Учебно-
методические
пособия
Учебно-научного
центра ОИЯИ
Дубна

УНЦ-2010-46

А. П. Исаев

ТЕОРИЯ ГРУПП И СИММЕТРИЙ. СИСТЕМЫ КОРНЕЙ ПРОСТЫХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АЛГЕБР ЛИ, ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ И АЛГЕБРЫ С ДЕЛЕНИЕМ

2010

Учебно-научный центр ОИЯИ

А. П. Исаев

ТЕОРИЯ ГРУПП И СИММЕТРИЙ. СИСТЕМЫ КОРНЕЙ ПРОСТЫХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АЛГЕБР ЛИ, ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ И АЛГЕБРЫ С ДЕЛЕНИЕМ

Учебное пособие

Рекомендовано Учебно-методическим советом
Международного университета природы,
общества и человека «Дубна»

Дубна 2010

Исаев А. П.

И85 Теория групп и симметрий. Системы корней простых конечномерных алгебр Ли, исключительные алгебры Ли и алгебры с делением: Учебное пособие. — Дубна: ОИЯИ, 2010. — 113 с.

ISBN 978-5-9530-0271-4

Изложена теория корневых систем для простых конечных алгебр Ли. Подробно рассматривается классификация полупростых алгебр Ли. Описаны корневые системы некоторых супералгебр Ли классического типа. Даны элементы теории представлений простых алгебр Ли. Значительная часть лекций посвящена алгебрам с делением: кватернионам и октонионам. Обсуждаются приложения кватернионов в теории поля, в частности к описанию инстантонов. Показано, как с помощью неассоциативной алгебры октонионов можно кратко и в доступной форме описать структуру исключительных алгебр Ли.

Лекции рассчитаны на студентов и аспирантов, специализирующихся в области теоретической физики, математической физики, ядерной физики и физики элементарных частиц.

ISBN 978-5-9530-0271-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора

Данное пособие представляет собой вторую часть курса лекций «Теория групп и симметрий», который читался автором на кафедре фундаментальных и прикладных проблем физики микромира МФТИ, на кафедре квантовой теории и физики высоких энергий физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова и на кафедрах теоретической и ядерной физики в Международном университете «Дубна» в 2006–2010 гг. Эта часть курса предназначена для студентов и аспирантов, которые в дальнейшем предполагают специализироваться в области теоретической и математической физики, ядерной физики и физики элементарных частиц.

1. СИСТЕМЫ КОРНЕЙ ПРОСТЫХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АЛГЕБР ЛИ

В начале этой главы мы повторяем некоторые определения из теории алгебр Ли, которые уже давались в первой части курса лекций «Теории групп и симметрий», причем по возможности мы делаем это, используя координатную формулировку, более привычную для физиков.

1.1. Критерий полупростоты алгебр Ли

Определение 1.1. *Алгебра Ли $\mathcal{G}$ — это векторное пространство, на котором определена операция умножения (коммутирования)*

$$[X,Y] \in \mathcal{G} \quad (\forall X,Y \in \mathcal{G}), \tag{1.1}$$

причем эта операция кососимметрична $[X,Y] = -[Y,X]$ и удовлетворяет условию

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0 \quad (\forall X,Y,Z \in \mathcal{G}), \tag{1.2}$$

которое называется тождеством Якоби. Если $\mathcal{G}$ — вещественное или комплексное векторное пространство, то алгебра Ли (АЛ) называется вещественной или комплексной соответственно.

Пусть в АЛ $\mathcal{G}$ задан базис $\{X_a\}$ $(a,b,d\ldots = 1,\ldots,\dim\mathcal{G})$. Тогда операция умножения (1.1) может быть записана в виде

$$[X_a, X_b] = C^d_{ab} X_d, \tag{1.3}$$

где константы C^d_{ab} называются структурными константами АЛ. Условие кососимметричности для умножения в $\mathcal{G}$ дает $C^d_{ab} = -C^d_{ba}$, а тождество Якоби эквивалентно равенству

$$C^f_{ab} C^g_{fd} + C^f_{bd} C^g_{fa} + C^f_{da} C^g_{fb} = 0. \tag{1.4}$$

Базисные элементы $\{X_a\}$ также называются базисными образующими (или генераторами) АЛ $\mathcal{G}$.

1. АЛ $\mathcal{G}$ называется абелевой, если $[X,Y] = 0$ $(\forall X,Y \in \mathcal{G})$, т. е.

$$C^d_{ab} = 0 \quad (\forall\, a,b,d). \tag{1.5}$$

2. Подпространство $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ называется подалгеброй Ли в $\mathcal{G}$, если $\forall X, Y \in \mathcal{H}$, имеем $[X,Y] \in \mathcal{H}$. Подалгебра $\mathcal{H}$ определяется набором базисных образующих $X_1, \ldots, X_p$ ($p \leqslant \dim \mathcal{G}$), если

$$C_{ab}^{d} = 0 \quad (a, b \leqslant p, \ \ d > p). \tag{1.6}$$

3. Инвариантная подалгебра N — это подпространство $N \subset \mathcal{G}$, такое что $\forall X \in \mathcal{G}$, мы имеем $[N, X] \subset N$. Пусть элементы $X_{\bar{1}}, \ldots, X_{\bar{p}}$ задают базис в N. Тогда из $[N, X_a] \subset N$ следует, что

$$C_{\bar{a}b}^{d} = 0 \ \ (a \leqslant p, \ \ d > p), \tag{1.7}$$

т. е. ненулевыми могут быть только константы $C_{\bar{a}b}^{\bar{d}}$.

4. АЛ проста, если она не имеет нетривиальных инвариантных подалгебр.

5. АЛ полупроста, если она не имеет абелевых инвариантных подалгебр.

Определим линейный гомоморфизм ad из $\mathcal{G}$ в алгебру матриц $\dim \mathcal{G} \times \dim \mathcal{G}$:

$$\mathrm{ad}: \ X_a \to (X_a)_b^d = C_{ab}^{d}, \tag{1.8}$$

который называется присоединенным представлением алгебры $\mathcal{G}$. Гомоморфность отображения ad (1.8) следует из тождества Якоби (1.4). Далее на $\mathcal{G}$ можно определить метрику

$$g_{ab} \equiv C_{ac}^{d} C_{bd}^{c} = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}(X_a)\,\mathrm{ad}(X_b))\,, \tag{1.9}$$

которая называется метрикой Киллинга. Заметим, что объект $C_{abc} = C_{ab}^{d} g_{dc}$ полностью антисимметричен по индексам a, b, c. Действительно,

$$C_{abc} = C_{ab}^{d}\,\mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}(X_d)\,\mathrm{ad}(X_c)) = \mathrm{Tr}\,([\mathrm{ad}(X_a), \mathrm{ad}(X_b)]\,\mathrm{ad}(X_c)) =$$
$$= \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}(X_a)\,[\mathrm{ad}(X_b), \mathrm{ad}(X_c)]) = -C_{acb}.$$

Критерий полупростоты АЛ, сформулированный Картаном, гласит, что АЛ полупроста, если и только если $\det(g_{ab}) \neq 0$, т. е. матрица $||g_{ab}||$ должна быть невырождена.

Докажем необходимость критерия Картана. Пусть АЛ содержит инвариантные абелевы подалгебры, базисные генераторы которых будем нумеровать индексами $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$ Тогда $g_{\bar{a}\bar{b}} = 0$ и

$$g_{a\bar{b}} = C_{ac}^{d} C_{\bar{b}d}^{c} = C_{a\bar{c}}^{d} C_{\bar{b}d}^{\bar{c}} = C_{a\bar{c}}^{\bar{d}} C_{\bar{b}\bar{d}}^{\bar{c}} = 0,$$

где второе и третье равенства следуют из (1.7), а последнее — из (1.5).

Таким образом, при наличии инвариантных абелевых подалгебр блоки $g_{\bar{a}\bar{b}}$, $g_{a\bar{b}}$ и $g_{\bar{a}b}$ в матрице g метрики Киллинга равны нулю, а это значит, что $\det(g) = 0$. Следовательно, необходимость критерия Картана доказана. С другой стороны, если $\det(g) = 0$, то, как показал Картан, АЛ $\mathcal{G}$ обязательно содержит инвариантные абелевы подалгебры (достаточное условие).

Замечание. Пусть $\mathcal{G}$ — вещественная алгебра Ли с базисом $\{X_a\}$ ($a = 1, \ldots, \dim \mathcal{G}$) и определяющими соотношениями (1.3). Произвольный элемент $\mathcal{G}$ можно представить в виде линейной комбинации $X = x^a X_a$, где $x^a \in \mathbf{R}$ — координаты в пространстве $\mathcal{G}$. Тогда присоединенное представление АЛ $\mathcal{G}$ задается линейными операторами на самой АЛ $\mathcal{G}$ следующим образом:

$$\mathrm{ad}(X)\,Y = [X, Y] \quad (X, Y \in \mathcal{G}),$$

что согласуется с (1.8) в случае $X = X_a$, $Y = X_b$.

С другой стороны, мы можем рассматривать $(X_1, X_2, \ldots \ldots, X_{\dim \mathcal{G}})$ в качестве координат в двойственном пространстве $\mathcal{G}^*$. Обозначим через ∂^b частную производную по X_b, действующую на пространстве полиномов по $\{X_a\}$. Тогда отображение $X_a \to v_a = C_{ab}^{d} X_d \partial^b$ определяет представление $\mathcal{G}$ векторными полями на $\mathcal{G}^*$, которое называется *коприсоединенным*. Равенство $[v_a, v_b] = v_{[X_a, X_b]} = C_{ab}^{d} v_d$ следует из тождества Якоби (и эквивалентно ему).

1.2. Алгебра Ли $sl(2)$ и ее конечномерные представления

Алгебра Ли $sl(2)$ порождается тремя базисными генераторами (H, e_+, e_-), которые удовлетворяют соотношениям

$$[H, e_\pm] = \pm 2\, e_\pm \ , \quad [e_+, e_-] = H\ . \tag{1.10}$$

В определяющем представлении [1]) мы имеем

$$e_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

Рассмотрим некоторое произвольное представление T алгебры $sl(2)$, т. е. линейный гомоморфизм $T: sl(2) \to \mathrm{End}\,(V)$, где V — соответствующий $sl(2)$-модуль (пространство представления). Пространство V можно разложить в прямую сумму под-

[1]) Основные понятия теории представлений алгебр Ли обсуждались в первой части курса лекций. Тем, кто незнаком с этими понятиями, мы рекомендуем сначала прочитать начало п. 2.1 данного пособия.

пространств, нумеруемых собственными значениями (весами) λ генератора H: $V = \oplus_\lambda V_\lambda$, где $V_\lambda = \{v \in V | H\,v = \lambda v\}$. Из (1.10) следует, что если $v \in V_\lambda$, то $e_+ v \in V_{\lambda+2}$ и $e_- v \in V_{\lambda-2}$. Действуя на вектор v всеми образующими $(H, e_\pm)$ АЛ $sl(2)$, мы порождаем все пространство представления АЛ $sl(2)$.

Определение 1.2. *Пусть существует такое $V_\lambda \neq 0$, что $V_{\lambda+2} = 0$, т.е. $e_+ v = 0$ для всех ненулевых векторов $v \in V_\lambda$. Такие векторы v называются старшими векторами (вакуумами), а соответствующий вес λ называется старшим весом. Представление, порождаемое из старшего вектора v, называется представлением со старшим весом.*

Займемся изучением всех конечномерных неприводимых представлений алгебры $sl(2)$.

Пусть V — конечномерный неприводимый $sl(2)$-модуль. Так как V конечномерен, то он имеет старший вектор $v_0 \in V$ такой, что $e_+ v_0 = 0$ (иначе он содержал бы векторы с произвольно большим весом и был бы бесконечномерным). Положим $v_{-1} = 0$, $v_k = (1/k!)\, e_-^k\, v_0$ $(k \geqslant 0)$. Исходя из (1.10), легко проверить следующие формулы:

$$H\,v_k = (\lambda - 2k)\,v_k, \tag{1.12а}$$

$$e_-\,v_k = (k+1)\,v_{k+1}, \tag{1.12б}$$

$$e_+\,v_k = (\lambda - k + 1)\,v_{k-1} \quad (k \geqslant 0). \tag{1.12в}$$

Из (1.12а) следует, что все $v_k \neq 0$ имеют разные собственные значения и, следовательно, все они линейно независимы. Так как V — конечномерный модуль $\dim V < \infty$, то имеется наименьшее целое число m, для которого $v_m \neq 0$, $v_{m+1} = 0$ (v_{m+1} не может быть линейной комбинацией остальных $v_k \neq 0$ в силу их линейной независимости) и, соответственно, $v_{m+k} = 0$ $\forall k \geqslant 2$. Таким образом, в качестве базиса в V можно выбрать векторы $(v_0, v_1, \ldots, v_m)$ и $V = V_m \oplus V_{m-2} \oplus \ldots \oplus V_{-m}$. Матричное представление T_m: $sl(2) \to \mathrm{End}\,(V)$ алгебры $sl(2)$ на пространстве V задается формулами (1.12).

Рассмотрим формулу (1.12в) для $k = m+1$: $e_+\,v_{m+1} = (\lambda - m)\,v_m$. Так как $v_{m+1} = 0$, $v_m \neq 0$, то мы заключаем, что $\lambda = m \equiv \dim V - 1$. С другой стороны, если $\lambda = m$, то $e_+\,v_{m+1} = 0$, и вектор v_{m+1} выступает как новый старший вектор, из которого, если он не нулевой, порождается нетривиальное инвариантное подпространство в V. Таким образом, если V неприводимо, то с необходимостью следует $v_{m+1} = 0$. Итак, мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 1.1. *Все конечномерные неприводимые представления алгебры Ли $sl(2)$ (1.10) соответствуют представлениям со старшим весом λ, причем вес λ равен неотрицательному целому числу.*

1.3. Базис Картана–Вейля для простых алгебр Ли

Определение 1.3. *Пусть $\mathcal{G}$ — полупростая алгебра Ли. Выделим в $\mathcal{G}$ максимальную подалгебру $\mathcal{H}$ с образующими $\{H_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ такими, что*
1) $[H_i, H_j] = 0$;
2) *матрицы операторов* $\mathrm{ad}(H_i)$ *диагонализуемы для всех i.*
Такая максимальная коммутативная подалгебра $\mathcal{H}$ в $\mathcal{G}$ называется подалгеброй Картана, а число r — рангом алгебры Ли $\mathcal{G}$.

Все образующие алгебры Ли $\mathcal{G}$ можно разбить на две группы:

$$\{H_i\} \quad (i = 1, \ldots, r), \quad \{T_a\} \quad (a = 1, \ldots, \dim(\mathcal{G}) - r)\,,$$

где $\{H_i\}$ — генераторы подалгебры Картана $\mathcal{H}$ в $\mathcal{G}$, а базисные элементы T_a образуют ортогональное дополнение $\mathcal{H}^\perp$ к $\mathcal{H}$:

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}(H_i)\,\mathrm{ad}(T_a)) = 0. \tag{1.13}$$

Так как

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}(H_i)\,[\mathrm{ad}(H_j), \mathrm{ad}(T_a)]) = \mathrm{Tr}\,([\mathrm{ad}(H_i), \mathrm{ad}(H_j)]\,\mathrm{ad}(T_a)) = 0,$$

то $[H_j, T_a] \in \mathcal{H}^\perp$ и, следовательно,

$$[H_j, T_a] = h_{j,ab}\,T_b. \tag{1.14}$$

Очевидно, что матрицы h_j реализуют $(\dim(\mathcal{G}) - r)$-мерное матричное представление подалгебры Картана, и мы имеем $[h_i,\ h_j] = 0$ $(\forall i, j)$. Так как метрика Киллинга невырождена для полупростой алгебры Ли $\mathcal{G}$, то из условия (1.13) следует, что симметричная матрица

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}(T_a)\,\mathrm{ad}(T_b)) = X_{ab} \tag{1.15}$$

также невырождена. Кроме того, мы имеем

$$h_{j,ac}\,X_{cb} = \mathrm{Tr}\,([\mathrm{ad}(H_j), \mathrm{ad}(T_a)]\,\mathrm{ad}(T_b)) = \\ = \mathrm{Tr}\,([\mathrm{ad}(T_b), \mathrm{ad}(H_j)]\,\mathrm{ad}(T_a)) = -h_{j,bc}\,X_{ca},$$

т. е. матрицы $h_{j,ab}$ $(j = 1, \dots, r)$ антисимметричны с точностью до преобразования эквивалентности

$$(h_j\, X)^T = -h_j\, X \Rightarrow h_j^T = -X^{-1}\, h_j\, X \qquad (1.16)$$

и невырождены (иначе $\mathcal{H}$ можно было бы дополнить). Так как $[h_i, h_j] = 0$, то матрицы h_i для всех i диагонализуются (см. условие 2 в определении 1.3) одновременно:

$$v_b^{(\alpha)}\, h_{i,ba} = \alpha_i\, v_a^{(\alpha)} \Leftrightarrow v^{(\alpha)}\, h_i = \alpha_i\, v^{(\alpha)}. \qquad (1.17)$$

Для матрицы h со свойствами симметрии (1.16) справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1.2. *Если α — собственное значение диагонализуемой матрицы h, удовлетворяющей свойству (1.16), то $-\alpha$ также оказывается ее собственным значением.*

Доказательство. Для матрицы h имеется характеристическое тождество

$$\prod_{\mu}(h - \alpha_\mu \mathbf{1}) = 0, \qquad (1.18)$$

где $\mathbf{1}$ — единичная матрица и произведение берется по всем собственным значениям α_μ. Действительно, матрица $\prod_\mu(h - \alpha_\mu\mathbf{1})$ в левой части этого тождества равна нулю, так как она зануляется на всех собственных векторах h, которые образуют базис (так как h диагонализуема) в соответствующем пространстве. Транспонируем тождество (1.18). Тогда, согласно (1.16), мы получим $\prod_\mu(h + \alpha_\mu\mathbf{1}) = 0$, т. е. если α_μ — собственное значение матрицы h, то и $-\alpha_\mu$ будет ее собственным значением. ∎

Свернем (1.14) с собственными векторами $v_a^{(\alpha)}$, в результате получаем

$$[H_j, E_\alpha] = \alpha_j\, E_\alpha, \quad E_\alpha \equiv \sum_a v_a^{(\alpha)}\, T_a. \qquad (1.19)$$

Определение 1.4. *Векторы r-мерного векторного пространства $\mathcal{V}_r$ с координатами $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$, возникающими в (1.19), называются корневыми векторами (или корнями) алгебры Ли $\mathcal{G}$.*

Теперь любой элемент АЛ $\mathcal{G}$ можно записать как линейную комбинацию образующих $\{H_i\}$ $(i = 1, \dots, r)$ и $\{E_\alpha\}$ (для всех корневых векторов $\alpha \in \mathcal{V}_r$).

Определение 1.5. *Базис АЛ $\mathcal{G}$, образованный элементами $\{H_i, E_\alpha\}$ (где $i = 1, \dots, r$; α — все корневые векторы в $\mathcal{V}_r$), называется базисом Картана–Вейля.*

Заметим, что в присоединенном представлении мы имеем

$$[\mathrm{ad}H_i, \mathrm{ad}E_\alpha\, \mathrm{ad}E_\beta] = (\alpha + \beta)_i\, \mathrm{ad}E_\alpha\, \mathrm{ad}E_\beta.$$

Вычисляя след от этого равенства, мы получаем

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}E_\alpha\, \mathrm{ad}E_\beta) = 0$$

для всех корневых векторов $\alpha, \beta \in \mathcal{V}_r$ таких, что $\alpha + \beta \neq 0$. Соответственно, из невырожденности метрики Киллинга следует, что $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}E_\alpha\, \mathrm{ad}E_{-\alpha}) \neq 0\ \forall \alpha$. Выбирая специальным образом нормировку образующих E_α, можно добиться того, чтобы метрика Киллинга имела вид

$$\begin{gathered}\mathrm{Tr}\ (\mathrm{ad}(H_i)\, \mathrm{ad}(H_j)) = g_{ij},\ \mathrm{Tr}\ (\mathrm{ad}(H_i)\, \mathrm{ad}(E_\alpha)) = 0,\\ \mathrm{Tr}\ (\mathrm{ad}(E_\alpha)\, \mathrm{ad}(E_\beta)) = \delta_{\alpha,-\beta}.\end{gathered} \qquad (1.20)$$

Далее из тождеств Якоби мы получаем

$$[H_i, [E_\alpha, E_\beta]] = (\alpha + \beta)_i\, [E_\alpha, E_\beta]. \qquad (1.21)$$

Тогда, если $(\alpha + \beta)$ — корень, то

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{(\alpha,\beta)}\, E_{\alpha+\beta}, \qquad (1.22)$$

где $N_{(\alpha,\beta)}$ — некоторые ненулевые константы. Если $(\alpha + \beta)$ не корень и $\alpha + \beta \neq 0$, то $[E_\alpha, E_\beta] = 0$. Если же $\alpha + \beta = 0$, то из (1.21) мы имеем

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = x^i\, H_i, \qquad (1.23)$$

где x^i — некоторые константы. Вычислим эти константы для базиса Картана–Вейля, имеющего нормировку (1.20):

$$\begin{aligned} x^j\, g_{ji} &= \mathrm{Tr}\ (\mathrm{ad}(H_i)\, [\mathrm{ad}(E_\alpha), \mathrm{ad}(E_{-\alpha})]) = \\ &= \mathrm{Tr}\ ([\mathrm{ad}(H_i), \mathrm{ad}(E_\alpha)]\, \mathrm{ad}(E_{-\alpha})) = \\ &= \alpha_i \mathrm{Tr}\ (\mathrm{ad}(E_\alpha)\, \mathrm{ad}(E_{-\alpha})) = \alpha_i, \end{aligned}$$

т. е. $x^j = g^{ji}\alpha_i \equiv \alpha^j$, где g^{ji} —элементы матрицы, обратной к $||g_{ij}||$. Отметим, что элементы матрицы $||g_{ij}||$ выражаются через корни

$$g_{ij} = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}(H_i)\mathrm{ad}(H_j)) = \sum_\alpha C^\alpha_{i\alpha} C^\alpha_{j\alpha} = \sum_\alpha \alpha_i \alpha_j. \qquad (1.24)$$

Итак, определяющие соотношения (1.3) для АЛ $\mathcal{G}$ в базисе Картана–Вейля $\{H_i, E_\alpha\}$ переписываются в виде

$$
\begin{gathered}
[H_i, H_k] = 0, \quad [H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha, \\
[E_\alpha, E_\beta] = N_{(\alpha,\beta)}\, E_{\alpha+\beta}, \quad \text{если } (\alpha+\beta) - \text{ корень}, \qquad (1.25) \\
[E_\alpha, E_\beta] = 0, \quad \text{если } (\alpha+\beta) \text{ не корень и } (\alpha+\beta) \neq 0, \\
[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha^i H_i. \qquad (1.26)
\end{gathered}
$$

Замечание. Пусть в (1.14) структурные константы $h_{j,ab}$ — чисто мнимые числа:

$$h^*_{j,ab} = -h_{j,ab}, \tag{1.27}$$

а элементы матрицы $||X_{ab}||$ (1.15) вещественны (например, данная ситуация возникает, если образующие H_j и T_a допускают представление в виде эрмитовых операторов $H_j^\dagger = H_j$ и $T_a^\dagger = T_a$). Матрицы h_j со свойствами (1.16) и (1.27) имеют только вещественные собственные значения. Действительно, пусть $v\,h = \alpha\, v$, и рассмотрим равенства

$$
\begin{gathered}
(v\,h,\ X\,v^*) = \alpha\,(v,\ X\,v^*), \\
(v\,h,\ X\,v^*)^* = \alpha^*\,(v,\ X\,v^*)^* = \alpha^*\,(v,\ X\,v^*), \\
(v\,h,\ X\,v^*)^* = -(v^*\,h,\ X\,v) = -(v,\ (h\,X)^T\,v^*) = (v\,h,\ X\,v^*).
\end{gathered}
$$

В последней строчке, из которой как раз и следует вещественность $\alpha^* = \alpha$, мы использовали (1.27) и (1.16). Если все корни вещественны, то из уравнения (1.24) для любого вещественного вектора y из r-мерного корневого пространства следует неравенство $y^i g_{ij} y^j = \sum\limits_\alpha (y\alpha)^2 \geqslant 0$, которое означает, что корневое пространство имеет евклидову метрику. *В этом случае вещественная АЛ называется компактной.* Кроме того, из (1.27) следует равенство $h_i\,v^* = -\alpha\,v^*$, т. е. $v^{(-\alpha)} = v^{(\alpha)*}$ и, соответственно,

$$E_\alpha^\dagger = E_{-\alpha}, \quad H_j^\dagger = H_j \tag{1.28}$$

в рассматриваемом случае.

1.4. Свойства корней

Докажем теперь следующую важную теорему.

Теорема 1.1. *Если α и β корни, то $2(\alpha,\beta)/\alpha^2$ — целые числа и вектор*

$$\sigma_\alpha(\beta) \equiv \beta - 2\frac{(\alpha,\beta)}{\alpha^2}\,\alpha \tag{1.29}$$

тоже корень.

Доказательство. Из (1.19) и (1.26) следует, что три генератора

$$\mathcal{E}_{+\alpha} = \sqrt{2/\alpha^2}\ E_{+\alpha}, \quad \mathcal{E}_{-\alpha} = \sqrt{2/\alpha^2}\ E_{-\alpha}, \quad H_\alpha = 2(\alpha^i H_i)/\alpha^2 \tag{1.30}$$

образуют алгебру Ли $sl(2)$ (1.10):

$$[H_\alpha, \mathcal{E}_{+\alpha}] = 2\,\mathcal{E}_{+\alpha}, \quad [H_\alpha, \mathcal{E}_{-\alpha}] = -2\,\mathcal{E}_{-\alpha}, \quad [\mathcal{E}_{+\alpha}, \mathcal{E}_{-\alpha}] = H_\alpha. \tag{1.31}$$

Как было показано в п. 1.2, для конечномерных представлений собственные значения оператора H_α должны быть целыми числами. Так как

$$[H_\alpha, E_\beta] = \frac{2(\alpha,\beta)}{\alpha^2}\,E_\beta \tag{1.32}$$

и мы рассматриваем конечномерные АЛ, то $2(\alpha,\beta)/\alpha^2$ должны быть целыми числами для всех корней. Пусть корень γ таков, что

$$[E_\alpha, E_\gamma] = 0. \tag{1.33}$$

Тогда рассмотрим набор образующих (ср. с построением конечномерных представлений $sl(2)$ со старшим весом в п. 1.2)

$$
\begin{gathered}
[E_{-\alpha}, E_\gamma] = E'_{\gamma-\alpha}, \\
[E_{-\alpha}, E'_{\gamma-\alpha}] = E'_{\gamma-2\,\alpha}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
[E_{-\alpha}, E'_{\gamma-j\,\alpha}] = E'_{\gamma-(j+1)\,\alpha} = 0,
\end{gathered} \tag{1.34}
$$

где

$$E'_{\gamma-k\,\alpha} = N_{-\alpha,\gamma} N_{-\alpha,\gamma-\alpha} \cdots N_{-\alpha,\gamma-(k-1)\alpha} E_{\gamma-k\,\alpha} \tag{1.35}$$

есть перенормированный генератор $E_{\gamma-k\,\alpha}$ и мы оборвали процедуру на шаге $(j+1)$ в силу конечномерности нашей АЛ. Очевидно, что для всех m $(0 \leqslant m \leqslant j)$ мы имеем

$$[E_\alpha, E'_{\gamma-(m+1)\,\alpha}] = \mu_{m+1}\,E'_{\gamma-m\,\alpha}, \tag{1.36}$$

где коэффициенты μ_m удовлетворяют условиям

$$\mu_0 = 0 = \mu_{j+1}. \tag{1.37}$$

Найдем рекуррентное соотношение для коэффициентов μ_m с помощью следующей цепочки равенств:

$$
\begin{aligned}
\mu_{m+1}\,E'_{\gamma-m\,\alpha} &= [E_\alpha, E'_{\gamma-(m+1)\,\alpha}] = [E_\alpha, [E_{-\alpha}, E'_{\gamma-m\,\alpha}]] = \\
&= -[E'_{\gamma-m\,\alpha}, [E_\alpha, E_{-\alpha}]] - [E_{-\alpha}, [E'_{\gamma-m\,\alpha}, E_\alpha]] = \\
&= -[E'_{\gamma-m\,\alpha}, (\alpha, H)] + \mu_m\,[E_{-\alpha}, E'_{\gamma-(m-1)\,\alpha}] = \\
&= [(\alpha,\gamma) - m\,(\alpha,\alpha) + \mu_m]\,E'_{\gamma-m\,\alpha},
\end{aligned}
$$

следовательно, мы имеем

$$\mu_{m+1} = \mu_m + (\alpha,\gamma) - m\,(\alpha,\alpha). \qquad (1.38)$$

Используя начальное условие $\mu_0 = 0$ (1.37), мы получаем решение рекуррентного соотношения (1.38)

$$\mu_m = m\,(\alpha,\gamma) - \frac{m(m-1)}{2}\,(\alpha,\alpha), \qquad (1.39)$$

а данные $\mu_{j+1} = 0$ (1.37) приводят к условию

$$0 = (\alpha,\gamma) - \frac{j}{2}\,(\alpha,\alpha) \;\;\Rightarrow\;\; j = 2\frac{(\alpha,\gamma)}{(\alpha,\alpha)}. \qquad (1.40)$$

Итак, мы доказали, что если α и γ — корни, а $(\alpha+\gamma)$ не корень, то существует последовательность (струна) корней

$$\gamma,\, \gamma-\alpha, \ldots,\, \gamma - j\,\alpha \equiv \gamma - 2\frac{(\alpha,\gamma)}{(\alpha,\alpha)}\,\alpha, \qquad (1.41)$$

где последний корень определяется последним соотношением в (1.34). Заметим, что струна корней (1.41) инвариантна при отражениях относительно гиперплоскости P_α, перпендикулярной к вектору α: $\alpha \perp P_\alpha$ и проходящей через начало координат корневого пространства. Действительно, все корни этой струны лежат вдоль направления вектора α, а корень

$$\sigma_\alpha(\gamma) = \gamma - 2\frac{(\alpha,\gamma)}{(\alpha,\alpha)}\,\alpha \qquad (1.42)$$

является отражением корня γ относительно гиперплоскости P_α. Это следует из того, что любой корень можно представить в виде суммы вектора $\xi \in P_\alpha$ и вектора $\eta \perp P_\alpha$; при преобразовании σ_α вектор ξ, лежащий в плоскости P_α (т. е. такой, что $(\xi,\alpha) = 0$), не двигается, а вектор η, направленный вдоль α (т. е. такой, что $\eta \sim \alpha$), меняет знак. Преобразования (1.42) называются вейлевскими отражениями. Возвращаясь к формулировке теоремы, заметим, что если корень β содержится в струне (1.41), то в ней содержится и корень $\beta - 2\dfrac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\,\alpha$. ■

Следствие 1. Как следствие, мы показали (см. формулу (1.41), где $j > 0$), что *если α и γ — корни, а $(\gamma+\alpha)$ не корень, то $(\alpha,\gamma) > 0$. Соответственно, заменяя $\alpha \to -\alpha$, мы получаем, что если $(\gamma-\alpha)$ не корень, то $(\alpha,\gamma) < 0$.*

Следствие 2. Подставим формулу (1.35) в (1.36) и затем учтем (1.39). В результате получаем, что если $(\alpha+\gamma)$ не корень, то

$$N_{-\alpha,\beta+\alpha}\,N_{\alpha,\beta} = \mu_{m+1} = (m+1)\frac{(j-m)}{2}(\alpha,\alpha), \qquad (1.43)$$

где корень $\beta \equiv \gamma - (m+1)\,\alpha$ принадлежит струне, порождаемой корнем α из корня γ.

Следствие 2 можно дополнить следующими свойствами коэффициентов $N_{\alpha,\beta}$.

1. Из антисимметричности коммутатора мы получаем

$$N_{\alpha,\beta} = -N_{\beta,\alpha}. \qquad (1.44)$$

2. Пусть три корня образуют треугольник:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0. \qquad (1.45)$$

Тогда имеют место соотношения

$$N_{\gamma,\alpha} + N_{\gamma,\beta} = 0, \;\; N_{\beta,\alpha} + N_{\beta,\gamma} = 0, \;\; N_{\alpha,\beta} + N_{\alpha,\gamma} = 0. \qquad (1.46)$$

Действительно, из тождеств Якоби

$$[E_\alpha,[E_\beta,E_\gamma]] + [E_\beta,[E_\gamma,E_\alpha]] + [E_\gamma,[E_\alpha,E_\beta]] = \\ = \{N_{\beta,\gamma}\,\alpha^i + N_{\gamma,\alpha}\,\beta^i + N_{\alpha,\beta}\,\gamma^i\}\,H_i = 0$$

следует, что $(N_{\beta,\gamma}\,\alpha^i + N_{\gamma,\alpha}\,\beta^i + N_{\alpha,\beta}\,\gamma^i) = 0$. Выразив один из корней через два других по формуле (1.45), мы приходим к (1.46). С учетом антисимметричности (1.44) соотношения (1.46) представимы в виде

$$N_{\alpha,\gamma} = N_{\gamma,\beta} = N_{\beta,\alpha} =: N_{\alpha,\beta,\gamma}, \qquad (1.47)$$

где мы определили объект $N_{\alpha,\beta,\gamma}$, циклически-симметричный по перестановке корневых индексов, которые удовлетворяют соотношению треугольника (1.45). Из (1.47) следует равенство $N_{-\alpha,\alpha+\beta} = -N_{-\alpha,-\beta}$, и (1.43) можно переписать как

$$-N_{-\alpha,-\beta}N_{\alpha,\beta} = (m+1)\frac{(j-m)}{2}(\alpha,\alpha), \qquad (1.48)$$

где $\beta = \gamma - (m+1)\,\alpha$. Заметим, что правая часть (1.48) должна быть симметричной по замене $\alpha \leftrightarrow \beta$ (при этом, конечно, меняются и целые числа j, m).

3. Пусть α, β, γ — три корня такие, что $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ и $\beta+$ $+\gamma, \gamma+\alpha, \alpha+\beta \neq 0$. Тогда имеем

$$[E_\alpha, [E_\beta, E_\gamma]] + (\text{цикл } \alpha, \beta, \gamma) = \\ = (N_{\alpha,\beta+\gamma} N_{\beta,\gamma} + N_{\beta,\gamma+\alpha} N_{\gamma,\alpha} + N_{\gamma,\alpha+\beta} N_{\alpha,\beta}) E_{\alpha+\beta+\gamma} = 0. \quad (1.49)$$

Поэтому если $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — четыре корня, образующие четырехугольник:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0,$$

то, согласно (1.47), $N_{\alpha,\beta+\gamma}$ может быть заменено на $N_{\delta,\alpha}$ и выполняются соотношения

$$N_{\beta,\gamma} N_{\delta,\alpha} + N_{\gamma,\alpha} N_{\delta,\beta} + N_{\alpha,\beta} N_{\delta,\gamma} = 0 \quad (\beta+\gamma, \gamma+\alpha, \alpha+\beta \neq 0). \quad (1.50)$$

Утверждение 1.3. *Не нарушая нормировку, принятую в* (1.20), *образующие E_α всегда можно выбрать так, что $-N_{-\alpha,-\beta} =$ $= N_{\alpha,\beta}$, при этом все коэффициенты $N_{\alpha,\beta}$ будут вещественными.*

Доказательство. Это следует из симметрии корневой системы, которая позволяет выбрать образующие АЛ $\mathcal{G}$ так, что соотношения (1.25), (1.26) будут инвариантны относительно автоморфизма σ:

$$E_\alpha \to \sigma(E_\alpha) = -E_{-\alpha}, \quad H_i \to \sigma(H_i) = -H_i, \quad (1.51)$$

который называется автоморфизмом Картана. Для компактных алгебр Ли это следует из антиавтоморфизма (1.28) (см. также [3, с. 175]). ■

Согласно данному утверждению формулу (1.48) можно представить в виде

$$N^2_{\alpha,\beta} = \frac{(m+1)(j-m)}{2}(\alpha,\alpha), \quad (1.52)$$

где корень β принадлежит α-струне корней, проходящих через корень γ: $\beta = \gamma-(m+1)\alpha$ и $j = 2(\alpha,\gamma)/(\alpha,\alpha)$. Таким образом, структурные константы $N_{\alpha,\beta}$ определяются с точностью до знака.

Воспользуемся теоремой 1.1 и рассмотрим неравенство

$$0 \leqslant \frac{2(\alpha,\beta)}{\alpha^2}\,\frac{2(\alpha,\beta)}{\beta^2} = mn = 4\cos^2\theta \leqslant 4,$$

где m, n — целые числа.

