq s < 4m_\pi^2$  представлены на рисунках 4.3 С и 4.3 D.

Перейдем теперь к рассмотрению сильных поправок к функции Адлера и  $R$ -отношению электрон-позитронной аннигиляции в адроны:

$$\bar{D}(Q^2, m^2) = \bar{D}^{(0)}(Q^2, m^2) + d(Q^2, m^2), \quad \bar{R}(s, m^2) = \bar{R}^{(0)}(s, m^2) + r(s, m^2). \quad (4.72)$$

Аналогично рассмотренному в разделе 4.1 приближению безмассового  $\pi$ -мезона, сильные поправки  $d(Q^2, m^2)$  и  $r(s, m^2)$  (4.72) удобно выразить в терминах общей спектральной функции. Как уже упоминалось ранее, интегральные соотношения (2.2) и (2.4) между функциями  $D(Q^2, m^2)$  и  $R(s, m^2)$  обладают свойством аддитивности. Поэтому сильные поправки (4.72) также связаны между собой подобными соотношениями:

$$d(Q^2, m^2) = Q^2 \int_{m^2}^{\infty} \frac{r(s, m^2)}{(s + Q^2)^2} ds, \quad (4.73)$$

$$r(s, m^2) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \int_{s+i\epsilon}^{s-i\epsilon} d(-\zeta, m^2) \frac{d\zeta}{\zeta}. \quad (4.74)$$

Возможные контуры интегрирования в уравнении (4.74) представлены на рисунке 4.3.

Рассмотрим сначала уравнение (4.74) для надпороговых значений энергии ( $m^2 < s$ ) и выберем контур интегрирования в виде, представленном на рисунке 4.3 А:

$$r(s, m^2) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \left[ \int_{s+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} d(-\zeta, m^2) \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{c_\infty} d(-\zeta, m^2) \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{\infty-i\epsilon}^{s-i\epsilon} d(-\zeta, m^2) \frac{d\zeta}{\zeta} \right]. \quad (4.75)$$

Действуя аналогично рассмотренному выше безмассовому случаю (см. уравнения (4.15)–(4.18)), представим уравнение (4.75) в следующем виде:

$$r(s, m^2) = \int_s^{\infty} \rho_D(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma}, \quad m^2 \leq s, \quad (4.76)$$

где спектральная функция  $\rho_D(\sigma)$  определена в уравнениях (4.19) и (4.24). Заметим, что интегрирование уравнения (4.74) по контуру,

представленному на рисунке 4.3 В, приводит к результату, идентичному (4.76). Действительно, в этом случае

$$\begin{aligned} r(s, m^2) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \left[ \int_{s+i\epsilon}^{m^2+i\epsilon} d(-\zeta, m^2) \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{m^2-i\epsilon}^{s-i\epsilon} d(-\zeta, m^2) \frac{d\zeta}{\zeta} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{c_m} d(-\zeta, m^2) \frac{d\zeta}{\zeta} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \int_{c_m} d(-\zeta, m^2) \frac{d\zeta}{\zeta} - \int_{m^2}^s \rho_D(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma}, \quad m^2 \leq s. \quad (4.77) \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что для сильной поправки к функции Адлера имеет место интегральное представление (4.82), преобразуем уравнение (4.77) следующим образом:

$$r(s, m^2) = \int_{m^2}^{\infty} \rho_D(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} - \int_{m^2}^s \rho_D(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} = \int_s^{\infty} \rho_D(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma}, \quad m^2 \leq s. \quad (4.78)$$

Это уравнение совпадает с полученным выше результатом (4.76). Идентичность выражений (4.76) и (4.78) обусловлена тем фактом, что контуры интегрирования в уравнении (4.74), представленные на рисунках 4.3 А и 4.3 В, могут быть непрерывно деформированы<sup>36</sup> друг в друга.

Для подпороговых значений энергии ( $0 \leq s < 4m_\pi^2$ ) интегрирование уравнения (4.74) по контурам, представленным на рисунках 4.3 С и 4.3 D, приводит к следующему результату:

$$r(s, m^2) = 0, \quad 0 \leq s < m^2. \quad (4.79)$$

Таким образом, сильная поправка к  $R$ -отношению электрон-позитрон-

<sup>36</sup>Заметим, что это выполняется только для тех функций  $d(Q^2, m^2)$ , которые обладают корректными аналитическими свойствами по кинематической переменной  $Q^2$ . А именно из дисперсионного соотношения для функции Адлера (2.2) и уравнения (4.72) следует, что сильная поправка  $d(Q^2, m^2)$  должна иметь только левый разрез  $Q^2 \leq -m^2$  вдоль отрицательной части действительной оси  $\text{Re } Q^2$ .

ной аннигиляции в адроны (4.72) принимает вид

$$r(s, m^2) = \theta\left(1 - \frac{m^2}{s}\right) \int_s^\infty \rho_D(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma}, \quad s \geq 0, \quad (4.80)$$

где спектральная функция  $\rho_D(\sigma)$  определена в уравнениях (4.19) и (4.24).

В свою очередь, сильную поправку к функции Адлера (4.72) можно выразить в терминах спектральной функции  $\rho_D(\sigma)$  с помощью соотношений (4.73) и (4.80), а именно

$$d(Q^2, m^2) = Q^2 \int_{m^2}^\infty \frac{ds}{(s + Q^2)^2} \theta\left(1 - \frac{m^2}{s}\right) \int_s^\infty \rho_D(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma}. \quad (4.81)$$

После интегрирования по частям это уравнение принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} d(Q^2, m^2) &= -\frac{Q^2}{s + Q^2} \int_s^\infty \rho_D(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} \Big|_{s=m^2}^{s=\infty} - Q^2 \int_{m^2}^\infty \frac{\rho_D(s)}{s + Q^2} \frac{ds}{s} = \\ &= \frac{Q^2}{Q^2 + m^2} \int_{m^2}^\infty \rho_D(\sigma) \frac{\sigma - m^2}{\sigma + Q^2} \frac{d\sigma}{\sigma}. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае ненулевой массы легчайшего адронного состояния ( $m_\pi \neq 0$ ) для функции Адлера (2.1) и  $R$ -отношения электрон-позитронной аннигиляции в адроны (1.13) имеют место интегральные представления (см. работы [80–82])

$$D(Q^2, 4m_\pi^2) = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \frac{Q^2}{Q^2 + 4m_\pi^2} \left[ 1 + \int_{4m_\pi^2}^\infty \rho_D(\sigma) \frac{\sigma - 4m_\pi^2}{\sigma + Q^2} \frac{d\sigma}{\sigma} \right], \quad (4.83)$$

$$R(s, 4m_\pi^2) = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \theta\left(1 - \frac{4m_\pi^2}{s}\right) \left[ 1 + \int_s^\infty \rho_D(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} \right]. \quad (4.84)$$

В этих уравнениях спектральная функция  $\rho_D(\sigma)$  может быть определена либо как скачок мнимой части теоретического выражения

для функции Адлера на физическом разрезе (4.19), либо как логарифмическая производная экспериментальных данных по  $R$ -отношению (4.24):

$$\rho_D(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \left[ \bar{D}_{\text{theor}}(-\sigma - i\epsilon) - \bar{D}_{\text{theor}}(-\sigma + i\epsilon) \right] = -\frac{d\bar{R}_{\text{exp}}(\sigma)}{d \ln \sigma}. \quad (4.85)$$

Необходимо подчеркнуть, что уравнение (4.83) автоматически учитывает все непertурбативные ограничения на функцию Адлера, следующие из дисперсионного соотношения (2.2) (см. раздел 2.1). А именно функция Адлера  $D(Q^2)$  (4.83) имеет только левый разрез  $Q^2 \leq -4m_\pi^2$  по кинематической переменной  $Q^2$  вдоль отрицательной части действительной оси  $\text{Re } Q^2$  и  $D(Q^2) \rightarrow 0$  при  $Q^2 \rightarrow 0$ . В свою очередь, уравнение (4.84) учитывает как кинематическое ограничение на  $R$ -отношение (1.38), так и эффекты, обусловленные продолжением теоретических результатов из пространственноподобной во времениподобную область (см. раздел 4.2). Заметим, что в пределе безмассового  $\pi$ -мезона (при  $m_\pi = 0$ ) уравнения (4.83) и (4.84) совпадают с полученными в разделе 4.1 выражениями (4.31) и (4.32).

Интегральные представления (4.83) и (4.84) были получены для функций  $D(Q^2, m^2)$  и  $R(s, m^2)$ , которые удовлетворяют соотношениям (2.2) и (2.4). Дополнительно было сделано предположение о предсказании партонной модели для  $R$ -отношения (4.65), а также учитывался тот факт, что сильная поправка к функции Адлера стремится к нулю в ультрафиолетовом пределе в силу асимптотической свободы квантовой хромодинамики. Никаких других предположений о функциях  $D(Q^2, m^2)$  и  $R(s, m^2)$  для вывода уравнений (4.83) и (4.84) не требуется.

Для вычисления функции Адлера (4.83) и  $R$ -отношения электрон-позитронной аннигиляции в адроны (4.84) будем использовать<sup>37</sup> приближенное пертурбативное выражение  $\rho_{\text{pert}}(\sigma)$  (4.34). В этом слу-

<sup>37</sup> Детальное обсуждение вопросов, касающихся вычисления спектральной функции (4.85), приведено в разделе 4.2 и приложении II.

чае выражения (4.83) и (4.84) могут быть представлены следующим образом [80–82]:

$$D_{\text{МАРТ}}^{(\ell)}(Q^2, 4m_\pi^2) = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \frac{Q^2}{Q^2 + 4m_\pi^2} \left[ 1 + \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \rho_{\text{перт}}^{(\ell)}(\sigma) \frac{\sigma - 4m_\pi^2}{\sigma + Q^2} \frac{d\sigma}{\sigma} \right] =$$

$$= N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[ \frac{Q^2}{Q^2 + 4m_\pi^2} + \sum_{j=1}^{\ell} d_j \left( \frac{4}{\beta_0} \right)^j A_{\text{SL},j}^{(\ell)}(Q^2, 4m_\pi^2) \right], \quad (4.86)$$

$$R_{\text{МАРТ}}^{(\ell)}(s, 4m_\pi^2) = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \theta \left( 1 - \frac{4m_\pi^2}{s} \right) \left[ 1 + \int_s^{\infty} \rho_{\text{перт}}^{(\ell)}(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} \right] =$$

$$= N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[ \theta \left( 1 - \frac{4m_\pi^2}{s} \right) + \sum_{j=1}^{\ell} d_j \left( \frac{4}{\beta_0} \right)^j A_{\text{TL},j}^{(\ell)}(s, 4m_\pi^2) \right]. \quad (4.87)$$

В этих уравнениях  $A_{\text{SL},j}^{(\ell)}(Q^2, m^2)$  и  $A_{\text{TL},j}^{(\ell)}(s, m^2)$  представляют собой эффективные  $\ell$ -петлевые функции разложения  $j$ -го порядка в пространственноподобной и времениподобной области соответственно:

$$A_{\text{SL},j}^{(\ell)}(Q^2, m^2) = \frac{Q^2}{Q^2 + m^2} \int_{m^2}^{\infty} \varrho_j^{(\ell)}(\sigma) \frac{\sigma - m^2}{\sigma + Q^2} \frac{d\sigma}{\sigma}, \quad (4.88)$$

$$A_{\text{TL},j}^{(\ell)}(s, m^2) = \theta \left( 1 - \frac{m^2}{s} \right) \int_s^{\infty} \varrho_j^{(\ell)}(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma}. \quad (4.89)$$

В уравнениях (4.86) и (4.87)  $d_j$  обозначает  $j$ -петлевой коэффициент пертурбативного разложения функции Адлера (см. приложение I), а явные выражения для спектральных функций  $\varrho_j^{(\ell)}(\sigma)$  приведены в приложении II.

Уравнения (4.86) и (4.87) представляют собой нестепенные разложения<sup>38</sup> по наборам функций (4.88) и (4.89). По определению,

<sup>38</sup> Другими словами,  $A_{\text{SL},j}^{(\ell)}(Q^2, m^2) \neq [A_{\text{SL},1}^{(\ell)}(Q^2, m^2)]^j$  и  $A_{\text{TL},j}^{(\ell)}(s, m^2) \neq [A_{\text{TL},1}^{(\ell)}(s, m^2)]^j$  для  $j \geq 2$ .

функции разложения первого порядка ( $j = 1$ ) являются эффективными функциями связи в рассматриваемом петлевом приближении в пространственноподобной ( $a_{\text{SL}}^{(\ell)}(Q^2, m^2) \equiv A_{\text{SL},1}^{(\ell)}(Q^2, m^2)$ ) и времениподобной ( $a_{\text{TL}}^{(\ell)}(s, m^2) \equiv A_{\text{TL},1}^{(\ell)}(s, m^2)$ ) области. Функции разложения (4.88) и (4.89) удовлетворяют всем непертурбативным ограничениям на функции  $D(Q^2, m^2)$  и  $R(s, m^2)$ , изложенным в разделах 1.2 и 2.1. В частности, в любом петлевом приближении

$$D_{\text{МАРТ}}^{(\ell)}(Q^2, 4m_\pi^2) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad Q^2 \rightarrow 0, \quad (4.90)$$

$$R_{\text{МАРТ}}^{(\ell)}(s, 4m_\pi^2) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq s < 4m_\pi^2. \quad (4.91)$$

Необходимо также отметить, что в области умеренных и больших энергий (при  $|Q^2| \gg 4m_\pi^2$ ) выражения (4.86) и (4.87) совпадают<sup>39</sup> с уравнениями (4.59) и (4.47), полученными в рамках “безмассовой” Аналитической теории возмущений [144, 145]. В свою очередь, в асимптотической ультрафиолетовой области  $Q^2 \rightarrow \infty$  выражения  $D_{\text{МАРТ}}^{(\ell)}(Q^2, 4m_\pi^2)$  (4.86) и  $D_{\text{АРТ}}^{(\ell)}(Q^2)$  (4.59) совпадают с пертурбативной аппроксимацией функции Адлера  $D_{\text{перт}}^{(\ell)}(Q^2)$  (2.42).

В однопетлевом приближении функция Адлера (4.86) может быть представлена следующим образом:

$$D_{\text{МАРТ}}^{(1)}(Q^2, 4m_\pi^2) = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[ \frac{Q^2}{Q^2 + 4m_\pi^2} + \frac{1}{\pi} \alpha_{\text{SL}}^{(1)}(Q^2, 4m_\pi^2) \right]. \quad (4.92)$$

Здесь  $\alpha_{\text{SL}}^{(1)}(Q^2, m^2)$  обозначает однопетлевую эффективную бегущую константу связи в пространственноподобной области ( $z = Q^2/\Lambda^2$ ,  $\chi = m^2/\Lambda^2$ ):

$$\alpha_{\text{SL}}^{(1)}(Q^2, m^2) = \frac{4\pi}{\beta_0} \frac{Q^2}{Q^2 + m^2} \int_{m^2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2(\sigma/\Lambda^2) + \pi^2} \frac{\sigma - m^2}{\sigma + Q^2} \frac{d\sigma}{\sigma} =$$

$$= \frac{4\pi}{\beta_0} \left[ \frac{1}{\ln z} + \frac{z}{1-z} \frac{1+\chi}{z+\chi} - \frac{z}{z+\chi} \int_0^{\chi} \frac{1-\chi/\sigma}{\ln^2 \sigma + \pi^2} \frac{d\sigma}{\sigma} \right]. \quad (4.93)$$

<sup>39</sup> Выражения (4.87) и (4.47) совпадают для всех надпороговых значений энергии  $s \geq 4m_\pi^2$ .

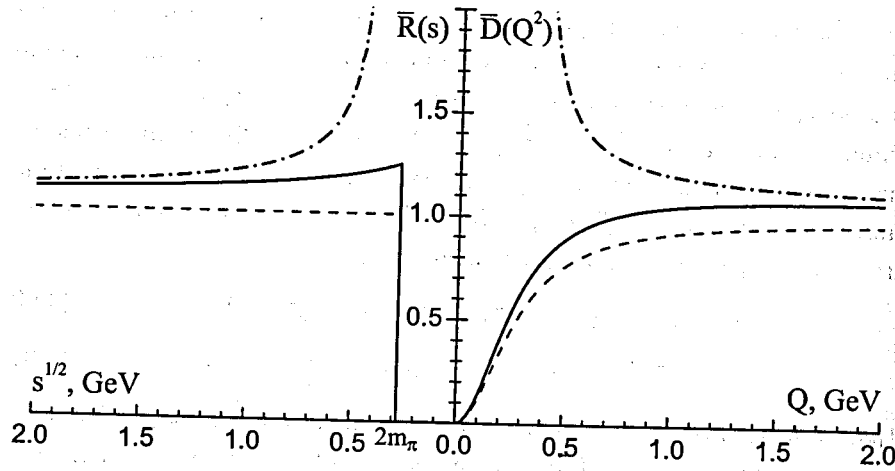


Рисунок 4.4. Графики функции Адлера  $\bar{D}_{\text{МАРТ}}^{(1)}(Q^2, 4m_\pi^2)$  (4.92) и  $R$ -отношения электрон-позитронной аннигиляции в адроны  $\bar{R}_{\text{МАРТ}}^{(1)}(s, 4m_\pi^2)$  (4.94) в однопетлевом приближении (непрерывные линии). Предсказания партонной модели  $\bar{D}^{(0)}(Q^2, 4m_\pi^2)$  (4.66) и  $\bar{R}^{(0)}(s, 4m_\pi^2)$  (4.65) показаны пунктирными линиями. Пертурбативные аппроксимации  $\bar{D}_{\text{перт}}^{(1)}(Q^2)$  (2.41) и  $\bar{R}_{\text{наиве}}^{(1)}(s)$  (4.42) обозначены штрихпунктирными линиями. Значения параметров:  $n_f = 3$ ,  $\Lambda = 350$  МэВ.

Во второй строке этого уравнения первое слагаемое представляет собой однопетлевую пертурбативную инвариантную заряд (3.15), второе слагаемое вычитает нефизическую особенность в точке  $Q^2 = \Lambda^2$ , а третье слагаемое является инфракрасной поправкой. В свою очередь, однопетлевое выражение для  $R$ -отношения (4.87) принимает вид

$$R_{\text{МАРТ}}^{(1)}(s, 4m_\pi^2) = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[ \theta \left( 1 - \frac{4m_\pi^2}{s} \right) + \frac{1}{\pi} \alpha_{\text{ТЛ}}^{(1)}(s, 4m_\pi^2) \right]. \quad (4.94)$$

В этом уравнении

$$\alpha_{\text{ТЛ}}^{(1)}(s, m^2) = \frac{4\pi}{\beta_0} \theta \left( 1 - \frac{m^2}{s} \right) \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{\ln w}{\pi} \right) \right]; \quad w = \frac{s}{\Lambda^2} \quad (4.95)$$

обозначает однопетлевую эффективную бегущую константу связи во времениподобной области.

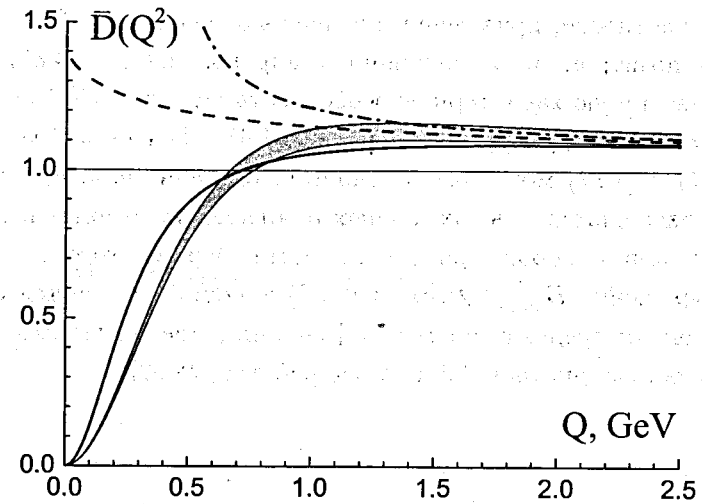


Рисунок 4.5. Графики однопетлевой функции Адлера  $\bar{D}_{\text{МАРТ}}^{(1)}(Q^2, 4m_\pi^2)$  (4.92) (непрерывная линия) и  $\bar{D}_{\text{перт}}^{(1)}(Q^2)$  (4.62) (пунктирная линия). Пертурбативная аппроксимация  $\bar{D}_{\text{перт}}^{(1)}(Q^2)$  (2.41) обозначена штрихпунктирной линией. Экспериментальное предсказание для функции Адлера  $\bar{D}(Q^2)$ , полученное с использованием нуклоновой векторной спектральной функции  $v_1(s)$  (см. раздел 2.3), показано заштрихованной полосой. Значения параметров:  $n_f = 3$ ,  $\Lambda = 350$  МэВ.

Графики функций  $\bar{D}_{\text{МАРТ}}^{(1)}(Q^2, 4m_\pi^2)$  (4.92) и  $\bar{R}_{\text{МАРТ}}^{(1)}(s, 4m_\pi^2)$  (4.94) представлены на рисунке 4.4. В отличие от пертурбативных выражений  $D_{\text{перт}}(Q^2)$  (2.42) и  $R_{\text{наиве}}(s)$  (4.42), функции  $D_{\text{МАРТ}}(Q^2, m^2)$  (4.86) и  $R_{\text{МАРТ}}(s, m^2)$  (4.87) не содержат нефизических особенностей в области малых энергий. Более того, в отличие от “безмассовых” выражений  $D_{\text{АРТ}}(Q^2)$  (4.59) и  $R_{\text{АРТ}}(s)$  (4.47), функции  $D_{\text{МАРТ}}(Q^2, m^2)$  (4.86) и  $R_{\text{МАРТ}}(s, m^2)$  (4.87) удовлетворяют всем пертурбативным ограничениям на функцию Адлера и  $R$ -отношение электрон-позитронной аннигиляции в адроны, полученным в разделах 1.2 и 2.1.

В заключение следует отметить, что все полученные в этой главе результаты имеют свои границы применимости. В первую очередь, это обусловлено тем, что рассматриваемый подход основывается только на дисперсионных соотношениях и на теории возмущения.

ний<sup>40</sup>. В частности, приведенные выше выражения для  $R$ -отношения электрон-позитронной аннигиляции в адроны (4.47) и (4.87) не воспроизводят такую характерную особенность функции  $R(s)$  (1.15), как ее резонансная структура (см. рисунок 1.4). Тем не менее, уравнения (4.47) и (4.87) могут быть использованы для анализа соответствующих экспериментальных данных в области умеренных и высоких энергий вдали от порогов рождения частиц. Кроме этого, полученное выше выражение  $D_{\text{МАРТ}}(Q^2, 4m_\pi^2)$  (4.86) хорошо согласуется с экспериментальным предсказанием для функции Адлера для всех энергий  $0 \leq Q^2 < \infty$ , см. рисунок 4.5 а также работы [80–82].

<sup>40</sup> Так, например, уравнения  $D_{\text{МАРТ}}^{(1)}(Q^2, 4m_\pi^2)$  (4.92) и  $R_{\text{МАРТ}}^{(1)}(s, 4m_\pi^2)$  (4.94) были получены с использованием только интегральных соотношений (2.2) и (2.4), предсказания партонной модели (4.65) и однопетлевого пертурбативного выражения (2.41).

## Приложение I

### Пертурбативные выражения для $D(Q^2)$ и $R(s)$

В рамках теории возмущений функция Адлера  $D(Q^2)$  (2.1) в ультрафиолетовой асимптотике может быть аппроксимирована пертурбативным рядом по степеням бегущей константы связи сильного взаимодействия,  $D(Q^2) \simeq D_{\text{pert}}(Q^2)$  при  $Q^2 \rightarrow \infty$ , см. раздел 2.2. В  $\ell$ -петлевом приближении

$$D_{\text{pert}}^{(\ell)}(Q^2) = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[ 1 + d_{\text{pert}}^{(\ell)}(Q^2) \right], \quad d_{\text{pert}}^{(\ell)}(Q^2) = \sum_{j=1}^{\ell} d_j \left( \frac{4}{\beta_0} \right)^j \left[ a_s^{(\ell)}(Q^2) \right]^j, \quad (\text{I.1})$$

где  $a_s^{(\ell)}(Q^2) = \alpha_s^{(\ell)}(Q^2) \beta_0 / (4\pi)$  обозначает пертурбативную  $\ell$ -петлевую “функцию связи” квантовой хромодинамики (см. главу 3). Выражения для коэффициентов  $d_j$  степенного разложения (I.1) известны до трехпетлевого уровня, включительно (см. работы [96, 97, 185–189]):

$$d_1 = 1, \quad (\text{I.2})$$

$$d_2 = \frac{365}{24} - 11 \zeta(3) + n_f \left[ -\frac{11}{12} + \frac{2}{3} \zeta(3) \right], \quad (\text{I.3})$$

$$d_3 = \frac{87029}{288} - \frac{1103}{4} \zeta(3) + \frac{275}{6} \zeta(5) + n_f \left[ -\frac{7847}{216} + \frac{262}{9} \zeta(3) - \frac{25}{9} \zeta(5) \right] + n_f^2 \left[ \frac{151}{162} - \frac{19}{27} \zeta(3) \right] + \left( \sum_{f=1}^{n_f} Q_f \right)^2 \left[ \frac{55}{72} - \frac{5}{3} \zeta(3) \right] \left( N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \right)^{-1}. \quad (\text{I.4})$$

В этих уравнениях  $n_f$  — число активных ароматов, а  $\zeta(x)$  обозначает  $\zeta$ -функцию Римана,  $\zeta(3) \simeq 1.202$ ,  $\zeta(5) \simeq 1.037$  (см., например, книгу [95]). Значения коэффициентов (I.2)–(I.4) соответствуют калибровочной группе SU(3). Однопетлевой коэффициент пертурбативного разложения  $d_1$  (I.2) является схемно-независимой величиной, в то время как выражения для двухпетлевого (I.3) и трехпетлевого (I.4) коэффициентов приведены для случая  $\overline{MS}$ -схемы вычитания. Вычисление коэффициентов (I.2)–(I.4) было проведено в приближении безмассовых кварков. В уравнении (I.4) слагаемое, пропорциональное  $(\sum_f Q_f)^2$ , соответствует вкладам в адронный тензор поляризации вакуума  $\Pi_{\mu\nu}^{(3)}(q^2)$  синглетных диаграмм, или так называемых диаграмм типа “рассеяние света на свете”, см. работы [188, 189] и цитируемую там литературу.

К настоящему времени было выполнено только предварительное вычисление четырехпетлевого коэффициента  $d_4$  пертурбативного разложения функции Адлера [190]:

$$d_4 = \frac{144939499}{20736} - \frac{5693495}{864} \zeta(3) + \frac{5445}{8} \zeta^2(3) + \frac{65945}{288} \zeta(5) - \frac{7315}{48} \zeta(7) +$$

$$+ n_f \left[ -\frac{13044007}{10368} + \frac{12205}{12} \zeta(3) - 55 \zeta^2(3) + \frac{29675}{432} \zeta(5) + \frac{665}{72} \zeta(7) \right] +$$

$$+ n_f^2 \left[ \frac{1045381}{15552} - \frac{40655}{864} \zeta(3) + \frac{5}{6} \zeta^2(3) - \frac{260}{27} \zeta(5) \right] +$$

$$+ n_f^3 \left[ -\frac{6131}{5832} + \frac{203}{324} \zeta(3) + \frac{5}{18} \zeta(5) \right], \quad (I.5)$$

где  $\zeta(7) \simeq 1.008$ . При вычислении адронного тензора поляризации вакуума  $\Pi_{\mu\nu}^{(4)}(q^2)$  в работе [190] не учитывались вклады от диаграмм типа рассеяния света на свете. Тем не менее, выражение (I.5) может быть использовано для тех значений числа активных ароматов  $n_f$ , для которых выполняется условие<sup>41</sup>  $\sum_{f=1}^{n_f} Q_f = 0$ , т.е., для  $n_f = 3$ . Следует упомянуть о том, что, помимо непосредственного вычисления четырехпетлевого коэффициента  $d_4$  пертурбативного разложения функ-

<sup>41</sup> При выполнении этого условия вклады синглетных диаграмм в адронный тензор поляризации вакуума  $\Pi_{\mu\nu}(q^2)$  взаимно сокращаются.

ции Адлера, также предпринимались различные попытки численных оценок значений  $d_4$  [191, 192] в рамках некоторых оптимизационных схем [193, 194].

Как было показано в разделе 4.2, продолжение результатов теории возмущений (I.1) во времениподобную область приводит к существенному изменению исходного пертурбативного выражения для рассматриваемой величины. Так, в безмассовом приближении на  $\ell$ -петлевом уровне соответствующее выражение для  $R$ -отношения электрон-позитронной аннигиляции в адроны (1.15) принимает вид (4.47)

$$R_{\text{APT}}^{(\ell)}(s) = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[ 1 + \sum_{j=1}^{\ell} d_j \left( \frac{4}{\beta_0} \right)^j A_{\text{TL},j}^{(\ell)}(s) \right], \quad (I.6)$$

где эффективные функции разложения  $A_{\text{TL},j}^{(\ell)}(s)$  определены в уравнении (4.48). Тем не менее, в ультрафиолетовой асимптотике уравнение (I.6) может быть также аппроксимировано пертурбативным рядом по степеням  $\alpha_s(|s|)$ ,  $R_{\text{APT}}(s) \simeq R_{\text{pert}}(s)$  при  $s \rightarrow \infty$ , где

$$R_{\text{pert}}^{(\ell)}(s) = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[ 1 + r_{\text{pert}}^{(\ell)}(s) \right], \quad r_{\text{pert}}^{(\ell)}(s) = \sum_{j=1}^{\ell} r_j \left( \frac{4}{\beta_0} \right)^j \left[ a_s^{(\ell)}(|s|) \right]^j. \quad (I.7)$$

В этом уравнении  $r_j = d_j - \delta_j$ , где

$$\delta_1 = 0, \quad (I.8)$$

$$\delta_2 = 0, \quad (I.9)$$

$$\delta_3 = \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{\beta_0}{4} \right)^2, \quad (I.10)$$

$$\delta_4 = \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{\beta_0}{4} \right)^2 \left( 3d_2 + \frac{5}{8} \frac{\beta_1}{\beta_0} \right), \quad (I.11)$$

см., например, работы [86, 122, 179, 191, 195] и цитируемую там литературу.

Необходимо отметить, что значения коэффициентов  $r_j$  степенного ряда (I.7) в высших порядках теории возмущений ( $j \geq 3$ ) существенно

отличаются от значений коэффициентов  $d_j$  исходного степенного ряда (I.1). Так, например, для  $n_f = 3$  активных ароматов  $d_3 \simeq 6.371$ ,  $r_3 \simeq -10.284$ ;  $d_4 \simeq 49.08$ ,  $r_4 \simeq -106.88$ . Следует также упомянуть о том, что  $\ell$ -петлевая аппроксимация (I.7) может быть использована вместо уравнения (I.6) исключительно в области энергий  $s$ , в которой поправки порядка  $\ln^{-(\ell+1)}(s/\Lambda^2)$  являются пренебрежимо малыми.

## Приложение II

### Пертурбативная спектральная функция

В главе 4 для построения функции Адлера и  $R$ -отношения электрон-позитронной аннигиляции в адроны использовалась спектральная функция (4.34)

$$\rho_{\text{pert}}^{(\ell)}(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \left[ d_{\text{pert}}^{(\ell)}(-\sigma - i\varepsilon) - d_{\text{pert}}^{(\ell)}(-\sigma + i\varepsilon) \right], \quad (\text{II.1})$$

вычисленная на основе пертурбативного выражения для сильной поправки к функции Адлера (2.42)

$$d_{\text{pert}}^{(\ell)}(Q^2) = \sum_{j=1}^{\ell} d_j \left( \frac{4}{\beta_0} \right)^j \left[ a_s^{(\ell)}(Q^2) \right]^j. \quad (\text{II.2})$$

В этом уравнении  $a_s^{(\ell)}(Q^2)$  обозначает пертурбативную  $\ell$ -петлевую функцию связи (см. главу 3), а  $d_j$  — коэффициент пертурбативного разложения функции Адлера (см. приложение I). Выражение (II.1) удобно представить в следующем виде:

$$\rho_{\text{pert}}^{(\ell)}(\sigma) = \sum_{j=1}^{\ell} d_j \left( \frac{4}{\beta_0} \right)^j \varrho_j^{(\ell)}(\sigma), \quad (\text{II.3})$$

где

$$\varrho_j^{(\ell)}(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \left\{ \left[ a_s^{(\ell)}(-\sigma - i\varepsilon) \right]^j - \left[ a_s^{(\ell)}(-\sigma + i\varepsilon) \right]^j \right\} \quad (\text{II.4})$$

обозначает индивидуальный вклад в уравнение (II.1) от  $j$ -й степени  $\ell$ -петлевой пертурбативной функции связи  $a_s^{(\ell)}(Q^2)$ .



Как было показано в главе 4, в рамках Дисперсионного подхода в квантовой хромодинамике функция Адлера и  $R$ -отношение электрон-позитронной аннигиляции в адроны могут быть представлены в виде нестепенных разложений по наборам эффективных функций, которые вычисляются с использованием выражений  $\varrho_j^{(\ell)}(\sigma)$  (II.4). Так, например, в безмассовом приближении

$$D_{\text{АПТ}}^{(\ell)}(Q^2) = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[ 1 + \sum_{j=1}^{\ell} d_j \left( \frac{4}{\beta_0} \right)^j A_{\text{СЛ},j}^{(\ell)}(Q^2) \right], \quad (\text{II.5})$$

$$A_{\text{СЛ},j}^{(\ell)}(Q^2) = \int_0^{\infty} \frac{\varrho_j^{(\ell)}(\sigma)}{\sigma + Q^2} d\sigma, \quad (\text{II.6})$$

$$R_{\text{АПТ}}^{(\ell)}(s) = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[ 1 + \sum_{j=1}^{\ell} d_j \left( \frac{4}{\beta_0} \right)^j A_{\text{ТЛ},j}^{(\ell)}(s) \right], \quad (\text{II.7})$$

$$A_{\text{ТЛ},j}^{(\ell)}(s) = \int_s^{\infty} \varrho_j^{(\ell)}(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma}, \quad (\text{II.8})$$

см. уравнения (4.47), (4.48), (4.59), (4.60). В свою очередь, в более общем случае

$$D_{\text{МАРТ}}^{(\ell)}(Q^2, 4m_\pi^2) = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[ \frac{Q^2}{Q^2 + 4m_\pi^2} + \sum_{j=1}^{\ell} d_j \left( \frac{4}{\beta_0} \right)^j A_{\text{СЛ},j}^{(\ell)}(Q^2, 4m_\pi^2) \right], \quad (\text{II.9})$$

$$A_{\text{СЛ},j}^{(\ell)}(Q^2, 4m_\pi^2) = \frac{Q^2}{Q^2 + 4m_\pi^2} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \varrho_j^{(\ell)}(\sigma) \frac{\sigma - 4m_\pi^2}{\sigma + Q^2} \frac{d\sigma}{\sigma}, \quad (\text{II.10})$$

$$R_{\text{МАРТ}}^{(\ell)}(s, 4m_\pi^2) = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[ \theta \left( 1 - \frac{4m_\pi^2}{s} \right) + \sum_{j=1}^{\ell} d_j \left( \frac{4}{\beta_0} \right)^j A_{\text{ТЛ},j}^{(\ell)}(s, 4m_\pi^2) \right], \quad (\text{II.11})$$

$$A_{\text{ТЛ},j}^{(\ell)}(s, 4m_\pi^2) = \theta \left( 1 - \frac{4m_\pi^2}{s} \right) \int_s^{\infty} \varrho_j^{(\ell)}(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma}, \quad (\text{II.12})$$

см. уравнения (4.86)–(4.89). Следует отметить, что в пределе  $m_\pi \rightarrow 0$  выражения (II.9) и (II.11) совпадают с выражениями (II.5) и (II.7) соответственно, а именно

$$D_{\text{МАРТ}}^{(\ell)}(Q^2, 0) = D_{\text{АПТ}}^{(\ell)}(Q^2); \quad R_{\text{МАРТ}}^{(\ell)}(s, 0) = R_{\text{АПТ}}^{(\ell)}(s). \quad (\text{II.13})$$

Необходимо также упомянуть о том, что  $D_{\text{МАРТ}}^{(\ell)}(Q^2, m^2) \rightarrow D_{\text{АПТ}}^{(\ell)}(Q^2)$  при  $Q^2 \gg m^2$  и  $R_{\text{МАРТ}}^{(\ell)}(s, m^2) = R_{\text{АПТ}}^{(\ell)}(s)$  при  $s \geq m^2$ . В ультрафиолетовой асимптотике (при  $Q^2 \rightarrow \infty$ ) как  $D_{\text{АПТ}}^{(\ell)}(Q^2)$  (II.5), так и  $D_{\text{МАРТ}}^{(\ell)}(Q^2, m^2)$  (II.9) совпадают с пертурбативной аппроксимацией функции Адлера  $D_{\text{перт}}^{(\ell)}(Q^2)$  (2.42).