Итак, мы имеем следующие возможности:

$$\text{а)} \quad \alpha \not\parallel \beta \Rightarrow 0 \leqslant mn \leqslant 3 \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} 2\dfrac{(\alpha,\beta)}{\alpha^2} = & 0 & \pm1 & \pm1 & \pm1 \\ 2\dfrac{(\alpha,\beta)}{\beta^2} = & 0 & \pm1 & \pm2 & \pm3 \end{array} \right| \quad (1.53)$$

плюс перестановка верхней и нижней строчек (заметим, что случай $(\alpha,\beta)=0$ соответствует полупростой алгебре Ли);

$$\text{б)} \quad \alpha \parallel \beta \Rightarrow mn = 4 \left| \begin{array}{c|c|c|c} 2\dfrac{(\alpha,\beta)}{\alpha^2} = & \pm2 & \pm1 & \pm4 \\ 2\dfrac{(\alpha,\beta)}{\beta^2} = & \pm2 & \pm4 & \pm1 \\ \hline & \alpha=\pm\beta & \alpha=\pm2\beta & \beta=\pm2\alpha \end{array} \right| . \quad (1.54)$$

Случай $\alpha = \pm\beta$ тривиален, а случаи $\alpha = \pm2\beta$, $\beta = \pm2\alpha$ запрещены, так как $[E_\alpha, E_\alpha] = 0$.

150026

Лемма 1.1. *Пусть α и β — два различных корня. Тогда если $(\alpha,\beta) > 0$, то $(\alpha-\beta)$ также корень, а если $(\alpha,\beta) < 0$, то $(\alpha+\beta)$ также корень.*

Доказательство. Рассмотрим случай $(\alpha,\beta) < 0$ (случай $(\alpha,\beta) > 0$ будет следовать автоматически при замене $\beta \to -\beta$). В этом случае из (1.53) следует, что либо $2\dfrac{(\alpha,\beta)}{\alpha^2}$, либо $2\dfrac{(\alpha,\beta)}{\beta^2}$ равно -1. Без потери общности положим $2\dfrac{(\alpha,\beta)}{\alpha^2} = -1$. Тогда с помощью вейлевского отражения получаем, что

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{(\alpha,\beta)}{\alpha^2}\alpha = \beta+\alpha$$

является корнем. ■

Пример. Корневая система алгебры Ли $sl(3)$. Алгебра Ли $sl(3)$ — это векторное пространство всех бесшпуровых матриц (3×3) с умножением в виде коммутатора. Подалгебра в $sl(3)$ диагональных матриц со следом, равным нулю, очевидно является коммутативной. Эта подалгебра и выбирается в качестве подалгебры Картана $\mathcal{H}$. Выберем в качестве базиса в $\mathcal{H}$ две независимые диагональные матрицы

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (1.55)$$

такие, что $\mathrm{Tr}\,(H_iH_j) = 2\delta_{ij}$. Оставшиеся 6 образующих алгебры $sl(3)$ $(\dim(sl(3)) = 8)$, которые мы обозначим $E_{\pm\alpha}, E_{\pm\beta}, E_{\pm\gamma}$, можно выбрать следующим образом:

$$E_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$E_{-\alpha} = E_\alpha^T, \quad E_{-\beta} = E_\beta^T, \quad E_{-\gamma} = E_\gamma^T. \tag{1.56}$$

Определяющие соотношения алгебры $sl(3)$ в выбранном базисе имеют вид

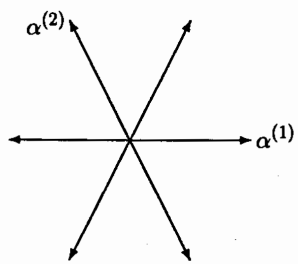
$$\begin{aligned} &[H_1, E_\alpha] = 2E_\alpha, && [H_1, E_\beta] = -E_\beta, && [H_1, E_\gamma] = E_\gamma, \\ &[H_2, E_\alpha] = 0, && [H_2, E_\beta] = \sqrt{3}\,E_\beta, && [H_2, E_\gamma] = \sqrt{3}\,E_\gamma, \end{aligned} \tag{1.57}$$

$$\begin{gathered} [E_\alpha, E_\beta] = E_\gamma, \quad [E_\gamma, E_{-\alpha}] = -E_\beta, \quad [E_\gamma, E_{-\beta}] = E_\alpha, \\ [E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_1, \\ [E_\beta, E_{-\beta}] = \frac{\sqrt{3}}{2}H_2 - \frac{1}{2}H_1, \quad [E_\gamma, E_{-\gamma}] = \frac{\sqrt{3}}{2}H_2 + \frac{1}{2}H_1. \end{gathered} \tag{1.58}$$

Остальные коммутационные соотношения для образующих либо равны нулю, либо получаются из (1.57), (1.58) транспонированием. Согласно (1.57) мы имеем 6 корневых векторов:

$$\begin{aligned} &\alpha = (2,0), && \beta = (-1, \sqrt{3}\,), && \gamma = (1, \sqrt{3}\,) = \alpha + \beta, \\ &-\alpha = (-2,0), && -\beta = (1, -\sqrt{3}\,), && -\gamma = (-1, -\sqrt{3}\,), \end{aligned} \tag{1.59}$$

которые можно изобразить на корневой диаграмме



$sl(3)$ (1.60)

Здесь векторы $\alpha^{(1)} = \alpha$, $\alpha^{(2)} = \beta$ определяют целочисленный базис всей корневой системы $sl(3)$. Пользуясь (1.59) и форму-

лой (1.24), вычислим метрику g_{ij}, которая оказывается ортонормированной и евклидовой:

$$g_{ij} = 2(\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j + \gamma_i\gamma_j) = 12\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что другой выбор базисных образующих (1.55) в подалгебре Картана может, вообще говоря, привести к неортонормированной метрике g_{ij}, что, в свою очередь, приводит к искажению диаграммы (1.60).

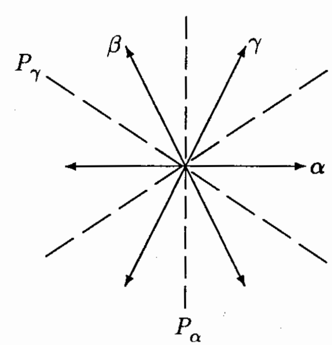
1.5. Группа Вейля и простые корни

Рассмотрим множество всех корней простой АЛ $\mathcal{G}$ и обозначим его как $\Phi(\mathcal{G})$. Рассмотрим все отражения типа (1.42) множества $\Phi(\mathcal{G})$. Очевидно корневая система остается инвариантной относительно всех таких отражений и, соответственно, операторы этих отражений образуют группу W.

Определение 1.6. *Группа W, которая порождается всеми отражениями* (1.42), *называется группой Вейля.*

Так как корневая система конечна, то W тоже конечна.

Рассмотрим для всех корней α гиперплоскости P_α такие, что $P_\alpha \perp \alpha$. Эти гиперплоскости делят r-мерное корневое пространство на неперекрывающиеся конусы, каждый из которых называется *камерой Вейля*. Например, в случае $\mathcal{G} = sl(3)$ мы имеем 3 отражающие гиперплоскости P_α, P_β, P_γ и, соответственно, 6 камер Вейля:



Группа W переводит одну камеру Вейля в другую, и, следовательно, W действует на множестве камер Вейля.

Замечание. Отражения из группы Вейля W можно реализовать на образующих АЛ. Определим операторы

$$T_3(\alpha) = \frac{1}{2} H_\alpha = \frac{\alpha^i H_i}{\alpha^2},$$
$$T_2(\alpha) = \frac{1}{2i}(\mathcal{E}_\alpha - \mathcal{E}_{-\alpha}), \tag{1.61}$$
$$T_1(\alpha) = \frac{1}{2}(\mathcal{E}_\alpha + \mathcal{E}_{-\alpha}),$$

которые согласно (1.31) образуют алгебру углового момента

$$[T_k(\alpha), T_j(\alpha)] = i\varepsilon_{kjn} T_n(\alpha).$$

Рассмотрим поворот на угол π вокруг второй оси, который обслуживается оператором $e^{i\pi T_2(\alpha)}$ и будет приводить к отражению третьей оси $T_3(\alpha) \to -T_3(\alpha)$. Т.е. мы имеем

$$e^{i\pi T_2(\alpha)}\, \alpha^i H_i\, e^{-i\pi T_2(\alpha)} = -\alpha^i H_i. \tag{1.62}$$

Пусть вектор $\xi \perp \alpha$, т.е. $(\xi, \alpha) = 0$, тогда $[\mathcal{E}_{\pm\alpha}, \xi^i H_i] = (\xi, \alpha)\mathcal{E}_{\pm\alpha} = 0$ и имеет место равенство

$$e^{i\pi T_2(\alpha)}\, \xi^i H_i\, e^{-i\pi T_2(\alpha)} = \xi^i H_i \quad (\forall\, \xi \perp \alpha). \tag{1.63}$$

Произвольный вектор $x \in V_r$ (для евклидова пространства V_r) можно представить как линейную комбинацию векторов α, ξ. Тогда из (1.62), (1.63), мы получаем

$$e^{i\pi T_2(\alpha)}\, (x, H)\, e^{-i\pi T_2(\alpha)} = (\sigma_\alpha(x), H), \tag{1.64}$$

где $(x, H) = x_i g^{ij} H_j$ и отражение σ_α определено в (1.42). Отметим также, что для отражений (1.42) и двух любых векторов $\beta, \gamma \in V_r$ мы имеем равенство

$$(\sigma_\alpha(\beta), \gamma) = (\beta, \sigma_\alpha(\gamma))\,. \tag{1.65}$$

Таким образом, образующие элементы σ_α группы Вейля W задаются ортогональными матрицами и, следовательно,

$$\det(w) = \pm 1, \quad \forall w \in W. \tag{1.66}$$

Обсудим теперь, каким образом можно ввести базис в пространстве корневых векторов. Выберем некоторую камеру Вейля и возьмем вектор x, лежащий внутри этой камеры, т.е. $(x, \alpha) \neq 0$ $(\forall \alpha \in \Phi(\mathcal{G}))$ (иначе вектор x лежал бы в одной из гиперплоскостей). Очевидно, что (x, α) не меняет знак $(\forall \alpha \in \Phi(\mathcal{G}))$ при движении x внутри одной и той же камеры, в противном случае

мы прошли бы точку $(x, \alpha) = 0$ и попали бы в другую камеру. Определим теперь (по отношению к выбранной камере Вейля)

1) α — *положительный корень*, если $(x, \alpha) > 0 \to \alpha \in \Phi^+(x)$;
2) α — *отрицательный корень*, если $(x, \alpha) < 0 \to \alpha \in \Phi^-(x)$.

Камера Вейля, в которой располагается вектор x, называется *доминантной*.

Лемма 1.2. *Если векторы $\alpha^{(i)}$, $i = 1, \ldots, k \leqslant r$, положительны и $(\alpha^{(i)}, \alpha^{(j)}) \leqslant 0$ $\forall i, j$ $(i \neq j)$, то $\alpha^{(i)}$ — линейно независимы.*

Доказательство. Это утверждение будем доказывать от противного. Пусть мы имеем

$$\sum_{i=1}^{k} r_i\, \alpha^{(i)} = 0. \tag{1.67}$$

Так как $(x, \alpha^{(i)}) > 0$, то часть коэффициентов r_i в (1.67) больше нуля, а часть меньше нуля. Перенесем часть слагаемых с $r_i \leqslant 0$ в левую часть равенства

$$\varepsilon \equiv \sum_{i=1}^{l} s_i\, \alpha^{(i)} = \sum_{i=l+1}^{k} t_i\, \alpha^{(i)},$$

где $s_i \geqslant 0, t_i \geqslant 0$. Рассмотрим

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=l+1}^{k} s_i\, t_j\, (\alpha^{(i)}, \alpha^{(j)}) \leqslant 0;$$

отсюда следует, что $\varepsilon = 0$ и $0 = (\varepsilon, x) = \sum_i s_i\, (\alpha^{(i)}, x) = \sum_j t_j\, (\alpha^{(j)}, x)$. Так как $s_i \geqslant 0, t_i \geqslant 0$ и $(x, \alpha^{(i)}) > 0$, $\forall i$, то $s_i = 0$ и $t_i = 0$, т.е. $r_i = 0$. ∎

Определение 1.7. *Положительный корень называется простым, если его нельзя записать в виде суммы двух положительных корней.*

Теорема 1.2. *Существует $r = \mathrm{rang}\,(\mathcal{G})$ простых корней $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(r)}$ таких, что любой положительный корень α можно записать как*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} n_i\, \alpha^{(i)}, \tag{1.68}$$

где $n_i \geqslant 0$ — целые числа, а любой отрицательный корень β представим в виде

$$\beta = \sum_{i=1}^{r} m_i \, \alpha^{(i)}, \tag{1.69}$$

где целые числа $m_i \leqslant 0$. Более того, $(\alpha^{(i)}, \alpha^{(j)}) < 0$, т. е. угол между двумя простыми корнями всегда больше 90°. Вышеуказанное подмножество $\Delta(x)$ простых корней $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(r)} \in \in \Phi^+(x)$ называется базой.

Доказательство.

1. Очевидно, что разность двух простых корней $\alpha^{(1)}$ и $\alpha^{(2)}$ не может быть корнем. Действительно, $\beta = \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}$ не может быть положительным корнем (иначе $\alpha^{(1)}$ разлагается в сумму двух положительных корней) и аналогично β не может быть отрицательным корнем (иначе $\alpha^{(2)} = \alpha^{(1)} + (-\beta)$ разлагается в сумму двух положительных корней). Таким образом, β не корень.

2. Теперь, согласно следствию 1 из предыдущего пункта, мы имеем для двух произвольных простых корней $(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}) < 0$ и, следовательно, все простые корни (согласно лемме 1.2) являются линейно независимыми.

3. Согласно формуле (1.24), любой вектор y можно разложить по положительным корням:

$$y_i = g_{ij} y^j = \left(\sum_{\alpha \in \Phi^+(x)} + \sum_{\alpha \in \Phi^-(x)} \right) \alpha_i(\alpha, y) = 2 \sum_{\alpha \in \Phi^+(x)} \alpha_i(\alpha, y).$$

Так как по определению все положительные корни или просты, или разлагаются в сумму положительных корней, то, продолжая эту процедуру, мы рано или поздно разложим все положительные корни в сумму простых корней (1.68), а следовательно, разложим по простым корням и произвольный вектор y, т. е. простые корни формируют базис r-мерного пространства. Поскольку базис в r-мерном пространстве состоит из r векторов, то простых корней ровно r штук: $\alpha^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, r)$.

4. Далее система векторов $\{\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(r)}, \beta\}$ (где β — положительный не простой корень) является линейно зависимой и, согласно лемме 1.2, одно из $(\alpha^{(j)}, \beta) > 0$. Тогда по лемме 1.1 вектор $\gamma_1 = \beta - \alpha^{(j)}$ тоже корень, причем положительный (иначе $\alpha^{(j)}$ будет не простым). Теперь либо γ_1 — простой корень и, соответственно, β разлагается в виде суммы двух простых корней, либо γ_1 опять положительный не простой корень, который

можно снова разложить в виде $\gamma_2 = \gamma_1 - \alpha^{(k)}$, где γ_2 — положительный корень и т. д. Продолжая эту процедуру до тех пор, пока на каком-нибудь шаге мы не получим, что γ_k — простой корень, мы можем разложить любой положительный корень в виде линейной комбинации простых, с положительными целыми коэффициентами. Соответственно, любой отрицательный корень мы можем разложить в виде линейной комбинации простых, с отрицательными целыми коэффициентами. Таким образом, теорема 1.2 доказана.

Следствие 1. Разность двух корней $\gamma = \beta - \alpha^{(i_k)}$, где корень β есть сумма простых корней $\beta = \alpha^{(i_1)} + \alpha^{(i_2)} + \ldots + \alpha^{(i_j)}$ и $i_k \neq \neq i_1, \ldots, i_j$, не является корнем.

Действительно, γ не может быть отрицательным корнем (иначе $\alpha^{(i_k)}$ не прост). С другой стороны, γ не может быть положительным корнем, так как это противоречило бы (1.68).

Следствие 2. Как следствие п. 1 из доказательства теоремы 1.2 и формул (1.22), (1.23), мы имеем

$$[E_{\alpha^{(i)}}, E_{-\alpha^{(j)}}] = \delta_{i,j} \, (\alpha^{(i)}, H). \tag{1.70}$$

Утверждение 1.4. *Группа Вейля W порождается отражениями $S_i = \sigma_{\alpha^{(i)}}$, связанными с простыми корнями*

$$S_i : \alpha \to \sigma_{\alpha^{(i)}}(\alpha) = \alpha - \frac{2(\alpha, \alpha^{(i)})}{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(i)})} \alpha^{(i)}. \tag{1.71}$$

Симметрия S_i переставляет между собой положительные корни, не равные $\alpha^{(i)}$, а для $\alpha^{(i)}$ мы имеем $S_i(\alpha^{(i)}) = -\alpha^{(i)}$.

Доказательство [5]. То, что вся группа Вейля W порождается отражениями S_i, представляется очевидным и следует из определения этой группы (см. определение 1.5). Далее пусть $\alpha = \sum_{j=1}^{r} m_j \alpha^{(j)}$ положителен. Тогда из (1.71) мы получаем

$$S_i(\alpha) = \left(m_i - \frac{2(\alpha, \alpha^{(i)})}{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(i)})} \right) \alpha^{(i)} + \sum_{j \neq i} m_j \alpha^{(j)}. \tag{1.72}$$

Так как $\alpha^{(j)}$ — система простых корней, то все коэффициенты в разложении корня $S_i(\alpha)$ по этой системе должны быть одного знака (см. теорему 1.2). Если $m_i \geqslant \dfrac{2(\alpha, \alpha^{(i)})}{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(i)})}$, то все коэффициенты в разложении корня $S_i(\alpha)$ не отрицательны (остальные $m_k \geqslant 0$ по предположению о положительности α), и, следовательно, корень $S_i(\alpha)$ положителен, что доказывает перестановку положительных корней операцией S_i. Если же $m_i \leqslant \dfrac{2(\alpha, \alpha^{(i)})}{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(i)})}$, то и остальные коэффициенты должны быть $m_k \leqslant 0$, т. е. $m_k = 0$ ($\forall k \neq i$). Тогда $\alpha = m_i \alpha^{(i)}$ (суммирования нет) и из (1.72) мы получаем $S_i(\alpha^{(i)}) = -\alpha^{(i)}$. ■

Теорема 1.3. *Любая простая алгебра Ли $\mathcal{G}$ определяется системой $\Delta(x)$ своих простых корней.*

Доказательство. Для доказательства достаточно построить по простым корням алгебры $\mathcal{G}$ все ее корни. Если α — корень, то и $-\alpha$ — корень, поэтому достаточно ограничиться построением только положительных корней. Положительный корень, являющийся суммой k простых корней, назовем *корнем порядка* k. Полную систему корней будем строить с помощью индуктивной процедуры. Все корни порядка один нам даны, ибо это — простые корни. Теперь пусть мы построили по системе $\Delta(x)$ все корни порядка $k-1$. Корни порядка k имеют вид $(\gamma + \alpha^{(j)})$, где γ — корень порядка $k-1$, а $\alpha^{(j)}$ — простой корень (п. 4 из доказательства теоремы 1.2).

Рассмотрим все корни $\gamma, \gamma - \alpha^{(j)}, \gamma - 2\alpha^{(j)}, \ldots, \gamma - m\alpha^{(j)}$ ($m < k$) такие, что $\gamma - (m+1)\alpha^{(j)}$ не корень. Все эти корни положительны [1] и порядка меньшего k, поэтому вопрос о том, является ли сумма $(\gamma + \alpha^{(j)})$ корнем, определяется формулой (1.41). Т. е. $(\gamma + \alpha^{(j)})$ является корнем, если $2(\alpha^{(j)}, \gamma)/(\alpha^{(j)})^2 > m$, в противном случае $(\gamma + \alpha^{(j)})$ не корень. Пользуясь этим правилом, мы можем построить все корни порядка k. ■

Рассмотрим теперь струну

$$\alpha^{(i)}, \alpha^{(i)} + \alpha^{(j)}, \alpha^{(i)} + 2\,\alpha^{(j)}, \ldots, \alpha^{(i)} + m\,\alpha^{(j)}.$$

Согласно (1.41), число m положительно и равно $-2(\alpha^{(i)}, \alpha^{(j)})/(\alpha^{(j)})^2$. Как мы видели, для конечномерных простых АЛ m может принимать только значения $0, 1, 2, 3$ и, следовательно, число корневых векторов в струне не превышает 4.

[1] Положительный корень $\gamma = \sum\limits_{k=1}^{r} m_k \alpha^{(k)}$ имеет все $m_k \geqslant 0$, тогда если $(\gamma - m\alpha^{(j)})$ — корень, то все его коэффициенты в разложении по простым корням имеют одинаковый знак, и $\gamma \neq n\alpha^{(j)}$, т. е. $(m_j - m) \geqslant 0$ и корень $(\gamma - m\alpha^{(j)})$ тоже положителен (см. доказательство утверждения 1.4).

Итак, простая конечномерная алгебра Ли $\mathcal{G}$ полностью определяется набором образующих

$$E_{\pm\alpha^{(i)}}, \quad H_{\alpha^{(i)}} = 2\frac{(\alpha^{(i)}, H)}{(\alpha^{(i)})^2},$$

которые соответствуют простым корням и удовлетворяют соотношениям (см. (1.32), (1.70))

$$\begin{gathered}[E_{\alpha^{(i)}}, E_{-\alpha^{(j)}}] = \delta_{i,j}\,(\alpha^{(i)}, H),\\ [H_{\alpha^{(i)}}, E_{\alpha^{(j)}}] = K_{ji}\, E_{\alpha^{(j)}},\\ [E_{\alpha^{(i)}}, E_{\alpha^{(j)}}] = N_{\alpha^{(i)},\alpha^{(j)}}\, E_{\alpha^{(i)}+\alpha^{(j)}},\end{gathered} \tag{1.73}$$

$$\underbrace{[E_{\alpha^{(j)}}, \ldots, [E_{\alpha^{(j)}}}_{1-K_{ij}}, E_{\alpha^{(i)}}] = (\mathrm{ad}(E_{\alpha^{(j)}}))^{1-K_{ij}}\, E_{\alpha^{(i)}} = 0. \tag{1.74}$$

Здесь необходимо добавить аналогичные соотношения для образующих с отрицательными корнями $E_{-\alpha^{(i)}}$, которые мы не выписываем. Целочисленная матрица

$$K_{ij} = 2\frac{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(j)})}{(\alpha^{(j)})^2}$$

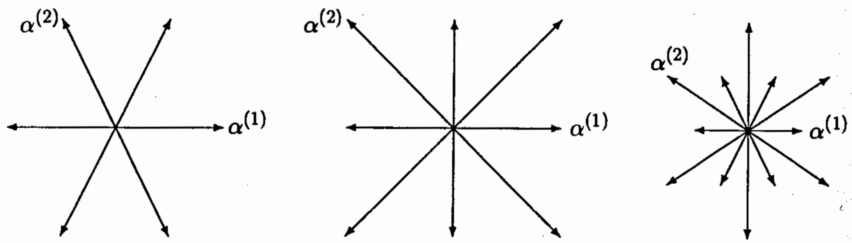
называется *матрицей Картана*, а соотношения (1.74), которые эквивалентны конечномерности АЛ, называются *соотношениями Серра*. Образующие $\{E_{\pm\alpha^{(i)}}, H_{\alpha^{(i)}}\}$, которых $3r$ штук и которые (с помощью соотношений (1.73), (1.74)) определяют всю АЛ, называются *образующими Шевалле*.

Очевидно, что $K_{ii} = 2$ и $K_{ij} \leqslant 0$ для $i \neq j$. Согласно (1.53), мы имеем следующие возможности:

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c} K_{ij} = & 0 & -1 & -1 & -1 \\ K_{ji} = & 0 & -1 & -2 & -3 \\ \dfrac{(\alpha^{(j)})^2}{(\alpha^{(i)})^2} = & ? & 1 & 2 & 3 \\ \cos(\theta_{ij}) = & 0 & -1/2 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \theta_{ij} = & 90^\circ & 120^\circ & 135^\circ & 150^\circ \end{array}\right|, \tag{1.75}$$

где θ_{ij} — угол между двумя простыми корнями $\alpha^{(j)}$ и $\alpha^{(i)}$.

Графическое представление корневых векторов называется векторной диаграммой. Согласно (1.75) легко нарисовать все возможные двумерные диаграммы:



A_2 B_2 G_2

Рис. 1

1.6. Диаграммы Дынкина и корневые системы классических алгебр Ли $sl(n)$, $so(n)$, $sp(2n)$

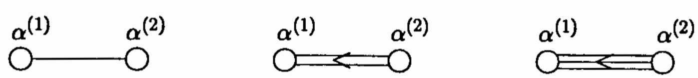
Из предыдущего обсуждения ясно, что диагональные элементы матрицы Картана всегда равны 2 и только недиагональные элементы матрицы Картана являются важными и несут в себе полную информацию об АЛ $\mathcal{G}$. Оказывается, что матрицу Картана можно представить графически (закодировать) в виде диаграммы. Такие диаграммы называются диаграммами Дынкина. Кодирование осуществляется с помощью следующих правил [7].

1. Необходимо нарисовать $r = \operatorname{rang}(\mathcal{G})$ точек, соответствующих простым корням $\alpha^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, r)$.

2. Соединить i-ю и j-ю точки с помощью $(K_{ij} K_{ji})$ линий (число таких линий может быть только 0, 1, 2, 3).

3. Если между точками i и j проходит больше одной линии, необходимо нарисовать стрелку (> или <), указывающую на корень с меньшей длиной.

В качестве примера нарисуем диаграммы Дынкина, которые соответствуют векторным диаграммам, представленным на рис. 1:



$|\alpha^{(2)}|^2 = |\alpha^{(1)}|^2$ $\quad$ $|\alpha^{(2)}|^2 = 2|\alpha^{(1)}|^2$ $\quad$ $|\alpha^{(2)}|^2 = 3|\alpha^{(1)}|^2$

A_2 B_2 G_2

Рис. 2

Покажем теперь, как построить диаграммы Дынкина для простых алгебр классических серий (т. е. для алгебр, которые соответствуют группам $SL(n)$, $SO(n)$ и $Sp(2n)$).

Алгебры $sl(n)$: A_{n-1}-серия. Эта алгебра Ли бесшпуровых матриц $(n \times n)$ имеет размерность (n^2-1). Прежде всего опишем систему корней алгебры $sl(n)$. Подалгебра Картана задается вещественными диагональными бесшпуровыми матрицами $(A)_{ij} = a_i \delta_{ij}$ $(\sum_i a_i = 0)$. Отсюда следует, что ранг $sl(n)$ равен $(n-1)$ и, соответственно, алгебра $sl(n)$ имеет $(n^2-1) - (n-1) = n(n-1)$ корней.

Рассмотрим $(n \times n)$ матрицы E_{ij} $(i \neq j)$, которые имеют только один ненулевой элемент $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Легко проверить, что

$$[E_{ij}, E_{mn}]_{kl} = \delta_{ik}\,\delta_{jm}\,\delta_{nl} - \delta_{mk}\,\delta_{ni}\,\delta_{jl} = \delta_{jm}\,(E_{in})_{kl} - \delta_{ni}\,(E_{mj})_{kl}, \tag{1.76}$$

$$[A, E_{ij}]_{km} = a_k\,\delta_{ik}\,\delta_{jm} - a_m\,\delta_{jm}\,\delta_{ik} = (a_i - a_j)\,(E_{ij})_{km}. \tag{1.77}$$

Из (1.77) следует, что элементы E_{ij} соответствуют корням алгебры $sl(n)$. Число корневых элементов E_{ij} равно $n(n-1)$, что совпадает с числом всех корней алгебры $sl(n)$, и, следовательно, мы нашли все корневые элементы $sl(n)$. Элементы E_{ij} и E_{ji} соответствуют двум противоположным корням (α и $-\alpha$). Действительно,

$$[E_{ij}, E_{ji}]_{km} = \delta_{ik}\,\delta_{im} - \delta_{jk}\,\delta_{jm} = (E_{ii})_{km} - (E_{jj})_{km} = (h_i - h_j)_{km}, \tag{1.78}$$

где мы использовали обозначение $h_i \equiv E_{ii}$. Очевидно, что матрица $(h_i - h_j)$ является элементом подалгебры Картана $sl(n)$, так как она является диагональной и бесшпуровой. Сравним (1.77) с соотношением $[H_i, E_\alpha] = \alpha_i\, E_\alpha$, где положим

$$H_i \equiv h_i - 1/n \cdot \mathbf{1}, \quad \operatorname{Tr}(H_i) = 0, \quad \sum_i H_i = 0.$$

Из (1.77) мы имеем

$$[H_i, E_{kl}]_{mn} = (\delta_{ik} - \delta_{il})\,(E_{kl})_{mn} = (e_i^{(k)} - e_i^{(l)})\,(E_{kl})_{mn}, \tag{1.79}$$

т. е. E_{kl} соответствует E_α с корневым вектором

$$\alpha_i = e_i^{(k)} - e_i^{(l)} \equiv \alpha_i^{(kl)}, \tag{1.80}$$

где $e^{(k)}$ — единичный вектор $e_i^{(k)} = \delta_i^k$ в n-мерном векторном пространстве. Теперь легко вычислить метрику в этом пространстве, воспользовавшись формулой (1.24):

$$g_{ij} = \sum_{k,l} (e^{(k)} - e^{(l)})_i \, (e^{(k)} - e^{(l)})_j =$$

$$= 2\,n\,(\delta_{ij} - \frac{1}{n}\,u_i u_j) \sim \mathrm{Tr}\,(H_i H_j) = \delta_{ij} - \frac{1}{n}\,u_i u_j, \quad (1.81)$$

где $u = \sum\limits_k e^{(k)} = (1, 1, \dots, 1)$. Заметим, что метрика (1.81) вырождена, так как имеет нулевой вектор u, и кроме того:

1) все корневые векторы $\alpha^{(ij)}$ лежат в $(n-1)$-мерном корневом пространстве $\Phi_{su(n)}$, ортогональном вектору $u = \sum\limits_k e^{(k)}$, так как $(e^{(i)} - e^{(j)}, u) = 0$. С помощью вектора u можно записать на $\Phi_{su(n)}$ метрику, обратную к метрике (1.81), в виде

$$g^{ij} = \frac{1}{2\,n}\,(\delta^{ij} - \frac{1}{n}\,u^i u^j); \quad (1.82)$$

2) длина всех корневых векторов одинакова и равна $\sqrt{1/n}$, поскольку

$$\left(\alpha^{(ij)}\right)^2 = \sum_{k,m} g^{km} (e^{(i)} - e^{(j)})_k (e^{(i)} - e^{(j)})_m = 1/n \quad (\forall i \neq j); \quad (1.83)$$

3) в качестве простых корней можно выбрать $(n-1)$ независимых векторов $\alpha^{(i)} = \alpha^{(i\,i+1)}$. Действительно, выберем вектор $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, фиксирующий положительные и отрицательные корни, такой что $\sum x^i = 0$ и $x^i > x^j$ (если $i < j$). Тогда все корни $e^{(i)} - e^{(j)}$ представимы в виде положительных корней

$$e^{(i)} - e^{(j)} = \alpha^{(i)} + \alpha^{(i+1)} + \dots + \alpha^{(j-1)} \ \ (i < j), \quad (1.84)$$

отрицательных корней

$$e^{(i)} - e^{(j)} = -\alpha^{(j)} - \alpha^{(j+1)} - \dots - \alpha^{(i-1)} \ \ (i > j). \quad (1.85)$$

Эти соотношения и показывают, что $\alpha^{(i)}$ формируют базис простых корней, так как коэффициенты в разложении положительных и отрицательных корней по векторам $\alpha^{(i)}$ — соответственно положительные и отрицательные целые числа;

4) для выбранных нами простых корней мы имеем

$$(\alpha^{(i)}\alpha^{(j)}) = (e_k^{(i)} - e_k^{(i+1)})\, g^{kl}\, (e_l^{(j)} - e_l^{(j+1)}) =$$

$$= \frac{1}{2n}\,(2\delta_{ij} - \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j+1}),$$

и так как $(\alpha^{(i)})^2 = 1/n$, то матрица Картана имеет вид $(1 \geqslant i, j \geqslant n-1)$

$$K_{ij} = 2\frac{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(j)})}{(\alpha^{(j)})^2} = \begin{cases} K_{ii} = 2\,; \\ K_{ij} = -1, \text{ если } |i-j| = 1\,; \\ K_{ij} = 0, \text{ если } |i-j| \neq 0, 1. \end{cases}$$

И соответствующая диаграмма Дынкина есть

Рис. 3

Алгебры *so(n)*: *B*- и *D*-серии. Это алгебра вещественных антисимметричных матриц $(n \times n)$, и ее размерность равна $n(n-1)/2$. Базис в этой алгебре можно задать с помощью матриц

$$(L_{(ij)})_{km} = (-E_{ij} + E_{ji})_{km} = -\delta_{ik}\,\delta_{jm} + \delta_{jk}\,\delta_{im}. \quad (1.86)$$

Прямое вычисление дает (см. (1.76))

$$[L_{(ij)}, L_{(mn)}] = [-E_{ij} + E_{ji}, -E_{mn} + E_{nm}] =$$

$$= \delta_{im} L_{(jn)} - \delta_{jm} L_{(in)} + \delta_{jn} L_{(im)} - \delta_{in} L_{(jm)}. \quad (1.87)$$

Выберем в качестве подалгебры Картана алгебру, генерируемую эрмитовыми коммутирующими матрицами

$$i\,L_{(12)} \equiv H_1,\ \ i\,L_{(34)} \equiv H_2,\ \ i\,L_{(56)} \equiv H_3, \dots, i\,L_{(2r-1\,2r)} \equiv H_r, \quad (1.88)$$

где $2r = n$ для n-четного и $2r = n - 1$ для n-нечетного. *Таким образом, $so(2r)$ и $so(2r+1)$ имеют один и тот же ранг r.* Отметим, что метрика в корневом пространстве имеет вид

$$g_{ij} \sim \mathrm{Tr}\,(H_i\,H_j) = -\mathrm{Tr}\,[(E_{i\,i+1} - E_{i+1\,i})(E_{j\,j+1} - E_{j+1\,j})] = 2\,\delta_{ij}. \quad (1.89)$$

Для алгебр $so(2r)$ и $so(2r+1)$ число корней равно соответственно

$$\frac{2r\,(2r-1)}{2} - r = 2\,r\,(r-1), \quad \frac{(2r+1)\,2r}{2} - r = 2\,r^2. \quad (1.90)$$

Исследуем теперь корневые системы $so(2r)$ и $so(2r+1)$. Для того чтобы сделать это, построим step-операторы (корневые векторы). Из (1.87) следует, что

$$[L_{(12)}, L_{(13)}] = L_{(23)}, \quad [L_{(12)}, L_{(23)}] = -L_{(13)}. \quad (1.91)$$

Теперь по аналогии с угловым моментом имеем $(\varepsilon = \pm 1)$

$$[i\,L_{(12)}, L_{(13)} + i\varepsilon L_{(23)}] = \varepsilon\,(L_{(13)} + i\varepsilon L_{(23)}). \quad (1.92)$$

Аналогичная формула будет при замене $3 \to 4$. Однако комбинации $(L_{(1k)} + i\varepsilon L_{(2k)}) \equiv L^{(\varepsilon)}_{(12,k)}$ $(k = 3, 4)$ не могут быть step-операторами, так как

$$[L_{(34)}, L_{(14)} + i\varepsilon L_{(24)}] = -(L_{(13)} + i\varepsilon L_{(23)}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [L_{(34)}, L^{(\varepsilon)}_{(12,4)}] = -L^{(\varepsilon)}_{(12,3)}, \quad [L_{(34)}, L^{(\varepsilon)}_{(12,3)}] = L^{(\varepsilon)}_{(12,4)}. \tag{1.93}$$

Данная трудность обходится, если заметить, что (1.93) напоминают (1.91), и рассмотреть комбинацию

$$\overline{L} = (L_{(13)} + i\varepsilon L_{(23)}) + i\,\eta(L_{(14)} + i\varepsilon L_{(24)}) =$$
$$= (L^{(\varepsilon)}_{(12,3)} + i\eta L^{(\varepsilon)}_{(12,4)}) = -(L^{(\eta)}_{(34,1)} + i\varepsilon L^{(\eta)}_{(34,2)}) \equiv L^{(\varepsilon,\eta)}_{(12,34)} = -L^{(\eta,\varepsilon)}_{(34,12)}, \tag{1.94}$$

где ε и η могут независимо принимать значения ± 1. Действительно, из (1.88), (1.92) и (1.93) мы имеем

$$[H_1, \overline{L}] = \varepsilon \overline{L}, \ \ [H_2, \overline{L}] = \eta\, \overline{L}, \ \ [H_3, \overline{L}] = 0, \ldots, [H_r, \overline{L}] = 0. \tag{1.95}$$

Таким образом, оператор $\overline{L}$ соответствует четырем корням $(\pm 1, \pm 1, 0, \ldots, 0) = \pm e^{(1)} \pm e^{(2)}$ в зависимости от значений $\varepsilon = \pm 1$, $\eta = \pm 1$. Здесь $e^{(i)}$ — единичные векторы в r-мерном пространстве. Данная конструкция обобщается на случай, когда диагонализуются произвольные два генератора $\{H_i, H_j\}$ подалгебры Картана. Необходимо рассмотреть инвариантное (относительно присоединенного действия операторов $\{H_i, H_j\}$) подпространство, натянутое на генераторы

$$\{L_{(i,j)}, L_{(i,j+1)}, L_{(i+1,j)}, L_{(i+1,j+1)}\} \quad (i, j = 1, 3, 5, \ldots),$$

линейная комбинация которых $L^{(\varepsilon,\eta)}_{(i\,i+1, j\,j+1)}$ типа (1.94) будет определять корни. На этом пути мы находим, что $so(n)$ (в обоих случаях, когда n — четное и нечетное) имеет набор корней $(\pm e^{(i)} \pm e^{(j)})$ $(i < j,\ i, j = 1, \ldots, r)$. Согласно определению метрики (1.89) все эти корни имеют одинаковую длину и их число равно $\dfrac{r(r-1)}{2} 4 = 2r(r-1)$. Для $so(2r)$ это число совпадает с числом всех корней, и, следовательно, в этом случае мы нашли все корни. Для $so(2r+1)$ мы должны найти дополнительные корни.

Прежде чем перейти к обсуждению систем простых корней для алгебр $so(n)$, приведем коммутационные соотношения для

корневых операторов (1.94), которые понадобятся нам в дальнейшем при обсуждении алгебры G_2:

$$[L^{(\varepsilon,\eta)}_{(12,34)}, L^{(\rho,\varkappa)}_{(34,56)}] = (\eta\rho - 1)\, L^{(\varepsilon,\varkappa)}_{(12,56)}. \tag{1.96}$$

A. $so(2r)$: D_r-серия.

Выберем в корневом пространстве вектор $x = (x_1, \ldots, x_r)$, определяющий положительные корни, такой что при $i < j$ мы имеем $x_i > \pm x_j$, например $x = (r, r-1, \ldots, 2, 1)$. Тогда корни $e^{(i)} \pm e^{(j)}$ $(i < j)$ являются положительными, а $-(e^{(i)} \pm e^{(j)})$ $(i < j)$ — отрицательными. Теперь в качестве первых $(r-1)$ простых корней можно выбрать

$$\alpha^{(1)} = e^{(1)} - e^{(2)}, \ \ \alpha^{(2)} = e^{(2)} - e^{(3)}, \ \ldots, \ \alpha^{(r-1)} = e^{(r-1)} - e^{(r)}, \tag{1.97}$$

а r-й корень определим как

$$\alpha^{(r)} = e^{(r-1)} + e^{(r)}. \tag{1.98}$$

Эти r корней образуют базис, так как $e^{(i)} = \sum\limits_{k=i}^{r-1} \alpha^{(k)} + \frac{1}{2}(\alpha^{(r)} - \alpha^{(r-1)})$, и являются простыми, поскольку для положительных корней мы имеем

$$e^{(i)} - e^{(j)} = \alpha^{(i)} + \ldots + \alpha^{(j-1)} \quad (i < j),$$
$$e^{(i)} + e^{(j)} = (e^{(i)} - e^{(j)}) +$$
$$+ 2(e^{(j)} - e^{(r-1)}) + (e^{(r-1)} - e^{(r)}) + (e^{(r-1)} + e^{(r)}) =$$
$$= (\alpha^{(i)} + \ldots + \alpha^{(j-1)}) +$$
$$+ 2(\alpha^{(j)} + \ldots + \alpha^{(r-2)}) + \alpha^{(r-1)} + \alpha^{(r)} \quad (i < j < r),$$
$$e^{(i)} + e^{(r)} = (e^{(i)} - e^{(r-1)}) + (e^{(r-1)} + e^{(r)}) =$$
$$= (\alpha^{(i)} + \ldots + \alpha^{(r-2)}) + \alpha^{(r)} \quad (i < j = r),$$

т. е. все коэффициенты разложения являются целыми положительными числами. Действуя тем же способом, легко можно выразить все отрицательные корни в виде линейной комбинации простых корней (1.97), (1.98), но уже с отрицательными коэффициентами. Таким образом, все корни для $so(2r)$ имеют вид

$$\alpha^{(i,j)}_{\pm} = (e^{(i)} \pm e^{(j)}), \quad -\alpha^{(i,j)}_{\pm} = -(e^{(i)} \pm e^{(j)}) \quad (1 \leqslant i \neq j \leqslant r). \tag{1.99}$$

Диаграмма Дынкина для $so(2r)$ теперь легко строится по матрице Картана, которую можно вычислить, зная все простые корни (1.97), (1.98) и метрику (1.89). Мы уже отмечали, что длина всех простых корней одинакова. Далее

$$K_{i,j} = 2\frac{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(j)})}{(\alpha^{(j)})^2} = (2\,\delta_{ij} - \delta_{i,j-1} - \delta_{i-1,j}) \ \ (i, j < r-1),$$

$$K_{r,i} = K_{i,r} = 2\frac{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(r)})}{(\alpha^{(r)})^2} = (2\delta_{i,r} - \delta_{i,r-2}), \qquad (1.100)$$

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, диаграмма Дынкина алгебры $so(2r)$ имеет вид

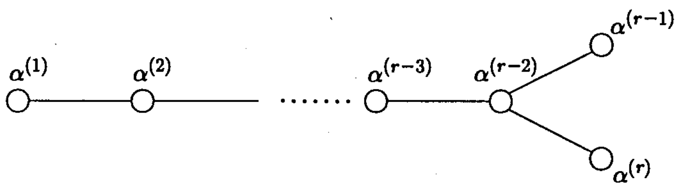
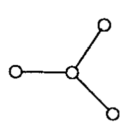


Рис. 4

Заметим, что если мы удалим из диаграммы Дынкина для $so(2r)$ на рис. 4 вершину, соответствующую корню $\alpha^{(r)}$ (или $\alpha^{(r-1)}$), то в результате получим диаграмму Дынкина, представленную на рис. 3, для алгебры $su(r)$ $(\mathrm{rang}\,(su(r)) = r-1)$. Следовательно, $su(r)$ является подалгеброй $so(2r)$ и может быть образована картановскими элементами $H_1, \dots, H_{r-1}$ и образующими с корнями $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(r-1)}$.

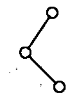
Интересно также рассмотреть случаи алгебры $so(2r)$ для малых r.

i) Алгебра $so(8)$ имеет диаграмму Дынкина

 ,

и, как следует из формы этой диаграммы, эта алгебра имеет дополнительную симметрию, которая называется «триальностью».

ii) Алгебра Ли $so(6)$ имеет диаграмму Дынкина

 ,

которая также соответствует алгебре $sl(4)$ (или $su(4)$), и, следовательно, эти две алгебры изоморфны.

iii) Аналогично алгебра $so(4)$ имеет диаграмму Дынкина

 ,

и, таким образом, $so(4)$ изоморфна алгебре $su(2) \oplus su(2)$.

В. $so(2r+1)$: B_r-серия.

Для алгебры $so(2r)$ мы получили $2r(r-1)$ корней $\pm e^{(i)} \pm e^{(j)}$ $(i \neq j)$. Однако для алгебры $so(2r+1)$ число корней должно быть $2r^2$ (1.90). Нам необходимо найти еще $2r$ дополнительных step-операторов (корневых векторов). У нас есть дополнительный индекс $(2r+1)$. Возьмем оператор $L_{1,2r+1}$. На него нетривиально действует только один картановский элемент $H_1 = i\,L_{12}$: $[H_1, L_{1,2r+1}] = i\,L_{2,2r+1}$. На элемент $L_{2,2r+1}$ нетривиально действует также только один картановский элемент H_1: $[H_1, L_{2,2r+1}] = -i\,L_{1,2r+1}$. Таким образом, относительно картановской подалгебры линейное пространство с базисом $L_{i,2r+1}$ $(i = 1, 2)$ является инвариантным, и естественно искать step-оператор как линейную комбинацию $L_\alpha = L_{1,2r+1} + \alpha\,L_{2,2r+1}$. Имеем

$$[H_1, L_\alpha] = i\,L_{2,2r+1} - i\,\alpha\,L_{1,2r+1} = -i\,\alpha\,(L_{1,2r+1} - \frac{1}{\alpha}\,L_{2,2r+1}),$$

$$[H_j, L_\alpha] = 0 \ \ (j = 2, 3, \dots),$$

и, следовательно, L_α — step-оператор, если $\alpha^2 = -1 \Rightarrow \alpha = \pm i$ с корнем $(-i\alpha, 0, \dots, 0) = (\pm 1, 0, \dots, 0)$. Действуя в этом направлении, мы находим $2r$ дополнительных step-операторов с корнями $(\pm 1, 0, \dots, 0), (0, \pm 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, \pm 1)$.

Итак, все корни для $so(2r+1)$ представимы в виде

$$\alpha_{\pm}^{(i,j)} = (e^{(i)} \pm e^{(j)}), \quad -\alpha_{\pm}^{(i,j)} = -(e^{(i)} \pm e^{(j)}), \quad \pm e^{(i)} \qquad (1.101)$$

и имеют длину $|\alpha_{\pm}^{(i,j)}| = \sqrt{2}$ и $|e^{(i)}| = 1$ (здесь мы выбрали нормировку метрики так, что $g^{ij} = \delta^{ij}$). Эти корневые векторы соответствуют корневым операторам

$$L^{(\varepsilon,\eta)}_{(i\,i+1,j\,j+1)} = L_{(i\,j)} + i\varepsilon L_{(i+1,j)} + i\eta L_{(i,j+1)} - \varepsilon\eta\, L_{(i+1,j+1)}, \tag{1.102}$$
$$L^{(\rho)}_{(i)} = L_{(i,2r+1)} + i\rho L_{(i+1,2r+1)} \quad (i,j = 1,3,5,\ldots).$$

Операторы (1.102) удовлетворяют коммутационным соотношениям (1.96) и

$$[L^{(\varepsilon)}_{(i)}, L^{(\eta)}_{(i)}] = (\eta - \varepsilon) H_{(i+1)/2},$$

$$[L^{(\varepsilon,\eta)}_{(i\,i+1,j\,j+1)}, L^{(\rho,\varkappa)}_{(i\,i+1,j\,j+1)}] =$$
$$= (1 - \eta\varkappa)(\rho - \varepsilon)\, H_{(i+1)/2} + (1 - \varepsilon\rho)(\varkappa - \eta)\, H_{(j+1)/2}, \tag{1.103}$$
$$[L^{(\varepsilon)}_{(i)}, L^{(\eta)}_{(j)}] = L^{(\varepsilon,\eta)}_{(i\,i+1,j\,j+1)}, \quad [L^{(\rho)}_{(i)}, L^{(\varepsilon,\eta)}_{(i\,i+1,j\,j+1)}] = (\rho\varepsilon - 1)\, L^{(\eta)}_{j}.$$

Простые корни для $so(2r+1)$ выбираются в виде

$$\alpha^{(1)} = e^{(1)} - e^{(2)}, \ldots, \quad \alpha^{(r-1)} = e^{(r-1)} - e^{(r)}, \quad \alpha^{(r)} = e^{(r)}, \tag{1.104}$$

и для положительных корней ($i < j$) мы получаем

$$e^{(i)} - e^{(j)} = \alpha^{(i)} + \alpha^{(i+1)} + \ldots + \alpha^{(j-1)},$$

$$e^{(i)} + e^{(j)} = \alpha^{(i)} + \alpha^{(i+1)} + \ldots + \alpha^{(j-1)} +$$
$$+ 2(\alpha^{(j)} + \alpha^{(j+1)} + \ldots + \alpha^{(r)}),$$
$$e^{(i)} = \alpha^{(i)} + \alpha^{(i+1)} + \ldots + \alpha^{(r)}.$$

Отрицательные корни выражаются через простые аналогичным образом, но с отрицательными коэффициентами. Матрица Картана вычисляется по (1.104) и имеет вид

$$K_{i,j} = 2\frac{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(j)})}{(\alpha^{(j)})^2} = (2\,\delta_{ij} - \delta_{i,j-1} - \delta_{i-1,j}) \quad (i,j < r-1),$$
$$K_{i,r} = 2\frac{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(r)})}{(\alpha^{(r)})^2} = (-2\,\delta_{i,r-1} + 2\delta_{i,r}),$$
$$K_{r,i} = 2\frac{(\alpha^{(r)}, \alpha^{(i)})}{(\alpha^{(i)})^2} = (-1\,\delta_{i,r-1} + 2\delta_{i,r}),$$

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \ldots & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, диаграмма Дынкина алгебры $so(2r+1)$ рисуется как

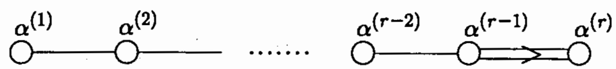


Рис. 5

Алгебры $sp(2r)$: C_r-серия. Группа, соответствующая этой алгебре, по определению состоит из преобразований, которые сохраняют кососимметричную билинейную форму $u_i J_{ij} v_j$, где u, v — векторы в $2r$-мерном пространстве, а J — кососимметричная невырожденная $(2r \times 2r)$ матрица (симплектическая форма). Соответственно элементами алгебры $sp(2r)$ являются $(2r \times 2r)$ матрицы L, удовлетворяющие условию симплектичности

$$L^t\, J + J\, L = 0. \tag{1.105}$$

Отсюда следует симметричность матрицы $M \equiv (J\,L) = (J\,L)^t$, и, следовательно, размерность алгебры $so(2r)$ равна числу симметричных $(2r \times 2r)$ матриц: $2r(2r+1)/2 = r(2r+1)$, так как имеется взаимно-однозначное соответствие между элементами L алгебры $sp(2r)$ и симметричными матрицами M: $L = J^{-1}\, M$.

Выберем матрицы J и L в блочном виде

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{1.106}$$

где A, B, C, D — комплексные $(r \times r)$ матрицы. Тогда условие симплектичности (1.105) матрицы L дает

$$A = -D^t, \quad B^t = B, \quad C^t = C, \tag{1.107}$$

и мы можем выбрать следующий базис в алгебре $sp(2r)$:

$$E_{i,i} - E_{r+i,r+i} \equiv H_i \quad (i = 1, \ldots, r),$$
$$E_{i,j} - E_{r+j,r+i} \equiv A_{ij} \quad (i \neq j = 1, \ldots, r), \tag{1.108}$$
$$E_{i,r+j} + E_{j,r+i} \equiv B_{ij}, \quad E_{r+i,j} + E_{r+j,i} \equiv C_{ij} \quad (i,j = 1, \ldots, r),$$

где E_{ij} — матричные единицы: $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}\, E_{il}$. Легко проверить, что мы перечислили весь базис $sp(2r)$. Диагональные элементы H_i $(i = 1, \dots, r)$ естественно считать картановскими элементами. Пользуясь (1.108), получаем

$$
\begin{aligned}
&[H_i, A_{kl}] = (e^{(k)} - e^{(l)})_i\, A_{kl},\\
&[H_i, B_{kl}] = (e^{(k)} + e^{(l)})_i\, B_{kl},\\
&[H_i, C_{kl}] = -(e^{(k)} + e^{(l)})_i\, C_{kl}.
\end{aligned}
\tag{1.109}
$$

Таким образом, в качестве корней алгебры $sp(2r)$ выбираются векторы

$$
\pm 2\, e^{(k)}, \quad \pm(e^{(k)} + e^{(l)}), \quad (e^{(k)} - e^{(l)}) \ \ (k \neq l). \tag{1.110}
$$

Базис простых корней можно выбрать в виде

$$
(e^{(1)} - e^{(2)}, \dots,\ e^{(r-1)} - e^{(r)},\ 2\, e^{(r)}).
$$

Заметим, что корневая система C-серии ($sp(2r)$) оказывается дуальной к корневой системе B-серии ($so(2r+1)$), т. е. эти системы переходят друг в друга при преобразовании $\alpha \to \alpha/(\alpha)^2$. Поэтому для $sp(2r)$ матрица Картана и соответствующая диаграмма Дынкина имеют вид

$$
\begin{aligned}
K_{i,j} &= 2\frac{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(j)})}{(\alpha^{(j)})^2} = (2\,\delta_{ij} - \delta_{i,j-1} - \delta_{i-1,j}) \ \ (i, j < r-1),\\
K_{i,r} &= 2\frac{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(r)})}{(\alpha^{(r)})^2} = (-1\,\delta_{i,r-1} + 2\delta_{i,r}),\\
K_{r,i} &= 2\frac{(\alpha^{(r)}, \alpha^{(i)})}{(\alpha^{(i)})^2} = (-2\,\delta_{i,r-1} + 2\delta_{i,r}),
\end{aligned}
$$

$$
K = \begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0\\
. & . & . & \dots & . & . & . & .\\
0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1\\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -2 & 2
\end{pmatrix},
$$

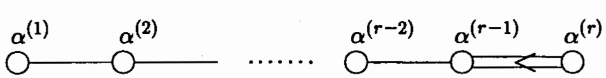


Рис. 6

Замечание. Произвольный элемент L (1.106) комплексной алгебры Ли $sp(2r)$ можно записать следующим образом:

$$
\begin{aligned}
L = &\begin{pmatrix} X+Y & B \\ C & X-Y \end{pmatrix} =\\
&= X\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + C\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + Y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{1.111}
$$

где мы ввели новые матрицы X, Y: $A = X + Y$ и $D = X - Y$. Условия симплектичности (1.105), (1.107) для комплексных $(r \times r)$ матриц X, B, C, Y переписываются в виде

$$
X = -X^t, \quad Y^t = Y, \quad B^t = B, \quad C^t = C. \tag{1.112}
$$

Рассмотрим возможные вещественные формы комплексной алгебры Ли $sp(2r)$.

1. Алгебра $sp(2r, \mathbf{R})$ — вещественное линейное пространство $\mathcal{L}$ матриц (1.111), построенных из вещественных $(r \times r)$ блоков X, Y, B, C, которые удовлетворяют соотношениям (1.112). Алгебра $sp(2r, \mathbf{R})$ некомпактна, так как ее метрика Киллинга не евклидова.

2. Алгебра $sp(r)$ (которую также обозначают как $usp(2r)$) — вещественное линейное пространство $\widetilde{\mathcal{L}}$ симплектических матриц типа (ср. с (1.111))

$$
\begin{aligned}
\widetilde{L} = \widetilde{X}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i\left[\widetilde{B}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \widetilde{C}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \widetilde{Y}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] =\\
= \begin{pmatrix} \widetilde{X} + i\widetilde{Y} & \widetilde{C} + i\widetilde{B} \\ -\widetilde{C} + i\widetilde{B} & \widetilde{X} - i\widetilde{Y} \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{1.113}
$$

построенных из вещественных $(r \times r)$ блоков $\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{B}, \widetilde{C}$, которые также, в силу условия симплектичности (1.105) для матрицы (1.113), удовлетворяют соотношениям, аналогичным (1.112):

$$
\widetilde{X} = -\widetilde{X}^t, \quad \widetilde{Y}^t = \widetilde{Y}, \quad \widetilde{B}^t = \widetilde{B}, \quad \widetilde{C}^t = \widetilde{C}. \tag{1.114}
$$

Сравнивая (1.111), (1.113) и учитывая (1.112), (1.114), мы видим, что вещественные пространства $\mathcal{L}$ и $\widetilde{\mathcal{L}}$ могут быть вложены в одно и то же пространство комплексной алгебры $sp(2r)$. Действительно, оба набора матриц разлагаются по одному и тому же базису (1.108) комплексной алгебры $sp(2r)$. Однако эти разложения (способы вложения) осуществляются различным образом (во втором случае необходимо использовать комплексные коэффициенты) и, следовательно, определяют различные вещественные формы комплексной алгебры $sp(2r)$.

Отметим, что, наряду с условием симплектичности, элементы (1.113) алгебры Ли $usp(2r)$ удовлетворяют соотношению антиэрмитовости

$$\widetilde{L}^\dagger = -\widetilde{L}, \tag{1.115}$$

т. е. АЛ $usp(2r)$ компактна, так как ее метрика Киллинга приводится к евклидовой метрике. Поэтому элементы $U = \exp(\widetilde{L})$ из соответствующей группы Ли $Usp(2r)$ оказываются унитарными операторами $U^\dagger U = I$. Другими словами, группа $Usp(2r)$, состоящая из $2r \times 2r$ унитарных и симплектических матриц, будет компактной группой и может быть определена как пересечение $Usp(2r) = U(2r) \cap Sp(2r, \mathbf{C})$.

3. Отметим, что имеется еще целая серия некомпактных вещественных форм алгебры $sp(2r)$. Эти формы обозначаются $sp(p,q)$ $(r = p + q)$ и могут быть описаны следующим образом. Метрику J (1.106) в специальном базисе можно привести к виду

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \mathrm{diag}\,(\underbrace{+1, \ldots, +1}_{p}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{q}). \tag{1.116}$$

Теперь образующие L (1.106) алгебры Ли $sp(p,q)$ определяются условием симплектичности (1.105) (с метрикой (1.116)), а вместо условия эрмитовости (1.115) требуется выполнение условия псевдоэрмитовости

$$L^\dagger \mathcal{I}_\varepsilon = -\mathcal{I}_\varepsilon L, \quad \mathcal{I}_\varepsilon := \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}. \tag{1.117}$$

В итоге $(r \times r)$ блоки A, B, C, D матрицы L (1.106) должны удовлетворять соотношениям

$$D^t\varepsilon = -\varepsilon A, \quad B^t\varepsilon = \varepsilon B, \quad C^t\varepsilon = \varepsilon C,$$
$$D^* = A, \quad B = -C^*.$$

Легко проверить, что определенное таким образом множество матриц L задает $r(2r+1)$-мерное вещественное линейное пространство, наделенное структурой АЛ.

1.7. Классификация диаграмм Дынкина для конечномерных простых алгебр Ли

Здесь, следуя изложению работы [9], мы выясним, какие еще существуют конечномерные простые АЛ кроме тех, которые соответствовали диаграммам Дынкина, представленным на

рис. 2–6. Таким образом, наша задача — перечислить все простые АЛ, перечислив все допустимые диаграммы Дынкина $D(\mathcal{G})$.

Для простоты вначале будем игнорировать стрелки в $D(\mathcal{G})$. Такие диаграммы называются *графами Кокстера*. Определим единичные векторы в направлении простых корней:

$$\varepsilon^{(i)} = \frac{\alpha^{(i)}}{\sqrt{(\alpha^{(i)})^2}}. \tag{1.118}$$

Тогда, так как $(\varepsilon^{(i)}, \varepsilon^{(j)})$ всегда отрицательны,

$$2(\varepsilon^{(i)}, \varepsilon^{(j)}) = \frac{2(\alpha^{(i)}, \alpha^{(j)})}{\sqrt{(\alpha^{(i)})^2\,(\alpha^{(j)})^2}} = -\sqrt{K_{ij}K_{ji}} =$$
$$= -(\text{число линий между } i \text{ и } j)^{1/2} = 0, -1, -\sqrt{2}, -\sqrt{3}. \tag{1.119}$$

Как мы увидим, это условие налагает сильные ограничения на структуру диаграмм Дынкина.

Определение 1.8.

1. *Если число* (i,j) *линий между вершинами* i *и* j *в графе* > 0, *то вершины* i *и* j *называются связанными.*

2. *Если* $(i,j) = 1, 2, 3$, *то связь соответственно называется одинарной, двойной и тройной.*

Лемма 1.3. *Число* E *всех связей (одинарных, двойных и тройных) в* $D(\mathcal{G})$ *удовлетворяет неравенству* $E \leqslant r - 1$.

Доказательство. Так как векторы $\varepsilon^{(i)}$ линейно независимы, то

$$0 < (\sum_i \varepsilon^{(i)})^2 = \sum_i (\varepsilon^{(i)})^2 + \sum_{i \neq j} (\varepsilon^{(i)}, \varepsilon^{(j)}) = r + 2\sum_{i<j} (\varepsilon^{(i)}, \varepsilon^{(j)}) =$$
$$= r - \sum_{i<j} (\text{число линий между } i \text{ и } j)^{1/2}, \tag{1.120}$$

и так как

$$\sum_{i<j} (\text{число линий между } i \text{ и } j)^{1/2} \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{i<j} (\text{число связей между } i \text{ и } j)^{1/2},$$

то из (1.120) следует $0 < r - (\text{число всех связей}) = r - E$, что эквивалентно утверждению леммы. ■

Следствие. В $D(\mathcal{G})$ недопустимы замкнутые циклы, иначе число связей в графе будет совпадать с r. Следовательно, все графы древесные.

Замечание. Равенство r – (число всех связей) $= 0$ реализуется только в случае $\sum\limits_i \varepsilon^{(i)} = 0$ и соответствует бесконечномерным алгебрам Каца–Муди.

Лемма 1.4. *Число линий N, исходящих из одной и той же вершины, удовлетворяет неравенству $N \leqslant 3$.*

Доказательство. Пусть ε — единичный вектор, соответствующий вершине, с которой связаны другие k вершин $\varepsilon^{(1)}, \ldots, \varepsilon^{(k)}$. Так как циклы недопустимы, то $(\varepsilon^{(i)}, \varepsilon^{(j)}) = 0$, $i, j = 1, \ldots, k$. Отсюда вытекает разложение

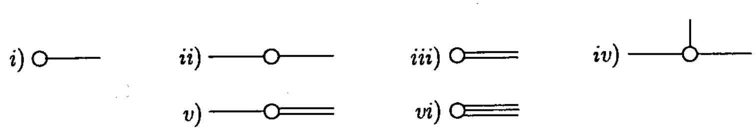
$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{k} (\varepsilon, \varepsilon^{(i)})\varepsilon^{(i)} + (\varepsilon, \varepsilon^{(0)})\varepsilon^{(0)}, \tag{1.121}$$

где $\varepsilon^{(0)}$ — единичный вектор из ортогонального дополнения к $\varepsilon^{(1)}, \ldots, \varepsilon^{(k)}$. Возводя в квадрат (1.121), мы получаем $1 = \sum\limits_{i=1}^{k} (\varepsilon, \varepsilon^{(i)})^2 + (\varepsilon, \varepsilon^{(0)})^2$, что соответствует условию (см. (1.119))

$$4 \geqslant 4 \sum_{i=1}^{k} (\varepsilon, \varepsilon^{(i)})^2 = \sum_{i=1}^{k} (\text{число линий, соединяющих } \varepsilon \text{ и } \varepsilon^{(i)}) = \\ = (\text{число линий, исходящих из } \varepsilon).$$

Равенство реализуется только в случае $(\varepsilon, \varepsilon^{(0)}) = 0$, что соответствует линейной зависимости $\varepsilon^{(i)}$ и ε и противоречит требованию, в котором вершины в графе соответствуют линейно независимым простым корням. Таким образом, число N линий, исходящих из вершины ε, удовлетворяет неравенству $3 \geqslant N$, что и требовалось доказать. ■

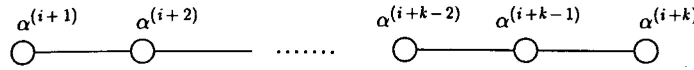
Итак, допустимый подграф с одной вершиной в диаграмме Дынкина может выглядеть следующим образом:



Следствие. Единственный допустимый граф с тройными связями есть диаграмма G_2-типа, представленная на рис. 2.

Замечание. Условие $(\varepsilon, \varepsilon^{(0)}) = 0$ может реализоваться для бесконечномерных алгебр Каца–Муди.

Лемма 1.5. *Если допустимый граф $D(\mathcal{G})$ имеет порцию вершин*



то новый граф $D'(\mathcal{G})$, который получается сжатием этой порции в одну вершину, также является допустимым. Причем новой вершине соответствует новый простой корень $\alpha = \sum\limits_{l=i}^{k+i} \alpha^{(l)}$ и новый единичный вектор

$$\varepsilon = \sum_{l=i}^{k+i} \varepsilon^{(l)}. \tag{1.122}$$

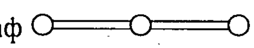
Доказательство. Действительно, возведем в квадрат вектор (1.122)

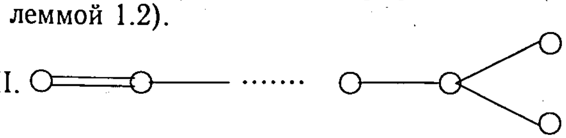
$$\varepsilon^2 = (k+1) + 2\sum_{l<m} (\varepsilon^{(l)}, \varepsilon^{(m)}) = (k+1) + 2\sum_{l=i}^{i+k-1} (\varepsilon^{(l)}, \varepsilon^{(l+1)}) = \\ = (k+1) + 2k(-1/2) = 1.$$

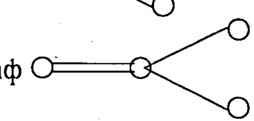
Теперь мы можем подставить вектор (1.122) в условия и доказательства лемм 1.1 и 1.2, при этом выводы этих лемм не изменятся, что и требовалось доказать. ■

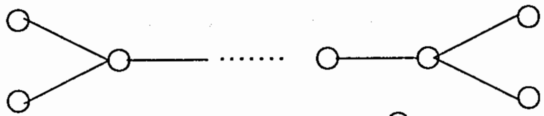
Следствие. Следующие графы (или подграфы) не являются допустимыми.

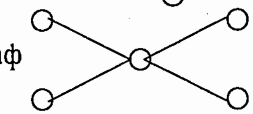
I. 

(так как могут быть стянуты в граф , запрещенный леммой 1.2).

II. 

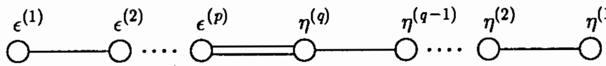
(так как могут быть стянуты в граф , запрещенный леммой 1.2).

III. 

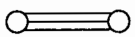
(так как могут быть стянуты в граф , запрещенный леммой 1.2).

Итак, класс графов, среди которых необходимо искать допустимые диаграммы Дынкина, сводится к следующим возможностям:

I. 

II. 

(только одна двойная связь).

III. 

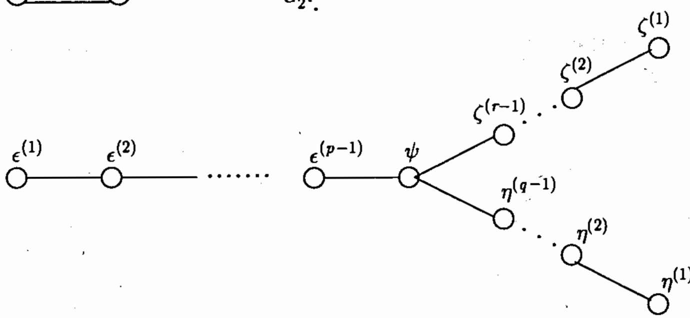
IV. 

Рис. 7

Имеются дальнейшие ограничения на допустимость диаграмм, представленных на рис.7. Рассмотрим диаграмму II рис. 7.

Пусть $\varepsilon = \sum\limits_{j=1}^{p} j\varepsilon^{(j)}$ и $\eta = \sum\limits_{j=1}^{q} j\eta^{(j)}$, тогда

$$\varepsilon^2 = \sum_{j=1}^{p} j^2 - \sum_{j=1}^{p-1} j(j+1) = p(p+1)/2$$

и аналогично $\eta^2 = q(q+1)/2$. Далее, так как $-2\varepsilon^p\eta^q = \sqrt{2}$ (двойная связь, см. (1.119)), мы имеем $\varepsilon\eta = pq\varepsilon^{(p)}\,\eta^{(q)} = -pq/\sqrt{2}$ и, используя тождество Шварца

$$\frac{p^2q^2}{2} = (\varepsilon,\eta)^2 = (\varepsilon)^2\,(\eta)^2\,\cos^2(\theta) < (\varepsilon)^2\,(\eta)^2 = \frac{p(p+1)\,q(q+1)}{4}$$

($\cos^2(\theta) = 1$ приводило бы к параллельности векторов ε и η, чего не может быть в силу их линейной независимости; случай $\cos^2(\theta) = 1$ соответствует бесконечномерным алгебрам Каца–Муди), окончательно получаем $(p-1)(q-1) < 2$. Поскольку p, q — положительные целые числа, возможны следующие варианты:

i) $p = 2$, $q = 2$;
ii) $p = 1$, q — любое положительное целое;
iii) $q = 1$, p — любое положительное целое.

Случай i) дает диаграмму, соответствующую алгебре F_4,

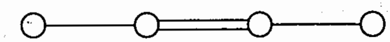


Рис. 8

Случаи ii) и iii) приводят к диаграммам Дынкина, представленным на рис. 5, 6, которые соответствуют алгебрам $so(2r+1)$ и $sp(2r)$.

Рассмотрим теперь ограничения на вид диаграммы IV рис. 7. Определим векторы

$$\varepsilon = \sum_{1}^{p-1} j\,\varepsilon^{(j)}, \quad \eta = \sum_{1}^{q-1} j\,\eta^{(j)}, \quad \zeta = \sum_{1}^{r-1} j\,\zeta^{(j)}.$$

Как и в предыдущем случае, мы имеем $\varepsilon^2 = p(p-1)/2$, $\eta^2 = q(q-1)/2$ и $\zeta^2 = r(r-1)/2$. Следовательно,

$$\cos^2(\varepsilon,\psi) = \frac{(\varepsilon,\psi)^2}{(\varepsilon)^2(\psi)^2} = \\ = \frac{((p-1)\varepsilon^{(p-1)},\psi)^2}{p(p-1)/2} = \frac{((p-1)/2)^2}{p(p-1)/2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

и аналогично $\cos^2(\eta,\psi) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{q}\right)$, $\cos^2(\zeta,\psi) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r}\right)$. Далее имеет место неравенство

$$\cos^2(\varepsilon,\psi) + \cos^2(\eta,\psi) + \cos^2(\zeta,\psi) < 1. \qquad (1.123)$$

Действительно, так как векторы ε, η и ζ взаимно ортогональны, мы можем представить

$$\psi = \cos(\varepsilon,\psi)\,\varepsilon + \cos(\eta,\psi)\,\eta + \cos(\zeta,\psi)\,\zeta + \cos(\xi,\psi)\,\xi, \qquad (1.124)$$

где вектор ξ ортогонален ε, η, ζ и $\cos(\xi, \psi) \neq 0$ (в силу линейной независимости ψ). Возводя в квадрат соотношение (1.124), мы получаем (1.123), из которого следует

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{r}\right)<1 \Longrightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1. \tag{1.125}$$

Это соотношение налагает ограничения на p, q, r, так как они являются положительными целыми числами больше нуля. Без ограничения общности будем считать, что $p \geqslant q \geqslant r$ и все они $\geqslant 2$ (только в этом случае диаграмма IV, приведенная на рис. 7, имеет разветвление). Отсюда мы получаем следующие возможности для допустимых диаграмм такого типа:

i) $(p, q, r) = (p, 2, 2)$, $p \geqslant 2$, что соответствует диаграммам алгебр $so(2r)$, изображенным на рис. 4;

ii) $(p, q, r) = (p, 3, 2)$, $p = 3, 4, 5$, что соответствует диаграммам

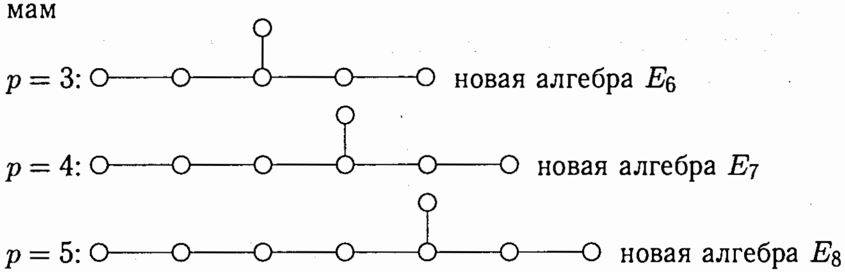


Рис. 9

iii) $(p, q, r) = (p, 4, 2)$; в этом случае $p < 4$, что нарушает $p \geqslant q$.