Очевидно, что построение спектральной функции  $\rho_{\text{перт}}^{(\ell)}(\sigma)$  (II.3) в высших петлевых приближениях ( $\ell > 1$ ) сопряжено с определенными техническими трудностями. Действительно, на высших петлевых уровнях вычисление скачка мнимой части пертурбативной бегущей константы связи на физическом разрезе  $\varrho_1^{(\ell)}(\sigma)$  представляет собой нетривиальную задачу в силу громоздкости выражения для  $\alpha_s^{(\ell)}(Q^2)$  (см. главу 3). Кроме этого, уравнение (II.3) содержит вклады  $\varrho_j^{(\ell)}(\sigma)$  ( $1 < j \leq \ell$ ), непосредственное вычисление которых является еще более сложной задачей. Тем не менее, с помощью довольно простых математических рассуждений можно найти спектральную функцию  $\varrho_j^{(\ell)}(\sigma)$  (II.4), соответствующую любой целой степени  $j$  бегущей константы связи  $\alpha_s^{(\ell)}(Q^2)$ .

А именно спектральную функцию  $\varrho_j^{(\ell)}(\sigma)$  (II.4) удобно выразить в терминах вещественной  $A_{\text{Re}}^{(\ell)}(\sigma)$  и мнимой  $A_{\text{Im}}^{(\ell)}(\sigma)$  частей  $\ell$ -петлевой функции связи  $a_s^{(\ell)}(Q^2)$  на физическом разрезе:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} a_s^{(\ell)}(-\sigma \pm i\epsilon) \equiv A_{\text{Re}}^{(\ell)}(\sigma) \mp i\pi A_{\text{Im}}^{(\ell)}(\sigma). \quad (\text{II.14})$$

В этом случае уравнение (II.4) может быть представлено следующим образом

$$\varrho_j^{(\ell)}(\sigma) = \sum_{k=0}^{K_j} \binom{j}{2k+1} (-1)^k \pi^{2k} \left[ A_{\text{Im}}^{(\ell)}(\sigma) \right]^{2k+1} \left[ A_{\text{Re}}^{(\ell)}(\sigma) \right]^{j-2k-1}, \quad (\text{II.15})$$

где  $K_j = j/2 + (j \bmod 2)/2 - 1$ ,

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (\text{II.16})$$

обозначает биномиальный коэффициент и  $(j \bmod n)$  обозначает деление по модулю  $n$ . В частности, первые четыре соотношения (II.15) имеют вид

$$\varrho_1^{(\ell)}(\sigma) = A_{\text{Im}}^{(\ell)}(\sigma), \quad (\text{II.17})$$

$$\varrho_2^{(\ell)}(\sigma) = 2 A_{\text{Im}}^{(\ell)}(\sigma) A_{\text{Re}}^{(\ell)}(\sigma), \quad (\text{II.18})$$

$$\varrho_3^{(\ell)}(\sigma) = A_{\text{Im}}^{(\ell)}(\sigma) \left\{ 3 [A_{\text{Re}}^{(\ell)}(\sigma)]^2 - \pi^2 [A_{\text{Im}}^{(\ell)}(\sigma)]^2 \right\}, \quad (\text{II.19})$$

$$\varrho_4^{(\ell)}(\sigma) = 4 A_{\text{Im}}^{(\ell)}(\sigma) A_{\text{Re}}^{(\ell)}(\sigma) \left\{ [A_{\text{Re}}^{(\ell)}(\sigma)]^2 - \pi^2 [A_{\text{Im}}^{(\ell)}(\sigma)]^2 \right\}. \quad (\text{II.20})$$

Далее приведен полный набор функций  $A_{\text{Re}}^{(\ell)}(\sigma)$  и  $A_{\text{Im}}^{(\ell)}(\sigma)$  (II.14), вычисленных на основе пертурбативных функций связи  $a_s^{(\ell)}(Q^2)$  до четырехпетлевого уровня, включительно (см. также приложение III обзора [148] и работы [196, 197]). Этот набор функций, дополненный уравнением (II.15), определяет явный вид спектральной функции  $\varrho_j^{(\ell)}(\sigma)$  (II.4), соответствующей любой целой степени  $j$  пертурбативной функции связи  $a_s^{(\ell)}(Q^2)$  на любом доступном в настоящее время петлевом уровне ( $1 \leq \ell \leq 4$ ). В свою очередь, это позволяет легко найти явный вид спектральной функции  $\rho_{\text{pert}}^{(\ell)}(\sigma)$  (II.3), которая соответствует  $\ell$ -петлевому пертурбативному выражению (II.2) для рассматриваемой величины. В качестве примера на рисунке II.1 представлены графики спектральных функций  $\varrho_j^{(\ell)}(\sigma)$  (II.4), соответствующих  $j$ -й степени ( $1 \leq j \leq \ell$ ) четырехпетлевой ( $\ell = 4$ ) пертурбативной функции связи  $a_s^{(4)}(Q^2)$  (3.43).

Итак, в однопетлевом приближении функции (II.14), соответствующие пертурбативной однопетлевой бегущей константе связи (3.15), имеют простой вид (см. также уравнения (4.35)–(4.37)):

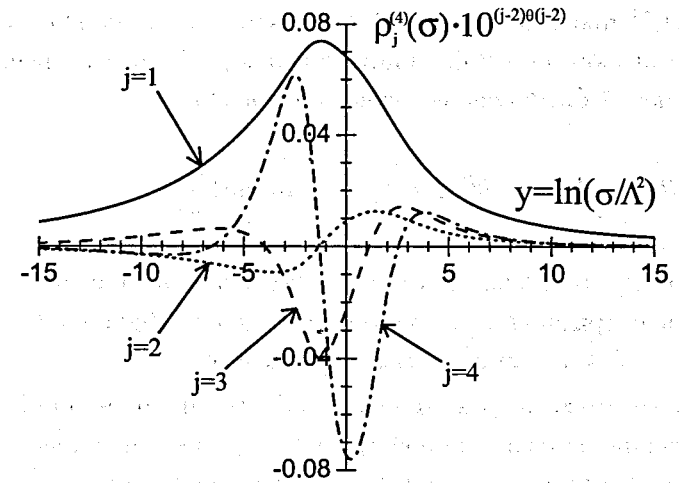


Рисунок II.1. Четырехпетлевые пертурбативные вклады  $\varrho_j^{(4)}(\sigma)$  (II.4) в спектральную функцию  $\rho_{\text{pert}}^{(4)}(\sigma)$  (II.3):  $\varrho_1^{(4)}(\sigma)$  (непрерывная линия),  $\varrho_2^{(4)}(\sigma)$  (точечная линия),  $\varrho_3^{(4)}(\sigma)$  (пунктирная линия, масштабный фактор  $\times 10$ ) и  $\varrho_4^{(4)}(\sigma)$  (штрихпунктирная линия, масштабный фактор  $\times 10^2$ ). Значения параметров:  $n_f = 3$ ,  $y = \ln(\sigma/\Lambda^2)$

$$A_{\text{Im}}^{(1)}(\sigma) = \frac{1}{y^2 + \pi^2}, \quad y = \ln\left(\frac{\sigma}{\Lambda^2}\right), \quad (\text{II.21})$$

$$A_{\text{Re}}^{(1)}(\sigma) = \frac{y}{y^2 + \pi^2}. \quad (\text{II.22})$$

На двухпетлевом уровне функции (II.14), соответствующие пертурбативной двухпетлевой бегущей константе связи (3.33), принимают следующий вид:

$$A_{\text{Im}}^{(2)}(\sigma) = \frac{1}{(y^2 + \pi^2)^2} \left[ 2y S_1^{(2)}(y) + (\pi^2 - y^2) S_2^{(2)}(y) \right], \quad (\text{II.23})$$

$$A_{\text{Re}}^{(2)}(\sigma) = \frac{1}{(y^2 + \pi^2)^2} \left[ (y^2 - \pi^2) S_1^{(2)}(y) + 2\pi^2 y S_2^{(2)}(y) \right], \quad (\text{II.24})$$

где

$$S_1^{(2)}(y) = y - \frac{B_1}{2} \ln(y^2 + \pi^2), \quad (\text{II.25})$$

$$S_2^{(2)}(y) = 1 - B_1 \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{y}{\pi}\right) \right], \quad (\text{II.26})$$

$B_j = \beta_j/\beta_0^{j+1}$  представляет собой отношение коэффициентов пертурбативного разложения  $\beta$ -функции (см. раздел 3.1). При вычислении этих уравнений было использовано соотношение

$$\ln(a \pm ib) = \frac{1}{2} \ln(a^2 + b^2) \pm i\pi \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{a}{b}\right) \right], \quad b > 0. \quad (\text{II.27})$$

Как уже было отмечено ранее, здесь подразумевается, что  $\arctan(x)$  является непрерывной монотонно возрастающей функцией своего аргумента,  $-\pi/2 \leq \arctan(x) \leq \pi/2$  при  $-\infty < x < \infty$ .

В свою очередь, в трехпетлевом приближении функции (II.14), соответствующие пертурбативной трехпетлевой бегущей константе связи (3.42), могут быть представлены в следующем виде:

$$A_{\text{Im}}^{(3)}(\sigma) = \frac{1}{(y^2 + \pi^2)^3} \left[ (3y^2 - \pi^2)S_3^{(3)}(y) - y(y^2 - 3\pi^2)S_4^{(3)}(y) \right], \quad (\text{II.28})$$

$$A_{\text{Re}}^{(3)}(\sigma) = \frac{1}{(y^2 + \pi^2)^3} \left[ y(y^2 - 3\pi^2)S_3^{(3)}(y) + \pi^2(3y^2 - \pi^2)S_4^{(3)}(y) \right], \quad (\text{II.29})$$

где

$$S_1^{(3)}(y) = \frac{1}{2} \ln(y^2 + \pi^2), \quad (\text{II.30})$$

$$S_2^{(3)}(y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{y}{\pi}\right), \quad (\text{II.31})$$

$$S_3^{(3)}(y) = y^2 - \pi^2 - B_1 \left[ yS_1^{(3)}(y) - \pi^2 S_2^{(3)}(y) \right] + B_1^2 \left\{ S_1^{(3)}(y) \left[ S_1^{(3)}(y) - 1 \right] - \pi^2 \left[ S_2^{(3)}(y) \right]^2 - 1 \right\} + B_2, \quad (\text{II.32})$$

$$S_4^{(3)}(y) = 2y - B_1 \left[ S_1^{(3)}(y) + yS_2^{(3)}(y) \right] + B_1^2 S_2^{(3)}(y) \left[ 2S_1^{(3)}(y) - 1 \right]. \quad (\text{II.33})$$

На четырехпетлевом уровне функции (II.14), соответствующие пертурбативной четырехпетлевой бегущей константе связи (3.43), имеют вид:

$$A_{\text{Im}}^{(4)}(\sigma) = \frac{1}{(y^2 + \pi^2)^4} \left\{ 4y(y^2 - \pi^2) \left[ S_3^{(4)}(y) + S_5^{(4)}(y) + S_7^{(4)}(y) \right] + \left[ 4\pi^2 y^2 - (y^2 - \pi^2)^2 \right] \left[ S_4^{(4)}(y) + S_6^{(4)}(y) + S_8^{(4)}(y) \right] \right\}, \quad (\text{II.34})$$

$$A_{\text{Re}}^{(4)}(\sigma) = \frac{1}{(y^2 + \pi^2)^4} \left\{ \left[ (y^2 - \pi^2)^2 - 4\pi^2 y^2 \right] \left[ S_3^{(4)}(y) + S_5^{(4)}(y) + S_7^{(4)}(y) \right] + 4\pi^2 y(y^2 - \pi^2) \left[ S_4^{(4)}(y) + S_6^{(4)}(y) + S_8^{(4)}(y) \right] \right\}, \quad (\text{II.35})$$

где

$$S_1^{(4)}(y) = \frac{1}{2} \ln(y^2 + \pi^2), \quad (\text{II.36})$$

$$S_2^{(4)}(y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{y}{\pi}\right), \quad (\text{II.37})$$

$$S_3^{(4)}(y) = B_1^2 y \left\{ S_1^{(4)}(y) \left[ S_1^{(4)}(y) - 1 \right] - \pi^2 \left[ S_2^{(4)}(y) \right]^2 + \frac{B_2}{B_1^2} - 1 \right\} - B_1^2 \pi^2 S_2^{(4)}(y) \left[ 2S_1^{(4)}(y) - 1 \right], \quad (\text{II.38})$$

$$S_4^{(4)}(y) = B_1^2 \left\{ S_1^{(4)}(y) \left[ S_1^{(4)}(y) - 1 \right] - \pi^2 \left[ S_2^{(4)}(y) \right]^2 + y S_2^{(4)}(y) \left[ 2S_1^{(4)}(y) - 1 \right] + \frac{B_2}{B_1^2} - 1 \right\}, \quad (\text{II.39})$$

$$S_5^{(4)}(y) = B_1^3 \left\{ S_1^{(4)}(y) \left[ 3\pi^2 \left( S_2^{(4)}(y) \right)^2 - \left( S_1^{(4)}(y) \right)^2 \right] + \frac{5}{2} \left[ \left( S_1^{(4)}(y) \right)^2 - \pi^2 \left( S_2^{(4)}(y) \right)^2 \right] + S_1^{(4)}(y) \left( 2 - 3 \frac{B_2}{B_1^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{B_3}{B_1^3} - 1 \right) \right) \right\}, \quad (\text{II.40})$$

$$S_6^{(4)}(y) = B_1^3 S_2^{(4)}(y) \left\{ \pi^2 \left[ S_2^{(4)}(y) \right]^2 - 3 \left[ S_1^{(4)}(y) \right]^2 + 5S_1^{(4)}(y) - 3 \frac{B_2}{B_1^2} + 2 \right\}, \quad (\text{II.41})$$

$$S_7^{(4)}(y) = y(y^2 - 3\pi^2) + B_1 \left[ 2\pi^2 y S_2^{(4)}(y) - (y^2 - \pi^2) S_1^{(4)}(y) \right], \quad (\text{II.42})$$

$$S_8^{(4)}(y) = 3y^2 - \pi^2 - B_1 \left[ (y^2 - \pi^2) S_2^{(4)}(y) + 2y S_1^{(4)}(y) \right]. \quad (\text{II.43})$$

В высших петлевых приближениях вычисление эффективных функций нестепенного разложения (II.6), (II.8), (II.10), (II.12) может быть выполнено только с использованием численных методов. При этом вышеупомянутые уравнения удобно представить в следующем виде:

$$A_{\text{SL}}(Q^2) = \int_{-1}^0 \frac{r(x) e^{1/x}}{e^{1/x} + z} dx + \int_{-1}^1 \frac{\varrho_y(y)}{1 + z e^{-y}} dy + \int_0^1 \frac{r(x)}{1 + z e^{-1/x}} dx, \quad (\text{II.44})$$

где  $z = Q^2/\Lambda^2$ ,

$$\varrho_y(y) = \varrho(\sigma) \Big|_{\sigma=\Lambda^2 e^y}, \quad \varrho_x(x) = \varrho_y(y) \Big|_{y=1/x}, \quad r(x) = \frac{\varrho_x(x)}{x^2}; \quad (\text{II.45})$$

$$A_{\text{TL}}(s) = \begin{cases} J_1\left(-1, \frac{1}{\ln w}\right) + J_2(-1, 1) + J_1(0, 1), & \ln w < -1, \\ J_2(\ln w, 1) + J_1(0, 1), & -1 \leq \ln w < 1, \\ J_1\left(0, \frac{1}{\ln w}\right), & 1 \leq \ln w, \end{cases} \quad (\text{II.46})$$

где  $w = s/\Lambda^2$ ,

$$J_1(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} r(x) dx, \quad J_2(y_1, y_2) = \int_{y_1}^{y_2} \varrho_y(y) dy; \quad (\text{II.47})$$

$$A_{\text{SL}}(Q^2, m^2) = \begin{cases} \frac{z}{z + \chi} \left[ I_1\left(-1, \frac{1}{\ln \chi}\right) + I_2(-1, 1) + I_3(0, 1) \right], & \ln \chi < -1, \\ \frac{z}{z + \chi} \left[ I_2(\ln \chi, 1) + I_3(0, 1) \right], & -1 \leq \ln \chi < 1, \\ \frac{z}{z + \chi} I_3\left(0, \frac{1}{\ln \chi}\right), & 1 \leq \ln \chi, \end{cases} \quad (\text{II.48})$$

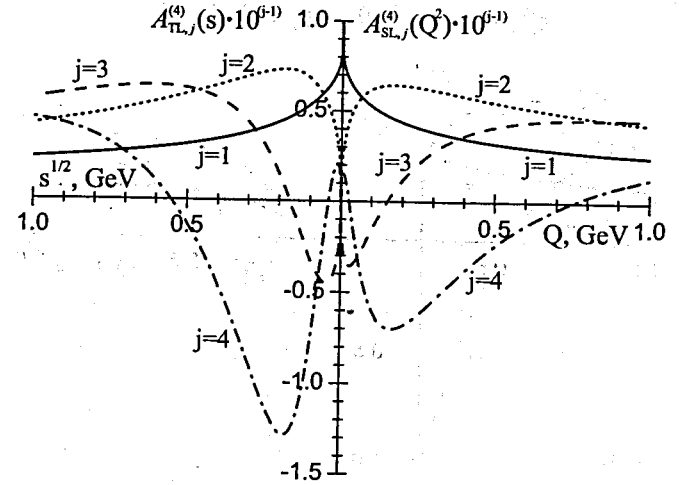


Рисунок II.2. Эффективные четырехпетлевые функции разложения  $j$ -го порядка в безмассовом пределе  $A_{\text{SL},j}^{(4)}(Q^2)$  (II.6) и  $A_{\text{TL},j}^{(4)}(s)$  (II.8):  $j = 1$  (непрерывные линии),  $j = 2$  (точечные линии, масштабный фактор  $\times 10$ ),  $j = 3$  (пунктирные линии, масштабный фактор  $\times 10^2$ ) и  $j = 4$  (штрихпунктирные линии, масштабный фактор  $\times 10^3$ ). Значения параметров:  $n_f = 3$ ,  $\Lambda = 350$  МэВ

где  $\chi = m^2/\Lambda^2$ ,

$$I_1(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} r(x) \frac{e^{1/x} - \chi}{e^{1/x} + z} dx, \quad (\text{II.49})$$

$$I_2(y_1, y_2) = \int_{y_1}^{y_2} \varrho_y(y) \frac{e^y - \chi}{e^y + z} dy, \quad (\text{II.50})$$

$$I_3(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} r(x) \frac{1 - \chi e^{-1/x}}{1 + z e^{-1/x}} dx; \quad (\text{II.51})$$

$$A_{\text{TL}}(s, m^2) = \theta\left(1 - \frac{m^2}{s}\right) A_{\text{TL}}(s). \quad (\text{II.52})$$

Подробное изложение технических вопросов, связанных с численным интегрированием уравнений (II.6), (II.8), (II.10), (II.12), приведено в работах [196, 197].