Таким образом, мы исчерпали все возможные диаграммы, которые соответствуют (1.125), и представили полный набор ограничений на возможные диаграммы, описывающие простые компактные группы. Резюмируя все вышесказанное, мы получили, что существуют только те простые компактные группы, которые соответствуют классическим 4 бесконечным сериям групп с диаграммами на рис. 3–6, а также 5 исключительных групп с диаграммами на рис. 2 (G_2), рис. 8 (F_4), рис. 9 (E_6, E_7, E_8).

1.8. Системы корней исключительных алгебр Ли

Мы уже отмечали, что диаграмма Дынкина однозначно определяет матрицу Картана (и наоборот). Здесь мы обсудим вопрос о том, как построить корневую систему по известной диаграмме Дынкина (или, что то же самое, по соответствующей матрице

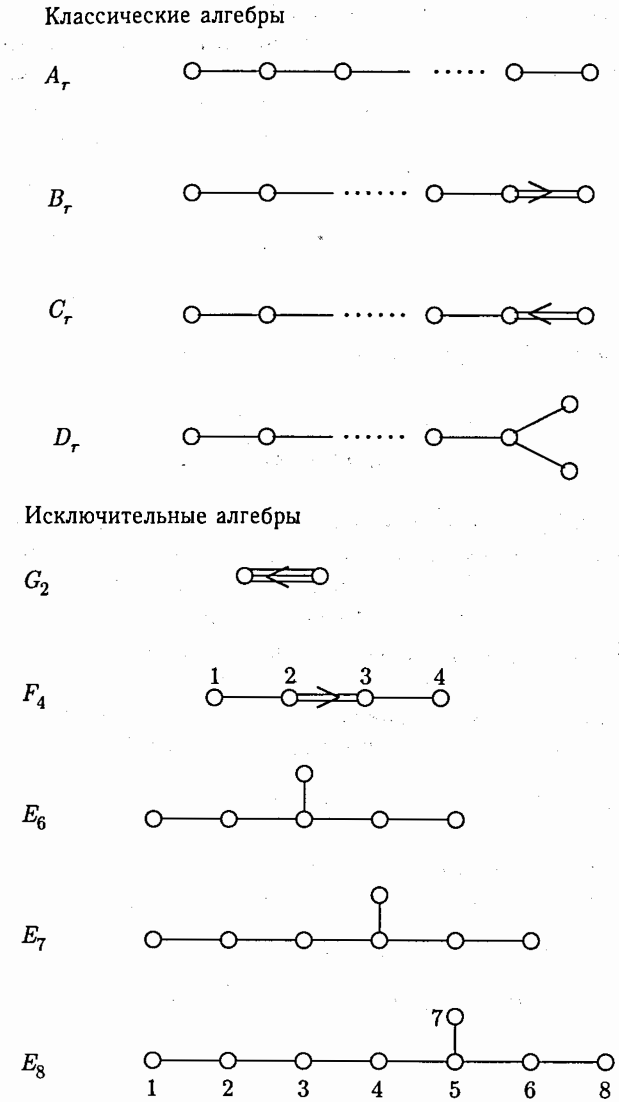


Рис. 10

Картана). Ясно, что задача будет решена, если мы найдем все простые корни. В качестве первого шага построим корневую систему, которая соответствует алгебрам D_r с диаграммой Дынкина на рис. 4. Наше построение будет индуктивным.

Пусть мы знаем, как устроены корневые системы для A_r (диаграмма Дынкина на рис. 3). Диаграмма на рис. 4 получается из диаграммы на рис. 3, если к ней добавить дополнительную вершину α_r и соединить ее одной линией с вершиной α_{r-2} (обратная процедура стирания вершин дает способ выделения подалгебр из данной алгебры). Простые корни для диаграммы на рис. 3 известны и даны в (1.97). Будем искать последний корень α_r в виде $\alpha_r = \sum_{i=1}^{r} a_i e^{(i)}$. Зная матрицу Картана и явный вид корней (1.97), мы можем написать следующие уравнения на α_r:

$$(\alpha_r \alpha_i) = 0 \ \ (i = 1, \ldots, r-3, r-1), \ \ (\alpha_r \alpha_{r-2}) = -1, \ \ \alpha_r^2 = 2,$$

которые эквивалентны соотношениям на коэффициенты a_i:

$$a_1 = \ldots = a_{r-2} \equiv a, \ \ a_{r-1} = a_r \equiv b, \ \ a_{r-2} - a_{r-1} = a - b = -1,$$
$$(r-2)\, a^2 + 2\, b^2 = 2.$$

Подстановка 3-го соотношения в 4-е дает уравнение $r\, a^2 + 4\, a = 0$, у которого есть только один действительный корень $a = 0$. Следовательно, $b = 1$ и α_r однозначно определяется как (1.98).

Определим теперь простые корни для алгебры E_8 по ее диаграмме Дынкина, представленной на рис. 9, 10. Заметим, что стирание вершины 8 в диаграмме E_8 на рис. 10 дает нам диаграмму $so(14)$ на рис. 4. Таким образом, естественно выбрать в качестве простых корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_7$ простые корни (1.97), (1.98):

$$\alpha_i = e^{(i)} - e^{(i+1)} \ \ (i = 1, \ldots, 6), \ \ \alpha_7 = e^{(6)} + e^{(7)}.$$

Данный выбор соответствует случаю, когда стирание еще и вершины 7 приводит к корневой системе для $sl(7)$. Будем искать оставшийся корень α_8 в виде $\alpha_8 = \sum_{i=1}^{8} a_i e^{(i)}$. Матрица Картана (диаграмма Дынкина) для E_8 диктует нам следующие условия на корень α_8:

$$(\alpha_i, \alpha_8) = 0 \ \ (i = 1, \ldots, 5, 7), \ \ (\alpha_6, \alpha_8) = -1, \ \ \alpha_8^2 = 2,$$

которые эквивалентны соотношениям на коэффициенты a_i:

$$a_1 = \ldots = a_6 \equiv a, \ \ a_6 = -a_7, \ \ a_6 - a_7 = 2\,a = -1, \ \ 7\,a^2 + b^2 = 2.$$

Отсюда мы получаем $a_i = -1/2$, $i = 1, \ldots, 6$, $a_7 = 1/2$ и $a_8 = \pm 1/2$. Обычно выбирают $a_8 = +1/2$ [1, 2] (в книге Л. С. Понтрягина [4] выбрано $a_7 = -1/2$, что соответствует замене $\alpha^{(6)} \leftrightarrow \alpha^{(7)}$). Итак, мы получили следующие простые корни для алгебры E_8:

$$\alpha_i = e^{(i)} - e^{(i+1)} \quad (i = 1, \ldots, 6), \quad \alpha_7 = e^{(6)} + e^{(7)},$$
$$\alpha_8 = \frac{1}{2}\left(-(e^{(1)} + \ldots + e^{(6)}) + (e^{(7)} + e^{(8)})\right) = -\frac{e}{2} + e^{(7)} + e^{(8)}, \tag{1.126}$$

где $e = \sum_{i=1}^{8} e^{(i)}$. В качестве вектора, определяющего положительные корни (см. п. 1.5), можно выбрать вектор $\vec{x} = (7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, y)$ $(y > 13)$, где условие на y возникло из неравенства $(\alpha_8, \vec{x}) > 0$. Исходя из знания простых корней, уже можно восстановить всю корневую систему $\Phi(E_8)$.

Прежде всего заметим, что в $\Phi(E_8)$ содержатся все корни:

$$\{\pm\alpha_{ij}, \pm\alpha'_{ij}\} \in \Phi(so(14)),$$
$$\alpha_{ij} = (e^{(i)} - e^{(j)}), \ \ \alpha'_{ij} = (e^{(i)} + e^{(j)}), \quad 1 \leqslant i < j \leqslant 7, \tag{1.127}$$

так как диаграмма Дынкина для $so(14)$ получается из диаграммы E_8 (рис. 10) удалением одной вершины с номером 8. Далее для получения новых корней из $\Phi(E_8)$ к корням из $\Phi(so(14))$ необходимо добавить (или вычесть) корень α_8 (1.126). Напомним, что в результате сложения (вычитания) корней α и β новые корни получаются, только если $(\alpha, \beta) \neq 0$ (см. теорему 1.1 и формулу (1.74)). Используя это правило, мы получаем серию положительных корней $\{\alpha_8, \ \alpha_6 + \alpha_8, \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_8, \ldots\}$, которые можно записать единым образом:

$$\alpha'_i = -\frac{e}{2} + e^{(i)} + e^{(8)}, \ \ 1 \leqslant i \leqslant 7. \tag{1.128}$$

Складывая эти корни и корни (1.127), можно найти набор положительных корней

$$\alpha''_{ijk} = \alpha'_i + \alpha'_{jk} = -\frac{e}{2} + e^{(i)} + e^{(j)} + e^{(k)} + e^{(8)},$$
$$1 \leqslant i, j, k \leqslant 7, \ \ i \neq j \neq k, \tag{1.129}$$

$$\alpha'''_{rs} = \alpha'_i + \alpha'_{jk} + \alpha'_{lm} = \frac{e}{2} - e^{(r)} - e^{(s)},$$
$$r, s \in \{1, \ldots, 7\} \backslash \{i, j, k, l, m\}, \ \ r \neq s, \tag{1.130}$$

$$\alpha_0 = \alpha'''_{rs} + \alpha'_{rs} = \frac{e}{2}, \ \ \alpha_{8i} = \alpha'''_{ri} + \alpha'_r = e^{(8)} - e^{(i)},$$
$$\alpha'_{i8} = \alpha_0 + \alpha'_i = e^{(i)} + e^{(8)}, \ \ 1 \leqslant i \leqslant 7. \tag{1.131}$$

Объединяя корни (1.127), положительные корни (1.128)–(1.131) и соответствующие отрицательные корни, окончательно получаем

$$\Phi(E_8) = \Big\{\pm(e^{(i)} - e^{(j)}); \pm(e^{(i)} + e^{(j)}); \pm\frac{e}{2}; \pm\Big(\frac{e}{2} - (e^{(i)} + e^{(j)})\Big);$$
$$\Big(\frac{e}{2} - (e^{(i)} + e^{(j)} + e^{(k)} + e^{(l)})\Big)\Big\}, \quad (1.132)$$
$$1 \leqslant i, j, k, l \leqslant 8, \quad i \neq j \neq k \neq l,$$

или

$$\Phi(E_8) = \left\{\pm(e^{(i)} - e^{(j)}), \pm(e^{(i)} + e^{(j)}), i \neq j; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{\varkappa(i)} e^{(i)}\right\},$$

где $\varkappa(i) = 0, 1$ и $\sum\limits_i \varkappa(i)$ — четное число. Пользуясь представлением (1.132), посчитаем число всех корней алгебры E_8:

$$\dim(\Phi(E_8)) = 2(C_2^8 + C_2^8 + 1 + C_2^8) + C_4^8 = 2(3 \cdot 28 + 1) + 70 = 240,$$

и, соответственно, размерность всей алгебры E_8 равна $\dim(E_8) = 240 + 8 = 248$.

Корневые системы для алгебр E_6 и E_7 получаются из корневой системы E_8 выкидыванием простых корней, которые соответствуют вершинам 1 и 2 на диаграмме Дынкина E_8 (см. рис. 10).

Корневая система для F_4 (см. диаграмму Дынкина на рис. 10) может быть получена аналогичным методом из корневой системы $so(7)$ (1.104) (диаграмма Дынкина на рис. 5). Таким образом, ищем простые корни алгебры F_4 в виде

$$\alpha^{(1)} = e^{(1)} - e^{(2)}, \quad \alpha^{(2)} = e^{(2)} - e^{(3)}, \quad \alpha^{(3)} = e^{(3)}, \quad \alpha^{(4)} = \sum_{i=1}^{4} a_i\, e^{(i)},$$

которые должны удовлетворять соотношениям (согласно виду диаграммы Дынкина F_4)

$$(\alpha_i\alpha_4) = 0 \ \ (i = 1, \ldots, 2), \quad K_{34} = -1 \to (\alpha_3\alpha_4) = -1/2, \quad \alpha_4^2 = 1.$$

Отсюда мы выводим $a_1 = a_2 = a_3 = -1/2$, $a_4 = \pm 1/2$ и, постулируя в последнем равенстве знак «+», окончательно получаем

$$\alpha^{(1)} = e^{(1)} - e^{(2)}, \quad \alpha^{(2)} = e^{(2)} - e^{(3)}, \quad \alpha^{(3)} = e^{(3)},$$
$$\alpha^{(4)} = \frac{1}{2}\Big(-e^{(1)} - e^{(2)} - e^{(3)} + e^{(4)}\Big), \quad (1.133)$$
$$\Phi(F_4) = \left\{\pm e^{(i)}; \pm e^{(i)} \pm e^{(j)}, i \neq j; \frac{1}{2}(\pm e^{(1)} \pm e^{(2)} \pm e^{(3)} \pm e^{(4)})\right\}$$
$$(i = 1, 2, 3, 4),$$

где знаки «±» могут выбираться независимо.

Итак, размерность алгебры F_4 равна

$$\dim(F_4) = \dim(\Phi(F_4)) + 4 = 8 + 24 + 2^4 + 4 = 52.$$

Наконец, опишем корневую систему G_2 (см. рис. 1), соответствующая диаграмма Дынкина дана на рис. 2. Корневое пространство мы представим как гиперплоскость в трехмерном евклидовом пространстве, которая перпендикулярна вектору $e^{(1)} + e^{(2)} + e^{(3)} = (1, 1, 1)$. Следовательно, все корни представимы в виде

$$\Phi(G_2) = \{\pm(e^{(1)} - e^{(2)}), \ \pm(e^{(2)} - e^{(3)}), \ \pm(e^{(3)} - e^{(1)}),$$
$$\pm(3e^{(i)} - e^{(1)} - e^{(2)} - e^{(3)})\}, \quad (1.134)$$
$$E_\alpha = \{g_\pm^3, \ g_\pm^1, \ g_\pm^2, \ G_\pm^i\} \quad (i = 1, 2, 3),$$

где во второй строчке введены обозначения для соответствующих корневых операторов G_2. Теперь размерность алгебры G_2 легко вычисляется:

$$\dim(G_2) = \dim(\Phi(G_2)) + 2 = 14.$$

В качестве базиса простых корней можно выбрать $e^{(1)} - e^{(2)}$, $-2e^{(1)} + e^{(2)} + e^{(3)}$. Складывая корневые векторы, легко вывести структуру определяющих соотношений для корневых образующих алгебры G_2

$$\begin{aligned}
&[g_\pm^1, g_\pm^2] \sim g_\mp^3, && [g_\pm^3, g_\pm^1] \sim g_\mp^2, && [g_\pm^2, g_\pm^3] \sim g_\mp^1,\\
&[g_\pm^1, g_\mp^2] \sim G_\mp^3, && [g_\pm^2, g_\mp^3] \sim G_\mp^1, && [g_\pm^3, g_\mp^1] \sim G_\mp^2,\\
&[G_\pm^1, g_\pm^2] \sim g_\pm^3, && [G_\pm^2, g_\pm^3] \sim g_\pm^1, && [G_\pm^3, g_\pm^1] \sim g_\pm^2,\\
&[G_\pm^1, g_\mp^3] \sim g_\mp^2, && [G_\pm^2, g_\mp^1] \sim g_\mp^3, && [G_\pm^3, g_\mp^2] \sim g_\mp^1,\\
&[G_\pm^1, G_\pm^2] \sim G_\mp^3, && [G_\pm^2, G_\pm^3] \sim G_\mp^1, && [G_\pm^3, G_\pm^1] \sim G_\mp^2.
\end{aligned} \quad (1.135)$$

Остальные коммутаторы равны нулю.

Известно (см., например, [2]), что 14-мерная алгебра G_2 является подалгеброй в 21-мерной алгебре $so(7)$. Ниже мы показываем, как можно явно описать вложение G_2 в $so(7)$. Прежде всего на подалгебру Картана $so(7)$ налагается условие $\sum\limits_{i=1}^{3} H_i = 0$ для выделения подалгебры ранга 2. Это значит, что мы можем выбрать для подалгебры Картана в G_2 следующие базисные элементы:

$$\widetilde{H}_1 = H_2 - H_3, \quad \widetilde{H}_2 = H_3 - H_1, \quad \widetilde{H}_3 = H_1 - H_2. \quad (1.136)$$

Далее заметим, что для генераторов $so(7)$ справедливы равенства

$$[H_1, L^{\pm}_{(1)}] = \pm L^{\pm}_{(1)}, \quad [H_2, L^{\pm}_{(1)}] = 0, \quad [H_3, L^{\pm}_{(1)}] = 0,$$
$$[H_1, L^{(\pm\pm)}_{(34,56)}] = 0, \quad [H_2, L^{(\pm\pm)}_{(34,56)}] = \pm L^{(\pm\pm)}_{(34,56)}, \tag{1.137}$$
$$[H_3, L^{(\pm\pm)}_{(34,56)}] = \pm L^{(\pm\pm)}_{(34,56)},$$

поэтому мы имеем для линейной комбинации $g^1_{\mp} = \varkappa L^{(\pm)}_{(1)} + L^{(\mp\mp)}_{(34,56)}$, где $\varkappa$ — произвольная константа (и соответственно для операторов $g^2_{\mp} = \varkappa L^{(\pm)}_{(3)} + L^{(\mp\mp)}_{(56,12)}$, $g^3_{\mp} = \varkappa L^{(\pm)}_{(5)} + L^{(\mp\mp)}_{(12,34)}$) следующие соотношения:

$$[H_1 - H_2, g^1_{\pm}] = \mp g^1_{\pm}, \quad [H_3 - H_1, g^1_{\pm}] = \pm g^1_{\pm},$$
$$[H_2 - H_3, g^1_{\pm}] = 0 \quad (\text{цикл } 1,2,3), \tag{1.138}$$

$$[g^1_+, g^1_-] = 2\varkappa^2 H_1 - 4(H_2 + H_3) \quad (\text{цикл } 1,2,3), \tag{1.139}$$

$$[g^1_{\mp}, g^2_{\mp}] = \varkappa^2 L^{(\pm\pm)}_{(12,34)} + 4\varkappa L^{(\mp)}_{(5)} = \varkappa^2 \left(L^{(\pm\pm)}_{(12,34)} + \frac{4}{\varkappa} L^{(\mp)}_{(5)}\right). \tag{1.140}$$

Из (1.139) и (1.140) следует, что для замкнутости подалгебры G_2 мы должны фиксировать $\varkappa^2 = 4$, тогда

$$[g^1_+, g^1_-] = 4(2H_1 - H_2 - H_3) = 4(\widetilde{H}_3 - \widetilde{H}_2) \quad (\text{цикл } 1,2,3), \tag{1.141}$$
$$[g^1_{\pm}, g^2_{\pm}] = 4 g^3_{\mp} \quad (\text{цикл } 1,2,3).$$

Положим

$$G^1_{\pm} \equiv L^{(\pm\mp)}_{(34,56)}, \quad G^2_{\pm} \equiv L^{(\pm\mp)}_{(56,12)}, \quad G^3_{\pm} \equiv L^{(\pm\mp)}_{(12,34)}. \tag{1.142}$$

Пользуясь (1.96) и (1.103), получаем

$$[\widetilde{H}_3, G^1_{\pm}] = \mp G^1_{\pm}, \quad [\widetilde{H}_2, G^1_{\pm}] = \mp G^1_{\pm},$$
$$[\widetilde{H}_1, G^1_{\pm}] = \pm 2 G^1_{\pm} \quad (\text{цикл } 1,2,3),$$
$$[G^1_+, G^1_-] = 4(-H_2 + H_3) = -4/3(2\widetilde{H}_1 - \widetilde{H}_2 - \widetilde{H}_3) \quad (\text{цикл } 1,2,3), \tag{1.143}$$

$$[G^3_{\pm}, G^1_{\pm}] = 2G^2_{\mp}, \quad [G^1_{\pm}, G^2_{\pm}] = 2G^3_{\mp}, \quad [G^2_{\pm}, G^3_{\pm}] = 2G^1_{\mp},$$
$$[g^1_{\pm}, g^2_{\mp}] = (\varkappa^2 + 2) G^3_{\mp}, \quad [G^1_{\pm}, g^3_{\mp}] = -2 g^2_{\mp},$$
$$[G^1_{\pm}, g^2_{\pm}] = 2 g^3_{\mp} \quad (\text{цикл } 1,2,3). \tag{1.144}$$

Сравнивая формулы (1.141)–(1.144) и (1.135), мы приходим к следующей идентификации:

$$G^1_{\pm} \equiv L^{(\pm\mp)}_{(34,56)}, \quad G^2_{\pm} \equiv L^{(\pm\mp)}_{(56,12)}, \quad G^3_{\pm} \equiv L^{(\pm\mp)}_{(12,34)},$$
$$g^1_{\mp} = \varkappa L^{(\pm)}_{(1)} + L^{(\mp\mp)}_{(34,56)}, \quad g^2_{\mp} = \varkappa L^{(\pm)}_{(3)} + L^{(\mp\mp)}_{(56,12)}, \tag{1.145}$$
$$g^3_{\mp} = \varkappa L^{(\pm)}_{(5)} + L^{(\mp\mp)}_{(12,34)},$$

где $\varkappa^2 = 4$.

1.9. Дуальные алгебры Ли. Ко-корни

По корневой системе $\Phi(\mathcal{G}) \ni \alpha$ соответствующей АЛ $\mathcal{G}$ можно определить новую корневую систему $\Phi(\mathcal{G}^\vee)$, корневые векторы $\alpha^\vee$ которой определяются следующим образом:

$$\alpha^\vee = \frac{\alpha}{\alpha^2} \quad \leftrightarrow \quad \alpha = \frac{\alpha^\vee}{(\alpha^\vee)^2}. \tag{1.146}$$

Очевидно, что если $|\alpha_1| > |\alpha_2|$, то $|\alpha_1^\vee| < |\alpha_2^\vee|$. Векторы $\alpha^\vee$ называются ко-корнями АЛ $\mathcal{G}$.

Нетрудно понять, что множество векторов $\alpha^\vee$ удовлетворяет всем свойствам корневой системы. Например, отражения Вейля для систем α и $\alpha^\vee$ переходят друг в друга:

$$\alpha \to \alpha - 2\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta^2)}\beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^\vee \to \alpha^\vee - 2\frac{(\alpha^\vee,\beta^\vee)}{(\beta^{\vee 2})}\beta^\vee,$$

а это значит, что если простые корни двух корневых систем связаны преобразованием $\alpha \to \alpha/(\alpha^2)$, то и все композитные корни будут связаны таким же преобразованием. Значит, корневая система $\alpha^\vee$ может быть ассоциирована с некоторой АЛ, которая называется *дуальной* АЛ и обозначается $\mathcal{G}^\vee$. Ко-корни АЛ $\mathcal{G}$ являются корнями дуальной АЛ $\mathcal{G}^\vee$. Так как $(\alpha^\vee)^\vee = \alpha$, то $(\mathcal{G}^\vee)^\vee = \mathcal{G}$.

Если простые корни $\alpha^{(i)}$ АЛ $\mathcal{G}$ имеют одинаковую длину, то соответствующие простые ко-корни

$$(\alpha^{(i)})^\vee = \frac{\alpha^{(i)}}{(\alpha^{(i)})^2} \tag{1.147}$$

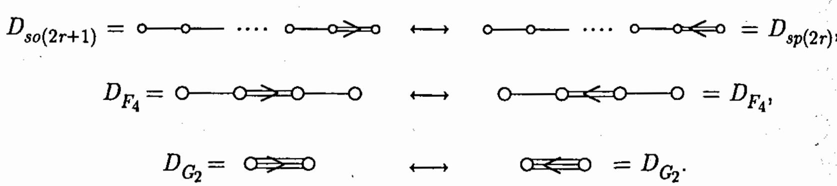
тоже имеют одинаковую длину, а корневая система АЛ $\mathcal{G}^\vee$ получается из корневой системы АЛ $\mathcal{G}$ масштабным преобразованием (умножением всех корней на постоянный фактор $1/(\alpha^{(i)})^2$). Следовательно, АЛ $\mathcal{G}^\vee$ тождественно равна АЛ $\mathcal{G}$. В этом смысле

АЛ $sl(n)$, $so(2r)$, E_6, E_7, E_8 (которые соответствуют односвязным диаграммам Дынкина) оказываются самодуальными. Если простые корни имеют разную длину, то АЛ $\mathcal{G}^\vee$ может отличаться от АЛ $\mathcal{G}$.

Пользуясь (1.147), для матрицы Картана дуальной системы получаем

$$K_{ij}^\vee = \frac{(\alpha^{(i)\vee}, \alpha^{(j)\vee})}{(\alpha^{(j)\vee})^2} = \frac{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(j)})}{(\alpha^{(i)})^2} = K_{ji}. \qquad (1.148)$$

Таким образом, матрица Картана для дуальной АЛ $\mathcal{G}^\vee$ получается из матрицы Картана для АЛ $\mathcal{G}$ транспонированием. Это позволяет легко идентифицировать дуальные АЛ, пользуясь их представлением в виде диаграмм Дынкина. В результате мы имеем



Итак, все простые алгебры самодуальны за исключением алгебр $so(2r+1)$ и $sp(2r)$, которые дуальны друг другу.

1.10. Конечномерные интегрируемые модели и корневые системы алгебр Ли

Ранее мы перечислили все конечномерные простые алгебры Ли. Следующий шаг должен быть в изучении их представлений. Чтобы мотивировать этот шаг, рассмотрим некоторые физические приложения для изложенной выше теории.

Обобщенные цепочки Тоды. Рассмотрим систему механических маятников, представляющих собой набор частиц (с номерами $0, 1, \ldots, r$), подвешенных на бесконечно длинных нитях и связанных пружинами (см. рис. 11).

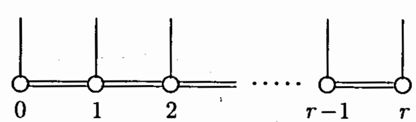


Рис. 11

Сила упругости пружин может нелинейно зависеть от их растяжения. Если эта сила F зависит экспоненциально от растяжения пружины Δx: $F = \exp(\Delta x)$, то, как заметил М. Тода (см. обзор [11] и ссылки, приведенные там), уравнения движения для данной механической системы могут быть решены точно. В дальнейшем такие системы частиц с экспоненциальным взаимодействием получили название цепочек Тоды.

Уравнения движения для конечной цепочки Тоды, состоящей из $(r+1)$ частиц, очевидно, имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 &= e^{x_1 - x_0}, \\ \ddot{x}_1 &= e^{x_2 - x_1} - e^{x_1 - x_0}, \ldots, \\ \ddot{x}_i &= e^{x_{i+1} - x_i} - e^{x_i - x_{i-1}}, \ldots, \\ \ddot{x}_r &= -e^{x_r - x_{r-1}}, \end{aligned} \qquad (1.149)$$

где x_i — координата i-й частицы и мы считаем, что массы всех частиц равны. Растяжение i-й пружины равно $y_i = x_i - x_{i-1}$, и в терминах этих переменных система уравнений (1.149) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= e^{y_2} - 2\,e^{y_1}, \\ \ddot{y}_2 &= e^{y_3} - 2\,e^{y_2} + e^{y_1}, \ldots, \\ \ddot{y}_i &= e^{y_{i+1}} - 2\,e^{y_i} + e^{y_{i-1}}, \ldots, \\ \ddot{y}_r &= e^{y_{r-1}} - 2\,e^{y_r}. \end{aligned} \qquad (1.150)$$

Представим уравнения (1.150) в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \vdots \\ \ddot{y}_r \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{y_1} \\ e^{y_2} \\ \vdots \\ e^{y_r} \end{pmatrix}, \qquad (1.151)$$

где возникшая $(r \times r)$ матрица совпадает с матрицей Картана АЛ $sl(r+1)$. Отметим очевидную похожесть цепочки Тоды (см. рис. 11) и диаграммы Дынкина для $sl(r+1)$ (см. рис. 3).

Уравнения (1.151) очевидным образом обобщаются на случай любой алгебры Ли со своей матрицей Картана K_{ij}:

$$\ddot{y}_i = -K_{ij}\, e^{y_j}. \qquad (1.152)$$

Если мы отождествим первую и последнюю частицы $x_0 = x_r$, то соответствующая цепочка называется периодической цепочкой

Тоды и описывается уравнениями (1.152) с матрицей

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица совпадает с матрицей Картана бесконечномерной АЛ, называемой алгеброй Каца–Муди, с диаграммой Дынкина, которая выглядит как периодическая цепочка:

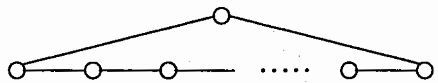


Рис. 12

Уравнения (1.152) мы будем называть уравнениями обобщенной цепочки Тоды. Все эти уравнения интегрируемы, и для соответствующих систем можно построить необходимое число независимых интегралов движения. Интегрируемость обобщенной цепочки Тоды, описываемой уравнениями (1.152) с произвольной матрицей Картана K_{ij}, следует из возможности переписать эти уравнения в форме *уравнения для пары Лакса*

$$\dot{L} = i[A, L], \tag{1.153}$$

где пара операторов L, A называется парой Лакса. Чтобы явно задать операторы L и A, сделаем еще одну замену переменных. А именно определим новые переменные z_k с помощью соотношений $y_i = \sum\limits_{k=1}^{r} K_{ik} z_k$, где будем предполагать, что матрица $\|K_{ij}\|$ обратима. Нетрудно переписать уравнения (1.152) в терминах новых переменных z_k:

$$\ddot{z}_i = -e^{K_{ij} z_j}. \tag{1.154}$$

Построим теперь два оператора L, A как элементы в соответствующей АЛ $\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} \left(\dot{z}_i H_{\alpha^{(i)}} + e^{(\frac{1}{2} K_{ij} z_j)} (\mathcal{E}_{\alpha^{(i)}} + \mathcal{E}_{-\alpha^{(i)}}) \right), \\ A &= \frac{i}{2} \sum_{i=1}^{r} \left(e^{(\frac{1}{2} K_{ij} z_j)} (\mathcal{E}_{\alpha^{(i)}} - \mathcal{E}_{-\alpha^{(i)}}) \right), \end{aligned} \tag{1.155}$$

где

$$\mathcal{E}_{\pm\alpha^{(i)}} = \sqrt{\frac{2}{(\alpha^{(i)})^2}}\, E_{\pm\alpha^{(i)}}, \quad H_{\alpha^{(i)}} = \frac{2}{(\alpha^{(i)})^2} (\alpha^{(i)}, H)$$

— образующие Шевалле для АЛ $\mathcal{G}$, соответствующие простым корням $\alpha^{(i)}$. Пользуясь соотношениями (1.73) и (1.74), вычислим коммутатор L и A:

$$\begin{aligned} [A, L] = \frac{i}{4} \sum_{i,j=1}^{r} \Big(&\dot{z}_j e^{(\frac{1}{2} K_{ik} z_k)} [\mathcal{E}_{\alpha^{(i)}} - \mathcal{E}_{-\alpha^{(i)}}, H_{\alpha^{(j)}}] + \\ &+ e^{\frac{1}{2}(K_{ik} + K_{jk}) z_k} \left([\mathcal{E}_{\alpha^{(i)}}, \mathcal{E}_{-\alpha^{(j)}}] - [\mathcal{E}_{-\alpha^{(i)}}, \mathcal{E}_{\alpha^{(j)}}] \right) \Big) = \\ = \frac{i}{4} \sum_{i,j=1}^{r} &e^{(\frac{1}{2} K_{ik} z_k)} \left(-\dot{z}_j K_{ij} (\mathcal{E}_{\alpha^{(i)}} + \mathcal{E}_{-\alpha^{(i)}}) + 2 e^{\frac{1}{2} K_{jk} z_k} \delta_{ij} H_{\alpha^{(i)}} \right). \end{aligned} \tag{1.156}$$

С другой стороны, мы имеем

$$\dot{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} \left(\ddot{z}_i H_{\alpha^{(i)}} + \frac{1}{2} K_{ij} \dot{z}_j e^{(\frac{1}{2} K_{ij} z_j)} (\mathcal{E}_{\alpha^{(i)}} + \mathcal{E}_{-\alpha^{(i)}}) \right), \tag{1.157}$$

откуда с учетом (1.156) мы получаем выражение

$$\dot{L} - i\,[A, L] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} \left(\ddot{z}_i + e^{K_{ik} z_k} \right) H_{\alpha^{(i)}}, \tag{1.158}$$

которое равно нулю, если справедливы уравнения обобщенной цепочки Тоды (1.154). Изложенная конструкция преобразует нелинейные уравнения (1.152), (1.154) цепочки Тоды в линейные (1.153). Линейные уравнения (1.153) для пары Лакса позволяют продемонстрировать интегрируемость уравнений (1.152), (1.154), так как дают возможность построить целый набор нетривиальных интегралов движения. Действительно, определим величины

$$I_n = \mathrm{Tr}\,(L^n), \tag{1.159}$$

где образующие АЛ $\mathcal{G}$, входящие в определение оператора L, взяты в некотором представлении, по которому и вычисляется след «Tr». Легко понять, пользуясь циклическим свойством следа, что, при выполнении уравнениий движения (1.153), величины I_n не зависят от времени:

$$\dot{I}_n = n\,\mathrm{Tr}\,(L^{n-1} \dot{L}) = i\,n\,\mathrm{Tr}\,(L^{n-1}\,[A, L]) = i\,\mathrm{Tr}\,([A, L^n]) = 0.$$

Число функционально независимых сохраняющихся величин I_n равно рангу АЛ $\mathcal{G}$, т. е. равно числу динамических переменных z_i, и если $L^\dagger = L$, то все I_n вещественны. Более того, можно показать, что интегралы движения I_n находятся в инволюции, т. е. их скобки Пуассона равны нулю: $\{I_n, I_m\} = 0$. В этом случае величины I_n можно считать переменными типа «действия» и построить сопряженные им переменные типа «угол» θ, которые удовлетворяют простому уравнению $\dot{\theta} = \{\theta, H(I_n)\}$, где в качестве гамильтониана $H(I_n)$ для обобщенной цепочки Тоды можно выбрать квадратичную по импульсам $p_i = \dot{z}_i$ функцию $H = \mathrm{Tr}\,(L^2)$.

Замечание 1. Оператор A (1.155) определяется по оператору L (1.155) следующим образом:

$$A = i\,(L^+ - L^-),$$

где L^+ и L^- обозначают проекции оператора $L \in \mathcal{G}$ на его части, содержащие только положительные и только отрицательные корневые образующие АЛ $\mathcal{G}$ соответственно.

Замечание 2. Известно (см., например, [12] и ссылки, приведенные там), что каждая вещественная форма комплексной АЛ $\mathcal{G}$ соответствует некоторому инволютивному автоморфизму σ: $\mathcal{G} \to \mathcal{G}$. Так как $\sigma^2 = 1$, то σ имеет два собственных значения: ± 1 и тем самым разбивает алгебру $\mathcal{G}$ на два подпространства — $\mathcal{G}^+$ и $\mathcal{G}^-$ — таких, что $\sigma(\mathcal{G}^\pm) = \pm\mathcal{G}^\pm$.

Пусть $\varepsilon, \eta = \pm 1$, тогда мы имеем

$$\sigma([\mathcal{G}^\varepsilon, \mathcal{G}^\eta]) = [\sigma(\mathcal{G}^\varepsilon), \sigma(\mathcal{G}^\eta)] = \varepsilon\,\eta[\mathcal{G}^\varepsilon, \mathcal{G}^\eta]$$

и, следовательно,

$$[\mathcal{G}^+, \mathcal{G}^+] \subset \mathcal{G}^+, \quad [\mathcal{G}^+, \mathcal{G}^-] \subset \mathcal{G}^-, \quad [\mathcal{G}^-, \mathcal{G}^-] \subset \mathcal{G}^+. \qquad (1.160)$$

Таким образом, подпространство $\mathcal{G}^+$ образует подалгебру в $\mathcal{G}$. Если в качестве σ взять автоморфизм Картана (1.51), то алгебра $\mathcal{G}$ разбивается следующим образом:

$$\{H_i, E_\alpha + E_{-\alpha}\} \in \mathcal{G}^-, \quad i(E_\alpha - E_{-\alpha}) \in \mathcal{G}^+, \qquad (1.161)$$

где операторы H_i, $(E_\alpha + E_{-\alpha})$, $i(E_\alpha - E_{-\alpha})$ образуют базис для компактной вещественной формы алгебры $\mathcal{G}$. С другой стороны, если в качестве образующих выбрать iH_i, iE_α, то соответствующая вещественная форма $\widetilde{\mathcal{G}}$ будет некомпактной, но будет содержать в себе, согласно (1.160) и (1.161), компактную подалгебру $\mathcal{G}^+$ с образующими $i(E_\alpha - E_{-\alpha})$. Поскольку оператор A (1.155) принадлежит $\mathcal{G}^+$, то, как показали М. Ольшанецкий и А. Переломов [13], решения обобщенной цепочки Тоды соответствуют геодезическим на однородном пространстве $\widetilde{G}/K$, где группы $\widetilde{G}$ и K в качестве АЛ имеют вещественные формы $\widetilde{\mathcal{G}}$ и $\mathcal{G}^+$ соответственно.