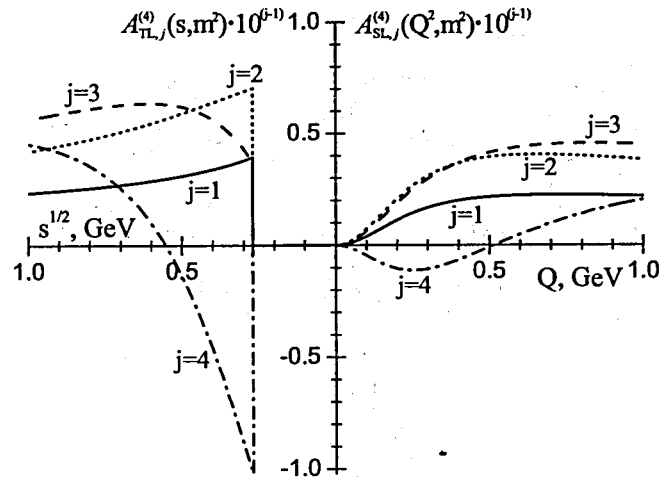


Рисунок II.3. Эффективные четырехпетлевые функции разложения  $j$ -го порядка  $A_{SL,j}^{(\ell)}(Q^2, m^2)$  (II.10) и  $A_{TL,j}^{(\ell)}(s, m^2)$  (II.12):  $j = 1$  (непрерывные линии),  $j = 2$  (точечные линии, масштабный фактор  $\times 10$ ),  $j = 3$  (пунктирные линии, масштабный фактор  $\times 10^2$ ) и  $j = 4$  (штрихпунктирные линии, масштабный фактор  $\times 10^3$ ). Значения параметров:  $n_f = 3$ ,  $\Lambda = 350$  МэВ,  $m = 270$  МэВ

В качестве примера графики “безмассовых” (см. уравнения (II.6) и (II.8)) и “массивных” (см. уравнения (II.10) и (II.12)) эффективных четырехпетлевых ( $\ell = 4$ ) функций разложения  $j$ -го порядка ( $1 \leq j \leq \ell$ ) представлены на рисунках II.2 и II.3 соответственно.

## Список литературы

- [1] А.В. Нестеренко, “Теоретическое описание процессов сильного взаимодействия во времениподобной области”. М.: Физический факультет МГУ, 104 с., 2009.
- [2] Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей* (4 изд., испр.). М.: Наука, 600 с., 1984.
- [3] С. Швебер, *Введение в релятивистскую квантовую теорию поля*. М.: Изд. иностр. литературы, 842 с., 1963.
- [4] К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер, *Квантовая теория поля. Т. 1*. М.: Мир, 448 с., 1984.
- [5] К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер, *Квантовая теория поля. Т. 2*. М.: Мир, 400 с., 1984.
- [6] А.А. Соколов, И.М. Тернов, В.Ч. Жуковский, А.В. Борисов, *Квантовая электродинамика*. М.: Изд. МГУ, 312 с., 1983.
- [7] С. Вайнберг, *Квантовая теория поля. Общая теория*. М.: Физматлит, 648 с., 2003.
- [8] С. Вайнберг, *Квантовая теория поля. Современные приложения*. М.: Физматлит, 528 с., 2003.
- [9] W. Greiner and J. Reinhardt, *Quantum Electrodynamics* (4th edition). Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 448 p., 2009.
- [10] E. Zeidler, *Quantum Field Theory I: Basics in mathematics and physics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1051 p., 2006.

- [11] E. Zeidler, *Quantum Field Theory II: Quantum Electrodynamics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1102 p., 2009.
- [12] E. Zeidler, *Quantum Field Theory III: Gauge theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1126 p., 2011.
- [13] O. Steinmann, *Perturbative Quantum Electrodynamics and axiomatic field theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 372 p., 2000.
- [14] H. Arodz and L. Hadasz, *Lectures on classical and quantum theory of fields*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 351 p., 2011.
- [15] А.А. Славнов, Л.Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей* (2 изд., перераб. и доп.). М.: Наука, 272 с., 1988.
- [16] F.J. Yndurain, *The theory of quark and gluon interactions* (4th edition). Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 476 p., 2006.
- [17] W. Greiner, S. Schramm, and E. Stein, *Quantum Chromodynamics* (3rd edition). Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 553 p., 2007.
- [18] B.L. Ioffe, V.S. Fadin, and L.N. Lipatov, *Quantum Chromodynamics: Perturbative and nonperturbative aspects*. Cambridge University Press, 585 p., 2010.
- [19] J. Chyla, *Quarks, partons and Quantum Chromodynamics*. PRA-HEP-04-01, [<http://www-hep2.fzu.cz/Theory/notes/text.pdf>].
- [20] R. Brock *et al.* [CTEQ Collaboration], "Handbook of perturbative QCD", *Rev. Mod. Phys.* **67**, 157 (1995).
- [21] В.В. Белокуров, Д.В. Ширков, *Теория взаимодействия частиц*. М.: Наука, 159 с., 1986.
- [22] В.А. Рубаков, *Классические калибровочные поля. Бозонные теории* (2 изд.). М.: УРСС, 296 с., 2005.
- [23] В.А. Рубаков, *Классические калибровочные поля: Теории с фермионами. Некоммутативные теории* (3 изд.). М.: УРСС, 240 с., 2009.

- [24] Л.Б. Окунь, *Лептоны и кварки* (3 изд.). М.: УРСС, 352 с., 2005.
- [25] М.Б. Волошин, К.А. Тер-Мартirosян, *Теория калибровочных взаимодействий элементарных частиц*. М.: Энергоатомиздат, 296 с., 1984.
- [26] Ф. Хелзен, А. Мартин, *Кварки и лептоны: Введение в физику частиц*. М.: Мир, 455 с., 1987.
- [27] Т.П. Ченг, Л.Ф. Ли, *Калибровочные теории в физике элементарных частиц*. М.: Мир, 624 с., 1987.
- [28] K. Huang, *Quarks, leptons and gauge fields* (2nd edition). Singapore, World Scientific, 348 p., 1992.
- [29] F. Scheck, *Electroweak and strong interactions* (3rd edition). Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 421 p., 2012.
- [30] Н.Н. Боголюбов, Б.В. Струминский, А.Н. Тавхелидзе, "К вопросу о составных моделях в теории элементарных частиц", препринт ОИЯИ Д-1968, 12 с., (1965).
- [31] M.Y. Han and Y. Nambu, "Three-triplet model with double SU(3) symmetry", *Phys. Rev.* **139**, B1006 (1965).
- [32] G. 't Hooft, 1972 (unpublished).
- [33] D.J. Gross and F. Wilczek, "Ultraviolet behavior of non-Abelian gauge theories", *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1343 (1973).
- [34] H.D. Politzer, "Reliable perturbative results for strong interactions?", *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1346 (1973).
- [35] Б.М. Барбашов, В.В. Нестеренко, *Модель релятивистской струны в физике адронов*. М.: Энергоатомиздат, 176 с., 1987.
- [36] K. Kamimura, "Massive string model of mesons and baryons", *Prog. Theor. Phys.* **62**, 508 (1979).

- [37] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, and V.I. Zakharov, "QCD and resonance physics. Theoretical foundations", Nucl. Phys. B **147**, 385 (1979).
- [38] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, and V.I. Zakharov, "QCD and resonance physics. Applications", Nucl. Phys. B **147**, 448 (1979).
- [39] M. Shifman, "QCD sum rules: Bridging the gap between short and large distances", Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **207**, 298 (2010); arXiv:1101.1122 [hep-ph].
- [40] K.G. Chetyrkin, S. Narison, and V.I. Zakharov, "Short-distance tachyonic gluon mass and  $1/Q^2$  corrections", Nucl. Phys. B **550**, 353 (1999); arXiv:hep-ph/9811275.
- [41] S. Narison, "The SVZ-expansion and beyond", Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **164**, 225 (2007); arXiv:hep-ph/0508259.
- [42] S. Narison, "SVZ sum rules: 30 + 1 years later", Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **207**, 315 (2010); arXiv:1010.1959 [hep-ph].
- [43] L.J. Reinders, H. Rubinstein, and S. Yazaki, "Hadron properties from QCD sum rules", Phys. Rept. **127**, 1 (1985).
- [44] E. de Rafael, "An Introduction to sum rules in QCD: Course", hep-ph/9802448.
- [45] P. Colangelo and A. Khodjamirian, "QCD sum rules, a modern perspective", arXiv:hep-ph/0010175.
- [46] A.A. Bykov, I.M. Dremin, and A.V. Leonidov, "Potential models of quarkonium", Usp. Fiz. Nauk **143**, 3 (1984) [Sov. Phys. Usp. **27**, 321 (1984)].
- [47] A.W. Hendry and D.B. Lichtenberg, "Properties of hadrons in the quark model", Fortsch. Phys. **33**, 139 (1985).
- [48] J.H. Kuhn and P.M. Zerwas, "The toponium scenario", Phys. Rept. **167**, 321 (1988).

- [49] W. Lucha, F.F. Schoberl, and D. Gromes, "Bound states of quarks", Phys. Rept. **200**, 127 (1991).
- [50] W. Lucha and F.F. Schoberl, "Effective potential models for hadrons", arXiv:hep-ph/9601263.
- [51] N. Brambilla and A. Vairo, "Quark confinement and the hadron spectrum", arXiv:hep-ph/9904330.
- [52] P. Hasenfratz and J. Kuti, "The quark bag model", Phys. Rept. **40**, 75 (1978).
- [53] C.E. DeTar and J.F. Donoghue, "Bag models of hadrons", Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **33**, 235 (1983).
- [54] S.L. Adler and T. Piran, "Relaxation methods for gauge field equilibrium equations", Rev. Mod. Phys. **56**, 1 (1984).
- [55] S. Scherer and M.R. Schindler, "A primer for chiral perturbation theory", Lect. Notes Phys. **830**, 1 (2012).
- [56] A. Pich, "Chiral perturbation theory", Rept. Prog. Phys. **58**, 563 (1995); arXiv:hep-ph/9502366.
- [57] G. Ecker, "Chiral perturbation theory", Prog. Part. Nucl. Phys. **35**, 1 (1995); arXiv:hep-ph/9501357.
- [58] H. Leutwyler, "On the foundations of chiral perturbation theory", Annals Phys. **235**, 165 (1994); hep-ph/9311274.
- [59] G.S. Bali, "QCD forces and heavy quark bound states", Phys. Rept. **343**, 1 (2001); hep-ph/0001312.
- [60] C. Gattringer and C.B. Lang, "Quantum chromodynamics on the lattice", Lect. Notes Phys. **788**, 1 (2010).
- [61] A.M. Green, *Hadronic physics from lattice QCD*. Singapore, World Scientific, 367 p., 2004.
- [62] T. DeGrand and C. DeTar, *Lattice methods for Quantum Chromodynamics*. Singapore, World Scientific, 364 p., 2006.

- [63] H.J. Rothe, "Lattice gauge theories: An introduction", World Sci. Lect. Notes Phys. **74**, 1 (2005).
- [64] R. Gupta, "Introduction to lattice QCD", arXiv:hep-lat/9807028.
- [65] Д.В. Ширков, В.В. Серебряков, В.А. Мещеряков, *Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях*. М.: Наука, 324 с., 1967.
- [66] Н.Н. Боголюбов, Б.В. Медведев, М.К. Поливанов, *Вопросы теории дисперсионных соотношений*. М.: Физматлит, 202 с., 1958.
- [67] N.M. Queen and G. Violini, *Dispersion theory in high energy physics*. London, Macmillan, 202 p., 1974.
- [68] G. Barton, *Introduction to dispersion techniques in field theory*. New York, Benjamin, 242 p., 1965.
- [69] R. Hagedorn, *Introduction to field theory and dispersion relations*. Oxford, Pergamon Press, 127 p., 1964.
- [70] N. Graham, M. Quandt, and H. Weigel, "Spectral methods in Quantum Field Theory", Lect. Notes Phys. **777**, 1 (2009).
- [71] K. Symanzik, "Infrared singularities and small distance behavior analysis", Commun. Math. Phys. **34**, 7 (1973).
- [72] T. Appelquist and J. Carazzone, "Infrared singularities and massive fields", Phys. Rev. D **11**, 2856 (1975).
- [73] R.K. Ellis, W.J. Stirling, and B.R. Webber, "QCD and collider physics", Camb. Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol. **8**, 1 (1996).
- [74] P.N. Burrows, "Precise tests of QCD in  $e^+e^-$  annihilation", report SLAC-PUB-7434 (1997); arXiv:hep-ex/9705013.
- [75] S.J. Brodsky, "QCD physics opportunities in low-energy electron-positron annihilation", report SLAC-PUB-10250 (2003); arXiv:hep-ph/0311355.

- [76] Р. Фейнман, *Взаимодействие фотонов с адронами*. М.: Мир, 392 с., 1975.
- [77] S.L. Adler, "Some simple vacuum-polarization phenomenology:  $e^+e^- \rightarrow$  hadrons; the muonic-atom X-ray discrepancy and  $(g_\mu - 2)$ ", Phys. Rev. D **10**, 3714 (1974).
- [78] F.J. Gilman, "Theory of electron-positron annihilation into hadrons", report SLAC-PUB-1650 (1975).
- [79] K. Nakamura *et al.* [Particle Data Group], "Review of particle physics", J. Phys. G **37**, 075021 (2010) [<http://pdg.lbl.gov>].
- [80] A.V. Nesterenko, "On the low-energy behavior of the Adler function", Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **186**, 207 (2009); arXiv:0808.2043 [hep-ph].
- [81] A.V. Nesterenko, "Adler function in the analytic approach to QCD", SLAC eConf C0706044, 25 (2008); arXiv:0710.5878 [hep-ph].
- [82] A.V. Nesterenko and J. Papavassiliou, "A novel integral representation for the Adler function", J. Phys. G **32**, 1025 (2006); arXiv:hep-ph/0511215.
- [83] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного* (5 изд., испр.). М.: Наука, 688 с., 1987.
- [84] N. Cabibbo, G. Parisi, and M. Testa, "Hadron production in  $e^+e^-$  collisions", Lett. Nuovo Cim. **4**, 35 (1970).
- [85] A. De Rujula and H. Georgi, "Counting quarks in  $e^+e^-$  annihilation", Phys. Rev. D **13**, 1296 (1976).
- [86] J.D. Bjorken, "Two topics in Quantum Chromodynamics", report SLAC-PUB-5103 (1989).
- [87] R.G. Moorhouse, M.R. Pennington, and G.G. Ross, "What can asymptotic freedom say about  $e^+e^- \rightarrow$  hadrons?", Nucl. Phys. B **124**, 285 (1977).



- [88] M.R. Pennington and G.G. Ross, "Perturbative QCD for timelike processes: what is the best expansion parameter?", *Phys. Lett. B* **102**, 167 (1981).
- [89] M.R. Pennington, R.G. Roberts, and G.G. Ross, "How to continue the predictions of perturbative QCD from the space-like region where they are derived to the time-like regime where experiments are performed", *Nucl. Phys. B* **242**, 69 (1984).
- [90] A.I. Sanda, "A nonperturbative determination of  $\alpha(q^2)$  and its experimental implications", *Phys. Rev. Lett.* **42**, 1658 (1979).
- [91] A.V. Radyushkin, "Optimized  $\Lambda$ -parametrization for the QCD running coupling constant in spacelike and timelike regions", препринт ОИЯИ E2-82-159 (1982); *JINR Rapid Commun.* **78**, 96 (1996); arXiv:hep-ph/9907228.
- [92] N.V. Krasnikov and A.A. Pivovarov, "The influence of the analytic continuation effects on the value of the QCD scale parameter  $\Lambda$  extracted from charmonium and upsilonium hadron decay", *Phys. Lett. B* **116**, 168 (1982).
- [93] G. 't Hooft, "Dimensional regularization and the renormalization group", *Nucl. Phys. B* **61**, 455 (1973).
- [94] S. Narison, "Techniques of dimensional regularization and the two-point functions of QCD and QED", *Phys. Rept.* **84**, 263 (1982).
- [95] И.С. Градштейн, И.М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. М.: Наука, 1108 с., 1971.
- [96] T. Appelquist and H. Georgi, " $e^+e^-$  annihilation in gauge theories of strong interactions", *Phys. Rev. D* **8**, 4000 (1973).
- [97] A. Zee, "Electron-positron annihilation in stagnant field theories", *Phys. Rev. D* **8**, 4038 (1973).