Обобщенные модели Калоджеро–Мозера–Сазерленда. Квантовая модель Калоджеро–Мозера–Сазерленда (типа A_{N-1}) для N частиц на прямой с парным взаимодействием описывается гамильтонианом

$$H = -\sum_{i=1}^{N} \partial_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} \frac{2\varkappa}{(x_i - x_j)^2}(\varkappa - s_{i,j}), \qquad (1.162)$$

где x_i — координата i-й частицы, $\varkappa$ — действительная константа связи и $s_{i,j}$ — оператор перестановки координат x_i и x_j волновой функции $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, на которую действует оператор H при решении спектральной задачи $H\psi = E\psi$. Если искать спектр гамильтониана (1.162) в классе симметричных волновых функций $s_{i,j}\psi(\vec{x}) = \psi(\vec{x})$ (например в случае бесспиновых тождественных частиц), то ограничение оператора H на такие симметричные функции очевидно имеет вид

$$H_{\mathrm{sym}} = -\sum_{i=1}^{N} \partial_i^2 + 2\varkappa(\varkappa - 1) \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} \frac{1}{(x_i - x_j)^2}. \qquad (1.163)$$

Интегрируемость модели Калоджеро–Мозера–Сазерленда с гамильтонианом (1.162) следует из возможности записать H в виде

$$H = \sum_{i=1}^{N} p_i^2 \qquad (1.164)$$

с коммутирующими импульсами $p_j = -i\widetilde{D}_j$, где $\widetilde{D}_j$ — дифференциально-разностные операторы:

$$\widetilde{D}_j = \partial_j + \varkappa \sum_{i \neq j} \frac{1}{x_i - x_j} s_{i,j} \quad (j = 1, \ldots, N). \qquad (1.165)$$

Действительно, пользуясь соотношениями $\partial_j\, s_{ij} = s_{ij}\, \partial_i$, $s_{ij}\, x_i = x_j\, s_{ij}$, имеем

$$\widetilde{D}_j^2 = \partial_j^2 + \varkappa\left(\sum_{i\neq j}\frac{1}{x_{ij}^2}s_{i,j} + \sum_{i\neq j}\frac{1}{x_{ij}}s_{i,j}(\partial_i+\partial_j)\right) + \\ + \sum_{\substack{i,k\\ i\neq k\neq j\neq i}}\frac{\varkappa^2}{x_{ij}x_{ki}}s_{i,j}s_{k,j} + \sum_{i\neq j}\frac{\varkappa^2}{x_{ij}}s_{i,j}\frac{1}{x_{ij}}s_{i,j} = \\ = \partial_j^2 + \left(2\varkappa\sum_{i<j}\frac{1}{x_{ij}^2}s_{i,j} + \varkappa\sum_{i\neq j}\frac{1}{x_{ij}}s_{i,j}(\partial_i+\partial_j)\right) + \\ + \sum_{\substack{i,k\\ i\neq k\neq j\neq i}}\frac{\varkappa^2}{x_{ij}x_{ki}}s_{i,j}s_{k,j} - 2\sum_{i<j}\frac{\varkappa^2}{x_{ij}^2},$$

где мы использовали стандартное обозначение $x_{ij} = (x_i - x_j)$. Окончательно получаем

$$\sum_j \widetilde{D}_j^2 = \sum_j \partial_j^2 - 2\varkappa\sum_{\substack{i,j\\ i<j}}\frac{1}{x_{ij}^2}(\varkappa - s_{ij}) + \varkappa^2\sum_{\substack{i,k,j\\ i\neq k\neq j\neq i}}\frac{1}{x_{ij}\,x_{ki}}s_{i,j}s_{k,j}, \tag{1.166}$$

где последнее слагаемое равно нулю, так как (делая две циклические перестановки (i,j,k) и (i,k,j) для индексов суммирования) имеем

$$\sum_{\substack{i,k,j\\ i\neq k\neq j\neq i}}\frac{1}{x_{ij}\,x_{ki}}s_{i,j}s_{k,j} = \\ = \frac{1}{3}\sum_{\substack{i,k,j\\ i\neq k\neq j\neq i}}\left(\frac{1}{x_{ij}\,x_{ki}} + \frac{1}{x_{jk}\,x_{ij}} + \frac{1}{x_{ki}\,x_{jk}}\right)s_{i,j}s_{k,j} = 0.$$

Таким образом, (1.166) с учетом (1.164) эквивалентно (1.162).

Коммутируемость операторов $\widetilde{D}_j$ доказывается следующим образом ($j\neq k$):

$$[\widetilde{D}_j,\ \widetilde{D}_k] = \left[\sum_{i\neq j}\frac{\varkappa}{x_{ij}}s_{ij},\partial_k\right] + \left[\partial_j,\sum_{m\neq k}\frac{\varkappa}{x_{mk}}s_{mk}\right] + \\ + \varkappa^2\sum_{i\neq j,m\neq k}\left[\frac{1}{x_{ij}}s_{ij},\frac{1}{x_{mk}}s_{mk}\right] = \\ = \varkappa\left(\left[\frac{1}{x_{kj}}s_{kj},\partial_k\right] + \left[\partial_j,\frac{1}{x_{jk}}s_{jk}\right]\right) + \\ + \varkappa^2\left[\sum_{i\neq j,i\neq k}\frac{1}{x_{ij}}s_{ij} + \frac{1}{x_{kj}}s_{kj},\sum_{m\neq k}\frac{1}{x_{mk}}s_{mk}\right].$$

Здесь первое слагаемое равно нулю, так как

$$\left[\frac{1}{x_{kj}}s_{kj},\partial_k\right] + \left[\partial_j,\frac{1}{x_{jk}}s_{jk}\right] = \frac{1}{x_{kj}}\left([s_{kj},\partial_k] - [\partial_j,s_{jk}]\right) = 0,$$

и мы получаем

$$[\widetilde{D}_j,\ \widetilde{D}_k] = \varkappa^2\left(\sum_{i\neq j,i\neq k}\left[\frac{1}{x_{ij}}s_{ij},(\frac{1}{x_{ik}}s_{ik} + \frac{1}{x_{jk}}s_{jk})\right] + \right. \\ \left. + \left[\sum_{m\neq k}\frac{1}{x_{mk}}s_{mk},\frac{1}{x_{jk}}s_{jk}\right]\right) = \\ = \varkappa^2\sum_{i\neq j,i\neq k}\left(\left[\frac{1}{x_{ij}}s_{ij},(\frac{1}{x_{ik}}s_{ik} + \frac{1}{x_{jk}}s_{jk})\right] + \left[\frac{1}{x_{ik}}s_{ik},\frac{1}{x_{jk}}s_{jk}\right]\right) = 0. \tag{1.167}$$

Последнее равенство вытекает из тождества

$$[r_{ij},(r_{ik} + r_{jk})] + [r_{ik},r_{jk}] = 0 \tag{1.168}$$

для $r_{ij} = \frac{1}{x_{ij}}s_{ij} = -r_{ji}$, которое имеет структуру квазиклассического уравнения Янга–Бакстера для квазиклассической r-матрицы r_{ij}. Действительно, тождество (1.168) эквивалентно равенству

$$\left(\frac{1}{x_{ij}x_{jk}} + \frac{1}{x_{ik}x_{ji}} - \frac{1}{x_{jk}x_{ik}}\right)s_{ij}s_{ik} + \\ + \left(\frac{1}{x_{ij}x_{ik}} - \frac{1}{x_{jk}x_{ij}} - \frac{1}{x_{ik}x_{kj}}\right)s_{ij}s_{jk} = 0,$$

которое очевидно.

Итак, мы доказали, что $[p_i,p_j]=0$, и, в силу соотношений (1.164), мы имеем $[H,p_i]=0$, т.е. $\{p_i\}$ — инволютивный набор сохраняющихся интегралов движения.

Отметим, что операторы (1.165) сингулярны в точках $x_i = x_j$ $(i\neq j)$ и плохо действуют на пространствах непрерывных функций $\psi(\vec{x})$ и полиномов. Однако с помощью преобразований эквивалентности $\widetilde{D}_j \to w_\varkappa(x)\widetilde{D}_j(w_\varkappa(x))^{-1}$, где $w_\varkappa(x) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant N}|x_i - x_j|^{2\varkappa}$, учитывая равенства

$$s_{ij}w_\varkappa(x) = w_\varkappa(x)s_{ij}, \quad (\partial_j w_\varkappa(x)) = \varkappa\, w_\varkappa(x)\sum_{i\neq j}\frac{1}{x_i - x_j},$$

получаем операторы

$$D_j = w_\varkappa(x)\widetilde{D}_j(w_\varkappa(x))^{-1} = \partial_j - \varkappa\sum_{i\neq j}\frac{1}{x_i - x_j}(1 - s_{i,j}), \quad (1.169)$$

которые переводят полиномы в полиномы и называются операторами Данкля [14]. Операторы (1.169) можно переписать в форме

$$D_j = \partial_j + \sum_{\alpha\in\Phi^+}\varkappa(\alpha)\alpha_j\frac{1}{(\alpha, x)}(1 - \widehat{\sigma}_\alpha), \quad (1.170)$$

где Φ^+ — система положительных корней для АЛ A_{N-1}-типа, $\widehat{\sigma}_\alpha\psi(x) = \psi(\sigma_\alpha(x))$, $\sigma_\alpha(x)$ — отражения Вейля (1.42), а $\varkappa(\alpha)$ — некоторая функция, инвариантная относительно всех вейлевских отражений корня α. Иногда функцию $\varkappa(\alpha)$ называют кратностью корня α.

Чтобы продемонстрировать связь D_j (1.169) с операторами (1.170), в случае корневой системы $A_{N-1} = sl(N)$, заметим, что в сумме по положительным корневым векторам (1.84) в правой части (1.170) выживут только те слагаемые, для которых положительные корневые векторы

$$\alpha = \alpha^{(km)} = (\underbrace{\overbrace{0,\ldots,0,1,0\ldots,0,-1}^{m}}_{k},0,\ldots,0) \in \Phi^+(sl(N))$$

имеют ненулевые координаты 1 (или -1) на j-м месте. Т. е. либо $k = j$, либо $m = j$. Тогда дифференциально-разностный оператор (1.170) можно переписать в виде

$$D_j = \partial_j + \sum_{i>j}\varkappa(\alpha^{(ij)})\frac{1}{(x_j - x_i)}(1 - s_{ij}) - \sum_{i<j}\varkappa(\alpha^{(ji)})\frac{1}{(x_i - x_j)}(1 - s_{ij}), \quad (1.171)$$

где мы учли равенство

$$\sigma_{\alpha^{(ij)}}(x) = x - \frac{2(x, \alpha^{(ij)})}{(\alpha^{(ij)})^2}\alpha^{(ij)} = (x_1,\ldots,x_N) - (x_i - x_j)(\underbrace{\overbrace{\ldots,0,1,0,\ldots,0,-1}^{j}}_{i},0,\ldots) = (x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_N) = s_{ij}(x_1,\ldots,x_N). \quad (1.172)$$

Если выбрать кратность в виде константы $\varkappa(\alpha^{(ij)}) = \varkappa$, то (1.171) эквивалентно (1.169), что и демонстрирует связь операторов (1.169) и (1.170) для случая алгебр A_{N-1}-типа.

Форма (1.170) для операторов Данкля допускает обобщение на случай корневой системы для любой полупростой алгебры Ли.

Утверждение 1.5 [14, 15]. *Операторы Данкля $\{D_j\}$ (1.170), где Φ^+ — система положительных корней произвольной полупростой АЛ, удовлетворяют следующим свойствам:*
1) *набор операторов $\{D_j\}$ образует коммутативную алгебру дифференциально-разностных однородных операторов степени -1;*
2) *оператор $H = \sum_j D_j^2$ определяет гамильтониан обобщенной модели Калоджеро–Мозера–Сазерленда, и он равен*

$$H = \sum_j D_j^2 = \sum_j \partial_j^2 + \sum_{\alpha\in\Phi^+}\varkappa(\alpha)\frac{1}{(\alpha, x)}\left(2(\alpha, \partial) - \frac{(\alpha,\alpha)}{(\alpha, x)}(1 - \widehat{\sigma}_\alpha)\right). \quad (1.173)$$

Доказательство. 1. С помощью преобразования подобия $D_j \to w_\varkappa^{-1}D_j w_\varkappa$, где $w_\varkappa = \prod_{\alpha\in\Phi^+}|(\alpha x)|^{2\varkappa(\alpha)}$, операторы D_j (1.170) можно привести к виду

$$\widetilde{D}_j = \partial_j - \sum_{\alpha\in\Phi^+}\varkappa(\alpha)\alpha_j\frac{1}{(\alpha, x)}\widehat{\sigma}_\alpha. \quad (1.174)$$

Далее для $j \neq k$ имеем

$$[\widetilde{D}_j,\ \widetilde{D}_k] = -\left[\sum_{\alpha\in\Phi^+}\frac{\varkappa(\alpha)\alpha_j}{(\alpha,x)}\widehat{\sigma}_\alpha,\ \partial_k\right] + \left[\sum_{\alpha\in\Phi^+}\frac{\varkappa(\alpha)\alpha_k}{(\alpha,x)}\widehat{\sigma}_\alpha,\ \partial_j\right] + \\ + \sum_{\alpha,\beta\in\Phi^+}\varkappa(\alpha)\alpha_j\varkappa(\beta)\beta_k\left[\frac{1}{(\alpha,x)}\widehat{\sigma}_\alpha,\ \frac{1}{(\beta,x)}\widehat{\sigma}_\beta\right]. \quad (1.175)$$

Воспользуемся равенством

$$\widehat{\sigma}_\alpha\partial_k = \left(\partial_k - \frac{2(\alpha^i\partial_i)}{\alpha^2}\alpha_k\right)\widehat{\sigma}_\alpha \ \Leftrightarrow\ \widehat{\sigma}_\alpha(\xi,\partial) = (\sigma_\alpha(\xi),\partial)\,\widehat{\sigma}_\alpha, \quad (1.176)$$

которое легко выводится из (1.42) и тождества $\widehat{\sigma}_\alpha^2 = 1$. Тогда

$$\left[\sum_{\alpha\in\Phi^+}\frac{\varkappa(\alpha)\alpha_j}{(\alpha,x)}\widehat{\sigma}_\alpha,\ \partial_k\right] = \sum_{\alpha\in\Phi^+}\frac{\varkappa(\alpha)\alpha_j\alpha_k}{(\alpha,x)}\left(\frac{1}{(\alpha,x)} - 2\frac{(\alpha,\partial)}{\alpha^2}\right)\widehat{\sigma}_\alpha$$

и первые два слагаемых в правой части (1.175) взаимно уничтожаются в силу антисимметрии по перестановке $j\leftrightarrow k$. В результате мы получаем

$$[\widetilde{D}_j,\ \widetilde{D}_k] = \sum_{\alpha,\beta\in\Phi^+}\varkappa(\alpha)\alpha_j\varkappa(\beta)\beta_k\left[\frac{1}{(\alpha,x)}\widehat{\sigma}_\alpha,\ \frac{1}{(\beta,x)}\widehat{\sigma}_\beta\right] = \\ = \sum_{\alpha,\beta\in\Phi^+}\varkappa(\alpha)\varkappa(\beta)\alpha_j\beta_k\left(\frac{1}{(\alpha,x)}\,\frac{1}{(\sigma_\alpha(\beta),x)}\widehat{\sigma}_\alpha\widehat{\sigma}_\beta - \right. \\ \left. - \frac{1}{(\beta,x)}\,\frac{1}{(\sigma_\beta(\alpha),x)}\widehat{\sigma}_\beta\widehat{\sigma}_\alpha\right). \quad (1.177)$$

Сделаем в (1.177), во втором слагаемом, замену $\alpha\leftrightarrow\beta$. В результате имеем

$$[\widetilde{D}_j,\ \widetilde{D}_k] = \sum_{\alpha,\beta\in\Phi^+}\varkappa(\alpha)\varkappa(\beta)(\alpha_j\beta_k - \beta_j\alpha_k)\frac{1}{(\alpha,x)}\,\frac{1}{(\sigma_\alpha(\beta),x)}\widehat{\sigma}_\alpha\widehat{\sigma}_\beta. \quad (1.178)$$

Переставим в (1.178) α и β, воспользуемся равенством $\widehat{\sigma}_\beta\widehat{\sigma}_\alpha = \widehat{\sigma}_{\sigma_\beta(\alpha)}\widehat{\sigma}_\beta$, перейдем к суммированию по всей корневой системе $\alpha,\beta\in\Phi$ и заменим суммирование по α на суммирование по $\sigma_\beta(\alpha)$:

$$[\widetilde{D}_j,\ \widetilde{D}_k] = \\ = -\frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta\in\Phi}\varkappa(\alpha)\varkappa(\beta)(\alpha_j\beta_k - \beta_j\alpha_k)\frac{1}{(\beta,x)}\,\frac{1}{(\sigma_\beta(\alpha),x)}\widehat{\sigma}_{\sigma_\beta(\alpha)}\widehat{\sigma}_\beta = \\ = -\frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta\in\Phi}\varkappa(\alpha)\varkappa(\beta)(\alpha_j\beta_k - \beta_j\alpha_k)\frac{1}{(\alpha,x)}\,\frac{1}{(\beta,x)}\widehat{\sigma}_\alpha\widehat{\sigma}_\beta. \quad (1.179)$$

Рассмотрим подсумму в сумме (1.179):

$$A = \sum_{\alpha,\beta\in\Phi:\ \widehat{\sigma}_\alpha\widehat{\sigma}_\beta = w}\varkappa(\alpha)\varkappa(\beta)(\alpha_j\beta_k - \beta_j\alpha_k)\frac{1}{(\alpha,x)}\,\frac{1}{(\beta,x)}\widehat{\sigma}_\alpha\widehat{\sigma}_\beta, \quad (1.180)$$

пропорциональную фиксированному элементу $\widehat{\sigma}_\alpha\widehat{\sigma}_\beta = w$. В каждом слагаемом этой подсуммы

$$\varkappa(\alpha)\varkappa(\beta)\frac{(\alpha_j\beta_k - \beta_j\alpha_k)}{(\alpha,x)\,(\beta,x)}\,w \quad (1.181)$$

имеются полюса в точках $(\alpha,x) = 0$ и $(\beta,x) = 0$. Покажем, что во всей подсумме A эти полюса сокращаются. Действительно, полюса в точках $(\alpha,x) = 0$ и $(\beta,x) = 0$ (для фиксированных α и β) могут возникнуть еще только в слагаемых, пропорциональных элементам $w = \widehat{\sigma}_{\widehat{\sigma}_\alpha(\beta)}\widehat{\sigma}_\alpha$ и $w = \widehat{\sigma}_\beta\widehat{\sigma}_{\widehat{\sigma}_\beta(\alpha)}$:

$$\varkappa(\widehat{\sigma}_\alpha(\beta))\varkappa(\alpha)\frac{(\widehat{\sigma}_\alpha(\beta)_j\alpha_k - \alpha_j\widehat{\sigma}_\alpha(\beta)_k)}{(\widehat{\sigma}_\alpha(\beta),x)\,(\alpha,x)}\widehat{\sigma}_{\widehat{\sigma}_\alpha(\beta)}\widehat{\sigma}_\alpha = \\ = \varkappa(\beta)\varkappa(\alpha)\frac{(\beta_j\alpha_k - \alpha_j\beta_k)}{(\widehat{\sigma}_\alpha(\beta),x)\,(\alpha,x)}w, \\ \varkappa(\beta)\varkappa(\widehat{\sigma}_\beta(\alpha))\frac{(\beta_j\widehat{\sigma}_\beta(\alpha)_k - \widehat{\sigma}_\beta(\alpha)_j\beta_k)}{(\beta,x)\,(\widehat{\sigma}_\beta(\alpha),x)}\widehat{\sigma}_\beta\widehat{\sigma}_{\widehat{\sigma}_\beta(\alpha)} = \\ = \varkappa(\beta)\varkappa(\alpha)\frac{(\beta_j\alpha_k - \alpha_j\beta_k)}{(\beta,x)\,(\widehat{\sigma}_\beta(\alpha),x)}w. \quad (1.182)$$

Складывая выражения (1.181) и (1.182), мы видим, что полюса в точках $(\alpha,x) = 0$ и $(\beta,x) = 0$ уничтожаются. Так как корни α и β выбраны произвольно, то данную процедуру можно проделать для любых корней, в частности можно аналогично доказать, что уничтожаются и полюса в точках $(\widehat{\sigma}_\beta(\alpha),x) = 0$ и $(\widehat{\sigma}_\alpha(\beta),x) = 0$ и т. д. Таким образом, в подсумме A вообще нет полюсов по переменным x, а так как A есть однородная функция по x

степени -2, то это означает, что функция A должна равняться нулю.

2. Формула (1.173) доказывается прямым вычислением:

$$\sum_j D_j^2 = \sum_j \partial_j^2 + \sum_{\alpha\in\Phi^+} \varkappa(\alpha)\alpha_j \left[\partial_j, \frac{1}{(\alpha,x)}(1-\widehat{\sigma}_\alpha)\right]_+ + \\ + \sum_{\alpha,\beta\in\Phi^+} \frac{\varkappa(\alpha)\varkappa(\beta)(\alpha,\beta)}{(\alpha,x)}(1-\widehat{\sigma}_\alpha)\frac{1}{(\beta,x)}(1-\widehat{\sigma}_\beta). \quad (1.183)$$

Здесь последнее слагаемое равно нулю в силу рассуждений, аналогичных тем, что использовались для вывода $A=0$ в предыдущем пункте данного доказательства. Для вычисления второго слагаемого найдем выражение

$$\left[(\alpha,\partial), \frac{1}{(\alpha,x)}(1-\widehat{\sigma}_\alpha)\right]_+ = \\ = -\frac{(\alpha,\alpha)}{(\alpha,x)^2}(1-\widehat{\sigma}_\alpha) + \frac{1}{(\alpha,x)}\left[(\alpha,\partial),(1-\widehat{\sigma}_\alpha)\right]_+ = \\ = -\frac{(\alpha,\alpha)}{(\alpha,x)^2}(1-\widehat{\sigma}_\alpha) + 2\frac{1}{(\alpha,x)}(\alpha,\partial), \quad (1.184)$$

где мы учли (1.176). Подставляя (1.184) в (1.183), получаем (1.173). ■

1.11. Корневые системы некоторых супералгебр Ли классического типа

Определение 1.9. *Супералгеброй Ли называется Z_2-градуированная алгебра $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\bar 0} \oplus \mathcal{G}_{\bar 1}$ с Z_2-градуированным произведением $[.,.\}$: $\mathcal{G}\otimes\mathcal{G} \to \mathcal{G}$, которое удовлетворяет аксиомам*

$$[a,b\} = -(-1)^{\alpha\beta}[b,a\}, \\ (-1)^{\alpha\gamma}[a,[b,c\}\} + (-1)^{\beta\gamma}[c,[a,b\}\} + (-1)^{\alpha\beta}[b,[c,a\}\} = 0,$$

где $a\in\mathcal{G}_{\bar\alpha}$, $b\in\mathcal{G}_{\bar\beta}$, $c\in\mathcal{G}_{\bar\gamma}$, а числа $\alpha,\beta,\gamma = 0,1 \bmod(2)$ называются градуировкой соответствующих элементов алгебры $\mathcal{G}$.

Пусть $V = V_{\bar 0}\oplus V_{\bar 1}$ — Z_2-градуированное векторное пространство. Рассмотрим супералгебру $\mathrm{End}(V)$ и обозначим ее $\ell(V) = \ell(m,n)$, если $\dim V_{\bar 0} = m$, $\dim V_{\bar 1} = n$. Рассмотрим базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_{m+n}\}$ в суперпространстве $V = V(m,n)$ как объединение базисов в подпространствах $V_{\bar 0}$ и $V_{\bar 1}$. В данном базисе элементы $a\in\ell(V)$ можно представить в виде

$(m+n)\times(m+n)$ матриц $||a_{ij}||_{i,j=1,\ldots,n+m}$, имеющих блочную структуру

$$a = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix} \in \ell(V), \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D\end{pmatrix} \in \ell(V)_{\bar 0}, \quad \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0\end{pmatrix} \in \ell(V)_{\bar 1},$$

где A, B, C и D — блоки размером $(m\times m)$, $(m\times n)$, $(n\times m)$ и $(n\times n)$ соответственно.

Определение 1.10. *Суперследом* Str *называется функция на $\ell(m,n)$ такая, что*

$$\mathrm{Str}\,(a) = \mathrm{Tr}\,(A) - \mathrm{Tr}\,(D) = \sum_{i=1}^{m+n}(-1)^{[i]}a_{ii}, \quad (1.185)$$

где

$$[i] = \begin{cases} 0 \mod(2), & i = 1,\ldots,m, \\ 1 \mod(2), & i = m+1,\ldots,m+n.\end{cases}$$

Легко проверить, что суперслед (1.185) удовлетворяет свойствам

$$\mathrm{Str}\,(a\,b) = (-1)^{\alpha\beta}\,\mathrm{Str}\,(b\,a) \quad\Rightarrow\quad \mathrm{Str}\,([a,b\}) = 0, \\ \mathrm{Str}\,([a,\,b\}c) = \mathrm{Str}\,(a\,[b,\,c\}). \quad (1.186)$$

В матричной супералгебре $\ell(m,n)$ умножение можно реализовать следующим образом: $[a,b\} = a\,b - (-1)^{\alpha\beta}b\,a$ $(\forall a,b\in \in\ell(m,n))$.

Удобно ввести супервекторы $\widehat{v} = \widehat{v}_i e_i$ и суперматрицы $\widehat{a} = \widehat{a}_{ij}e_{ij}$, где e_{ij} — матричные единицы. Компоненты $\widehat{v}_i$ супервектора $\widehat{v}$ имеют градуировку $\mathrm{gr}\,(\widehat{v}_i) = [i]$, а компоненты $\widehat{a}_{ij}$ суперматрицы $\widehat{a}$ имеют градуировку $\mathrm{gr}\,(\widehat{a}_{ij}) = [i]+[j]$. Значит, мы имеем

$$\widehat{v}_i\,\widehat{v}_j = (-1)^{[i][j]}\,\widehat{v}_j\,\widehat{v}_i, \quad \widehat{v}_i\,\widehat{a}_{kj} = (-1)^{[i]([k]+[j])}\,\widehat{a}_{kj}\,\widehat{v}_i, \\ \widehat{a}_{im}\,\widehat{a}_{kj} = (-1)^{([i]+[m])([k]+[j])}\,\widehat{a}_{kj}\,\widehat{a}_{im}.$$

Множество $\widehat{V}$ таких $(m+n)$-мерных супервекторов и множество $\widehat{\ell}(\widehat{V}) = \widehat{\ell}(m,n)$ таких $(m+n)\times(m+n)$ суперматриц образуют линейные пространства. Более того, как легко проверить, $\widehat{\ell}(m,n)$ имеет структуру алгебры по отношению к обычному умножению матриц, т.е. $\forall\widehat{a},\widehat{b}\in\widehat{\ell}(m,n)$ мы имеем $||\widehat{a}_{ij}\widehat{b}_{jk}||\in\widehat{\ell}(m,n)$.

Свойства суперследа (1.186) для суперматриц $\widehat{a}, \widehat{b}$ переписываются следующим образом:

$$\begin{gathered}\mathrm{Str}\,(\widehat{a}\,\widehat{b}) = \mathrm{Str}\,(\widehat{b}\,\widehat{a}) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Str}\,([\widehat{a}, \widehat{b}]) = 0, \\ \mathrm{Str}\,([\widehat{a},\, \widehat{b}]\widehat{c}) = \mathrm{Str}\,(\widehat{a}\,[\widehat{b},\, \widehat{c}]),\end{gathered} \tag{1.187}$$

где $[\widehat{a},\, \widehat{b}] = \widehat{a}\,\widehat{b} - \widehat{b}\,\widehat{a}$.

Рассмотрим линейное преобразование супервектора $\widehat{v} \in \widehat{V}$: $\widehat{v}_i \to \widehat{v}'_i = \widehat{a}_{ij}\,\widehat{v}_j$, которое определяется некоторой суперматрицей $||\widehat{a}_{ij}|| \in \widehat{\ell}(m,n)$. Это преобразование очевидно сохраняет градуировку векторов $\widehat{v}, \widehat{v}'$ и может быть переписано следующим образом:

$$\widehat{v}_i \to \widehat{v}'_i = \widehat{v}_j\,\widehat{a}_{ij}(-1)^{[i][j]+[j]} = \widehat{v}_j\,(\widehat{a}^T)_{ji}, \tag{1.188}$$

где мы определили операцию супертранспонирования T для суперматрицы $\widehat{a}$:

$$(\widehat{a}^T)_{ij} = \widehat{a}_{ji}(-1)^{[i][j]+[i]}, \quad (\widehat{a}\,\widehat{b})^T = \widehat{b}^T\,\widehat{a}^T. \tag{1.189}$$

Рассмотрим матрицу $C \in \ell(m,2n)$ вида

$$C = \left(\begin{array}{c|cc} 1_m & 0 & \ldots \\ \hline 0 & 0 & 1_n \\ \vdots & -1_n & 0 \end{array}\right), \quad C_{ij} = (-1)^{[i][j]}C_{ji} \tag{1.190}$$

и введем на суперпространстве $\widehat{V}(m,2n)$ симметричную билинейную форму

$$(\widehat{w},\widehat{v}) = \widehat{w}_i C_{ij}\widehat{v}_j = (\widehat{v},\widehat{w}) \quad (\widehat{w},\widehat{v} \in \widehat{V}(m,2n)).$$

Данная форма инвариантна, т.е. $\delta(\widehat{w},\widehat{v}) = 0$, относительно преобразований, задаваемых вариациями $\delta(\widehat{w}) = \widehat{a}\widehat{w}$, $\delta(\widehat{v}) = \widehat{a}\widehat{v}$, если $\widehat{a}$ удовлетворяет условию

$$\widehat{a}^T C + C\widehat{a} = 0. \tag{1.191}$$

Опишем теперь некоторые супералгебры Ли классического типа [10].

1. Супералгебра Ли $A(m,n) = sl(m+1|n+1)$ $(m \neq n)$, где алгебра $sl(m|n)$ определяется следующим образом:

$$sl(m|n) = \{a \in \ell(m,n) \mid \mathrm{Str}\,(a) = 0\}. \tag{1.192}$$

В случае $m = n$ супералгебра $sl(m|n)$ имеет одномерный идеал, состоящий из матриц $(\lambda \cdot 1_{2n})$. Поэтому $A(n,n) = sl(n+1|n+ +1)/(\lambda \cdot 1_{2n})$.

2. Определим супералгебру $osp(m|2n) \subset \ell(m,2n)$ следующим образом (ср. с (1.191)):

$$osp(m|2n) = \{a \in \ell(m,2n) \mid a^T C + Ca = 0\},$$

где T — операция супертранспонирования (1.189). С учетом явного вида матрицы C (1.190) матрица $a \in osp(m|2n)$ представима в виде

$$a = \left(\begin{array}{c|cc} X & Y & \overline{Y} \\ \hline -\overline{Y}^t & A & B \\ Y^t & C & -A^t \end{array}\right), \quad X^t = -X, \quad B^t = B, \quad C^t = C, \tag{1.193}$$

где t — обычное транспонирование. Алгебра $osp(m|2n)$ называется *ортосимплектической* супералгеброй. Положим

$$\begin{gathered} B(m,n) = osp(2m+1|2n), \quad m \geqslant 0, n > 0, \\ D(m,n) = osp(2m|2n), \quad m \geqslant 0, n > 0, \\ C(n+1) = osp(2|2n), \; n > 0. \end{gathered} \tag{1.194}$$

Имеются также другие (см. [8, 10]), так называемые странные супералгебры классического типа — $Q(n)$, $P(n)$, $G(3)$, $F(4)$, $D(2,1,\alpha)$, которые мы здесь не рассматриваем.

Так же, как и в случае обычных АЛ, у супералгебр Ли $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\overline{0}} \oplus \mathcal{G}_{\overline{1}}$ имеется максимальная коммутирующая подалгебра Картана $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}_{\overline{0}}$ с базисом $\{H_i\}$ $(i = 1,\ldots,r)$, и $\mathcal{G}$ можно разложить в прямую сумму подпространств $\mathcal{G} = \oplus_\alpha \mathcal{G}_\alpha$, где

$$\mathcal{G}_\alpha = \{E_\alpha \in \mathcal{G} \mid [H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha, \;\; H_i \in \mathcal{H}\}.$$

Таким образом, каждой образующей E_α сопоставляется r-мерный вектор $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$. Множество векторов $\Phi(\mathcal{G}) = \{\alpha|\mathcal{G}_\alpha \neq \varnothing\}$ в r-мерном пространстве V_r называется корневой системой супералгебры Ли $\mathcal{G}$. Корневой вектор α называется четным (соответственно нечетным), если $\mathcal{G}_\alpha \cap \mathcal{G}_{\overline{0}} \neq \varnothing$ (соответственно $\mathcal{G}_\alpha \cap \mathcal{G}_{\overline{1}} \neq \varnothing$). Множества четных и нечетных корневых векторов обозначаются $\Phi_{\overline{0}}$ и $\Phi_{\overline{1}}$ и $\Phi(\mathcal{G}) = \Phi_{\overline{0}} \cup \Phi_{\overline{1}}$. Заметим, что корневой вектор может быть одновременно четным и нечетным, например это происходит в случае супералгебр $Q(n)$. Для матричных супералгебр Ли $\mathcal{G} \subset \ell(m,n)$ в пространстве V_r, с помощью суперследа (1.185), можно определить инвариантную метрику Киллинга

$$g_{ij} = \mathrm{Str}\,(H_i\,H_j). \tag{1.195}$$

Для супералгебр Ли, рассмотренных выше, корневые системы имеют следующие свойства.

1. $\mathcal{G}_{\alpha=0} = \mathcal{H}$.
2. Для $\alpha \neq 0$ имеем $\dim(\mathcal{G}_\alpha) = 1$ (кроме супералгебры $A(1|1)$).
3. $[E_\alpha, E_\beta\} = E_{\alpha+\beta} \neq 0$, только если $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Phi(\mathcal{G})$ (кроме $A(1|1)$).
4. $\mathrm{Str}(E_\alpha E_\beta) = 0$, если $\beta \neq -\alpha$.
5. Если $\alpha \in \Phi_{\bar{a}}(\mathcal{G})$, то $-\alpha \in \Phi_{\bar{a}}(\mathcal{G})$, где $a = 0, 1$.
6. Если $\alpha \in \Phi(\mathcal{G})$, то $2\alpha \in \Phi(\mathcal{G})$, только если $\alpha \in \Phi_{\bar{1}}(\mathcal{G})$.

Корневые векторы супералгебр Ли классического типа не удовлетворяют многим свойствам корневых векторов простых алгебр Ли. Например, метрика (1.195), как правило, оказывается псевдоевклидовой, что приводит к наличию корневых векторов нулевой длины. Корневые векторы супералгебр Ли классического типа (в том числе простые корни) можно разбить на 3 класса.

- Векторы α такие, что $(\alpha, \alpha) \neq 0$ и 2α не корень, называются четными. Четные простые корни на диаграммах Дынкина обозначаются белыми кружками.
- Векторы α такие, что $(\alpha, \alpha) \neq 0$ и 2α — корень, называются нечетными ненулевой длины. Простые корни такого типа на диаграммах Дынкина обозначаются черными кружками.
- Векторы α такие, что $(\alpha, \alpha) = 0$, называются нечетными нулевой длины. Простые корни такого типа на диаграммах Дынкина обозначаются серыми (перечеркнутыми) кружками.

Корневые системы для супералгебр Ли классического типа, которые были рассмотрены выше, приведены в следующей таблице.