- [98] A.E. Dorokhov and W. Broniowski, "Vector and axial-vector correlators in a nonlocal chiral quark model", *Eur. Phys. J. C* **32**, 79 (2003); arXiv:hep-ph/0305037.
- [99] A.E. Dorokhov, "Adler function and hadronic contribution to the muon  $g - 2$  in a nonlocal chiral quark model", *Phys. Rev. D* **70**, 094011 (2004); arXiv:hep-ph/0405153.
- [100] A.E. Dorokhov, "Hadronic corrections to muon anomalous magnetic moment within the instanton liquid model", *Acta Phys. Polon. B* **36**, 3751 (2005); arXiv:hep-ph/0510297.
- [101] A.E. Dorokhov, "Hadronic corrections to muon anomalous magnetic moment within the instanton liquid model", *Nucl. Phys. A* **790**, 481 (2007).
- [102] A.E. Dorokhov, "Nonlocal condensates and current-current correlators within the instanton liquid model", hep-ph/0601114.
- [103] E. Shintani, S. Aoki, H. Fukaya, S. Hashimoto, T. Kaneko, T. Onogi, and N. Yamada, "Strong coupling constant from vacuum polarization functions in three-flavor lattice QCD with dynamical overlap fermions", *Phys. Rev. D* **82**, 074505 (2010); arXiv:1002.0371 [hep-lat].
- [104] E. Shintani *et al.* [JLQCD Collaboration and TWQCD Collaboration], "Lattice study of the vacuum polarization function and determination of the strong coupling constant", *Phys. Rev. D* **79**, 074510 (2009); arXiv:0807.0556 [hep-lat].
- [105] M. Gockeler *et al.* [QCDSF Collaboration], "Vacuum polarization and hadronic contribution to muon  $g - 2$  from lattice QCD", *Nucl. Phys. B* **688**, 135 (2004); arXiv:hep-lat/0312032.
- [106] C. Aubin and T. Blum, "Calculating the hadronic vacuum polarization and leading hadronic contribution to the muon anomalous magnetic moment with improved staggered quarks", *Phys. Rev. D* **75**, 114502 (2007); arXiv:hep-lat/0608011.

- [107] T. Blum, "Lattice calculation of the lowest order hadronic contribution to the muon anomalous magnetic moment", *Phys. Rev. Lett.* **91**, 052001 (2003); arXiv:hep-lat/0212018.
- [108] F. Jegerlehner, "The running fine structure constant  $\alpha(E)$  via the Adler function", *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **181**, 135 (2008); arXiv:0807.4206 [hep-ph].
- [109] S. Eidelman, F. Jegerlehner, A.L. Kataev, and O. Veretin, "Testing non-perturbative strong interaction effects via the Adler function", *Phys. Lett. B* **454**, 369 (1999); arXiv:hep-ph/9812521.
- [110] M. Davier, A. Hocker, and Z. Zhang, "The physics of hadronic  $\tau$  decays", *Rev. Mod. Phys.* **78**, 1043 (2006); arXiv:hep-ph/0507078.
- [111] K. Akerstaff *et al.* [OPAL Collaboration], "Measurement of the strong coupling constant  $\alpha_s$  and the vector and axial-vector spectral functions in hadronic  $\tau$  decays", *Eur. Phys. J. C* **7**, 571 (1999); arXiv:hep-ex/9808019.
- [112] S. Anderson *et al.* [CLEO Collaboration], "Hadronic structure in the decay  $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$ ", *Phys. Rev. D* **61**, 112002 (2000); hep-ex/9910046.
- [113] R. Barate *et al.* [ALEPH Collaboration], "Measurement of the axial-vector  $\tau$  spectral functions and determination of  $\alpha_s(M_\tau^2)$  from hadronic  $\tau$  decays", *Eur. Phys. J. C* **4**, 409 (1998).
- [114] S. Schael *et al.* [ALEPH Collaboration], "Branching ratios and spectral functions of  $\tau$  decays: Final ALEPH measurements and physics implications", *Phys. Rept.* **421**, 191 (2005); arXiv:hep-ex/0506072.
- [115] M. Davier, A. Hocker, and Z. Zhang, "ALEPH  $\tau$  spectral functions and QCD", *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **169**, 22 (2007); arXiv:hep-ph/0701170.
- [116] M. Davier, S. Eidelman, A. Hocker, and Z. Zhang, "Confronting spectral functions from  $e^+e^-$  annihilation and  $\tau$  decays: Conse-

- quences for the muon magnetic moment", *Eur. Phys. J. C* **27**, 497 (2003); arXiv:hep-ph/0208177.
- [117] M. Davier, S. Eidelman, A. Hocker, and Z. Zhang, "Updated estimate of the muon magnetic moment using revised results from  $e^+e^-$  annihilation", *Eur. Phys. J. C* **31**, 503 (2003); arXiv:hep-ph/0308213.
- [118] M. Davier, S. Descotes-Genon, A. Hocker, B. Malaescu, and Z. Zhang, "The determination of  $\alpha_s$  from  $\tau$  decays revisited", *Eur. Phys. J. C* **56**, 305 (2008); arXiv:0803.0979 [hep-ph].
- [119] M. Davier *et al.*, "The discrepancy between  $\tau$  and  $e^+e^-$  spectral functions revisited and the consequences for the muon magnetic anomaly", *Eur. Phys. J. C* **66**, 127 (2010); arXiv:0906.5443 [hep-ph].
- [120] D.V. Shirkov, "Evolution of the Bogoliubov renormalization group", arXiv:hep-th/9909024.
- [121] P. Pascual and R. Tarrach, "QCD: Renormalization for the practitioner", *Lect. Notes Phys.* **194**, 1 (1984).
- [122] G.M. Prosperi, M. Raciti, and C. Simolo, "On the running coupling constant in QCD", *Prog. Part. Nucl. Phys.* **58**, 387 (2007); arXiv:hep-ph/0607209.
- [123] W.E. Caswell, "Asymptotic behavior of non-Abelian gauge theories to two-loop order", *Phys. Rev. Lett.* **33**, 244 (1974).
- [124] D.R.T. Jones, "Two-loop diagrams in Yang-Mills theory", *Nucl. Phys. B* **75**, 531 (1974).
- [125] E. Egorian and O.V. Tarasov, "Two-loop renormalization of the QCD in an arbitrary gauge", *Teor. Mat. Fiz.* **41**, 26 (1979) [*Theor. Math. Phys.* **41**, 863 (1979)].
- [126] O.V. Tarasov, A.A. Vladimirov, and A.Yu. Zharkov, "The Gell-Mann-Low function of QCD in the three-loop approximation", *Phys. Lett. B* **93**, 429 (1980).

- [127] S.A. Larin and J.A.M. Vermaseren, "The three-loop QCD  $\beta$ -function and anomalous dimensions", Phys. Lett. B **303**, 334 (1993); arXiv:hep-ph/9302208.
- [128] T. van Ritbergen, J.A.M. Vermaseren, and S.A. Larin, "The four-loop  $\beta$ -function in Quantum Chromodynamics", Phys. Lett. B **400**, 379 (1997); arXiv:hep-ph/9701390.
- [129] K.G. Chetyrkin, B.A. Kniehl, and M. Steinhauser, "Strong coupling constant with flavor thresholds at four loops in the modified minimal-subtraction scheme", Phys. Rev. Lett. **79**, 2184 (1997); arXiv:hep-ph/9706430.
- [130] S. Bethke *et al.*, "Workshop on precision measurements of  $\alpha_s$ ", arXiv:1110.0016 [hep-ph].
- [131] S. Bethke, "The 2009 World average of  $\alpha_s(M_Z)$ ", Eur. Phys. J. C **64**, 689 (2009); arXiv:0908.1135 [hep-ph].
- [132] S. Bethke, "Experimental tests of asymptotic freedom", Prog. Part. Nucl. Phys. **58**, 351 (2007); arXiv:hep-ex/0606035.
- [133] P.J. Redmond, "Elimination of ghosts in propagators", Phys. Rev. **112**, 1404 (1958).
- [134] P.J. Redmond and J.L. Uretsky, "Conjecture concerning the properties of nonrenormalizable field theories", Phys. Rev. Lett. **1**, 147 (1958).
- [135] Н.Н. Боголюбов, А.А. Логунов, Д.В. Ширков, "Метод дисперсионных соотношений и теория возмущений", ЖЭТФ, **37**, 805 (1959).
- [136] P.J. Mohr, B.N. Taylor, and D.B. Newell, "CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2006", Rev. Mod. Phys. **80**, 633 (2008); arXiv:0801.0028 [physics.atom-ph].
- [137] P.J. Mohr and D.B. Newell, "The physics of fundamental constants", Am. J. Phys. **78**, 338 (2010).

- [138] E. Gardi, G. Grunberg, and M. Karliner, "Can the QCD running coupling have a causal analyticity structure?", JHEP **9807**, 007 (1998); arXiv:hep-ph/9806462.
- [139] B.A. Magradze, "The gluon propagator in analytic perturbation theory", arXiv:hep-ph/9808247.
- [140] R.M. Corless, G.H. Gonnet, D.E.G. Hare, D.J. Jeffrey, and D.E. Knuth, "On the Lambert  $W$  function", Adv. Comput. Math. **5**, 329 (1996).
- [141] D.J. Jeffrey, D.E.G. Hare, and R.M. Corless, "Unwinding the branches of the Lambert  $W$  function", Math. Scient. **21**, 1 (1996).
- [142] D. Veberic, "Having fun with Lambert  $W(x)$  function", arXiv:1003.1628 [cs.MS].
- [143] M.L. Perl, "Lectures on electron-positron annihilation", report SLAC-PUB-1614 (1975).
- [144] D.V. Shirkov and I.L. Solovtsov, "Analytic model for the QCD running coupling with universal  $\bar{\alpha}_s(0)$  value", Phys. Rev. Lett. **79**, 1209 (1997); arXiv:hep-ph/9704333.
- [145] I.L. Solovtsov and D.V. Shirkov, "The analytic approach in Quantum Chromodynamics", Teor. Mat. Fiz. **120**, 482 (1999) [Theor. Math. Phys. **120**, 1220 (1999)]; arXiv:hep-ph/9909305.
- [146] A.V. Nesterenko, "Quark-antiquark potential in the analytic approach to QCD", Phys. Rev. D **62**, 094028 (2000); arXiv:hep-ph/9912351.
- [147] A.V. Nesterenko, "New analytic running coupling in spacelike and timelike regions", Phys. Rev. D **64**, 116009 (2001); arXiv:hep-ph/0102124.
- [148] A.V. Nesterenko, "Analytic invariant charge in QCD", Int. J. Mod. Phys. A **18**, 5475 (2003); arXiv:hep-ph/0308288.

- [149] A.V. Nesterenko, "Nonperturbative aspects of the QCD analytic invariant charge", *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **133**, 59 (2004); arXiv:hep-ph/0307283.
- [150] A.V. Nesterenko, "Investigation of a new analytic running coupling in QCD", *Mod. Phys. Lett. A* **15**, 2401 (2000); arXiv:hep-ph/0102203.
- [151] A.V. Nesterenko and I.L. Solovtsov, "New analytic running coupling in QCD: Higher loop levels", *Mod. Phys. Lett. A* **16**, 2517 (2001); arXiv:hep-ph/0111067.
- [152] M. Baldicchi and G.M. Prosperi, "Infrared behavior of the running coupling constant and bound states in QCD", *Phys. Rev. D* **66**, 074008 (2002); arXiv:hep-ph/0202172.
- [153] M. Baldicchi and G.M. Prosperi, "Running coupling constant and masses in QCD, the meson spectrum", *AIP Conf. Proc.* **756**, 152 (2005); arXiv:hep-ph/0412359.
- [154] M. Baldicchi, A.V. Nesterenko, G.M. Prosperi, D.V. Shirkov, and C. Simolo, "Bound state approach to the QCD coupling at low energy scales", *Phys. Rev. Lett.* **99**, 242001 (2007); arXiv:0705.0329 [hep-ph].
- [155] M. Baldicchi, A.V. Nesterenko, G.M. Prosperi, and C. Simolo, "QCD coupling below 1 GeV from quarkonium spectrum", *Phys. Rev. D* **77**, 034013 (2008); arXiv:0705.1695 [hep-ph].
- [156] A.V. Nesterenko, "Analytic invariant charge and the lattice static quark-antiquark potential", *Int. J. Mod. Phys. A* **19**, 3471 (2004); arXiv:hep-ph/0305091.
- [157] A.V. Nesterenko, "Quark confinement in the analytic approach to QCD", *Proc. of 4th Int. Conf. on Quark Confinement and the Hadron Spectrum*, Vienna, Austria, 2000. Ed. by W. Lucha and K.M. Maung, World Scientific Publishing Co., p. 255 (2002); hep-ph/0010257.

- [158] V.L. Khandramai, R.S. Pasechnik, D.V. Shirkov, O.P. Solovtsova, and O.V. Teryaev, "Four-loop QCD analysis of the Bjorken sum rule vs data", arXiv:1106.6352 [hep-ph].
- [159] R.S. Pasechnik, D.V. Shirkov, and O.V. Teryaev, "Bjorken sum rule and pQCD frontier on the move", *Phys. Rev. D* **78**, 071902 (2008); arXiv:0808.0066 [hep-ph].
- [160] K.A. Milton, I.L. Solovtsov, and O.P. Solovtsova, "The Gross-Llewellyn Smith sum rule in the analytic approach to perturbative QCD", *Phys. Rev. D* **60**, 016001 (1999); arXiv:hep-ph/9809513.
- [161] K.A. Milton, I.L. Solovtsov, and O.P. Solovtsova, "The Bjorken sum rule in the analytic approach to perturbative QCD", *Phys. Lett. B* **439**, 421 (1998); arXiv:hep-ph/9809510.
- [162] A.C. Aguilar, A.V. Nesterenko, and J. Papavassiliou, "Infrared enhanced analytic coupling and chiral symmetry breaking in QCD", *J. Phys. G* **31**, 997 (2005); arXiv:hep-ph/0504195.
- [163] A.C. Aguilar, A.V. Nesterenko, and J. Papavassiliou, "Quark gap equation within the analytic approach to QCD", *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **164**, 300 (2007); arXiv:hep-ph/0510117.
- [164] A.V. Nesterenko and J. Papavassiliou, "The QCD analytic running coupling and chiral symmetry breaking", *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **152**, 47 (2005); hep-ph/0410072.
- [165] A.P. Bakulev, A.V. Pimikov, and N.G. Stefanis, "Pion form factor in the QCD sum-rule approach with nonlocal condensates", *Acta Phys. Polon. Supp. B* **2**, 289 (2009); arXiv:0905.2522 [hep-ph].
- [166] A.P. Bakulev, A.V. Pimikov, and N.G. Stefanis, "QCD sum rules with nonlocal condensates and the spacelike pion form factor", *Phys. Rev. D* **79**, 093010 (2009); arXiv:0904.2304 [hep-ph].
- [167] N.G. Stefanis, "Pion form factor analysis using NLO analytic perturbation theory", *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **152**, 245 (2006); arXiv:hep-ph/0410245.

- [168] A.P. Bakulev, K. Passek-Kumericki, W. Schroers, and N.G. Stefanis, "Pion form factor in QCD: From nonlocal condensates to NLO analytic perturbation theory", *Phys. Rev. D* **70**, 033014 (2004); **70**, 079906(E) (2004); arXiv:hep-ph/0405062.
- [169] D.V. Shirkov, "Analytic perturbation theory in analyzing some QCD observables", *Eur. Phys. J. C* **22**, 331 (2001); arXiv:hep-ph/0107282.
- [170] D.V. Shirkov and I.L. Solovtsov, "Ten years of the analytic perturbation theory in QCD", *Teor. Mat. Fiz.* **150**, 152 (2007) [*Theor. Math. Phys.* **150**, 132 (2007)]; arXiv:hep-ph/0611229.
- [171] G. Cvetic and C. Valenzuela, "Analytic QCD: A short review", *Braz. J. Phys.* **38**, 371 (2008); arXiv:0804.0872 [hep-ph].
- [172] B. Schrempp and F. Schrempp, "QCD at low  $Q^2$ : A correspondence relation for moments of structure functions", *Z. Phys. C* **6**, 7 (1980).
- [173] K.A. Milton and I.L. Solovtsov, "Analytic perturbation theory in QCD and Schwinger's connection between the beta function and the spectral density", *Phys. Rev. D* **55**, 5295 (1997); arXiv:hep-ph/9611438.
- [174] K.A. Milton and I.L. Solovtsov, "Can the QCD effective charge be symmetrical in the Euclidean and the Minkowskian regions?", *Phys. Rev. D* **59**, 107701 (1999); arXiv:hep-th/9812171.
- [175] D.M. Howe and C.J. Maxwell, "All-orders infrared freezing of  $R_{e^+e^-}$  in perturbative QCD", *Phys. Lett. B* **541**, 129 (2002); arXiv:hep-ph/0204036.
- [176] D.M. Howe and C.J. Maxwell, "All-orders infrared freezing of observables in perturbative QCD", *Phys. Rev. D* **70**, 014002 (2004); arXiv:hep-ph/0303163.
- [177] I. Caprini and J. Fischer, "On the infrared freezing of perturbative QCD in the Minkowskian region", *Phys. Rev. D* **71**, 094017 (2005); arXiv:hep-ph/0505016.

- [178] D.V. Shirkov, "Nonpower expansions for QCD observables at low energies", *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **152**, 51 (2006); arXiv:hep-ph/0408272.
- [179] D.V. Shirkov, "The  $\pi^2$ -terms in the s-channel QCD observables", arXiv:hep-ph/0009106.
- [180] K.A. Milton, I.L. Solovtsov, and O.P. Solovtsova, "The Adler function for light quarks in Analytic Perturbation Theory", *Phys. Rev. D* **64**, 016005 (2001); arXiv:hep-ph/0102254.
- [181] K.A. Milton, I.L. Solovtsov, and O.P. Solovtsova, "An analytic method of describing  $R$ -related quantities in QCD", *Mod. Phys. Lett. A* **21**, 1355 (2006); arXiv:hep-ph/0512209.
- [182] G. Cvetic, C. Valenzuela, and I. Schmidt, "A modification of minimal analytic QCD at low energies", *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **164**, 308 (2007); arXiv:hep-ph/0508101.
- [183] G. Cvetic and C. Valenzuela, "An approach for evaluation of observables in analytic versions of QCD", *J. Phys. G* **32**, L27 (2006); arXiv:hep-ph/0601050.
- [184] B.A. Magradze, "Testing the concept of quark-hadron duality with the ALEPH  $\tau$  decay data", *Few Body Syst.* **48**, 143 (2010); arXiv:1005.2674 [hep-ph].
- [185] K.G. Chetyrkin, A.L. Kataev, and F.V. Tkachov, "Higher-order corrections to  $\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})$  in Quantum Chromodynamics", *Phys. Lett. B* **85**, 277 (1979).
- [186] M. Dine and J.R. Sapiirstein, "Higher-order Quantum Chromodynamic corrections in  $e^+e^-$  annihilation", *Phys. Rev. Lett.* **43**, 668 (1979).
- [187] W. Celmaster and R.J. Gonsalves, "Analytic calculation of higher-order Quantum Chromodynamic corrections in  $e^+e^-$  annihilation", *Phys. Rev. Lett.* **44**, 560 (1980).

- [188] S.G. Gorishny, A.L. Kataev, and S.A. Larin, "The  $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$  corrections to  $\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})$  and  $\Gamma(\tau^- \rightarrow \nu_\tau + \text{hadrons})$  in QCD", Phys. Lett. B **259**, 144 (1991).
- [189] L.R. Surguladze and M.A. Samuel, "Total hadronic cross section in  $e^+e^-$  annihilation at the four-loop level of perturbative QCD", Phys. Rev. Lett. **66**, 560 (1991); **66**, 2416(E) (1991).
- [190] P.A. Baikov, K.G. Chetyrkin, and J.H. Kuhn, "Order  $\alpha_s^4$  QCD corrections to  $Z$  and  $\tau$  decays", Phys. Rev. Lett. **101**, 012002 (2008); arXiv:0801.1821 [hep-ph].
- [191] A.L. Kataev and V.V. Starshenko, "Estimates of the higher-order QCD corrections to  $R(s)$ ,  $R_\tau$  and deep-inelastic scattering sum rules", Mod. Phys. Lett. A **10**, 235 (1995); arXiv:hep-ph/9502348.
- [192] P.A. Baikov, K.G. Chetyrkin, and J.H. Kuhn, "Towards order  $\alpha_s^4$  accuracy in  $\tau$  decays", Phys. Rev. D **67**, 074026 (2003); arXiv:hep-ph/0212299.
- [193] G. Grunberg, "Renormalization-scheme-invariant QCD and QED: The method of effective charges", Phys. Rev. D **29**, 2315 (1984).
- [194] P.M. Stevenson, "Optimized perturbation theory", Phys. Rev. D **23**, 2916 (1981).
- [195] A.P. Bakulev, S.V. Mikhailov, and N.G. Stefanis, "Higher-order QCD perturbation theory in different schemes: From FOPT to CIPT to FAPT", JHEP **1006**, 085 (2010); arXiv:1004.4125 [hep-ph].
- [196] A.V. Nesterenko and C. Simolo, "QCDMPT: Program package for Analytic approach to QCD", Comput. Phys. Commun. **181**, 1769 (2010); arXiv:1001.0901 [hep-ph].
- [197] A.V. Nesterenko and C. Simolo, "QCDMPT\_F: Fortran version of QCDMPT package", Comput. Phys. Commun. **182**, 2303 (2011); arXiv:1107.1045 [hep-ph].

## Программа курса лекций

**Квантовая хромодинамика**

для студентов 6-го курса

кафедры фундаментальных и прикладных проблем физики микромира  
Московского физико-технического института  
(Учебно-научный центр ОИЯИ, Дубна)

к.ф.-м.н. А.В. Нестеренко

Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова ОИЯИ, Дубна  
E-mail: nesterav@theor.jinr.ru

11 семестр, лекции (34 часа) и семинары (34 часа)

**Аннотация**

Курс лекций посвящен систематическому изложению современной теории сильных взаимодействий — квантовой хромодинамики. В первой части курса изложены основы квантовой хромодинамики как квантовой неабелевой теории поля. Вторая часть курса посвящена теоретическому описанию процессов сильного взаимодействия при больших энергиях в рамках теории возмущений. В третьей части курса рассматриваются непертурбативные методы описания адронной динамики в области малых энергий.

**Лекция 1. Введение (часть I).**

Предпосылки к созданию квантовой хромодинамики. Кварки и глюоны. Неабелевы калибровочные поля. Локальная калибровочная инвариантность теории. Лагранжиан квантовой хромодинамики. Ковариантные и аксиальные калибровки.

**Лекция 2. Введение (часть II).**

Особенности квантования калибровочных теорий. Представление взаимодействия и матрица рассеяния. Общие свойства S-матрицы. Теоремы Вика. Правила Фейнмана для квантовой хромодинамики.

### Лекция 3. Расходимости в квантовой теории поля и методы их устранения.

Техника вычисления петлевых поправок. Методы регуляризации импульсных интегралов. Схемы вычитания расходимостей. Контрчлены и перенормировки. Преобразования Дайсона. Причины расходимостей в локальной квантовой теории поля.

### Лекция 4. Метод ренормализационной группы в квантовой хромодинамике (часть I).

Перенормировка в глюодинамике. Метод ренормализационной группы. Инвариантный заряд квантовой хромодинамики. Уравнения ренормализационной группы в функциональной и дифференциальной форме.

### Лекция 5. Метод ренормализационной группы в квантовой хромодинамике (часть II).

Ренормгрупповая  $\beta$ -функция в рамках теории возмущений. Вычисление  $\beta$ -функции квантовой хромодинамики в однопетлевом приближении.

### Лекция 6. Инвариантный заряд и асимптотическая свобода в квантовой хромодинамике.

Бегущая константа связи сильного взаимодействия  $\alpha_s(Q^2)$  на однопетлевом уровне. Масштабный параметр  $\Lambda_{\text{QCD}}$ . Инвариантный заряд  $\alpha_s(Q^2)$  в высших петлевых приближениях. Извлечение бегущей константы связи квантовой хромодинамики из экспериментальных данных. Пороговые эффекты. Зависимость результатов теории возмущений от схемы вычитания.

### Лекция 7. Партоновая модель (часть I).

Кинематика процессов лептон-адронного рассеяния. Сечения упругого рассеяния электрона на точечном и реальном протоне. Глубоконеупругое рассеяние лептонов на нуклонах. Структурные функции, бьеркеновский скейлинг. Дифференциальное сечение глубоконеупругого электрон-протонного рассеяния. Экспериментальные данные.

### Лекция 8. Партоновая модель (часть II).

Партоновые функции распределения, функции фрагментации, способы их параметризации. Операторное разложение и моменты структурных функций. Уравнение ренормализационной группы для моментов структурных функций и его решение в рамках теории возмущений.

### Лекция 9. Электрон-позитронная аннигиляция в адроны.

Кинематика и сечение процесса  $e^+e^-$ -аннигиляции в адроны. Особенности описания процессов сильного взаимодействия во времениподобной области. Дисперсионное соотношение для адронной функции поляризации вакуума  $\Pi(q^2)$ . Дисперсионное соотношение для функции Адлера. Вклад сильного взаимодействия в  $\Pi(q^2)$ . Вычисление  $R$ -отношения в рамках теории возмущений,  $\pi^2$ -вклады. Экспериментальные данные и их теоретический анализ.

### Лекция 10. Инклюзивный распад $\tau$ -лептона в адроны.

Кинематика и ширина адронного распада  $\tau$ -лептона. Сильные поправки к адронной функции поляризации вакуума. Специфика описания инклюзивного распада  $\tau$ -лептона в рамках теории возмущений. Экспериментальные данные и их теоретический анализ.

### Лекция 11. Вклад сильного взаимодействия в электрослабые процессы (часть I).

Описание аномального магнитного момента мюона  $a_\mu = (g-2)_\mu/2$ . Экспериментальные данные и их теоретический анализ.

### Лекция 12. Вклад сильного взаимодействия в электрослабые процессы (часть II).

Эволюция бегущей константы связи электромагнитного взаимодействия: вычисление  $\Delta\alpha_{\text{em}}(M_Z^2)$ . Экспериментальные данные и их теоретический анализ.

**Лекция 13. Конфайнмент кварков: потенциальные модели.**

Закон Кулона в спинорной электродинамике. Кварк-антикварковый потенциал в приближении одноглюонного обмена. Описание мезонов и барионов в рамках потенциального подхода. Некоторые модели статического потенциала кварк-антикваркового взаимодействия. Методы регуляризации сингулярных Фурье-преобразований. Исследование конфайнмента кварков на решетке.

**Лекция 14. Конфайнмент кварков: модель мешков.**

Феноменологическое описание вакуумного состояния в квантовой хромодинамике. Формулировка модели мешков, граничные условия для кварковых и глюонных полей. Давление внутри мешка и его устойчивость. Модель "MIT bag": преимущества и недостатки. Основные результаты и область применимости модели мешков.

**Лекция 15. Топологическая структура вакуума в квантовой хромодинамике.**

Евклидовы конфигурации полевых систем. Индекс Понтрягина. Уравнения самодуальности. Инстантоны в теории Янга-Миллса и их физическая интерпретация. Одноинстантонное решение для калибровочной группы SU(2) и его свойства. Вклад инстантонов в процессы сильного взаимодействия. Исследование топологической структуры вакуума квантовой хромодинамики на решетке.

**Задачи к курсу лекций****Квантовая хромодинамика**

для студентов 6-го курса

кафедры фундаментальных и прикладных проблем физики микромира  
Московского физико-технического института  
(Учебно-научный центр ОИЯИ, Дубна)

к.ф.-м.н. А.В. Нестеренко

Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова ОИЯИ, Дубна

E-mail: nesterav@theor.jinr.ru

**Задача 1.** Показать, что из условия минимума действия системы  $\delta A = 0$  следуют уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_a(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu u_a(x)]} = 0, \quad (1)$$

где  $A = \int \mathcal{L}(x) d^4x$  — действие,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}[u_a(x), \partial_\mu u_a(x)]$  — лагранжиан,  $\{u_a(x)\}$  — набор функций поля.

**Задача 2.** Показать, что в спинорной электродинамике

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\hat{D} - m)\psi \quad (2)$$

уравнения движения (1) принимают вид

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = ej^\nu \\ (i\hat{D} - m)\psi = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

где  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ,  $\hat{D} = D_\mu \gamma^\mu$ ,  $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$  и  $j_\nu = \bar{\psi}\gamma_\nu\psi$ .

**Задача 3.** Вывести динамические инварианты для свободного поля Дирака. В частности, показать, что тензор энергии-импульса  $T_{\mu\nu}$  и вектор тока  $j_\mu$  имеют следующий вид:

$$T_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\nu\psi - \partial_\nu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi], \quad (4)$$

$$j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi. \quad (5)$$



**Задача 4.** Показать, что уравнение движения свободного электромагнитного поля в случае ковариантной калибровки  $\mathcal{L}_{\text{gauge}} = (\partial_\mu A^\mu)^2 / (2\xi)$  имеет вид

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{\xi} \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0, \quad (6)$$

где  $\xi$  — калибровочный параметр (произвольная действительная постоянная). Показать, что в ковариантной калибровке пропагатор электромагнитного поля определяется формулой

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{i}{k^2} \left[ -g_{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right]. \quad (7)$$

**Задача 5.** Показать, что уравнение движения свободного электромагнитного поля в случае аксиальной калибровки  $\mathcal{L}_{\text{gauge}} = (n_\mu A^\mu)^2 / (2\xi)$  имеет вид

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - \frac{1}{\xi} n^\nu n_\mu A^\mu = 0, \quad (8)$$

где  $\xi$  — калибровочный параметр,  $n_\mu$  — некоторый постоянный 4-вектор размерности массы ( $n^2 < 0$ ). Показать, что в аксиальной калибровке пропагатор электромагнитного поля принимает вид

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{i}{k^2} \left[ -g_{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{(kn)^2} n^2 + \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{kn} \right]. \quad (9)$$

**Задача 6.** Вывести уравнения движения в хромодинамике

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4} G_{a\mu\nu} G^{a\mu\nu} + \sum_f \bar{\psi}_f^i [i\gamma^\mu (D_\mu)_{ij} - m_f \delta_{ij}] \psi_f^j, \quad (10)$$

где  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $a = 1, \dots, 8$ ,  $f$  обозначает аромат кварка,

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^a_{bc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (11)$$

$$(D_\mu)_{ij} = \delta_{ij} \partial_\mu + i \frac{g}{2} (\lambda_a)_{ij} A_\mu^a, \quad (12)$$

$\lambda_a$  — матрицы Гелл-Манна,  $t_a = \lambda_a / 2$  — генераторы калибровочной группы  $SU(3)$ ,  $[t_a, t_b] = if_{abc} t_c$ . Получить выражения для глюонного пропагатора в ковариантной и аксиальной калибровке.

**Задача 7.** Показать, что матрица рассеяния может быть представлена в виде

$$S = T \exp \left[ i \int \mathcal{L}_{\text{int}}(x) d^4x \right], \quad (13)$$

где  $\mathcal{L}_{\text{int}}(x)$  содержит только члены взаимодействия.

**Задача 8.** В предположении малости константы связи показать, что матрица рассеяния (13) может быть представлена в виде ряда теории возмущений

$$S \simeq 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \int S_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \quad (14)$$

где

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = i^n T [\mathcal{L}_{\text{int}}(x_1) \dots \mathcal{L}_{\text{int}}(x_n)]. \quad (15)$$

**Задача 9.** Для теории скалярного поля с  $\mathcal{L}_{\text{int}}(x) = h\varphi^3(x)$  выписать первые три члена разложения ( $n = 1, 2, 3$ ) S-матрицы (15) и сопоставить каждому из них соответствующие диаграммы Фейнмана.

**Задача 10.** Для спинорной электродинамики (2) выписать первые три члена разложения ( $n = 1, 2, 3$ ) S-матрицы (15) и сопоставить каждому из них соответствующие диаграммы Фейнмана.

**Задача 11.** Для хромодинамики (10) с учетом полей духов  $\mathcal{L}_{\text{ghost}} = \partial^\mu \bar{w}^a (\delta_{ab} \partial_\mu - gf_{abc} A_\mu^c) w^b$  выписать первые три члена разложения ( $n = 1, 2, 3$ ) S-матрицы (15) и сопоставить каждому из них соответствующие диаграммы Фейнмана.

**Задача 12.** Для теории скалярного поля с  $\mathcal{L}_{\text{int}}(x) = h\varphi^4(x)$  показать, что матричные элементы процесса рассеяния "2 → 2" в первом ( $M_1$ , Рис. 1 А) и втором ( $M_2$ , Рис. 1 В) порядках теории возмущений имеют вид:

$$M_1 = \frac{i h}{(2\pi)^2} \frac{\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)}{4 \sqrt{p_1^0 p_2^0 k_1^0 k_2^0}}, \quad M_2 = -M_1 \frac{h}{(4\pi)^2} I(k_1 + k_2), \quad (16)$$

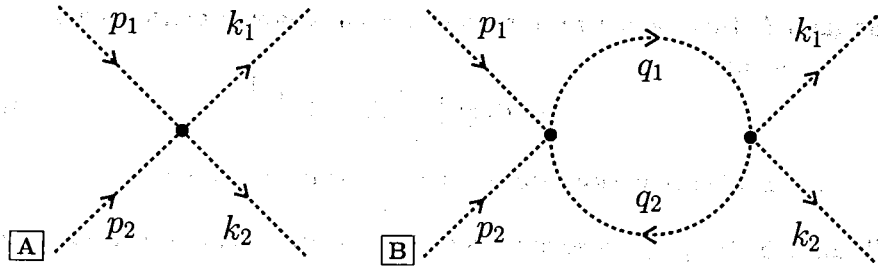


Рисунок 1. Процесс рассеяния "2→2" в первом (А) и втором (В) порядках теории возмущений в скалярной теории с  $\mathcal{L}_{\text{int}}(x) = h\varphi^4(x)$

где  $p^0 = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$  и

$$I(k) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{d^4p}{[m^2 - p^2][m^2 - (p-k)^2]} \quad (17)$$

Здесь и далее в пропагаторах скалярного поля подразумевается, что масса имеет бесконечно малую мнимую добавку  $-i\epsilon$ .

**Задача 13.** Показать, что в размерной регуляризации интеграл  $I(k)$  (17) принимает вид

$$\begin{aligned} \text{reg } I(k) &= \frac{i}{\pi^2} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^{4-2\epsilon}p}{[m^2 - p^2][m^2 - (p-k)^2]} \simeq \\ &\simeq -\frac{1}{\epsilon} + \gamma_E - \ln(4\pi) + \int_0^1 \ln \left[ \frac{m^2 - x(1-x)k^2}{\mu^2} \right] dx + \mathcal{O}(\epsilon), \quad \epsilon \rightarrow 0_+, \quad (18) \end{aligned}$$

где  $\mu$  — точка нормировки (произвольный положительный параметр размерности массы),  $\gamma_E \simeq 0.577$  — постоянная Эйлера. Указание: для вычисления импульсного интеграла использовать  $\alpha$ -представление.

**Задача 14.** Показать, что в регуляризации Паули–Вилларса интеграл  $I(k)$  (17) принимает вид

$$\begin{aligned} \text{reg } I(k) &= \frac{i}{\pi^2} \int d^4p \left[ \frac{1}{m^2 - p^2} - \frac{1}{M^2 - p^2} \right] \times \\ &\times \left[ \frac{1}{m^2 - (p-k)^2} - \frac{1}{M^2 - (p-k)^2} \right] \simeq \\ &\simeq -\ln \left( \frac{M^2}{\mu^2} \right) + \int_0^1 \ln \left[ \frac{m^2 - x(1-x)k^2}{\mu^2} \right] dx + \mathcal{O} \left( \frac{1}{M^2} \right), \quad M^2 \rightarrow \infty, \quad (19) \end{aligned}$$

где  $\mu$  — точка нормировки.

**Задача 15.** Показать, что в фейнмановской регуляризации ("плавное обрезание") интеграл  $I(k)$  (17) принимает вид

$$\begin{aligned} \text{reg } I(k) &= \frac{i}{\pi^2} \int \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - p^2} \frac{d^4p}{[m^2 - p^2][m^2 - (p-k)^2]} \simeq \\ &\simeq -\ln \left( \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right) + \int_0^1 \ln \left[ \frac{m^2 - x(1-x)k^2}{\mu^2} \right] dx + 1 + \mathcal{O} \left( \frac{1}{\Lambda^2} \right), \quad \Lambda^2 \rightarrow \infty, \quad (20) \end{aligned}$$

где  $\mu$  — точка нормировки.