Супералгебра	Четные корни, $\Phi_{\bar{0}}$	Нечетные корни, $\Phi_{\bar{1}}$
$A(m-1, n-1)$	$\varepsilon_i - \varepsilon_j, \delta_i - \delta_j$	$\pm(\varepsilon_i - \delta_j)$
$B(m, n)$	$\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, \pm\varepsilon_i, \pm\delta_i \pm \delta_j, \pm 2\delta_i$	$\pm\varepsilon_i \pm \delta_j, \pm\delta_i$
$B(0, n)$	$\pm\delta_i \pm \delta_j, \pm 2\delta_i$	$\pm\delta_i$
$C(n+1)$	$\pm\delta_i \pm \delta_j, \pm 2\delta_i$	$\pm\varepsilon_i \pm \delta_j$
$D(m, n)$	$\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, \pm\delta_i \pm \delta_j, \pm 2\delta_i$	$\pm\varepsilon_i \pm \delta_j$

Здесь для супералгебр $A(m-1, n-1)$, $B(m, n)$, $D(m, n)$ мы положили $\varepsilon_i = e_i$ $(i = 1, \dots, m)$, $\delta_i = e_{m+i}$ $(i = 1, \dots, n)$ $(i \neq j)$ и для супералгебры $C(n+1)$ индексы $i \neq j$ пробегают от 1 до n для векторов δ. Корневые системы, приведенные в данной таблице, получаются так же, как и корневые системы простых алгебр Ли $sl(n), so(n), sp(2n)$ (см. п. 1.6) с учетом условий (1.192) и вида матрицы (1.193).

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ

2.1. Представления и веса

Рассмотрим алгебру Ли $\mathcal{G}$ с базисом X_a $(a = 1, \dots, \dim\mathcal{G})$.

Определение 2.1. *Линейное отображение T векторных пространств: $\mathcal{G} \to \mathrm{Mat}_N$ (из алгебры Ли $\mathcal{G}$ в алгебру $(N \times N)$ матриц Mat_N) называется представлением, если T — гомоморфизм:*

$$T([X_a, X_b]) = [T(X_a), T(X_b)], \tag{2.1}$$

где в правой части квадратные скобки $[.,.]$ обозначают коммутатор матриц. Размерность матриц N называется размерностью представления.

Так как отображение T линейно, то левая часть (2.1), согласно (1.3), равна $C^d_{ab} T(X_d)$ и равенство (2.1) переписывается в виде $[T(X_a), T(X_b)] = C^d_{ab} T(X_d)$.

Два представления T и T' алгебры Ли $\mathcal{G}$ называются *эквивалентными*, если существует невырожденная матрица A такая, что $AT(s)A^{-1} = T'(s)$ $(\forall s \in \mathcal{G})$, т. е. представления T и T' связаны преобразованием подобия.

Представление T называется *приводимым*, если оно эквивалентно представлению T', все матрицы которого имеют блочный вид

$$T'(s) = \begin{pmatrix} T_1(s) & B(s) \\ 0 & T_2(s) \end{pmatrix} \quad (\forall s \in \mathcal{G}),$$

где размерность блока $T_1(s)$ равна $m < N$, размерность блока $T_2(s)$ равна $(N-m)$, а прямоугольный $m \times (N-m)$ блок $B(s) \neq 0$. Из гомоморфности отображения T' следует, что отображение T_1 определяет представление алгебры Ли $\mathcal{G}$ меньшей размерности $m < N$, а отображение T_2 задает ко-представление размерности $(N-m)$.

Представление T называется вполне приводимым (или разложимым), если оно эквивалентно представлению T', все матрицы которого имеют блочно-диагональный вид

$$T'(s) = \begin{pmatrix} T_1(s) & 0 \\ 0 & T_2(s) \end{pmatrix} \quad (\forall s \in \mathcal{G}).$$

В этом случае отображения T_1, T_2 определяют два представления алгебры Ли $\mathcal{G}$ меньшей размерности.

Ограничимся изучением конечномерных неприводимых представлений полупростой АЛ $\mathcal{G}$ с невырожденной и положительно определенной метрикой Киллинга g_{ab} (1.9). Выберем в АЛ $\mathcal{G}$ базис Картана–Вейля $\{H_i, E_\alpha\}$ и рассмотрим N-мерное представление T, в котором этот базис реализуется матрицами $\{T(H_i), T(E_\alpha)\}$. В дальнейшем мы будем опускать символ T в формулах и считать элементы $\{H_i, E_\alpha\}$ матрицами, действующими в соответствующем векторном пространстве $\mathcal{V}$ представления T. Выберем в пространстве $\mathcal{V}$ базис, который реализуется собственными векторами операторов H_i, образующих подалгебры Картана. Другими словами, каждый базисный вектор в пространстве $\mathcal{V}$ есть собственный вектор одновременно для всех операторов H_i $(i = 1, \ldots, r)$.

Пусть $|\mu\rangle$ — такой базисный вектор, тогда мы имеем

$$H_i\,|\mu\rangle = \mu_i\,|\mu\rangle \quad (i = 1, \ldots, r), \tag{2.2}$$

т. е. базисные элементы в $\mathcal{V}$ характеризуются r-компонентными векторами $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r)$, которые называются *весами*.

Для того чтобы перейти к детальному обсуждению конечномерных неприводимых представлений простых алгебр Ли, кратко перечислим свойства весов μ_i (2.2).

A. Каждое представление имеет хотя бы один вес. Действительно, оператор H_1 в пространстве представления $\mathcal{V}$ имеет по крайней мере один собственный вектор, собственное значение которого обозначим μ_1. Подпространство собственных векторов $|\mu_1\rangle$: $H_1|\mu_1\rangle = \mu_1|\mu_1\rangle$ с собственным значением μ_1 обозначим $\mathcal{V}_1$. Так как

$$H_1 H_2|\mu_1\rangle = H_2 H_1|\mu_1\rangle = \mu_1 H_2|\mu_1\rangle, \tag{2.3}$$

то $H_2|\mu_1\rangle \in \mathcal{V}_1$. Оператор H_2 имеет хотя бы один собственный вектор $|\mu_1, \mu_2\rangle \in \mathcal{V}_1$ такой, что $H_2|\mu_1, \mu_2\rangle = \mu_2|\mu_1, \mu_2\rangle$. Обозначим подпространство в $\mathcal{V}_1$ собственных векторов H_2 с собственным значением μ_2 как $\mathcal{V}_2$. Продолжая этот процесс, мы придем к определению подпространства $\mathcal{V}_r$, которое составлено из собственных векторов всех операторов $H_1, H_2, \ldots, H_r$, соответствующих весу $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r)$.

B. В пространстве представления $\mathcal{V}$ собственные векторы операторов H_1, H_2, $\ldots, H_r$, имеющие разные веса μ, линейно независимы. Для доказательства этого факта рассмотрим собственные векторы $|u_1\rangle, |u_2\rangle, \ldots, |u_\ell\rangle$:

$$H_i|u_k\rangle = \mu_i^{(k)}|u_k\rangle.$$

Пусть $|u\rangle$ — еще один собственный вектор с весом $\mu \neq \mu^{(k)}$ $(\forall k)$, причем такой, что $|u\rangle = \sum\limits_k |u_k\rangle$. Подействуем на обе части этого равенства оператором $\prod_k \xi^i(H_i - \mu_i^{(k)})$, где ξ^i — произвольные коэффициенты. Тогда в правой части мы получим ноль, а равенство нулю левой части эквивалентно (в силу произвольности коэффициентов ξ^i) $|u\rangle = 0$. Это и доказывает линейную независимость собственных векторов с разными весами. Отсюда следует, что в данном представлении имеется не более $N = \dim \mathcal{V}$ различных весов.

C. Если $|\mu\rangle \in \mathcal{V}$ — вектор с весом μ, то ненулевые векторы $H_i|\mu\rangle$ и $E_\alpha|\mu\rangle$ имеют определенные веса μ и $(\mu + \alpha)$ соответственно. Для $H_i|\mu\rangle$ это утверждение следует из соотношений, аналогичных (2.3). Для $E_\alpha|\mu\rangle$ мы имеем

$$H_i\, E_\alpha|\mu\rangle = [H_i, E_\alpha]\,|\mu\rangle + E_\alpha H_i|\mu\rangle = (\alpha_i + \mu_i)\, E_\alpha|\mu\rangle. \tag{2.4}$$

В неприводимом представлении T, действуя на весовой вектор $|\mu\rangle \neq 0$ произведениями корневых операторов E:

$$\ldots\, E_\delta E_\gamma E_\beta E_\alpha|\mu\rangle,$$

мы получаем множество векторов, на которое натягивается все пространство неприводимого представления. Поскольку представление T неприводимо, то все его веса $\mu^{(i)}$ получаются друг из друга добавлением корней (положительных или отрицательных). Вектор $|\mu\rangle$, из которого порождается все пространство представления, называется *циклическим* (само представление при этом тоже называется циклическим).

Отметим, что веса могут быть вырожденными, т. е. могут существовать несколько векторов с одним и тем же весом. Например, весовой вектор $|\mu\rangle$ и ненулевой вектор $E_\alpha E_\beta E_\gamma|\mu\rangle$ $(\alpha + \beta + \gamma = 0)$, вообще говоря, различны, но имеют один и тот же вес μ.

Определение 2.2. *Число линейно независимых векторов с одним и тем же весом называется кратностью этого веса. Если кратность веса равна* 1, *то данный вес называется простым.*

Очевидно, что все веса для алгебры Ли $sl(2)$ (имеющей единственный корень) — простые. Это, в частности, следует из того факта, что $E_\alpha E_{-\alpha}|\mu\rangle \sim |\mu\rangle$ (см. свойство **D**).

D. Утверждение 2.1. *Для любого веса μ, принадлежащего конечномерному представлению АЛ $\mathcal{G}$, и корня α число $2(\mu,\alpha)/(\alpha,\alpha)$ — целое:*

$$\frac{2(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbf{Z}, \tag{2.5}$$

а вектор

$$\sigma_\alpha(\mu) = \mu - \frac{2(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha, \tag{2.6}$$

получающийся в результате отражения вектора μ относительно плоскости $P_\alpha \perp \alpha$, снова вес.

Доказательство. Доказательство практически аналогично доказательству теоремы 1.1, за исключением нюанса, связанного с тем, что веса могут быть не простыми. Ниже мы отметим только различия в доказательствах.

Мы начнем с вектора $|u_0\rangle$, имеющего вес μ, и такого, что $(\mu+\alpha)$ не вес. Теперь построим цепочку векторов

$$|u_1\rangle = E_{-\alpha}|u_0\rangle,\ \ |u_2\rangle = E_{-\alpha}|u_1\rangle, \ldots,\ \ |u_{k+1}\rangle = E_{-\alpha}|u_k\rangle, \ldots \tag{2.7}$$

Понятно, что

$$H_i|u_k\rangle = (\mu_i - k\alpha_i)|u_k\rangle, \tag{2.8}$$

т. е. вес вектора $|u_k\rangle$ равен $\mu^{(k)} = \mu - k\alpha$. Далее соотношение

$$E_\alpha|u_{k+1}\rangle = m_{k+1}|u_k\rangle, \tag{2.9}$$

которое, в силу возможной кратности весов, не так очевидно, как его аналог (1.36), может быть доказано по индукции. Предположим, что (2.9) справедливо для некоторого $k-1$, тогда

$$\begin{aligned} E_\alpha|u_{k+1}\rangle &= E_\alpha E_{-\alpha}|u_k\rangle = [E_\alpha, E_{-\alpha}]|u_k\rangle + E_{-\alpha}E_\alpha|u_k\rangle = \\ &= H_\alpha|u_k\rangle + m_k E_{-\alpha}|u_{k-1}\rangle = ((\mu,\alpha) - k(\alpha,\alpha) + m_k)\,|u_k\rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (2.9) справедливо для k, если оно справедливо для $k-1$, и мы имеем

$$m_{k+1} = (\mu,\alpha) - k(\alpha,\alpha) + m_k, \tag{2.10}$$

что соответствует (1.38). Так как $(\mu+\alpha)$ не вес, то $E_\alpha|u_0\rangle = 0$ и (2.9) справедливо для $k+1=0$, $m_0 = 0$ (база индукции). Если представление конечномерно, то процедура (2.7) должна обрываться на некотором шаге $k=j$, т. е. $|u_{j+1}\rangle = 0$. Тогда

из (2.9) следует $m_{j+1} = 0$. Итак, мы получаем обобщение формул (1.39), (1.40):

$$m_k = k(\mu,\alpha) - \frac{k(k-1)}{2}(\alpha,\alpha), \quad \frac{2(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = j \tag{2.11}$$

для случая весов μ таких, что $(\mu+\alpha)$ не вес. Оставшаяся часть доказательства совпадает с соответствующей частью в доказательстве теоремы 1.1. ■

Следствие. С учетом формул (2.11), соотношение (2.9) переписывается в виде

$$E_\alpha E_{-\alpha}|u_k\rangle = \frac{(\alpha,\alpha)}{2}(k+1)(j-k)\,|u_k\rangle \quad (k=0,\ldots,j), \tag{2.12}$$

где $E_\alpha|u_0\rangle = 0 = E_{-\alpha}|u_j\rangle$, а веса векторов $|u_k\rangle$ определены в (2.8).

E. Пусть среди весов $\mu^{(k)}$, соответствующих векторам $|u_k\rangle$ (2.7), имеются не простые веса. Выберем наименьшее k, для которого вес $\mu^{(k)}$ имеет кратность > 1. Следовательно, имеется вектор $|v_k\rangle$ с весом $\mu^{(k)}$, ортогональный $|u_k\rangle$ и такой, что $E_\alpha|v_k\rangle = 0$ (иначе, так как $E_\alpha|v_k\rangle \neq |u_{k-1}\rangle$, вес $\mu^{(k-1)}$ также был бы не простой, что противоречит выбору k). Таким образом, для вектора $|v_k\rangle$ мы можем повторить процедуру **D** построения струны весов вдоль корня α, симметричную относительно плоскости P_α. Данную процедуру можно повторить для всех векторов, имеющих не простые веса $\mu^{(k)}$, и тем самым продемонстрировать полную симметричность системы весов относительно гиперплоскости P_α. Это, в частности, означает, что веса $\mu^{(k)}$ и $\mu^{(k)} - (2(\mu^{(k)},\alpha))/(\alpha,\alpha)$, симметричные относительно гиперплоскости P_α, имеют одинаковую кратность.

Все возможные веса принадлежат решетке Λ, которая инвариантна относительно преобразований (2.6) из группы W (группы Вейля), образованной отражениями относительно гиперплоскостей, проходящих через начало координат и перпендикулярных корням АЛ $\mathcal{G}$.

Определение 2.3. *Веса, которые получаются друг из друга отражениями (2.6) из группы W и, таким образом, имеют одинаковую кратность, называются эквивалентными.*

Пример 1. Для алгебры $sl(r+1)$ (A_r-серия) корневые векторы определены в (1.80) и мы имеем (при определенной нормировке метрики, см. (1.82), (1.83)) $(\alpha,\alpha) = |e^{(i)} - e^{(k)}|^2 = 2$. Веса μ

должны лежать в корневом пространстве $\Phi_{su(r+1)}$, и их можно разложить по базису

$$\mu = \sum_{s=1}^{r+1} m_s\, e^{(s)}, \tag{2.13}$$

где $\sum\limits_{s=1}^{r+1} m_s = 0$. Кроме того, веса μ должны удовлетворить (2.5), что приводит к дополнительному условию на коэффициенты m_i:

$$\frac{2(\mu, e^{(i)} - e^{(k)})}{2} = m_i - m_k \in \mathbf{Z}. \tag{2.14}$$

В соответствии с **E** вес, эквивалентный μ (2.13), имеет вид

$$\mu - (m_i - m_k)(e^{(i)} - e^{(k)}) = \sum_{\substack{s=1\\ s\neq k,i}}^{r+1} m_s\, e^{(s)} + m_k e^{(i)} + m_i e^{(k)}, \tag{2.15}$$

т. е. координаты m_i и m_k переставились местами и, следовательно, группа W — есть группа перестановок S_{r+1} компонент m_i (см. (1.172)).

Пример 2. Для алгебры $so(2r+1)$ (B_r-серия) корневая система имеет вид (1.101) и, в дополнение к условию $m_i - m_k \in \mathbf{Z}$, мы имеем условие $2(\mu, e^{(i)}) \in \mathbf{Z}$. Следовательно, компоненты любого веса должны быть целыми или полуцелыми числами:

$$m_i \in \mathbf{Z}/2. \tag{2.16}$$

Группа W есть группа всех перестановок компонент m_i вместе с любым числом изменений их знаков.

Пример 3. Для алгебры $sp(2r)$ (C_r-серия) корневая система имеет вид (1.110), поэтому в качестве дополнительного условия мы имеем $2(\mu, 2e^{(i)})/4 \in \mathbf{Z}$, что эквивалентно требованию $m_i \in \mathbf{Z}$. Группа W для C_r-серии совпадает с группой W для B_r-серии.

Пример 4. Для алгебры $so(2r)$ (D_r-серия) корневая система имеет вид (1.99), так что $m_i \pm m_k \in \mathbf{Z}$. Следовательно, веса те же, что и в случае B_r-серии, но группа W есть группа всех перестановок компонент m_i с четным числом изменений их знаков.

2.2. Решетки весов

Напомним, что образующая $H_\alpha = 2(\alpha^i H_i)/\alpha^2$ (1.30) алгебры $sl(2)$ может иметь только целые собственные значения. Тогда

в силу соотношения

$$H_\alpha\,|\mu\rangle = \frac{2(\mu, \alpha)}{\alpha^2}\,|\mu\rangle \tag{2.17}$$

величина $2(\mu, \alpha)/\alpha^2$ должна быть целым числом для всех корней α (см. (2.5), свойство **D** из п. 2.1). Это единственное условие, которое налагается на разрешенные веса.

Заметим, что если μ — корень, то условие (2.5) выполняется.

Таким образом, все корни являются весами, но не все веса есть корни.

Возьмем теперь простые корни $\{\alpha^{(i)}\}$. В соответствии с (2.5) для любого веса μ мы имеем

$$\frac{2(\mu, \alpha^{(i)})}{(\alpha^{(i)})^2} = m^i \in \mathbf{Z}. \tag{2.18}$$

Веса $\lambda_{(i)}$ $(i = 1, \ldots, r)$, удовлетворяющие соотношениям

$$\frac{2(\lambda_{(i)}, \alpha^{(j)})}{(\alpha^{(j)})^2} = \delta_i^j, \tag{2.19}$$

называются *фундаментальными* весами. Пользуясь (2.18) и (2.19), мы получаем

$$2(\mu - \sum_{i=1}^{r} m^i \lambda_{(i)}, \alpha^{(j)})/(\alpha^{(j)})^2 = 0. \tag{2.20}$$

Так как простые корни $\{\alpha^{(i)}\}$ образуют полную систему векторов в r-мерном евклидовом пространстве (метрика g_{ij} евклидова для компактных АЛ), то из (2.20) следует, что

$$\mu = \sum_{i=1}^{r} m^i \lambda_{(i)}, \quad m^i \in \mathbf{Z}, \tag{2.21}$$

и, следовательно, любой вес μ разлагается по фундаментальным весам с целочисленными коэффициентами. Такой квантованный спектр весов есть замечательное свойство компактных АЛ.

Итак, уравнение (2.21) показывает, что все разрешенные веса лежат на решетке Λ, которая определяется фундаментальными весами $\lambda_{(i)}$ и называется весовой решеткой. Докажем теперь, что справедливо и обратное утверждение.

Утверждение 2.2. *Любая точка весовой решетки Λ соответствует некоторому весу. Другими словами, если вектор μ такой, что*

$$\mu = \sum_{i=1}^{r} \ell^i \lambda_{(i)}, \tag{2.22}$$

где $\ell^i \in \mathbf{Z}$, то μ — вес.

Доказательство. Мы должны доказать, что для вектора (2.22) выполняется условие (2.5). Для каждого корня α определим ко-корень $\alpha^\vee = \alpha/\alpha^2$. Далее заметим, что ко-корни $\alpha^\vee$ могут быть записаны как целочисленные суммы простых ко-корней $\dfrac{\alpha^{(i)}}{(\alpha^{(i)})^2}$:

$$\frac{\alpha}{\alpha^2} = \sum_{i=1}^{r} m_i \frac{\alpha^{(i)}}{(\alpha^{(i)})^2}, \quad m_i \in \mathbf{Z}. \tag{2.23}$$

Действительно, любой r-мерный вектор разлагается по базису ко-корней, а целочисленность m_i следует из равенства $m_i = \dfrac{2(\alpha, \lambda_{(i)})}{\alpha^2}$, которое выводится из (2.23) с помощью формулы (2.19). Тогда имеем

$$\frac{2(\mu,\alpha)}{\alpha^2} = \sum_{i,j=1}^{r} m_i \ell^j \frac{(2\lambda_{(j)}, \alpha^{(i)})}{(\alpha^{(i)})^2} = \sum_{i=1}^{r} m_i \ell^i, \tag{2.24}$$

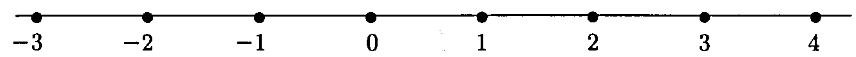
где мы снова воспользовались (2.19). Правая часть (2.24) есть целое число, так как $m_i, \ell^j \in \mathbf{Z}$, и, следовательно, μ — вес. ■

Корни АЛ $\mathcal{G}$ удовлетворяют условиям весов и, следовательно, принадлежат весовой решетке Λ. Решетка Λ_r, образованная простыми корнями $\alpha^{(i)}$, называется корневой решеткой и формирует подрешетку в Λ, т. е. $\Lambda_r \in \Lambda$. Решетка Λ может рассматриваться как абелева группа сдвигов в r-мерном пространстве, а решетка Λ_r образует инвариантную подгруппу в Λ. Оказывается, что фактор-группа Λ/Λ_r совпадает с центром $Z(\widetilde{G})$ накрывающей группы $\widetilde{G}$, имеющей АЛ $\mathcal{G}$.

Для неприводимого (циклического) представления, начиная с любого элемента базиса, скажем $|\mu\rangle$, мы можем получить любой другой элемент базиса, действуя на $|\mu\rangle$ корневыми образующими E_α. Другими словами, вектор $E_\gamma \ldots E_\beta E_\alpha|\mu\rangle$ принадлежит пространству неприводимого представления, порожденному из $|\mu\rangle$. Очевидно, что этот вектор имеет вес $(\mu + \alpha + \beta + \ldots + \gamma)$.

Таким образом (см. также п. 2.1 (**C**)), все веса неприводимого представления отличаются от некоторого фиксированного веса только целочисленной суммой корней или, другими словами, все эти веса принадлежат одному и тому же смежному классу из Λ/Λ_r.

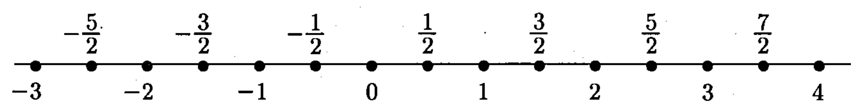
Пример 1. Для АЛ $sl(2)$ имеем единственный положительный корень $\alpha = 1$, и корневое пространство одномерно. Корневая решетка состоит из трансляций на единичный шаг, т. е. $\Lambda_r = \mathbf{Z}$:



Фундаментальный вес λ должен удовлетворять соотношению (см. (2.19))

$$\frac{2(\lambda,\alpha)}{\alpha^2} = 1 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{1}{2}. \tag{2.25}$$

Следовательно, весовая решетка задается полуцелыми шагами, или $\Lambda = \mathbf{Z}/2$:



Ясно, что $\Lambda_r \subset \Lambda$ и $\Lambda/\Lambda_r = Z_2$. Последний факт следует из того, что в Λ имеется только 2 неэквивалентных смежных класса: $\overline{0} = 0 + \Lambda_r = \Lambda_r$ и $\overline{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + \Lambda_r$, таблица умножения которых очевидно совпадает с таблицей умножения группы Z_2. Группа Z_2 образует центр в компактной группе $SU(2)$.

Пример 2. Для АЛ $sl(3)$ корневая решетка образуется двумя простыми корнями $\alpha^{(1)} = (2,0)$, $\alpha^{(2)} = (-1, \sqrt{3})$ (1.59). Соответствующие фундаментальные веса можно получить, решая уравнения

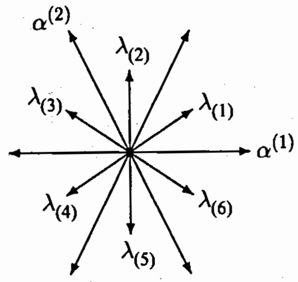
$$2\frac{(\alpha^{(i)}, \lambda_{(j)})}{(\alpha^{(i)})^2} = \delta^i_j \quad \Rightarrow \quad (\alpha^{(i)}, \lambda_{(j)}) = 2\,\delta^i_j \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_{(1)_x} = 1,\ \lambda_{(2)_x} = 0,\ -\lambda_{(1)_x} + \sqrt{3}\,\lambda_{(1)_y} = 0,\ -\lambda_{(2)_x} + \sqrt{3}\,\lambda_{(2)_y} = 2.$$

Таким образом, получаем векторы фундаментальных весов

$$\lambda_{(1)} = (\lambda_{(1)_x}, \lambda_{(1)_y}) = (1, \frac{1}{\sqrt{3}}), \quad \lambda_{(2)} = (\lambda_{(2)_x}, \lambda_{(2)_y}) = (0, \frac{2}{\sqrt{3}}), \tag{2.26}$$

которые вместе с корнями АЛ $sl(3)$ образуют следующую систему весов:



Веса $\lambda_{(1)}$, $\lambda_{(3)} = \lambda_{(1)} - \alpha^{(1)}$, $\lambda_{(5)} = \lambda_{(1)} - \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}$ соответствуют фундаментальному триплету, а $\lambda_{(2)}$, $\lambda_{(6)} = \lambda_{(2)} - \alpha^{(2)}$, $\lambda_{(4)} = \lambda_{(2)} - \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}$ — фундаментальному антитриплету. Очевидно, что решетка весов Λ, построенная по векторам $\lambda_{(i)}$, содержит подрешетку корней Λ_r, и фактор-группа $\Lambda/\Lambda_r = Z_3$. Действительно, мы имеем только три разных смежных класса $\overline{\lambda}_{(1)} = \lambda_{(1)} + \Lambda_r$, $\overline{\lambda}_{(2)} = \lambda_{(2)} + \Lambda_r$, $\overline{\lambda_{(1)} + \lambda_{(2)}} = \lambda_{(1)} + \lambda_{(2)} + \Lambda_r = \Lambda_r$ и таблица умножения этих классов совпадает с таблицей Z_3, в чем легко убедиться, заметив, что (см. (1.59) и (2.26)) $2\lambda_{(1)} = \lambda_{(2)} + \alpha^{(1)} \in \overline{\lambda}_{(2)}$ и $3\lambda_{(1)} = 2\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} \in \Lambda_r$. Группа Z_3 образует центр в компактной группе $SU(3)$.

Замечание. Фундаментальные веса $\lambda^{\vee}_{(i)}$ для дуальной АЛ $\mathcal{G}^{\vee}$ (см. п. 1.9) определяются соотношениями

$$\frac{(\lambda^{\vee}_{(i)}, \alpha^{(j)\vee})}{(\alpha^{(j)\vee})^2} = \delta^i_j \quad \Rightarrow \quad (\lambda^{\vee}_{(i)}, \alpha^{(j)}) = \delta^i_j. \tag{2.27}$$

Сравнивая последнее соотношение в (2.27) с (2.19), мы получаем векторы

$$\lambda^{\vee}_{(i)} = \frac{\lambda_{(i)}}{(\alpha^{(j)})^2}, \tag{2.28}$$

которые также называются фундаментальными ко-весами АЛ $\mathcal{G}$.

2.3. Классификация неприводимых конечномерных представлений

Определение 2.4. *Вес λ называется старшим, если $(\lambda + \alpha)$ не есть вес для всех положительных корней α.*

Теорема 2.1. *Если представление неприводимо, то его старший вес простой.*

Доказательство. Пусть $|\mu^{(0)}\rangle$ — вектор со старшим весом $\mu^{(0)}$. В соответствии с (2.4) из п. 2.1 **(С)** необходимо доказать, что любой вектор вида

$$\ldots E_\delta E_\gamma E_\beta E_\alpha |\mu^{(0)}\rangle \tag{2.29}$$

с тем же весом $\mu^{(0)}$ может быть записан как $k\,|\mu^{(0)}\rangle$, где k — константа. Как мы увидим, эта константа зависит только от последовательности корней $\ldots, \delta, \gamma, \beta, \alpha$ и от старшего веса $\mu^{(0)}$. Из п. 2.1 **(С)** следует, что $\ldots + \delta + \gamma + \beta + \alpha = 0$. Поэтому по крайней мере один из корней должен быть положительным. Пусть первый (справа) положительный корень будет, скажем, γ. Заменяя $E_\gamma E_\beta$ на $[E_\gamma, E_\beta] + E_\beta E_\gamma$ и т. д. до тех пор, пока E_γ не подействует на $|\mu^{(0)}\rangle$, и вспоминая, что $E_\gamma |\mu^{(0)}\rangle = 0$, мы получаем сумму векторов с тем же весом $\mu^{(0)}$, но с меньшим числом операторов E, чем в (2.29) (так как $[E_\gamma, E_\beta]$ есть линейная комбинация операторов E_α). Продолжая этот процесс до тех пор, пока более не останется операторов E с положительными корнями, мы придем к сумме произведений H_i, действующих на $|\mu^{(0)}\rangle$, что в конечном итоге превращается в полином от компонент $\mu^{(0)}$, умноженный на $|\mu^{(0)}\rangle$. Коэффициенты этого полинома очевидно зависят только от набора корней $\ldots, \delta, \gamma, \beta, \alpha$. ■

Теорема 2.2. *Два неприводимых представления T и T' АЛ $\mathcal{G}$ эквивалентны, если их старшие веса равны.*

Доказательство. Мы будем различать два представления T и T', используя нештрихованные обозначения для объектов из T и штрихованные для T'. Пусть $|u_0\rangle$ и $|u_0\rangle'$ — векторы с одинаковым старшим весом $\mu^{(0)}$ для обоих представлений. Построим все возможные векторы $(j = 1, 2, 3, \ldots)$

$$|u_j\rangle = \ldots E_\delta E_\gamma E_\beta E_\alpha |u_0\rangle, \quad |u_j\rangle' = \ldots E'_\delta E'_\gamma E'_\beta E'_\alpha |u_0\rangle'$$

для T и T' соответственно. Как было отмечено в п. 2.1 **(С)** эти векторы порождают все пространство представлений T и T' и имеют определенные веса. Эквивалентность T и T' будет доказана, если мы покажем, что любое линейное соотношение для нештрихованных векторов будет соответствовать такому же линейному соотношению (с теми же коэффициентами) для штрихованных векторов.

Пусть имеется соотношение

$$\gamma_0 |u_0\rangle + \gamma_1 |u_1\rangle + \ldots = 0,$$

тогда с теми же коэффициентами мы определим вектор

$$\gamma_0|u_0\rangle' + \gamma_1|u_1\rangle' + \ldots = |w\rangle'.$$

Все возможные векторы типа $|w\rangle'$ формируют линейное подпространство $\mathcal{V}_1'$ в пространстве представления $\mathcal{V}'$, которое инвариантно относительно действия АЛ $\mathcal{G}$. Так как T' неприводимо, то либо $\mathcal{V}_1' = 0$, и это доказывает теорему, либо $\mathcal{V}_1' = \mathcal{V}'$. Последняя альтернатива исключается, поскольку старший вектор $|u_0\rangle'$ не может принадлежать $\mathcal{V}_1'$, иначе $|u_0\rangle = 0$. ■

Примем соглашение, согласно которому веса представлений могут быть упорядочены. Говорят, что один вес *старше* другого, если разность между ними дается положительным корнем. При определенном выборе положительных корней вес $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots \ldots, \mu_r)$ оказывается положительным, если его первая, отличная от нуля компонента положительна.

Вес μ называется *доминантным*, если он старше всех своих эквивалентных весов (т.е. весов, полученных из μ с помощью вейлевских отражений), а это значит, что он лежит в положительной камере Вейля. Напомним, что вектор x лежит в положительной камере Вейля, если $(x, \alpha) \geqslant 0$ для всех положительных корней α. Напомним, что мы обсуждаем случай компактных полупростых АЛ.

Утверждение 2.3. *Старший вес λ автоматически является доминантным.*

Доказательство. Заметим, что если λ — вес, то и его вейлевское отражение $\sigma_\alpha(\lambda) = \lambda - \dfrac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$ тоже вес. Отсюда следует, что если λ — старший вес и α — положительный корень, то целые числа

$$\frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \geqslant 0 \qquad (2.30)$$

(иначе $\sigma_\alpha(\lambda)$ будет старше λ), т.е. $(\lambda, \alpha) \geqslant 0$ для всех положительных корней α и, следовательно, λ лежит в положительной камере Вейля. ■

Подставим в (2.30) в качестве α простые положительные корни $\alpha^{(i)}$. Тогда для старшего веса λ имеем

$$\frac{2(\lambda, \alpha^{(i)})}{(\alpha^{(i)}, \alpha^{(i)})} = n^i \geqslant 0, \qquad (2.31)$$

где n_i — целые неотрицательные числа. Пользуясь определением фундаментальных весов (2.19), мы получаем разложение старшего веса по фундаментальным:

$$\lambda = \sum_i n^i \lambda_{(i)} \quad (n^i \in \mathbf{Z}_+). \qquad (2.32)$$

Все выше сказанное приводит к формулировке важной теоремы, которую мы даем без доказательства.

Теорема 2.3. *Каждый вес λ весовой решетки Λ, находящийся в положительной камере Вейля, есть старший вес, которому соответствует единственное (с точностью до эквивалентности) неприводимое представление АЛ $\mathcal{G}$, т.е. неприводимые представления $\mathcal{G}$ могут быть пронумерованы точками подрешетки $\Lambda^+ = \{\lambda \in \Lambda | (\lambda, \alpha) \geqslant 0 \ \forall \alpha > 0\}$.*

Из этой теоремы и из формулы (2.32) следует, что старшие веса конечномерных неприводимых представлений характеризуются набором r положительных целых чисел n_i $(i = 1, \ldots, r)$, которые можно приписать вершинам диаграммы Дынкина. Кроме того, используют следующее типичное обозначение для неприводимых представлений:

$$D^{(\lambda)}_{\mu,\mu'}(\mathcal{G}) = D^{(n_1,\ldots,n_r)}_{\mu,\mu'}(\mathcal{G}), \qquad (2.33)$$

где $\lambda = (n_1, \ldots, n_r)$ — старший вес, а μ, μ' пробегают все возможные веса данного представления со старшим весом λ.

Пример 1. Веса для АЛ $sl(r+1)$ (A_r-серия) рассматривались в (2.13)–(2.15). Для корневой системы (1.80) компоненты λ_i доминантных весов, лежащих в положительной камере Вейля, должны удовлетворять неравенствам $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \lambda_{r+1}$. Фундаментальные веса можно выбрать [6] в виде следующих векторов в $(r+1)$-мерном пространстве:

$$\begin{aligned}
\lambda_{(1)} &= \left(\frac{r}{r+1}, -\frac{1}{r+1}, \ldots, -\frac{1}{r+1}\right), \\
\lambda_{(2)} &= \left(\frac{r-1}{r+1}, \frac{r-1}{r+1}, -\frac{2}{r+1}, \ldots, -\frac{2}{r+1}\right), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda_{(r)} &= \left(\frac{1}{r+1}, \frac{1}{r+1}, \ldots, \frac{1}{r+1}, -\frac{r}{r+1}\right).
\end{aligned} \qquad (2.34)$$

Действительно, легко проверить, что эти веса и корни (1.80) удовлетворяют соотношениям (2.19). Фундаментальные представления, соответствующие старшим весам (2.34), получаются как прямое произведение определяющих представлений, которые действуют на внешние произведения

$$\underbrace{\mathcal{V}_{r+1} \wedge \mathcal{V}_{r+1} \wedge \ldots \wedge \mathcal{V}_{r+1}}_{f}$$

(на полностью антисимметричные тензоры ранга f), где $\mathcal{V}_{r+1}$ — пространство определяющего представления. В общем случае можно показать, что тензоры ранга f, симметрия которых определяется разбиением $(f_1, f_2, \ldots, f_{r+1})$ числа $f = \sum_{i=1}^{r+1} f_i$, формируют базис представления со старшим весом λ, имеющим компоненты $\lambda_i = f_i - f/r + 1$.

Пример 2. Веса для АЛ $so(2r+1)$ (B_r-серия) определяются компонентами (2.16). Фундаментальные веса можно выбрать [6] в виде следующих векторов в r-мерном пространстве:

$$\lambda_{(1)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right), \quad \lambda_{(2)} = (1, 0, 0, \ldots, 0), \qquad (2.35)$$
$$\lambda_{(3)} = (1, 1, 0, \ldots, 0), \ \ldots, \quad \lambda_{(r)} = (1, 1, \ldots, 1, 0),$$

и легко проверить, что (2.32) выполняется, если положить $n_1 = 2\lambda_r$, $n_i = \lambda_{i-1} - \lambda_i$ $(i > 1)$. Также легко проверяется, что веса (2.35) и корни (1.101) удовлетворяют соотношениям (2.19). Можно показать, что фундаментальные представления со старшими весами (2.35) также соответствуют антисимметричным тензорам соответствующего ранга.

Выберем нормировку образующих X_a $(a = 1, \ldots, \dim\mathcal{G})$ АЛ $\mathcal{G}$ так, чтобы оператор $\widehat{C}_2 = X_a g^{ab} X_b$ в базисе Картана–Вейля записывался с помощью метрики (1.20) следующим образом:

$$\widehat{C}_2 = \sum_{i,j=1}^{r} H_i g^{ij} H_j + \sum_{\alpha} E_\alpha E_{-\alpha} \quad \left(= X_a g^{ab} X_b\right), \qquad (2.36)$$

где сумма $\sum_\alpha$ производится по всем корням α. Оператор (2.36) называется квадратичным оператором Казимира.

Утверждение 2.4. *Оператор Казимира (2.36) коммутирует со всеми образующими АЛ $\mathcal{G}$.*

Доказательство. Это утверждение легко проверить, если воспользоваться представлением $\widehat{C}_2$ в терминах образующих X_a:

$$[\widehat{C}_2, X_d] = [X_a g^{ab} X_b, X_d] =$$
$$= C^b_{ad} X_b g^{af} X_f + X_a g^{ab} C^f_{bd} X_f = (C_{adb} + C_{bda}) X^b X^a = 0,$$

где мы обозначили $X^a = g^{af} X_f$.

Приведем также доказательство этого утверждения и для представления $\widehat{C}_2$ в терминах образующих базиса Картана–Вейля. Равенство $[\widehat{C}_2, H_k] = 0$ очевидно следует из (1.23). А для коммутатора $[\widehat{C}_2, E_\beta]$, где β — произвольный корень, мы получаем

$$[\widehat{C}_2, E_\beta] = \sum_{i,j} [H_i g^{ij} H_j, E_\beta] + \sum_\alpha ([E_\alpha, E_\beta] E_{-\alpha} + E_\alpha [E_{-\alpha}, E_\beta]) =$$
$$= \sum_j \beta^j (H_j E_\beta + E_\beta H_j) + [E_{-\beta}, E_\beta] E_\beta + E_\beta [E_{-\beta}, E_\beta] +$$
$$+ \sum_{\alpha \neq \pm\beta} (N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta} E_{-\alpha} + E_\alpha N_{-\alpha,\beta} E_{\beta-\alpha}) =$$
$$= \sum_{\alpha \neq \pm\beta} (N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta} E_{-\alpha} + E_\alpha N_{-\alpha,\beta} E_{\beta-\alpha}).$$

Правую часть этой цепочки равенств можно переписать, сделав замену переменной суммирования $\alpha \to \alpha - \beta$ в первом слагаемом. В результате мы получаем

$$\sum_{\alpha \neq \pm\beta} (N_{\alpha-\beta,\beta} + N_{-\alpha,\beta}) E_\alpha E_{\beta-\alpha} = 0,$$

где равенство нулю следует из (1.46). ■

Так как оператор $\widehat{C}_2$ коммутирует со всеми образующими АЛ, то, согласно лемме Шура, этот оператор пропорционален единичной матрице в любом неприводимом представлении. Коэффициент пропорциональности характеризует данное неприводимое представление. В частности, для состояния $|\lambda\rangle$ со старшим весом λ мы получаем (так как $E_\alpha|\lambda\rangle = 0 \ \forall \alpha > 0$)

$$\widehat{C}_2|\lambda\rangle = \left(\sum_{i,j=1}^{r} H_i g^{ij} H_j + \sum_{\alpha>0} (E_\alpha E_{-\alpha} + E_{-\alpha} E_\alpha)\right) |\lambda\rangle =$$
$$= \left(\sum_{i,j=1}^{r} \lambda_i g^{ij} \lambda_j + \sum_{\alpha>0} [E_\alpha, E_{-\alpha}]\right) |\lambda\rangle = \left((\lambda, \lambda) + (\lambda, \sum_{\alpha>0} \alpha)\right) |\lambda\rangle \qquad (2.37)$$

(здесь H_i, E_α следует понимать как операторы $\rho_\lambda(H_i), \rho_\lambda(E_\alpha)$ в неприводимом представлении ρ_λ со старшим весом λ). Соответственно, для неприводимого представления ρ_λ, согласно лемме Шура, элемент $\widehat{C}_2$ пропорционален единичному оператору $\mathbf{1}$ и мы имеем

$$\rho_\lambda(\widehat{C}_2) = (\lambda, \lambda + 2\,\delta)\,\mathbf{1}, \tag{2.38}$$

где $(\lambda, \lambda + 2\,\delta)$ — собственное значение $\widehat{C}_2$ и мы использовали стандартное обозначение

$$\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0} \alpha. \tag{2.39}$$

Пример. Для АЛ $su(2)$, которая имеет единственный положительный корень $\alpha = 1$, мы получаем $\delta = 1/2$, и собственное значение элемента $\widehat{C}_2$ равно $\lambda(\lambda+1)$, где $\lambda \in \mathbf{Z}_+/2$ в силу (2.30).

Выберем нормировку образующих X_a в соответствии с формулой (2.36). Из (1.9) следует, что

$$\mathrm{Tr}_\lambda(\rho_\lambda(X_a)\rho_\lambda(X_b)) = g_\lambda\, g_{ab}, \tag{2.40}$$

где константа g_λ называется индексом представления ρ_λ. Вычислим константу g_λ. Для этого заметим, что

$$\mathrm{Tr}_\lambda(\rho_\lambda(X_a)\rho_\lambda(X_b))g^{ab} = \mathrm{Tr}_\lambda(\rho_\lambda(C_2)) = (\lambda, \lambda + 2\,\delta)\dim(\rho_\lambda), \tag{2.41}$$

где мы учли (2.38). С другой стороны, из (2.40) следует равенство

$$\mathrm{Tr}_\lambda(\rho_\lambda(X_a)\rho_\lambda(X_b))g^{ab} = g_\lambda \dim(\mathcal{G}).$$

Сравнивая это равенство и (2.41), окончательно получаем

$$g_\lambda = \frac{\dim(\rho_\lambda)}{\dim(\mathcal{G})}(\lambda, \lambda + 2\,\delta).$$

2.4. Кратности весов и формула Фрейденталя

Пусть λ — старший вес представления ρ_λ компактной АЛ $\mathcal{G}$, α — положительный корень АЛ $\mathcal{G}$ и μ — вес в представлении ρ_λ такой, что $(\mu + \alpha)$ не вес. Пусть кратность веса μ равна $\mathrm{mult}_\mu = n_0$. Рассмотрим набор базисных векторов $|u_0^{(0)}\rangle_a$ $(a = 1, \ldots, n_0)$ в пространстве V_μ векторов, имеющих вес μ. Для каждого из векторов $|u_0^{(0)}\rangle_a$ с весом μ мы можем построить

(согласно процедуре, использованной в утверждении 2.1) набор векторов (2.7):

$$|u_k^{(0)}\rangle_a \in V_{\mu-k\alpha} \quad \Big(k = 0, \ldots, j = \frac{2(\mu,\alpha)}{\alpha^2}\Big), \tag{2.42}$$

которые соответствуют струне весов $\mu_k = \mu - k\alpha$, расположенной вдоль корня α и симметричной относительно плоскости $P_\alpha \perp \alpha$.

Для каждого нового веса μ_m $(m = 1, \ldots, [j/2])$ в пространстве V_{μ_m} представления ρ_λ может существовать новый набор из n_m старших базисных векторов $\{|u_0^{(m)}\rangle_b \;:\; E_\alpha |u_0^{(m)}\rangle_b = 0\}$ $(b = 1, \ldots, n_m)$, не содержащийся в пространстве, натянутом на векторы $\{|u_m^{(0)}\rangle_a\}$ (2.42). Каждый из этих новых векторов порождает (согласно процедуре из утверждения 2.1) дополнительные последовательности весовых векторов

$$|u_k^{(m)}\rangle_b \in V_{\mu_{m+k}} \quad (k = 0, \ldots, j - 2m), \tag{2.43}$$

соответствующих более коротким струнам весов $\mu_{m+k} = \mu - (m+k)\alpha$, расположенным вдоль корня α и симметричным относительно P_α. Из вышесказанного следует, что полный базис в пространстве V_{μ_k} строится из векторов $|u_{k-m}^{(m)}\rangle_{b_m}$ $(m = 0, \ldots, k;\ b_m = 1, \ldots, n_m)$ и, соответственно, кратность веса μ_k равна сумме

$$\mathrm{mult}_{\mu_k} = \sum_{m=0}^{k} n_m \quad \left(k = 1, \ldots, \left[\frac{j}{2}\right]\right). \tag{2.44}$$

Введем дуальный к векторам $|u_k^{(m)}\rangle_a$ набор базисных векторов $\langle u_r^{(s)}|_b$, нормированный так, что $\langle u_r^{(s)}|_b\, |u_k^{(m)}\rangle_a = \delta_{ab}\,\delta_{rk}\,\delta^{sm}$. Теперь, пользуясь (2.12) и (2.43), можно вычислить диагональные элементы матрицы $\rho_\lambda(E_\alpha E_{-\alpha})$:

$$\langle u_{k-m}^{(m)}|_a\, \rho_\lambda(E_\alpha E_{-\alpha})|u_{k-m}^{(m)}\rangle_a = \frac{(\alpha,\alpha)}{2}(k-m+1)(j-m-k). \tag{2.45}$$

Утверждение 2.5. *Пусть $t(\mu',\alpha)$ — след ограничения оператора $\rho_\lambda(E_\alpha E_{-\alpha})$ на подпространство $V_{\mu'}$. Тогда*

$$t(\mu_k,\alpha) = \sum_{m=0}^{k}(\mu_m,\alpha)\,\mathrm{mult}_{\mu_m}, \tag{2.46}$$

$$t(\mu',\alpha) - t(\mu'+\alpha,\alpha) = (\mu',\alpha)\,\mathrm{mult}_{\mu'}, \tag{2.47}$$

где $\mu_m = (\mu - m\,\alpha)$ *и* $\mathrm{mult}_{\mu'}$ *— кратность корня* μ' *в представлении* ρ_λ.

Доказательство. Пользуясь (2.45), мы получаем равенство

$$t(\mu - k\alpha, \alpha) = \mathrm{Tr}_{V_{\mu_k}} \rho_\lambda(E_\alpha E_{-\alpha}) = \\ = \sum_{m=0}^{k}\sum_{a=1}^{n_m} \langle u^{(m)}_{k-m}|_a\, \rho_\lambda(E_\alpha E_{-\alpha})\, |u^{(m)}_{k-m}\rangle_a = \\ = \frac{(\alpha,\alpha)}{2}\sum_{m=0}^{k}(k-m+1)(j-m-k)n_m. \quad (2.48)$$

Подставляя в (2.48) выражение $n_m = \mathrm{mult}_{\mu_m} - \mathrm{mult}_{\mu_{m-1}}$, которое следует из (2.44) (мы полагаем $\mathrm{mult}_{\mu_{-1}} = 0$), получаем

$$t(\mu - k\alpha, \alpha) = \\ = \frac{(\alpha,\alpha)}{2}\sum_{m=0}^{k}(k-m+1)(j-m-k)(\mathrm{mult}_{\mu_m} - \mathrm{mult}_{\mu_{m-1}}) = \\ = \frac{(\alpha,\alpha)}{2}\Bigg((j-2k)\mathrm{mult}_{\mu_k} + \sum_{m=0}^{k-1}(k-m+1)(j-m-k)\mathrm{mult}_{\mu_m} - \\ - \sum_{m=0}^{k-1}(k-m)(j-m-1-k))\mathrm{mult}_{\mu_m}\Bigg) = \\ = \frac{(\alpha,\alpha)}{2}\sum_{m=0}^{k}(j-2m)\,\mathrm{mult}_{\mu_m}. \quad (2.49)$$

Это равенство переписывается в виде (2.46), если заметить, что

$$(\mu_m, \alpha) = (\mu - m\alpha, \alpha) = j\frac{(\alpha,\alpha)}{2} - m\,(\alpha,\alpha) = \frac{(\alpha,\alpha)}{2}\,(j-2m), \quad (2.50)$$

где мы воспользовались выражением для j, которое приведено в (2.11) и (2.42). Тождество (2.47) очевидно следует из (2.46). Действительно, из него вытекает соотношение

$$t(\mu_k, \alpha) - t(\mu_k + \alpha, \alpha) = (\mu_k, \alpha)\,\mathrm{mult}_{\mu_k}. \quad (2.51)$$

Если теперь положить $\mu' = \mu - k\alpha = \mu_k$, то равенство (2.51) переходит в (2.47). ■

Перепишем оператор Казимира (2.36) в виде

$$\widehat{C}_2 = (H,H) - \sum_{\alpha>0}(\alpha, H) + 2\sum_{\alpha>0} E_\alpha E_{-\alpha}. \quad (2.52)$$

Теперь мы можем воспользоваться тождеством (2.46) для того, чтобы вычислить след ограничения оператора $\rho_\lambda(\widehat{C}_2)$ на подпространство V_{μ_k}:

$$\mathrm{Tr}_{V_{\mu_k}}\rho_\lambda(\widehat{C}_2) = \mathrm{Tr}_{V_{\mu_k}}\left((H,H) - \sum_{\alpha>0}(\alpha,H) + 2\sum_{\alpha>0}E_\alpha E_{-\alpha}\right) = \\ = \left((\mu_k,\mu_k) - \sum_{\alpha>0}(\alpha,\mu_k)\right)\mathrm{mult}_{\mu_k} + 2\sum_{\alpha>0}\sum_{m=0}^{k}(\mu_m,\alpha)\,\mathrm{mult}_{\mu_m}. \quad (2.53)$$

Левую часть этого равенства можно вычислить другим способом, если воспользоваться тождеством (2.38):

$$\mathrm{Tr}_{V_{\mu_k}}\rho_\lambda(\widehat{C}_2) = (\lambda, \lambda+2\delta)\,\mathrm{Tr}_{V_{\mu_k}}(\mathbf{1}) = (\lambda,\lambda+2\delta)\,\mathrm{mult}_{\mu_k}. \quad (2.54)$$

Объединяя формулы (2.53) и (2.54), мы получаем рекуррентную формулу Фрейденталя для весов

$$((\lambda+\delta,\lambda+\delta) - (\mu_k+\delta,\mu_k+\delta))\,\mathrm{mult}_{\mu_k} = \\ = 2\sum_{\alpha>0}\sum_{m=0}^{k}(\mu_m,\alpha)\,\mathrm{mult}_{\mu_m}, \quad (2.55)$$

которая позволяет эффективно вычислять кратности всех весов представления ρ_λ, начиная с $\mathrm{mult}_\lambda = 1$.

2.5. Характеры для представлений компактных простых групп Ли

Неприводимые представления компактных групп Ли G строятся по неприводимым представлениям ρ_λ соответствующих АЛ. В теории компактных групп Ли G почти вся полезная информация о неприводимых представлениях ρ_λ может быть получена из характеров, которые определяются как функции на группе G:

$$\chi_\lambda(g) = \mathrm{Tr}_\lambda(\rho_\lambda(g)) = \sum_\mu D^{(\lambda)}_{\mu\mu}(g) \quad (\forall g \in G). \quad (2.56)$$

Здесь мы использовали обозначения (2.33). Заметим, что $\chi_\lambda(g) = \chi_\lambda(h\,g\,h^{-1})$ $(\forall h \in G)$, т. е. характер χ_λ — функция на классах сопряженных элементов группы G. Для компактных групп Ли, связанных с АЛ ранга r, классы сопряженных элементов параметризуются набором r параметров θ^i $(i = 1, \dots, r)$ так, что любой элемент $g \in G$ может быть представлен в виде

$$g = h\,\exp(\theta^i H_i)\,h^{-1}. \tag{2.57}$$

Заметим, однако, что различные наборы θ^i могут принадлежать одному и тому же классу сопряженных элементов. Действительно, согласно (1.64), мы имеем

$$S_\alpha\,\exp(\theta^i H_i)\,S_\alpha^{-1} = \exp\left(\sigma_\alpha(\theta), H\right), \tag{2.58}$$

$S_\alpha = \exp(i\pi T_2(\alpha))$ — оператор вейлевского отражения, связанный с корнем α. Отсюда следует, что характер $\chi_\lambda(g)$, который согласно (2.56), (2.57) можно записать в виде

$$\chi_\lambda(g) = \mathrm{Tr}_\lambda\left(\rho_\lambda(e^{\theta^i H_i})\right) = \sum_\mu \mathrm{mult}_\lambda(\mu)\,\exp(\mu^i H_i) \equiv \chi_\lambda(\theta) \tag{2.59}$$

(здесь сумма берется по всем весам μ в представлении ρ_λ и $\mathrm{mult}_\lambda(\mu)$ — кратность вырождения веса μ), обладает инвариантностью относительно вейлевских отражений $\chi_\lambda(\theta) = \chi_\lambda(\sigma_\alpha(\theta))$.

Формула (2.59) не очень удобна для вычисления характеров, так как для ее использования необходимо знать кратности $\mathrm{mult}_\lambda(\mu)$ для всех весов μ представления ρ_λ.

Формула (2.59) может быть приведена к более явному виду следующим образом. Введем в рассмотрение функцию

$$D_\delta(\theta) = \prod_{\alpha>0}\left(e^{(\alpha,\theta)/2} - e^{-(\alpha,\theta)/2}\right) = e^{(\delta,\theta)}\prod_{\alpha>0}\left(1 - e^{-(\alpha,\theta)}\right), \tag{2.60}$$

где произведение берется по всем положительным корням, а δ определено в (2.39). Можно показать, что имеет место так называемая формула Вейля для знаменателя $D_\delta(\theta)$:

$$e^{(\delta,\theta)}\prod_{\alpha>0}\left(1 - e^{-(\alpha,\theta)}\right) = \sum_{\sigma\in W}\varepsilon(\sigma)\exp(\sigma(\delta),\theta), \tag{2.61}$$

где сумма берется по всем элементам σ группы Вейля W, а $\varepsilon(\sigma) \equiv \det(\sigma) = \pm 1$ (см. формулу (1.66)) в зависимости от того, является ли σ четным или нечетным произведением отражений

$S_i = \sigma_{\alpha(i)}$. Наконец, пользуясь формулой для кратностей Фрейденталя (2.55), можно доказать тождество

$$D_\delta(\theta)\,\chi_\lambda(\theta) = D_{\delta+\lambda}(\theta), \tag{2.62}$$

откуда следует знаменитая формула Вейля для характеров

$$\chi_\lambda(\theta) = \frac{D_{\delta+\lambda}(\theta)}{D_\delta(\theta)} = \frac{\sum\limits_{\sigma\in W}\varepsilon(\sigma)\exp(\sigma(\delta+\lambda),\theta)}{D_\delta(\theta)}. \tag{2.63}$$

Заметим, что $\chi_\lambda(0) = \dim(\rho_\lambda)$. Так как в формуле (2.63) в пределе $\theta \to 0$ (в силу тождества $\sum\limits_{\sigma\in W}\varepsilon(\sigma) = 0$) получается неопределенность 0/0, то этот предел необходимо вычислять аккуратно. Положим $\theta = t\delta$. В этом случае, пользуясь тождеством (1.65), мы имеем равенство

$$\chi_\lambda(t\delta) = \frac{D_{\delta+\lambda}(t\delta)}{D_\delta(t\delta)} = \frac{D_\delta(t(\lambda+\delta))}{D_\delta(t\delta)} = \frac{\mathrm{sh}(\frac{t}{2}(\alpha,\delta+\lambda))}{\mathrm{sh}(\frac{t}{2}(\alpha,\delta))},$$

в котором теперь устремим $t \to 0$. В результате получаем формулу Вейля для размерности представления ρ_λ со старшим весом λ:

$$\dim(\rho_\lambda) = \lim_{t\to 0}\chi_\lambda(t\delta) = \lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{sh}(\frac{t}{2}(\alpha,\delta+\lambda))}{\mathrm{sh}(\frac{t}{2}(\alpha,\delta))} = \prod_{\alpha>0}\frac{(\lambda+\delta,\alpha)}{(\delta,\alpha)}. \tag{2.64}$$

Замечание 1. Формула для знаменателя (2.61) применима и в случае бесконечномерных алгебр Каца–Муди, для которых число корней бесконечно, а компоненты весов λ^i $(i = 1, \dots, r)$ все еще дискретны и вещественны. В этом случае формула (2.61) связывает бесконечную сумму и бесконечное произведение. Для $su(2)$-алгебры Каца–Муди (КМ) это соотношение есть не что иное, как хорошо известное тождество Якоби для эллиптических θ-функций. Для других алгебр КМ возникают обобщения этих тождеств. Для явного получения этих обобщений, однако, приходится производить подходящую регуляризацию расходящихся бесконечных сумм, возникающих в правых частях соотношения (2.61).

Замечание 2. Теория представлений алгебр Ли тесно связана с теорией представлений групп Ли. Более подробно о теории представлений групп Ли см. [5, 16].

3. АЛГЕБРЫ С ДЕЛЕНИЕМ. КВАТЕРНИОНЫ, ОКТОНИОНЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

3.1. Метрические и альтернативные алгебры

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная конечномерная алгебра с единицей, которую обозначим 1, над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$, в которой задано сопряжение (инволютивный автоморфизм) $a \to \overline{a}$ такое, что

$$\overline{a\,b} = \overline{b}\,\overline{a}, \quad \overline{\overline{a}} = a.$$

Определение 3.1. *Алгебру $\mathcal{A}$ над полем $\mathbf{R}$ будем называть метрической, если $a + \overline{a} \in \mathbf{R}\cdot 1$, $a\,\overline{a} \in \mathbf{R}\cdot 1$ и $a\overline{a} > 0$ ($\forall a \neq 0$).*

Пусть $\mathcal{A}$ — метрическая алгебра. Заметим, что $\forall a \in \mathcal{A}$ мы имеем $a\,\overline{a} = \overline{a}\,a$, так как

$$a\,\overline{a} = a\,(\overline{a} + a) - a^2 = (\overline{a} + a)\,a - a^2 = \overline{a}\,a.$$

Определим скалярное произведение в $\mathcal{A}$ по формулам

$$\langle a, b\rangle = \frac{1}{2}\,(a\,\overline{b} + b\,\overline{a}) = \langle b, a\rangle, \quad \langle a, b\rangle = \frac{1}{2}\,(\overline{a}b + \overline{b}a). \qquad (3.1)$$

Последнее равенство следует из $(a+b)\overline{(a+b)} = \overline{(a+b)}(a+b)$. Скалярное произведение (3.1) невырождено, поскольку из условия $\langle a, b\rangle = 0\ \forall b$ следует $a = 0$ (достаточно взять $b = a$ и вспомнить определение метрической алгебры).

Любой элемент $a \in \mathcal{A}$ можно представить в виде суммы

$$a = \frac{1}{2}\,(a + \overline{a}) + \frac{1}{2}\,(a - \overline{a}) = \lambda + b,$$

где $\lambda \in \mathbf{R}\cdot 1$, а $b \in \mathcal{A}'$ и $\mathcal{A}'$ обозначает линейное подпространство, ортогональное к $\mathbf{R}\cdot 1$, т. е. $\langle b, 1\rangle = 0$. Действительно, из определения (3.1) мы имеем

$$\langle b, 1\rangle = \frac{1}{2}\,\langle (a - \overline{a}), 1\rangle = \frac{1}{2}\,((a + \overline{a}) - (\overline{a} + a)) = 0.$$

Утверждение 3.1. *Пусть $\mathcal{A}$ — метрическая алгебра и $\forall x, y \in \mathcal{A}$ справедливы соотношения*

$$i)\ \ y\,(\overline{y}\,x) = (y\,\overline{y})\,x, \qquad ii)\ \ (x\,y)\,\overline{y} = x\,(y\,\overline{y}). \qquad (3.2)$$

Тогда выполняется равенство

$$\langle x\,y, z\rangle = \langle x, z\,\overline{y}\rangle \qquad (3.3)$$

(сопряжение элемента y относительно скалярного произведения (3.1)), и мы имеем

$$\langle x\,y, x\,y\rangle = \langle x, x\rangle\,\langle y, y\rangle, \qquad (3.4)$$

т. е. в алгебре $\mathcal{A}$ можно определить норму $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Обратное утверждение также верно, т. е. из (3.4) следуют равенства (3.3) и (3.2). Отметим, что условия i), ii) для ассоциативных алгебр выполняются автоматически.

Доказательство. Прежде всего заметим, что из определения скалярного произведения (3.1) и свойств i), ii) сразу же следует соотношение

$$\langle x\,y, y\rangle = \langle x, y\,\overline{y}\rangle. \qquad (3.5)$$

Теперь подставим в (3.5) $y \to y + z$. В результате получаем

$$\langle x\,y, z\rangle + \langle x\,z, y\rangle = \langle x, y\,\overline{z}\rangle + \langle x, z\,\overline{y}\rangle,$$

откуда, полагая $z = \overline{x}$ и учитывая (3.5), немедленно следует $\langle x\,y, \overline{x}\rangle = \langle x, \overline{x}\,\overline{y}\rangle$. Так как $\langle x\,y, 1\rangle = \langle x, \overline{y}\rangle$, то $\langle x\,y, (x + \overline{x})\rangle = \langle x, (x + \overline{x})\,\overline{y}\rangle$, и, следовательно, имеем

$$\langle x\,y, x\rangle = \langle x, x\,\overline{y}\rangle. \qquad (3.6)$$

Подставим сюда $x \to x + z$. В результате получаем равенство

$$\langle x\,(y - \overline{y}), z\rangle = \langle x, z\,(\overline{y} - y)\rangle,$$

которое эквивалентно (3.3) в силу $(y + \overline{y}) = \mathbf{R}\cdot 1$.

Положим $z = x\,y$ в (3.3), в результате получаем

$$\langle x\,y, x\,y\rangle = \langle x, (x\,y)\,\overline{y}\rangle. \qquad (3.7)$$

Далее в соответствии с ii) имеем $(x\,y)\,\overline{y} = x\,\langle y, y\rangle$, и, следовательно, (3.7) переписывается в виде искомого тождества (3.4):

$$\langle x\,y, x\,y\rangle = \langle x, z\,\overline{y}\rangle = \langle x, x\rangle\,\langle y, y\rangle.$$

Обратно, подставляя в (3.4) $x \to x + u$ или $y \to y + u$, получаем

$$\langle x\,y, u\,y\rangle = \langle x, u\rangle\,\langle y, y\rangle, \quad \langle x\,y, x\,u\rangle = \langle x, x\rangle\,\langle y, u\rangle, \qquad (3.8)$$

где первое соотношение при $z = uy$ дает (3.3), а второе при $z = xu$ эквивалентно

$$\langle x\,y, z\rangle = \langle y, \overline{x}\,z\rangle. \tag{3.9}$$

Дважды применяя (3.9), получаем

$$\langle x\,(\overline{x}\,y), z\rangle = \langle \overline{x}\,y, \overline{x}\,z\rangle = \langle x, x\rangle\,\langle y, z\rangle = \langle (x\,\overline{x})\,y, z\rangle \quad (\forall z),$$

откуда в силу невырожденности скалярного произведения следует i) (3.2). Условие ii) (3.2) получается аналогично. ■

Следствие. Соотношения i) и ii) (3.2) (а следовательно, и соотношения (3.4)) эквивалентны условиям альтернативности

$$(y\,y)\,x = y\,(y\,x), \quad x\,(y\,y) = (x\,y)\,y, \tag{3.10}$$

и из них следует условие эластичности

$$(x\,y)\,x = x\,(y\,x) \equiv x\,y\,x. \tag{3.11}$$

Действительно, условия альтернативности (3.10) эквивалентны (3.2) в силу равенства $(y + \overline{y}) = \mathbf{R}\cdot 1$. Условия эластичности можно получить из (3.10), если сделать замену $y \to y + z$. Тогда первое соотношение переписывается в виде

$$(y\,z)\,x + (z\,y)\,x = y\,(z\,x) + z\,(y\,x),$$

и, положив $z = x$, получаем (3.11).

Определение 3.2. *Алгебру $\mathcal{A}$ будем называть альтернативной, если $\forall x, y \in \mathcal{A}$ выполняются условия* (3.10).

Согласно следствию из утверждения 3.1, любая нормированная метрическая алгебра $\mathcal{A}$ с нормой $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ альтернативна. Из соотношений (3.10), (3.11) следует, что любая альтернативная алгебра с двумя образующими является ассоциативной (теорема Артина). Введем ассоциатор

$$(x, y, z) \equiv (x\,y)\,z - x\,(y\,z).$$

Условия альтернативности и эластичности имеют вид

$$(x, x, y) = 0 = (y, x, x), \quad (x, y, x) = 0,$$

и после подстановки $x \to x + z$ получаем

$$(x, z, y) = -(z, x, y) = (z, y, x) = -(y, z, x). \tag{3.12}$$

Таким образом, ассоциатор для альтернативной алгебры альтернирован (антисимметричен по перестановке любых двух аргументов) — это и объясняет название алгебры.

Для любой альтернативной алгебры выполняются тождества Муфанг

$$(x\,a\,x)\,y = x\,[a\,(x\,y)], \tag{3.13}$$

$$y\,(x\,a\,x) = [(y\,x)\,a]\,x, \tag{3.14}$$

$$(x\,y)\,(a\,x) = x\,(y\,a)\,x. \tag{3.15}$$

Первое тождество (3.13) доказывается следующим образом [18]:

$$\begin{aligned}
&(x\,a\,x)\,y - x\,[a\,(x\,y)] = \\
&\quad = (xa, x, y) + (x, a, xy) = -(x, xa, y) - (x, xy, a) = \\
&\quad = -[x\,(xa)]\,y + x\,[(xa)\,y] - [x\,(xy)]\,a + x\,[(xy)\,a] = \\
&\quad = -(x^2 a)\,y - (x^2 y)\,a + x\,[(xa)\,y + (xy)\,a] = \\
&= -(x^2, a, y) - (x^2, y, a) - x^2\,(a\,y) - x^2\,(y\,a) + x\,[(xa)\,y + (xy)\,a] = \\
&\quad = x\,[-x\,(a\,y) - x\,(y\,a) + (xa)\,y + (xy)\,a] = \\
&\quad = x\,[(x, a, y) + (x, y, a)] = 0.
\end{aligned}$$

Второе соотношение (3.14) можно получить из первого с помощью инволюции. Наконец, третье соотношение (3.15) доказывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
&(x\,y)\,(a\,x) - x\,(y\,a)\,x = (x, y, ax) + x\,[y\,(ax) - (ya)\,x] = \\
&\quad = -(x, ax, y) - x\,(y, a, x) = \\
&\quad = -(xax)\,y + x\,[(a\,x)\,y - (y,\ a, x)] = \\
&\quad = -x\,[a\,(x\,y) - (a\,x)\,y + (y, a, x)] = \\
&\quad = -x\,[-(a, x, y) + (y, a, x)] = 0.
\end{aligned}$$

3.2. Удвоение алгебр

Пусть задана метрическая алгебра $\mathcal{A}$. Расширим эту алгебру, добавив к ней еще один элемент e, причем так, что новая расширенная алгебра $\mathcal{A}^{(2)}$ опять будет метрической и e будет лежать в ортогональном дополнении к $\mathcal{A}$. Это значит, что задана инволюция $e \to \overline{e}$ и, кроме того,

$$\langle 1, e\rangle = \frac{1}{2}\,(\overline{e} + e) = 0 \;\Rightarrow\; \overline{e} = -e, \tag{3.16}$$

а также $\forall a \in \mathcal{A}$ мы имеем

$$\langle a, e\rangle = \frac{1}{2}\,(a\,\overline{e} + e\,\overline{a}) = 0 \;\Rightarrow\; a\,e = e\,\overline{a}. \tag{3.17}$$

Отнормируем элемент e так, что

$$\langle e,e\rangle = 1 \Rightarrow e^2 = -1. \tag{3.18}$$

Потребуем теперь, чтобы расширенная метрическая алгебра $\mathcal{A}^{(2)}$ была еще и нормируемой (т. е. альтернативной). Очевидно, что сама алгебра $\mathcal{A}$, будучи подалгеброй $\mathcal{A}^{(2)}$, также должна быть нормированной. Из равенств (3.16)–(3.18), условий альтернативности, эластичности и тождеств Муфанг имеем

$$(ae)(be) \overset{(3.17)}{=} (e\overline{a})(be) \overset{(3.15)}{=} e(\overline{a}b)e \overset{(3.11)}{=} [e(\overline{a}b)]e \overset{(3.17)}{=}$$
$$\overset{(3.17)}{=} [(\overline{b}a)e]e \overset{(3.10)}{=} (\overline{b}a)(ee) \overset{(3.18)}{=} -(\overline{b}a), \tag{3.19}$$
$$(ae)b \overset{(3.11)}{=} -[e(ea)e]b \overset{(3.13)}{=} -e[(ea)(eb)] \overset{(3.15)}{=} e[b\overline{a}] = (a\overline{b})e,$$
$$a(be) \overset{(3.11)}{=} -a[e(eb)e] \overset{(3.14)}{=} -[(ae)(eb)]e = (ba)e.$$

Из этих соотношений сразу же следует, что произвольный элемент $\mathcal{A}^{(2)}$ можно представить в виде $(a+be)$, где $a,b \in \mathcal{A}$.

Утверждение 3.2 *(см., например, [17]). Правило умножения в расширенной алгебре $\mathcal{A}^{(2)}$ определяется следующим образом:*

$$(a+be)(c+de) = (ac-\overline{d}b) + (b\overline{c}+da)e, \tag{3.20}$$

а правило сопряжения для элементов $\mathcal{A}^{(2)}$ задается по формуле

$$\overline{(a+be)} = \overline{a} - be, \tag{3.21}$$

где $a,b,c,d \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Для левой части (3.20), согласно (3.19), получаем

$$(a+be)(c+de) = ac + (be)c + a(de) + (be)(de) =$$
$$= ac + (b\overline{c})e + (da)e - \overline{d}b = (ac-\overline{d}b) + (b\overline{c}+da)e,$$

что совпадает с (3.20). Аналогично выводится (3.21):

$$\overline{(a+be)} = \overline{a} + \overline{e}\overline{b} = \overline{a} - e\overline{b} = \overline{a} - be,$$

что и требовалось доказать. ■

Из (3.20) и (3.21) следует, что

$$(a+be) + \overline{(a+be)} = (a+\overline{a}) \in \mathbf{R}\cdot 1,$$
$$(a+be)\overline{(a+be)} = a\overline{a} + b\overline{b} \in \mathbf{R}\cdot 1,$$

и так как $(a\overline{a}+b\overline{b}) > 0$, то $\mathcal{A}^{(2)}$ — метрическая алгебра. Более того, легко показать, что если алгебра $\mathcal{A}$ нормирована, то и $\mathcal{A}^{(2)}$ нормирована, а следовательно, и альтернативна. Заметим, что любой элемент $(a+be)$ алгебры $\mathcal{A}^{(2)}$ можно рассматривать как пару элементов $a,b \in \mathcal{A}$.

Определение 3.3. *Расширенная алгебра $\mathcal{A}^{(2)}$ с правилом умножения (3.20) и сопряжения (3.21) называется удвоением алгебры $\mathcal{A}$.*

Сама процедура удвоения иногда называется процедурой Келли–Диксона. Из первых двух соотношений (3.19) видно, что если $\overline{b} \neq b$ для некоторого $b \in \mathcal{A}$, то $\mathcal{A}^{(2)}$ некоммутативна, а если $\mathcal{A}$ некоммутативна, то из третьего соотношения (3.19), вообще говоря, следует неассоциативность $\mathcal{A}^{(2)}$.

Определение 3.4. *Алгебра $\mathcal{A}$ называется алгеброй с делением, если для любых $a,b \in \mathcal{A}$ ($a \neq 0$) разрешимы (относительно $x,y \in \mathcal{A}$) уравнения $ax = b$, $ya = b$.*

Элемент $a \in \mathcal{A}$ ($a \neq 0$) называется левым (правым) делителем нуля, если существует ненулевой элемент $b \in \mathcal{A}$ такой, что $ab = 0$ ($ba = 0$). Всякая конечномерная алгебра без делителей нуля является алгеброй с делением. Над полем $\mathbf{R}$ вещественных чисел существуют только четыре альтернативные алгебры с делением. Это алгебра вещественных чисел $\mathbf{R}$, алгебра комплексных чисел $\mathbf{C}$, алгебра кватернионов $\mathbf{Q}$ и алгебра октонионов $\mathbf{O}$.

Далее мы покажем, как путем удвоения можно последовательно получить алгебры комплексных чисел, кватернионов и октонионов.