**Задача 16.** Вычислить интеграл  $I(k)$  (17) в аналитической регуляризации

$$\text{reg } I(k) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{d^4p}{[m^2 - p^2]^{1+\alpha} [m^2 - (p-k)^2]^{1+\alpha}}, \quad \alpha \rightarrow 0_+. \quad (21)$$

**Задача 17.** Показать, что в глюодинамике (т.е., в отсутствие кварковых полей)

$$\mathcal{L}_{\text{gl}} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - g[A_\mu, A_\nu])^2 \quad (22)$$

вычисление однопетлевых поправок к глюонному пропагатору и вершинам трехглюонного и четырехглюонного взаимодействия приводит к следующим контрчленам в  $\mathcal{L}_{\text{gl}}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{gl}}^{(1)} &= -\frac{1}{4} \left\{ (z_2 - 1) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \right. \\ &\left. - 2g(z_1 - 1) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) [A_\mu, A_\nu] + (z_1^2 z_2^{-1} - 1) g^2 [A_\mu, A_\nu]^2 \right\}, \quad (23) \end{aligned}$$

где

$$z_1 = 1 + \frac{g^2}{12\pi^2} \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right), \quad z_2 = 1 + \frac{5g^2}{24\pi^2} \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right). \quad (24)$$

Указание: использовать регуляризацию Паули-Вилларса.

**Задача 18.** Показать, что общее решение системы дифференциальных уравнений ренормализационной группы

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \ln \kappa} - \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \psi_2(g) \right] D(\kappa \bar{x}, g) = 0, \quad (25)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \ln \kappa} - \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \psi_3(g) \right] \Gamma_3(\kappa \bar{x}_1, \kappa \bar{x}_2, \kappa \bar{x}_3, g) = 0, \quad (26)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \ln \kappa} - \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right] \bar{g}(\kappa, g) = 0 \quad (27)$$

может быть представлено в виде

$$\Gamma_n(\kappa \bar{x}_i, g) = \Gamma_n(\bar{x}_i, \bar{g}) \exp \left\{ \int_1^{\kappa} \psi_n[\bar{g}(\kappa', g)] \frac{d\kappa'}{\kappa'} \right\}, \quad (28)$$

где

$$\psi_n(g) = \left. \frac{\partial \Gamma_n(t, g)}{\partial t} \right|_{t=1}, \quad \beta(g) = \left. \frac{\partial \bar{g}(t, g)}{\partial t} \right|_{t=1} \quad (29)$$

**Задача 19.** Выписать матричный элемент, соответствующий диаграмме, представленной на Рис. 2 А, и показать, что

$$\Pi_{\mu\nu}^{(1)}(k^2) = i \left( \frac{g}{4\pi} \right)^2 \frac{2}{3} n_f (g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) \left[ \frac{1}{\epsilon} - \ln\left(\frac{k^2}{\mu^2}\right) + \text{const} \right], \quad (30)$$

где  $n_f$  — число активных ароматов. Указание: использовать фейнмановскую параметризацию, размерную регуляризацию и считать все кварки безмассовыми.

**Задача 20.** Выписать матричный элемент, соответствующий диаграмме, представленной на Рис. 2 В, и показать, что

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k^2) = i \left( \frac{g}{4\pi} \right)^2 \frac{N_c}{12} (-19g_{\mu\nu} k^2 + 22k_\mu k_\nu) \left[ \frac{1}{\epsilon} - \ln\left(\frac{k^2}{\mu^2}\right) + \text{const} \right], \quad (31)$$

где  $N_c = 3$  — число цветов. Указание: использовать выражение для глюонного пропагатора в ковариантной калибровке.

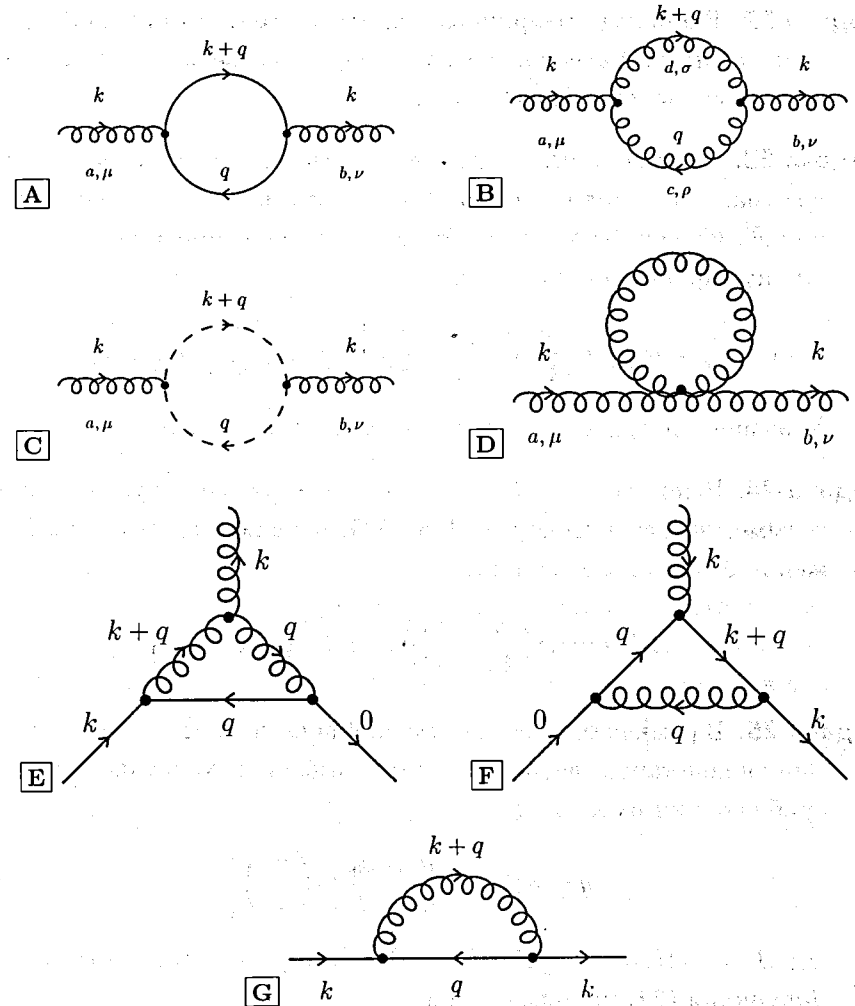


Рисунок 2. Однопетлевые поправки к глюонному пропагатору (А-Д), к вершине кварк-глюонного взаимодействия (Е, F) и к кварковому пропагатору (G)

**Задача 21.** Выписать матричный элемент, соответствующий диаграмме, представленной на Рис. 2 С, и показать, что

$$\Pi_{\mu\nu}^{(3)}(k^2) = i \left( \frac{g}{4\pi} \right)^2 \frac{N_c}{12} (-g_{\mu\nu} k^2 - 2k_\mu k_\nu) \left[ \frac{1}{\epsilon} - \ln\left(\frac{k^2}{\mu^2}\right) + \text{const} \right]. \quad (32)$$

**Задача 22.** Выписать матричный элемент, соответствующий диаграмме, представленной на Рис. 2D, и показать, что в ковариантной калибровке  $\Pi_{\mu\nu}^{(4)}(k^2) = 0$ .

**Задача 23.** Выписать матричные элементы, соответствующие диаграммам, представленным на Рис. 2E и Рис. 2F, и показать, что в приближении безмассовых кварков их совокупный вклад в вершинную функцию имеет вид

$$\Gamma_{\mu}(k^2) = g\gamma_{\mu} \frac{\lambda}{2} i \left(\frac{g}{4\pi}\right)^2 \left(N_c - \frac{4}{3}\right) \left[\frac{1}{\varepsilon} - \ln\left(\frac{k^2}{\mu^2}\right) + \text{const}\right]. \quad (33)$$

Указание: выбрать импульсы, указанные на рисунке.

**Задача 24.** Выписать матричный элемент, соответствующий диаграмме, представленной на Рис. 2G, и показать, что в приближении безмассовых кварков

$$\Sigma(k^2) = i\hat{k} \left(\frac{g}{4\pi}\right)^2 \frac{4}{3} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \ln\left(\frac{k^2}{\mu^2}\right) + \text{const}\right]. \quad (34)$$

**Задача 25.** В рамках теории возмущений показать, что перенормированная константа связи сильного взаимодействия в однопетлевом приближении имеет вид

$$\bar{g} = g \left[1 + \left(\frac{g}{4\pi}\right)^2 \frac{\beta_0}{2} \ln\left(\frac{k^2}{\mu^2}\right)\right], \quad (35)$$

где  $\beta_0 = 11(N_c/3) - 2(n_f/3)$ . Показать, что соответствующая  $\beta$ -функция (29) принимает вид

$$\beta(g) = -g \left(\frac{g}{4\pi}\right)^2 \beta_0. \quad (36)$$

**Задача 26.** Показать, что пертурбативное решение уравнения ренормализационной группы (27) для инвариантного заряда КХД

$$\frac{d \ln \alpha_s^{(\ell)}(\mu^2)}{d \ln \mu^2} = - \sum_{j=0}^{\ell-1} \beta_j \left[\frac{\alpha_s^{(j)}(\mu^2)}{4\pi}\right]^{j+1} \quad (37)$$

в однопетлевом приближении ( $\ell = 1$ ) имеет вид

$$\alpha_s^{(1)}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0} \frac{1}{\ln z}, \quad z = \frac{Q^2}{\Lambda^2}, \quad (38)$$

где  $\alpha_s(Q^2) = g^2(Q^2)/(4\pi)$ . Найти зависимость масштабного параметра  $\Lambda$  от точки нормировки  $Q_0^2$  и от значения  $\alpha_s^{(1)}(Q_0^2)$ . Указание: разделить переменные в уравнении (37) и проинтегрировать результат в конечных пределах.

**Задача 27.** Показать, что решение уравнения ренормализационной группы для инвариантного заряда КХД (37) в двухпетлевом приближении ( $\ell = 2$ ) имеет вид ( $B_j = \beta_j/\beta_0^{j+1}$ )

$$\alpha_s^{(2)}(Q^2) = -\frac{4\pi}{\beta_0} \frac{1}{B_1} \frac{1}{1 + W_{-1} \{-\exp[-(1 + B_1^{-1} \ln z)]\}}, \quad (39)$$

где  $W_{-1}(x)$  обозначает соответствующую ветвь  $W$ -функции Ламберта, которая определяется уравнением  $W_k(x) \exp[W_k(x)] = x$ . Найти зависимость масштабного параметра  $\Lambda$  от точки нормировки  $Q_0^2$  и от значения  $\alpha_s^{(2)}(Q_0^2)$ . Показать, что в пределе  $Q^2 \rightarrow \infty$  бегущая константа связи (39) может быть представлена в виде

$$\alpha_s^{(2)}(Q^2) \simeq \frac{4\pi}{\beta_0} \left[\frac{1}{\ln z} - B_1 \frac{\ln(\ln z)}{\ln^2 z}\right]. \quad (40)$$

**Задача 28.** Показать, что в пределе  $Q^2 \rightarrow \infty$  итеративное решение уравнения ренормализационной группы для инвариантного заряда КХД (37) в трехпетлевом приближении ( $\ell = 3$ ) имеет вид

$$\alpha_s^{(3)}(Q^2) \simeq \frac{4\pi}{\beta_0} \left\{ \frac{1}{\ln z} - B_1 \frac{\ln(\ln z)}{\ln^2 z} + \frac{1}{\ln^3 z} \left[ B_1^2 (\ln^2(\ln z) - \ln(\ln z) - 1) + B_2 \right] \right\}. \quad (41)$$

**Задача 29.** Выписать матричный элемент, соответствующий процессу упругого рассеяния электрона на точноподобном протоне (Рис. 3A), и показать, что он может быть представлен в виде

$$|M_{\text{if}}|^2 = \frac{e^4}{Q^4} L_{\mu\nu}(k, k', m) L_{\mu\nu}(P, P', M), \quad (42)$$

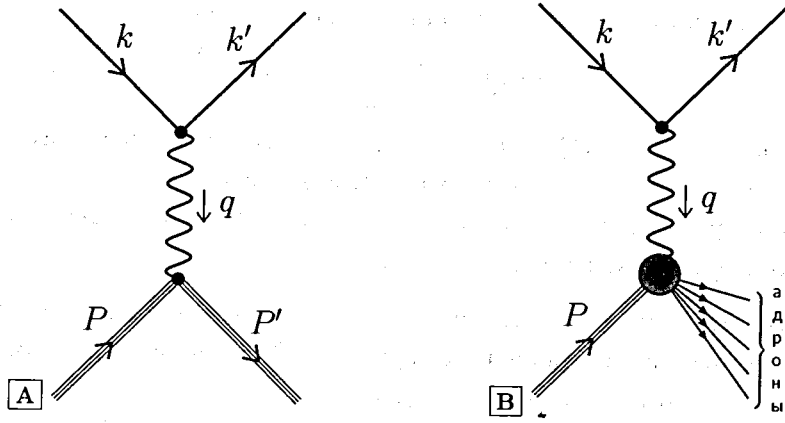


Рисунок 3. Процессы упругого (А) и глубоконеупругого (В) лептон-нуклонного рассеяния

где  $Q^2 = -q^2 = -(k - k')^2 > 0$  — квадрат переданного импульса (пространственноподобная область),  $m$  — масса электрона,  $M$  — масса протона и

$$L_{\mu\nu}(k, k', m) = 2 \left[ k_\mu k'_\nu + k_\nu k'_\mu - g_{\mu\nu}(kk' - m^2) \right]. \quad (43)$$

**Задача 30.** Показать, что дифференциальное сечение упругого лептон-протонного рассеяния (Рис. 3 А) имеет вид

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{2\pi\alpha_{\text{em}}^2}{Q^4} \left[ 1 + (1-y)^2 - \frac{M^2 y}{kP} \right] \simeq \frac{4\pi\alpha_{\text{em}}^2}{Q^4} \quad \text{при } y \rightarrow 0, \quad (44)$$

где  $\alpha_{\text{em}} = e^2/(4\pi)$  и  $y = (qP)/(kP)$ .

**Задача 31.** Исходя из условий лоренц-инвариантности, эрмитовости, четности и калибровочной инвариантности тензора  $W_{\mu\nu}$ , описывающего протонную вершину процесса глубоконеупругого лептон-нуклонного рассеяния (Рис. 3 В), показать, что тензор  $W_{\mu\nu}$  может

быть представлен в виде

$$W_{\mu\nu}(P, q) = -W_1(P, q) \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \frac{W_2(P, q)}{M^2} \left( P_\mu - \frac{Pq}{q^2} q_\mu \right) \left( P_\nu - \frac{Pq}{q^2} q_\nu \right), \quad (45)$$

где  $W_1(P, q)$  и  $W_2(P, q)$  — некоторые вещественные скалярные функции, описывающие внутреннюю структуру нуклона.

**Задача 32.** Показать, что в рамках партонной модели квадрат матричного элемента глубоконеупругого лептон-нуклонного рассеяния (Рис. 3 В) имеет вид

$$|M_{\text{if}}|^2 = \frac{e^4}{Q^4} \frac{4(kP)}{y} \left[ xy^2 W_1(P, q) + W_2(P, q) \frac{\nu}{M} \left( 1 - y - \frac{M^2}{Q^2} x^2 y^2 \right) \right], \quad (46)$$

где  $x = Q^2/(2Pq)$  — часть импульса нуклона, которую несет взаимодействующий с фотоном партон и  $\nu = Pq/M$ .

**Задача 33.** В рамках партонной модели вывести формулу для дифференциального сечения процесса глубоконеупругого лептон-нуклонного рассеяния (Рис. 3 В)

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dx dQ^2} &= \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \left[ y^2 F_1(x, Q^2) + \frac{F_2(x, Q^2)}{x} \left( 1 - y - M^2 \frac{xy}{s} \right) \right] \simeq \\ &\simeq \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \frac{F_2(x, Q^2)}{x} \quad \text{при } s \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (47)$$

где  $s = (k + P)^2$  — квадрат полной энергии лептона и нуклона в системе центра масс, а  $F_1 = W_1$  и  $F_2 = \nu W_2/M$  — структурные функции нуклона.

**Задача 34.** Показать, что сечение процесса электрон-позитронной аннигиляции в  $\mu^+ \mu^-$  (Рис. 4 А) в безмассовом пределе имеет вид

$$\sigma(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-; s) = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha_{\text{em}}^2}{s}, \quad (48)$$

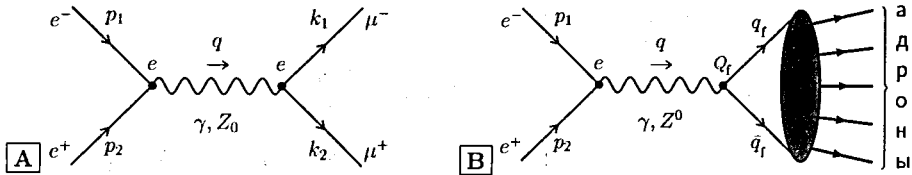


Рисунок 4. Процессы электрон-позитронной аннигиляции по электрослабому (А) и сильному (В) каналам

где  $\alpha_{em} = e^2/(4\pi)$ ,  $s = q^2 = (p_1 + p_2)^2 > 0$  — квадрат полной энергии электрона и позитрона в системе центра масс (времени-подобная область).

**Задача 35.** Показать, что сечение процесса электрон-позитронной аннигиляции в адроны (Рис. 4 В) может быть представлено в виде

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адроны}; s) = 8\pi^2 \frac{\alpha_{em}^2}{s^3} L^{\mu\nu} H_{\mu\nu}, \quad (49)$$

где

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2 - (p_1 - p_2)_\mu (p_1 - p_2)_\nu] \quad (50)$$

обозначает лептонный тензор,

$$H_{\mu\nu} = (2\pi)^4 \sum_{\Gamma} \delta(p_1 + p_2 - p_{\Gamma}) \langle 0 | J_{\mu}(-q) | \Gamma \rangle \langle \Gamma | J_{\nu}(q) | 0 \rangle \quad (51)$$

обозначает адронный тензор,

$$J_{\mu} = \sum_{f=1}^{n_f} Q_f : \bar{q} \gamma_{\mu} q : \quad (52)$$

обозначает электромагнитный ток кварков,  $\Gamma$  — конечное адронное состояние,  $Q_f$  — заряд кварка аромата  $f$  в единицах заряда позитрона. Указание: использовать безмассовое приближение.

**Задача 36.** Показать, что адронный тензор  $H_{\mu\nu}$  (51) может быть представлен в виде  $H_{\mu\nu} = 2 \text{Im} \Pi_{\mu\nu}$ , где

$$\Pi_{\mu\nu}(q^2) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ J_{\mu}(x) J_{\nu}(0) \} | 0 \rangle = \frac{i}{12\pi^2} (q_{\mu} q_{\nu} - g_{\mu\nu} q^2) \Pi(q^2). \quad (53)$$

**Задача 37.** Вывести дисперсионное соотношение для адронной функции поляризации вакуума  $\Pi(q^2)$  (53).

$$\Pi(q^2) = \Pi(q_0^2) + (q^2 - q_0^2) \int_{4m_{\pi}^2}^{\infty} \frac{R(s)}{(s - q^2)(s - q_0^2)} ds, \quad (54)$$

где  $m_{\pi}$  — масса легчайшего адронного состояния и

$$R(s) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} [\Pi(s + i\epsilon) - \Pi(s - i\epsilon)] = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{адроны}; s)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-; s)} \quad (55)$$

обозначает так называемое  $R$ -отношение электрон-позитронной аннигиляции в адроны. Указание: использовать интегральную формулу Коши с вычитанием.

**Задача 38.** Для функции Адлера

$$D(Q^2) = - \frac{d\Pi(-Q^2)}{d \ln Q^2} \quad (56)$$

вывести дисперсионное соотношение

$$D(Q^2) = Q^2 \int_{4m_{\pi}^2}^{\infty} \frac{R(s)}{(s + Q^2)^2} ds. \quad (57)$$

Показать, что обратное к (57) интегральное соотношение между функциями  $D(Q^2)$  и  $R(s)$  имеет вид

$$R(s) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{s+i\epsilon}^{s-i\epsilon} D(-\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad (58)$$

где контур интегрирования в комплексной  $\zeta$ -плоскости лежит в области аналитичности подинтегрального выражения (58).

**Задача 39.** В рамках теории возмущений показать, что функция Адлера (56) в однопетлевом приближении имеет вид

$$D_{\text{pert}}^{(1)}(Q^2) = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[ 1 + \frac{1}{\pi} \alpha_s^{(1)}(Q^2) \right], \quad (59)$$

где бегущая константа связи  $\alpha_s^{(1)}(Q^2)$  определена в уравнении (38).

**Задача 40.** С помощью интегрального соотношения (58) показать, что функция  $R(s)$ , соответствующая  $D_{\text{pert}}^{(1)}(Q^2)$  (59), имеет вид

$$R_{\text{pert}}^{(1)}(s) = N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[ 1 + \frac{1}{\pi} \alpha_{\text{TL}}^{(1)}(s) \right], \quad (60)$$

где

$$\alpha_{\text{TL}}^{(1)}(s) = \frac{4\pi}{\beta_0} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{\ln w}{\pi} \right) \right], \quad w = \frac{s}{\Lambda^2}. \quad (61)$$

Показать, что в ультрафиолетовой асимптотике  $s \rightarrow \infty$  уравнение (60) может быть представлено в следующем виде

$$R_{\text{pert}}^{(1)}(s) \simeq N_c \sum_{f=1}^{n_f} Q_f^2 \left[ 1 + \frac{1}{\pi} \alpha_s^{(1)}(|s|) - \frac{\pi}{3} \left( \frac{\beta_0}{4\pi} \right)^2 [\alpha_s^{(1)}(|s|)]^3 + \mathcal{O} \left\{ [\alpha_s^{(1)}(|s|)]^5 \right\} \right]. \quad (62)$$

**Задача 41.** Исходя из экспериментальных данных коллаборации CLEO,  $R(s_0) = 3.56 \pm 0.01$  (stat.)  $\pm 0.07$  (syst.),  $\sqrt{s_0} = 10.52$  ГэВ оценить значение масштабного параметра  $\Lambda$  в однопетлевом приближении.

**Задача 42.** Найти ширину распада  $\tau$ -лептона по электрослабому каналу (Рис. 5 А).

**Задача 43.** В инклюзивном распаде  $\tau$ -лептона по сильному каналу экспериментально измеряемой величиной является отношение двух ширин распада (см. Рис. 5 А и Рис. 5 В)

$$R_\tau = \frac{\Gamma(\tau^- \rightarrow \text{адроны}^- \nu_\tau)}{\Gamma(\tau^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau)} = R_{\tau,V}^{J=0} + R_{\tau,V}^{J=1} + R_{\tau,A}^{J=0} + R_{\tau,A}^{J=1} + R_{\tau,S}. \quad (63)$$

В этом уравнении

$$R_{\tau,V/A}^{J=1} = \frac{N_c}{2} |V_{ud}|^2 S_{\text{EW}} (\Delta_{\text{QCD}}^{V/A} + \delta'_{\text{EW}}), \quad (64)$$

где  $N_c = 3$  — число цветов,  $|V_{ud}| = 0.9738 \pm 0.0005$  — элемент матрицы Кабиббо-Кобаяши-Маскава,  $S_{\text{EW}} = 1.0194 \pm 0.0050$  и

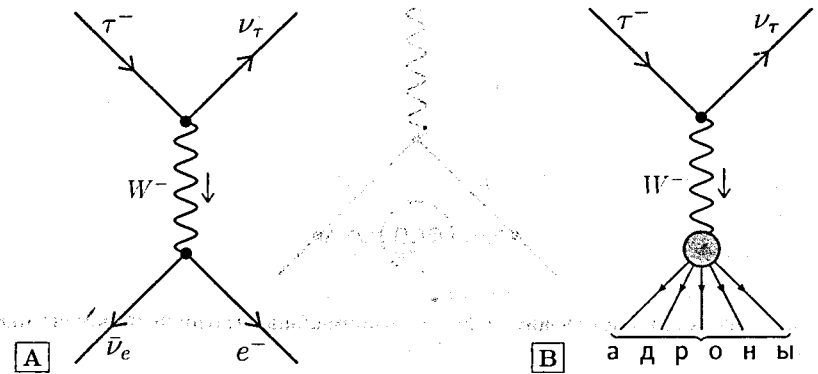


Рисунок 5. Процессы распада  $\tau$ -лептона по электрослабому (А) и сильному (В) каналам

$\delta'_{\text{EW}} = 0.0010$  — электрослабые поправки. В безмассовом пределе величина  $\Delta_{\text{QCD}}^{V/A}$  принимает вид

$$\Delta_{\text{QCD}} = 2 \int_0^{M_\tau^2} f\left(\frac{s}{M_\tau^2}\right) R(s) \frac{ds}{M_\tau^2}, \quad f(x) = (1-x)^2(1+2x), \quad (65)$$

где  $M_\tau = 1.777$  ГэВ — масса  $\tau$ -лептона и

$$R(s) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \left[ \Pi(s + i\epsilon) - \Pi(s - i\epsilon) \right] = \frac{1}{\pi} \text{Im} \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \Pi(s + i\epsilon). \quad (66)$$

Показать, что уравнение (65) может быть представлено в виде

$$\Delta_{\text{QCD}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D(M_\tau^2 e^{i\theta}) (1 + 2e^{i\theta} - 2e^{i3\theta} - e^{i4\theta}) d\theta. \quad (67)$$

**Задача 44.** В рамках теории возмущений показать, что в однопетлевом приближении величина  $\Delta_{\text{QCD}}$  (67) может быть представлена в виде

$$\Delta_{\text{pert}} \simeq 1 + \frac{1}{\pi} \alpha_s^{(1)}(M_\tau^2) + \mathcal{O} \left\{ [\alpha_s^{(1)}(M_\tau^2)]^2 \right\}. \quad (68)$$

**Задача 45.** Исходя из экспериментальных данных коллаборации ALEPH,  $R_{\tau,V} = 1.787 \pm 0.011 \pm 0.007$  оценить значение масштабного параметра  $\Lambda$  в однопетлевом приближении.

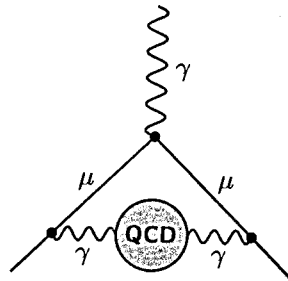


Рисунок 6. Вклад сильного взаимодействия в аномальный магнитный момент мюона

**Задача 46.** Показать, что в лидирующем порядке теории возмущений вклад сильного взаимодействия в аномальный магнитный момент мюона  $a_\mu = (g - 2)_\mu/2$  (Рис. 6) имеет вид

$$a_\mu^{\text{hlo}} = \frac{\alpha_{\text{em}}^2}{3\pi^2} \int_{4m_\mu^2}^{\infty} K(s)R(s)\frac{ds}{s}, \quad (69)$$

где  $R(s)$  определено в (55),

$$K(s) = \int_0^1 \frac{x^2(1-x)}{x^2 + (1-x)s/m_\mu^2} dx, \quad (70)$$

а  $m_\mu \simeq 105.7$  МэВ — масса мюона.

**Задача 47.** Значение бегущей константы связи электромагнитного взаимодействия на масштабе энергии  $q^2$  определяется выражением

$$\alpha_{\text{em}}(q^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \Delta\alpha_{\text{em}}(q^2)}, \quad \Delta\alpha_{\text{em}}(q^2) = \frac{\alpha_0}{3\pi} [\Pi(0) - \Pi(q^2)], \quad (71)$$

где  $\Pi(q^2)$  обозначает функцию поляризации вакуума. В уравнении (71) лептонный вклад, адронный вклад, обусловленный первыми пятью кварками, и вклад, обусловленный  $t$ -кварком, учитываются отдельно, а именно

$$\Delta\alpha_{\text{em}}(q^2) = \Delta\alpha_{\text{lep}}(q^2) + \Delta\alpha_{\text{had}}^{(5)}(q^2) + \Delta\alpha_{\text{top}}(q^2). \quad (72)$$

Показать, что на масштабе массы  $Z$ -бозона

$$\Delta\alpha_{\text{had}}^{(5)}(M_Z^2) = -\frac{\alpha_0}{3\pi} M_Z^2 \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{R(s) ds}{s - M_Z^2 s}, \quad (73)$$

где  $\alpha_0 \simeq 1/137.036$ ,  $M_Z \simeq 91.188$  ГэВ, а интегрирование в уравнении (73) понимается в смысле главного значения. Указание: использовать дисперсионное соотношение для адронной функции поляризации вакуума  $\Pi(q^2)$  (54) с вычитанием в точке  $q_0^2 = 0$ .

**Задача 48.** Показать, что в лидирующем порядке теории возмущений амплитуда процесса рассеяния кварка на антикварке в нерелятивистском пределе имеет вид

$$M_{\text{if}}(k) = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{4}{3} \frac{g^2}{\vec{k}^2}, \quad (74)$$

где  $k$  — переданный импульс.

**Задача 49.** Показать, что потенциал кварк-антикваркового взаимодействия в мезоне, соответствующий амплитуде (74),

$$V(x) = -(2\pi)^3 \int M_{\text{if}}(k) \exp(-i\vec{k}\vec{x}) d^3k, \quad (75)$$

в сферически-симметричном случае имеет вид

$$V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r}, \quad (76)$$

где  $\alpha_s = g^2/(4\pi)$ .

**Задача 50.** Показать, что потенциал межкваркового взаимодействия в барионе имеет вид

$$V(r) = -\frac{2}{3} \frac{\alpha_s}{r}. \quad (77)$$

Показать, что взаимодействие трех кварков через трехглюонную вершину не дает вклада в амплитуду трехчастичного рассеяния.

**Задача 51.** Показать, что в сферически-симметричном случае потенциал кварк-антикваркового взаимодействия

$$V(r) = -\frac{8}{3\pi} \int_0^\infty \alpha_s(Q^2) \frac{\sin(Qr)}{Qr} dQ, \quad (78)$$



вычисленный с использованием эффективной однопетлевой бегущей константы связи

$$\alpha_R^{(1)}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0} \frac{1}{\ln(1 + Q^2/\Lambda^2)}, \quad (79)$$

является линейно растущим при  $r \rightarrow \infty$ .

**Задача 52.** Показать, что на поверхности статического кваркового мешка, которая определяется нормальным к ней единичным вектором  $\vec{n}$ , для собственных векторов  $q_+$  и  $q_-$  оператора  $(\vec{n}\vec{\gamma})$

$$(\vec{n}\vec{\gamma})q_{\pm} = \pm iq_{\pm} \quad (80)$$

выполняется условие отсутствия цветового тока через поверхность мешка

$$\bar{q}_{\pm}(\vec{n}\vec{\gamma})q_{\pm} \Big|_{\text{bag}} = 0. \quad (81)$$

**Задача 53.** Показать, что кванты, описываемые собственным вектором  $q_-(x)$  оператора  $(\vec{n}\vec{\gamma})$  (80), являются античастицами по отношению к квантам, описываемым собственным вектором  $q_+(x)$ . Указание: использовать соотношение между волновыми функциями частицы  $q$  и соответствующей античастицы  $\bar{q}$ :

$$\bar{q}(x) = \widehat{C}\widehat{P}\widehat{T}q(x), \quad \widehat{C}\widehat{P}\widehat{T}q = \gamma_0 i \gamma_2 [i \gamma_1 \gamma_3 (q)^*]^*. \quad (82)$$

**Задача 54.** Показать, что в сферически-симметричном случае ( $\vec{n} = \vec{e}_r$ ) условие конфайнмента цвета (81) и условие равенства давления кварков на внутреннюю поверхность мешка радиуса  $R$  давлению физического вакуума  $B = (146 \text{ МэВ})^4$  на внешнюю поверхность мешка (модель "MIT bag") задаются системой уравнений

$$\begin{cases} -i(\vec{e}_r \vec{\gamma})q(x) = q(x) \Big|_{|x|=R}, \\ \frac{1}{2}(\vec{n}\vec{\nabla}) \cdot \sum_q \bar{q}(x)q(x) \Big|_{|x|=R} = B. \end{cases} \quad (83)$$

**Задача 55.** Показать, что в четырехмерном евклидовом пространстве-времени уравнение движения для системы с действием (чистая глюодинамика)

$$A = -\frac{1}{2g^2} \int \text{Tr}[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}]d^4x \quad (84)$$

имеет вид

$$D^{\mu}G_{\mu\nu} = \partial^{\mu}G_{\mu\nu} + [A^{\mu}, G_{\mu\nu}] = 0, \quad (85)$$

где

$$G_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} + [A_{\mu}, A_{\nu}]. \quad (86)$$

**Задача 56.** Показать, что для калибровочной группы  $SU(2)$  решение уравнения самодуальности

$$G_{\mu\nu} = \tilde{G}_{\mu\nu}, \quad \tilde{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}G^{\alpha\beta} \quad (87)$$

в евклидовом пространстве-времени имеет вид

$$A_{\mu}(x) = -2i \frac{\Sigma_{\mu\nu}(x-a)^{\nu}}{|x-a|^2 + \rho^2}, \quad (88)$$

где 4-вектор  $a_{\mu}$  задает положение центра инстантона,  $\rho$  — характерный размер инстантона,  $\Sigma_{\mu\nu} = \eta_{i\mu\nu}\sigma_i/2$ ,  $\bar{\Sigma}_{\mu\nu} = \bar{\eta}_{i\mu\nu}\sigma_i/2$ ,  $i = 1, 2, 3$ , а  $\eta_{i\mu\nu}$  обозначает символ 'т Хофта:

$$\eta_{i\mu\nu} = \begin{cases} \epsilon_{i\mu\nu}, & \mu, \nu = 1, 2, 3 \\ \delta_{i\mu}, & \nu = 4 \\ -\delta_{i\nu}, & \mu = 4 \end{cases}, \quad \bar{\eta}_{i\mu\nu} = \begin{cases} \epsilon_{i\mu\nu}, & \mu, \nu = 1, 2, 3 \\ -\delta_{i\mu}, & \nu = 4 \\ \delta_{i\nu}, & \mu = 4 \end{cases}. \quad (89)$$

Указание: решение уравнения (87) следует искать в виде

$$A_{\mu}(x) = i\bar{\Sigma}_{\mu\nu}\partial^{\nu}[\ln\varphi(x)] \quad (90)$$

и использовать сингулярное калибровочное  $SU(2)$  преобразование  $A_{\mu} \Rightarrow U(A_{\mu} + \partial_{\mu})U^{-1}$ , где

$$U(x) = \frac{1}{|x|}(x_4 1 + ix_i \sigma_i). \quad (91)$$

Здесь  $\sigma_i$  — матрицы Паули,  $1$  — единичная матрица ( $2 \times 2$ ).

1002

**Задача 57.** Показать, что решение (88) приводит к тензору напряженности поля

$$G_{\mu\nu} = 4i \frac{\Sigma_{\mu\nu} \rho^2}{(|x - a|^2 + \rho^2)^2}. \tag{92}$$

Показать, что при  $x \rightarrow \infty$  решение (88) переходит в "чистую калибровку"

$$A_\mu(x) \rightarrow U(x) \partial_\mu [U^{-1}(x)], \quad x \rightarrow \infty. \tag{93}$$

**Задача 58.** Показать, что плотность действия (84) для решения (88) локализована вблизи центра инстантона

$$(G_{\mu\nu})^2 = \frac{192\rho^4}{(|x - a|^2 + \rho^2)^4} \tag{94}$$

и что действие (84) на решении (88) принимает конечное значение  $\mathcal{A} = 8\pi^2/g^2$ .

**Задача 59.** Показать, что решение уравнения антисамодуальности

$$G_{\mu\nu} = -\tilde{G}_{\mu\nu} \tag{95}$$

в евклидовом пространстве-времени имеет вид

$$A_\mu(x) = -2i \frac{\bar{\Sigma}_{\mu\nu} (x - a)^\nu}{|x - a|^2 + \rho^2}. \tag{96}$$

**Задача 60.** Для решения (96) найти тензор напряженности глюонного поля, плотность действия и вычислить действие.