3.3. Кватернионы

Для начала возьмем в качестве $\mathcal{A}$ алгебру вещественных чисел $\mathbf{R}$. Добавим к ней базисный элемент $e = \mathbf{i}$, нормированный стандартным способом $\langle \mathbf{i},\mathbf{i}\rangle = 1$. Тогда из (3.18) следует $\mathbf{i}^2 = -1$ и любой элемент $z \in \mathbf{R}^{(2)}$ представим в виде $z = \lambda + \mathbf{i}\mu$, где $\lambda,\mu \in \mathbf{R}$. Согласно (3.20), (3.21), правила умножения и сопряжения в $\mathbf{R}^{(2)}$ определяются следующим образом:

$$(\lambda+\mathbf{i}\mu)(\nu+\mathbf{i}\rho) = (\lambda\nu-\mu\rho) + \mathbf{i}(\mu\nu+\lambda\rho), \quad \overline{(\lambda+\mathbf{i}\mu)} = \lambda - \mathbf{i}\mu,$$

где $\lambda,\mu,\nu,\rho \in \mathbf{R}$. Тем самым мы приходим к определению комплексных чисел $\mathbf{C}$, которые можно рассматривать как удвоение реальных чисел, и отождествлению $\mathbf{R}^{(2)} = \mathbf{C}$.

Пусть теперь $\mathcal{A} = \mathbf{C}$, и представим любой элемент $a \in \mathcal{A}^{(2)}$ в виде ($e = \mathbf{j}$)

$$a = (\lambda + \mathrm{i}\,\mu) + \mathbf{j}\,(\nu + \mathrm{i}\,\rho), \tag{3.22}$$

где $\lambda, \mu, \nu, \rho \in \mathbf{R}$. Опять же из (3.16)–(3.18) получаем

$$\overline{\mathbf{j}\,b} = -\mathbf{j}\,b \ \ (b \in \mathbf{C}), \quad \bar{\mathbf{j}} = -\mathbf{j}, \quad \mathbf{i}\,\mathbf{j} = -\mathbf{j}\,\mathbf{i}, \quad \mathbf{j}^2 = -1. \tag{3.23}$$

Положим $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} \equiv \mathbf{k}$ и заметим, что алгебра $\mathbf{C}^{(2)} \equiv \mathbf{H}$ некоммутативна. Элемент $\mathbf{k}$ не может быть вещественным числом, иначе в силу $\mathbf{i}^2 = -1$ мы получили бы $\mathbf{j} = \pm\mathbf{ik}$, что противоречит требованию $\mathbf{j} \neq 0$. Так как алгебра $\mathbf{H}$ генерируется только двумя элементами $\mathbf{i}, \mathbf{j}$, то по теореме Артина ясно, что $\mathbf{H}$ ассоциативна и соотношения $\mathbf{i}^2 = -1 = \mathbf{j}^2$, $\mathbf{i}\,\mathbf{j} = -\mathbf{j}\,\mathbf{i} = \mathbf{k}$ полностью определяют замкнутую алгебру $\mathbf{H}$ с элементами (3.22) и структурными соотношениями

$$\begin{gathered} \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \quad \mathbf{i}\mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{k}\,\mathbf{i} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{j}\,\mathbf{k} = \mathbf{i}, \\ \mathbf{i}\mathbf{j} = -\mathbf{j}\,\mathbf{i}, \quad \mathbf{k}\,\mathbf{i} = -\mathbf{i}\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{j}\,\mathbf{k} = -\mathbf{k}\,\mathbf{j}. \end{gathered} \tag{3.24}$$

Соответственно, в $\mathbf{H}$ имеются следующие общие правила сопряжения и умножения (см. (3.20), (3.21)):

$$\begin{aligned} \overline{(z_1 + z_2\,\mathbf{j})} = \overline{z_1} - z_2\,\mathbf{j}, \quad & (z_1 + z_2\,\mathbf{j})\,(z_3 + z_4\,\mathbf{j}) = \\ & = (z_1 z_3 - z_2 \overline{z}_4) + (z_1 z_4 + z_2 \overline{z_3})\mathbf{j}, \end{aligned} \tag{3.25}$$

где $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{C}$. Черта в правых частях соотношений (3.25) обозначает комплексное сопряжение в $\mathbf{C}$. Некоммутативная ассоциативная алгебра $\mathbf{H} = \mathbf{C}^{(2)}$ называется алгеброй *кватернионов*.

Наряду с обычными числовыми матрицами можно рассматривать кватернионные матрицы, т. е. матрицы, элементами которых являются кватернионы. Наложим на кватернионную матрицу A условие антиэрмитовости:

$$A^{\dagger} = -A. \tag{3.26}$$

Это условие эквивалентно условию унитарности $U^{\dagger}U = I$ для кватернионной матрицы $U = \exp(A)$, поэтому A можно считать элементом алгебры Ли для унитарной группы $U(n, \mathbf{H})$. Вещественная размерность (число вещественных параметров) группы $U(n, \mathbf{H})$ равна размерности линейного пространства антиэрмитовых кватернионных $(n \times n)$ матриц, удовлетворяющих условию (3.26), и легко вычисляется:

$$\dim\left(U(n, \mathbf{H})\right) = 3\,n + 4\,\frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n(2n+1)}{2}.$$

Заметим, что эта размерность совпадает с размерностью вещественных форм симплектической группы $Sp(2n, \mathbf{C})$ (см. замечание на с.36). Это совпадение не случайно.

Утверждение 3.3. *Линейное пространство антиэрмитовых $(n \times n)$ кватернионных матриц образует алгебру Ли, изоморфную $sp(n) \simeq usp(2n)$, т. е. алгебре Ли матриц (1.113).*

Доказательство. Кватернионную $(n \times n)$ матрицу A можно всегда представить в виде

$$A = (X + \mathrm{i}\,Y) + \mathbf{j}\,(C + \mathrm{i}\,B) = A_1 + \mathbf{j}\,A_2, \tag{3.27}$$

где X, Y, C, B — обычные $(n \times n)$ вещественные матрицы. Условие (3.26) для матрицы A (3.27) переписывается в виде

$$(X^t - \mathrm{i}\,Y^t) - (C^t - \mathrm{i}\,B^t)\mathbf{j} = -(X + \mathrm{i}\,Y) - \mathbf{j}\,(C + \mathrm{i}\,B) \tag{3.28}$$

(здесь t — транспонирование матриц), что с учетом $\mathbf{i}\,\mathbf{j} = -\mathbf{j}\,\mathbf{i}$ дает

$$X^t = -X, \quad Y^t = Y, \quad C^t = C, \quad B^t = B. \tag{3.29}$$

Кватернионная матрица A (3.27) действует на n-мерный кватернионный вектор $V = V_1 + \mathbf{j}\,V_2$ следующим образом: $AV = (A_1 V_1 - \overline{A}_2 V_2) + \mathbf{j}\,(A_2 V_1 + \overline{A}_1 V_2)$, что можно переписать в блочном виде

$$\begin{aligned} \rho(A) \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_1 & -\overline{A}_2 \\ A_2 & \overline{A}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} X + \mathrm{i}Y & -C + \mathrm{i}B \\ C + \mathrm{i}B & X - \mathrm{i}Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Здесь кватернионная матрица A представлена в виде обычной комплексной $(2n \times 2n)$ матрицы $\rho(A)$, записанной как (2×2) блочная матрица с блоками размером $(n \times n)$. Эта матрица может быть разложена следующим образом:

$$\rho(A) = X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

Из сравнения (3.27) и (3.31) следует $2n$-мерное матричное представление ρ для кватернионов:

$$\rho(\mathbf{i}) = i \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}, \quad \rho(\mathbf{j}) = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(\mathbf{k}) = -i \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

где I_n — n-мерная единичная матрица. Сравнивая (3.31) и (1.113) $(r = n)$ и учитывая (3.29), мы видим, что матрицы $\rho(A)$ и $\tilde{L}$ $(r = n)$ принадлежат одной и той же вещественной алгебре Ли $usp(2n)$.

Тот факт, что матрица $\rho(A)$ принадлежит к множеству симплектических матриц, можно продемонстрировать непосредственно, переписав соотношение антиэрмитовости (3.28) для A в условие симплектичности. Действительно, умножив (3.28) слева на $\mathbf{j}$, мы получаем условие симплектичности

$$\big((X^t + \mathrm{i}\,Y^t) - \mathrm{j}\,(C^t - \mathrm{i}\,B^t)\big)\,\mathrm{j} = -\mathrm{j}\,\big((X + \mathrm{i}\,Y) + \mathrm{j}\,(C + \mathrm{i}\,B)\big) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \rho(A)^t\,\rho(\mathrm{j}) = -\rho(\mathrm{j})\rho(A). \qquad (3.32)$$

Таким образом, антиэрмитову кватернионную матрицу A можно рассматривать как элемент некоторой специальной вещественной формы алгебры $sp(2n,\mathbf{C})$. ■

Обозначим $\mathbf{i} = e_1$, $\mathbf{j} = e_2$, $\mathbf{k} = e_3$, $1 = e_0$. В новых обозначениях таблица умножения (3.24) для кватернионов имеет вид

$$e_i\,e_j = -\delta_{ij}e_0 + \varepsilon_{ijk}\,e_k, \qquad (3.33)$$

где $i,j,k = 1,2,3$. Отсюда сразу же видно, что группой автоморфизмов для кватернионов является группа $SO(3)$. Далее определим сопряженный базис кватернионов $\overline{e}_\mu = g_{\mu\nu}\,e_\nu$ $(\mu,\nu = 0,1,2,3)$, где $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$. Тогда таблицу умножения (3.33) можно переписать в виде

$$\overline{e}_\nu\,e_\mu - \overline{e}_\mu\,e_\nu = 4\,\eta^i_{\mu\nu}\,e_i \equiv 4\,\eta_{\mu\nu}, \qquad (3.34)$$
$$e_\nu\,\overline{e}_\mu - e_\mu\,\overline{e}_\nu = 4\,\overline{\eta}^i_{\mu\nu}\,e_i \equiv 4\,\overline{\eta}_{\mu\nu},$$
$$\overline{e}_\nu\,e_\mu + \overline{e}_\mu\,e_\nu = 2\,\delta_{\mu\nu}e_0, \quad e_\nu\,\overline{e}_\mu + e_\mu\,\overline{e}_\nu = 2\,\delta_{\mu\nu}e_0, \qquad (3.35)$$

где мы использовали тензоры $(\eta^i_{\mu\nu},\overline{\eta}^i_{\mu\nu})$, которые были введены т'Хоофтом в [19]. Сравнивая (3.33) и (3.34), получаем

$$\eta^i_{\mu\nu} = -\eta^i_{\nu\mu}, \quad \overline{\eta}^i_{\mu\nu} = -\overline{\eta}^i_{\nu\mu}, \quad \eta^k_{ij} = \overline{\eta}^k_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}, \quad \eta^i_{j0} = -\overline{\eta}^i_{j0} = \frac{1}{2}\delta^i_j.$$

Для записи многочисленных тождеств [19] на тензоры т'Хоофта $(\eta^i_{\nu\mu},\overline{\eta}^i_{\nu\mu})$ удобно пользоваться кватернионами (3.34).

Утверждение 3.4. *Кватернионы $\eta_{\nu\mu}$ и $\overline{\eta}_{\nu\mu}$ (3.34) удовлетворяют определяющим соотношениям для алгебры Ли $so(4)$*

$$[\eta_{\mu\lambda},\ \eta_{\nu\rho}] = \delta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\rho} + \delta_{\mu\rho}\eta_{\nu\lambda} - \delta_{\lambda\rho}\eta_{\nu\mu} - \delta_{\lambda\nu}\eta_{\mu\rho}, \qquad (3.36)$$
$$[\overline{\eta}_{\mu\lambda},\ \overline{\eta}_{\nu\rho}] = \delta_{\mu\nu}\overline{\eta}_{\lambda\rho} + \delta_{\mu\rho}\overline{\eta}_{\nu\lambda} - \delta_{\lambda\rho}\overline{\eta}_{\nu\mu} - \delta_{\lambda\nu}\overline{\eta}_{\mu\rho} \qquad (3.37)$$

и подчиняются следующим тождествам:

$$\eta_{\varkappa\mu}\,\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = -\delta_{\varkappa\nu}\,\eta_{\lambda\rho} + \delta_{\varkappa\lambda}\,\eta_{\nu\rho} - \delta_{\varkappa\rho}\,\eta_{\nu\lambda},$$
$$\overline{\eta}_{\varkappa\mu}\,\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = \delta_{\varkappa\nu}\,\overline{\eta}_{\lambda\rho} - \delta_{\varkappa\lambda}\,\overline{\eta}_{\nu\rho} + \delta_{\varkappa\rho}\,\overline{\eta}_{\nu\lambda}, \qquad (3.38)$$

где $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ — антисимметричный тензор четвертого ранга такой, что $\varepsilon_{0123} = -1$ [1]*. Кроме того, тензор $\eta_{\nu\mu} \in \mathbf{H}$ самодуален, а $\overline{\eta}_{\nu\mu} \in \mathbf{H}$ антисамодуален:*

$$\eta_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,\eta_{\lambda\rho} = *\,\eta_{\mu\nu}, \quad \overline{\eta}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,\overline{\eta}_{\lambda\rho} = -*\,\overline{\eta}_{\mu\nu}. \qquad (3.39)$$

Доказательство. Рассмотрим (2×2) кватернионные матрицы $\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & e_\mu \\ \overline{e}_\mu & 0 \end{pmatrix}$, которые согласно (3.35) образуют алгебру Клиффорда $\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$. Тогда операторы

$$\Sigma_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu) = \begin{pmatrix} \overline{\eta}_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \eta_{\mu\nu} \end{pmatrix} \qquad (3.40)$$

образуют алгебру Ли $so(4)$ и удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\Sigma_{\mu\lambda},\Sigma_{\nu\rho}] = \delta_{\mu\nu}\Sigma_{\lambda\rho} + \delta_{\mu\rho}\Sigma_{\nu\lambda} - \delta_{\lambda\rho}\Sigma_{\nu\mu} - \delta_{\lambda\nu}\Sigma_{\mu\rho}. \qquad (3.41)$$

Соотношения (3.36), (3.37) следуют из равенств (3.40) и (3.41). Из определения $\Sigma_{\mu\nu}$ (3.40) получаем

$$\Sigma_{0i} = \frac{e_i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}e_k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда имеют место равенства

$$\Sigma_{0i}\,\varepsilon_{i0jk} = \frac{1}{2}e_i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\varepsilon_{ijk} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Sigma_{jk},$$

$$\Sigma_{ir}\,\varepsilon_{r0jk} = \frac{1}{2}\varepsilon_{irs}e_s\varepsilon_{rjk}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(e_j\delta_{ik} - e_k\delta_{ij})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= (\Sigma_{0j}\delta_{ik} - \Sigma_{0k}\delta_{ij})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma_{r\mu}\,\varepsilon_{\mu ijk} = \Sigma_{r0}\,\varepsilon_{0ijk} = \frac{1}{2}e_r\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\varepsilon_{ijk} =$$
$$= (\delta_{ri}\Sigma_{jk} - \delta_{rj}\Sigma_{ik} + \delta_{rk}\Sigma_{ij})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

[1] Такая нормировка соответствует выбору $\varepsilon_{1234} = 1$, если сделать замену индексов $0 \to 4$.

где $i, j, k, r, s = 1, 2, 3$. Эти равенства можно записать единым образом:

$$\Sigma_{\varkappa\mu}\,\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = (\Sigma_{\lambda\rho}\delta_{\varkappa\nu} - \Sigma_{\nu\rho}\delta_{\varkappa\lambda} + \Sigma_{\nu\lambda}\delta_{\varkappa\rho})\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \tag{3.42}$$

что, с учетом (3.40), эквивалентно (3.38). Положим $\varkappa = \nu$ в (3.42) и свернем по ν. В результате получаем

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,\Sigma_{\lambda\rho}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \tag{3.43}$$

что эквивалентно (3.39). Заметим также, что тождества (3.39) эквивалентны равенствам $\eta_{01} = -\eta_{23}$ (цикл $1 \to 2 \to 3$), $\overline{\eta}_{01} = \overline{\eta}_{23}$ (цикл $1 \to 2 \to 3$), которые легко проверить с помощью формул (3.33). ■

3.4. Кватернионы и инстантонные решения в неабелевых калибровочных теориях

С помощью тензоров $\overline{\eta}$ и η можно выписать явные q-инстантонные решения для самодуального и антисамодуального поля Янга–Миллса. Рассмотрим калибровочные поля

$$A_\mu(x) = \overline{\eta}_{\mu\nu}\,\partial_\nu\,\Psi(x), \quad \overline{A}_\mu(x) = \eta_{\mu\nu}\,\partial_\nu\,\Psi(x), \tag{3.44}$$

где $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ — вектор в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^4$ и $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x_\mu$. Так как базисные кватернионы e_i $(i = 1, 2, 3)$ образуют алгебру Ли $su(2)$: $[e_i, e_j] = 2\varepsilon_{ijk}e_k$ (см. (3.33)), то поля (3.44) соответствуют $su(2)$ калибровочной теории. Удобно скомпоновать поля (3.44) в единый потенциал $\mathcal{A}_\mu(x)$ и рассмотреть соответствующую ковариантную производную:

$$\mathcal{A}_\mu(x) = \Sigma_{\mu\lambda}\,\partial_\lambda\,\Psi(x) = \begin{pmatrix}\overline{\eta}_{\mu\lambda} & 0\\ 0 & \eta_{\mu\lambda}\end{pmatrix}\partial_\lambda\,\Psi(x), \quad \nabla_\mu = \partial_\mu + \mathcal{A}_\mu(x). \tag{3.45}$$

Тогда для тензора напряженности калибровочного поля $\mathcal{A}_\mu(x)$ имеем

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu}(x) &= [\nabla_\mu, \nabla_\nu] = \\ &= (\Sigma_{\nu\lambda}\partial_\mu - \Sigma_{\mu\lambda}\partial_\nu)\partial_\lambda\,\Psi(x) + [\Sigma_{\mu\lambda}, \Sigma_{\nu\rho}]\partial_\lambda\Psi(x)\,\partial_\rho\Psi(x) = \\ &= (\Sigma_{\nu\lambda}\partial_\mu - \Sigma_{\mu\lambda}\partial_\nu)\partial_\lambda\,\Psi(x) + (\delta_{\mu\rho}\Sigma_{\nu\lambda} - \delta_{\lambda\nu}\Sigma_{\mu\rho} + \\ &\qquad + \delta_{\lambda\rho}\Sigma_{\mu\nu})\partial_\lambda\Psi(x)\,\partial_\rho\Psi(x),\end{aligned} \tag{3.46}$$

где мы воспользовались соотношением (3.41). Далее с учетом (3.42) и (3.43), для дуального тензора напряженности получаем

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho}(x) = \\ &= \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\Sigma_{\rho\varkappa}(\partial_\lambda\partial_\varkappa\Psi + \partial_\varkappa\Psi\,\partial_\lambda\Psi) + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\Sigma_{\lambda\rho}(\partial_\varkappa\Psi)^2 = \\ &= (\delta_{\varkappa\mu}\Sigma^*_{\nu\lambda} - \delta_{\varkappa\nu}\Sigma^*_{\mu\lambda} + \delta_{\varkappa\lambda}\Sigma^*_{\mu\nu})(\partial_\lambda\partial_\varkappa\Psi + \partial_\varkappa\Psi\partial_\lambda\Psi) - \Sigma^*_{\mu\nu}(\partial_\varkappa\Psi)^2 = \\ &= (\Sigma^*_{\nu\lambda}\partial_\mu - \Sigma^*_{\mu\lambda}\partial_\nu)\partial_\lambda\Psi + (\Sigma^*_{\nu\lambda}\partial_\mu\Psi - \Sigma^*_{\mu\lambda}\partial_\nu\,\Psi)\partial_\lambda\,\Psi + \Sigma^*_{\mu\nu}\partial^2_\varkappa\Psi,\end{aligned} \tag{3.47}$$

где $\Sigma^*_{\mu\nu} = \begin{pmatrix}\overline{\eta}_{\mu\lambda} & 0\\ 0 & -\eta_{\mu\lambda}\end{pmatrix}$. Сравнивая (3.46) и (3.47), окончательно получаем, что тензор $F_{\mu\nu}$ (анти)самодуален:

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho}(x)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{3.48}$$

при условии, что функция $\Psi(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\partial^2_\rho\Psi = \partial_\rho\Psi(x)\,\partial_\rho\Psi(x)$. Решение этого уравнения имеет вид

$$\Psi(x) = -\ln(\Phi(x)), \tag{3.49}$$

где поле Φ должно удовлетворять уравнению $\Phi(x)^{-1}\partial^2_\mu\Phi(x) = 0$ и, следовательно, может быть выбрано в виде

$$\Phi(x) = 1 + \sum_{j=1}^{q}\frac{\lambda_j^2}{(x - x_j)^2}. \tag{3.50}$$

Из уравнения (3.48) и тождества Бьянки $\nabla_\mu(*F_{\mu\nu}) = 0$ следует, что $F_{\mu\nu}$ (3.46) удовлетворяет уравнению Янга–Миллса $\nabla_\mu F_{\mu\nu} = 0$. Более того, для $F_{\mu\nu}$ (3.46) с учетом (3.49) мы получаем $\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 = \frac{1}{2}\partial^2_\mu(\partial^2_\nu\Psi(x))$. Подставляя сюда (3.49), (3.50) и интегрируя по 4-мерному пространству, получим для функционала действия $\frac{1}{4}\mathrm{R}\,d^4x(F_{\mu\nu})^2 = 8\pi q$ (т. е. конфигурация данного поля соответствует q-инстантонному решению).

Итак, учитывая представление (3.45), мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 3.5. *Пусть функция $\Phi(x)$ задана в (3.50), а $\eta_{\mu\nu}, \overline{\eta}_{\mu\nu}$ — кватернионы, введенные в (3.34). Тогда калибровочные потенциалы*

$$A_\mu(x) = -\overline{\eta}_{\mu\nu}\,\partial_\nu \ln\Phi(x), \quad \overline{A}_\mu(x) = -\eta_{\mu\nu}\,\partial_\nu \ln\Phi(x) \tag{3.51}$$

определяют, соответственно, самодуальные и антисамодуальные q-инстантонные решения уравнения Янга–Миллса с калибровочной группой $SU(2)$. ■

Заметим, что инстантонные решения (3.51) не являются общими, так как зависят только от $5q$ параметров (функция $\Phi(x)$ (3.50) задается $4q$ параметрами x^μ_j и q-масштабными параметрами λ_j), хотя известно [20], что общее решение должно зависеть от $8q-3$ параметров. Поэтому, в качестве еще одного приложения кватернионов, изложим кратко конструкцию Атьи–Дринфельда–Хитчина–Манина (АДХМ) [21] (см. также [20, 22]), которая дает общее q-инстантонное решение уравнений Янга–Миллса.

Рассмотрим $(q+n)\times(q+n)$ матрицу $||U_{KL}||_{K,L=1,\dots,q+n}$ с кватернионными элементами, которая имеет вид

$$U = (\, M_{K\alpha} \,|\, N_{Ki}(x)\,), \quad M_{K\alpha} = M^{(0)}_{K\alpha} - M^{(1)}_{K\alpha}\,(x^\mu \overline{e}_\mu), \qquad \alpha = 1,\dots,q, \quad i = q+1,\dots,q+n, \tag{3.52}$$

где $M^{(0)}, M^{(1)}$ — прямоугольные кватернионные матрицы $(q+n)\times q$, не зависящие от x, а прямоугольная $(q+n)\times n$ матрица $||N_{Ki}(x)||$ дополняет матрицу $||M_{K\alpha}||$ до квадратной матрицы U. Пусть на U наложены условия

$$U^\dagger U = \left(\begin{array}{c|c} R_{\alpha\beta} & 0 \\ \hline 0 & e_0\,\delta_{ij}\end{array}\right) \Longrightarrow U^\dagger = \left(\begin{array}{c|c} R & 0 \\ \hline 0 & e_0 I\end{array}\right) U^{-1}, \tag{3.53}$$

где R — $(q\times q)$ вещественная невырожденная матрица, а I — $(n\times n)$ единичная матрица. Учитывая (3.52), соотношения (3.53) можно представить в виде

$$(M^\dagger)_{\alpha K}\, M_{K\beta} = R_{\alpha\beta}, \quad (M^\dagger)_{\alpha K}\, N_{Ki} = 0, \quad (N^\dagger)_{iK}\, M_{K\alpha} = 0, \quad (N^\dagger)_{iK}\, N_{Kj} = e_0\,\delta_{ij}. \tag{3.54}$$

Дифференциальная 1-форма калибровочного потенциала в конструкции АДХМ определяется как кватернионная $(n\times n)$ матрица с элементами

$$A_{ij} = (N^\dagger(x))_{iK}\, d N_{Kj}(x), \tag{3.55}$$

где d — внешний дифференциал по x. Из последнего условия в (3.54) следует, что кватернионная матрица A антиэрмитова, т.е. $A^\dagger = -A$. Условие антиэрмитовости на $(n\times n)$ кватернионную матрицу определяет алгебру Ли $usp(2n)$ (см. утверждение 3.3), т.е. калибровочный потенциал (3.55) соответствует $Usp(2n)$ калибровочной теории. В частности, для $n=1$ анзац (3.55) будет определять инстантонные решения для $Usp(2)\simeq SU(2)$ калибровочной теории.

Для того чтобы найти поле напряженности $F = dA + A^2$ с потенциалом вида (3.55), рассмотрим дифференциальную форму

$$U^\dagger\, dU = \left(\begin{array}{c|c} (M^\dagger dM)_{\alpha\beta} & (M^\dagger dN)_{\alpha j} \\ \hline (N^\dagger dM)_{i\beta} & (N^\dagger dN)_{ij}\end{array}\right) \tag{3.56}$$

и вычислим от нее дифференциал с учетом равенств (3.53):

$$\begin{aligned} d(U^\dagger dU) &= \\ &= \left(\begin{array}{c|c} dR & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right) U^{-1} dU - \left(\begin{array}{c|c} R & 0 \\ \hline 0 & e_0 I\end{array}\right) U^{-1} dU\, U^{-1} dU = \\ &= \left(\begin{array}{c|c} (dR)R^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right) U^\dagger dU - U^\dagger dU \left(\begin{array}{c|c} R^{-1} & 0 \\ \hline 0 & e_0 I\end{array}\right) U^\dagger dU. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Подставляя сюда выражение (3.56) для формы $U^\dagger dU$ и рассматривая в получившемся матричном равенстве нижний диагональный блок, мы с учетом (3.52) выводим выражение для напряженности поля

$$\begin{aligned} F &= d(N^\dagger dN) + (N^\dagger dN)(N^\dagger dN) = \\ &= -(N^\dagger dM)\, R^{-1}\, (M^\dagger dN) = N^\dagger (dM)\, R^{-1}\, (dM^\dagger)\, N \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow F_{ij} = (N^\dagger M^{(1)})_{i\alpha}\, \overline{e}_\mu\, (R^{-1})_{\alpha\beta}\, e_\nu\, ((M^{(1)})^\dagger N)_{\beta j}\, dx^\mu \wedge dx^\nu = \\ &= 2\left(N^\dagger M^{(1)} \eta_{\mu\nu} R^{-1} (M^{(1)})^\dagger N\right)_{ij} dx^\mu \wedge dx^\nu = (F_{\mu\nu})_{ij}\, dx^\mu \wedge dx^\nu. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Здесь мы воспользовались равенствами (3.34), (3.54) и $[R, e_\mu] = 0$.

Таким образом, в силу самодуальности тензора $\eta_{\mu\nu}$, поле $F_{\mu\nu}$ также самодуально и, следовательно, удовлетворяет уравнениям Янга–Миллса для $Usp(2n)$ калибровочной теории.

В работах [22] показано, как подобную конструкцию самодуальных решений уравнений Янга–Миллса можно использовать и для случая других компактных калибровочных групп $SO(n)$ и $SU(n)$.

3.5. Октонионы

Займемся теперь удвоением кватернионов. Произвольный элемент алгебры $\mathbf{H}^{(2)} \equiv \mathbf{O}$ имеет вид $a + b\,e$, где $a, b \in \mathbf{H}$. Для этой алгебры снова получаем

$$e^2 = -1, \quad \bar{e} = -e, \quad i\,e = -e\,i \equiv f, \quad j\,e = -e\,j \equiv g, \quad k\,e = -e\,k \equiv h. \tag{3.59}$$

Очевидно, что базис алгебры $\mathbf{O}$ состоит из восьми элементов:

$$\{1,\ i,\ j,\ k,\ e,\ f,\ g,\ h\} \equiv \{1,\ e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ e_6,\ e_7\}.$$

Из правил умножения кватернионов и (3.19), (3.20) вытекает $f^2 = g^2 = h^2 = -1$ и антикоммутируемость элементов e, f, g, h. Действительно, $f^2 = (i\,e)\,(i\,e) = -\bar{i}\,i = -1$, $e\,f = i = -f\,e$ и т. д. Следовательно, таблица умножения для октонионов может быть записана в виде

$$\begin{gathered} e_4^2 = -1, \quad e_i\,e_4 = -e_4\,e_i = e_{4+i}, \\ e_j\,e_{4+i} = -e_{4+i}\,e_j = -\delta_{ij}\,e_4 + \varepsilon_{ijk}\,e_{4+k}, \\ e_{4+j}\,e_{4+i} = -\delta_{ij} + \varepsilon_{ijk}\,e_k \end{gathered} \tag{3.60}$$

плюс формулы (3.33). Ясно, что пользуясь (3.34), формулы (3.60) также можно переписать с помощью тензоров т'Хоофта

$$e_{4+\nu}\,e_\mu = \bar{e}_\mu\,e_{4+\nu} = 2\,\bar{\eta}^\lambda_{\mu\nu}\,e_{4+\lambda}, \quad e_{4+\mu}\,e_{4+\nu} = -\bar{e}_\nu\,e_\mu = -2\,\eta^\lambda_{\mu\nu}\,e_\lambda.$$

Заметим, что алгебра $\mathbf{O}$ является неассоциативной:

$$(i\,e)\,j = -(i\,j)\,e = -k\,e,$$
$$i\,(e\,j) = -i\,(j\,e) = -(j\,i)\,e = k\,e,$$

т. е. $(i\,e)\,j \neq i\,(e\,j)$. Значит, алгебра, получающаяся удвоением кватернионов, является неассоциативной. Эта алгебра $\mathbf{O}$ называется алгеброй октонионов. Произвольный элемент $a \in \mathbf{O}$ имеет вид

$$a = \lambda + i\,\mu + j\,\nu + k\,\rho + f\,\alpha + g\,\beta + h\,\gamma.$$

Рассмотрим группу автоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$, т. е. группу отображений Φ: $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ таких, что

$$\Phi(a\,b) = \Phi(a)\,\Phi(b), \quad a, b \in \mathcal{A}. \tag{3.61}$$

Пусть инфинитезимальная форма отображения Φ имеет вид $a \to a + \delta(a)$. Отображения δ являются дифференцированиями алгебры $\mathcal{A}$, потому что из (3.61) мы получаем

$$\delta(a\,b) = \delta(a)\,b + a\,\delta(b), \tag{3.62}$$

т. е. $\delta \in \mathrm{Der}\,(\mathcal{A})$. Алгебра $\mathrm{Der}\,(\mathcal{A})$ является алгеброй Ли, так как коммутатор двух дифференцирований $[\delta_1, \delta_2]$ есть снова дифференцирование. Заметим, что $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = 2\delta(1)$ и, следовательно, $\delta(1) = 0$.

Итак, для метрических алгебр размерности 2^n, полученных удвоением, мы имеем $\delta(a\bar{a}) = 0$, что означает принадлежность δ к ортогональным преобразованиям, а из условия $\delta(1) = 0$ вытекает утверждение $\delta \in so(2^n - 1)$ или $\mathrm{Aut}\,(\mathcal{A}) \in O(2^n - 1)$. Заметим, что $\mathrm{Der}\,(\mathcal{A})$ можно однозначно определить из (3.62), если задать действие δ на образующие $\mathcal{A}$.

Рассмотрим алгебру Ли дифференцирований удвоенной алгебры $\mathrm{Der}\,(\mathcal{A}^{(2)})$. Будем искать оператор дифференцирования в самом общем виде [17]:

$$\delta(a) = \delta_0(a) + \phi(a)\,e, \quad \delta(e) = x_0 + y_0\,e, \tag{3.63}$$

где $a, x_0, y_0 \in \mathcal{A}$ и δ_0, ϕ — два линейных оператора $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Дифференцирование $\mathcal{A}^{(2)}$ однозначно восстанавливается по операторам δ_0, ϕ и элементам x_0, y_0, поэтому, чтобы описать алгебру $\mathrm{Der}\,(\mathcal{A}^{(2)})$, достаточно описать четверки $(\delta_0,\ \phi,\ x_0,\ y_0)$.

1) Из (3.62) при $a = b = e$ получаем

$$\begin{aligned} 0 = \delta(e^2) &= (x_0 + y_0\,e)\,e + e\,(x_0 + y_0\,e) = \\ &= -(y_0 + \bar{y}_0) + (x_0 + \bar{x}_0)\,e \Rightarrow \\ &\Rightarrow (y_0 + \bar{y}_0) = 0 = (x_0 + \bar{x}_0). \end{aligned} \tag{3.64}$$

2) Из формул (3.62), (3.63) и (3.19) при $a, b \in \mathcal{A}$ следуют равенства

$$\begin{aligned} \delta_0(a\,b) &= \delta_0(a)\,b + a\,\delta_0(b), \\ \phi(a\,b) &= \phi(a)\,\bar{b} + \phi(b)\,a, \end{aligned} \tag{3.65}$$

т. е. δ_0 является дифференцированием алгебры $\mathcal{A}$, а отображение ϕ снова можно определить, если задать его действие на образующие $\mathcal{A}$. Если сама алгебра $\mathcal{A}$ получена удвоением (с $e = j$), то $\forall a = x + y\,j \in \mathcal{A}$ можно положить $\phi(x) = P(x) + Q(x)\,j$, $\phi(j) = z_0 + w_0\,j$, где $x, y, z_0, w_0 \in \mathcal{A}^{(1/2)}$, и из (3.65) следуют равенства

$$P(x\,y) = P(x)\,\overline{y} + P(y)\,x, \quad Q(x\,y) = Q(y)\,\overline{x} + Q(x)\,y. \qquad (3.66)$$

Эту процедуру с удвоением можно продолжить до тех пор, пока операторы P, Q не будут известны, после чего ϕ восстанавливается однозначно.

Однако для частного случая $\mathcal{A}^{(2)} = \mathbf{O}$, $\mathcal{A} = \mathbf{H}$ мы воспользуемся тем, что формула (3.65) однозначно определяет отображение ϕ при задании действия ϕ на образующие алгебры $\mathcal{A}$. В случае $\mathcal{A} = \mathbf{H}$ имеем две образующие i, j, и, выбрав

$$\phi(j) = z_0 + w_0\,j, \quad \phi(i) = a_0 + b_0\,j \quad (z_0, w_0, a_0, b_0 \in \mathbf{C}),$$

легко получаем

$$\phi(x + y\,j) = (a_0\,\mathrm{Im}\,(x) + b_0\,\mathrm{Im}\,(y) + z_0\,\overline{y}) + \\ + (b_0\,\mathrm{Im}\,(x) - a_0\,\mathrm{Im}\,(y) + w_0\,y)\,j. \qquad (3.67)$$

Мы видим, что алгебра $\mathrm{Der}\,(\mathbf{O})$ (которая лежит в 21-параметрической алгебре $so(7)$) задается дифференцированиями δ_0 алгебры $\mathbf{H}$ (алгебра $\mathrm{Der}\,(\mathbf{H})$ имеет 3 параметра, так как группа автоморфизмов $\mathbf{H}$ совпадает с $SO(3)$), двумя кватернионами x_0, y_0, ограниченными условиями (3.64) (6 параметров), а также четырьмя комплексными числами ($z_0, w_0, a_0, b_0 \in \mathbf{C}$), которые задают отображение ϕ (8 параметров). Покажем теперь, что кватернион x_0 определяется отображением ϕ и, следовательно, число независимых параметров алгебры $\mathrm{Der}\,(\mathbf{O})$ равно 14, что совпадает с размерностью алгебры $\mathcal{G}_2$.

3) Рассмотрим равенство $\delta(b\,(a\,e)) = \delta((a\,b)\,e)$, которое следует из (3.19). Раскроем правую и левую части этого равенства по правилу Лейбница:

$$\delta(b(ae)) = \delta(b)\,ae + b\,\delta(ae) = \\ = (\delta_0(b) + \phi(b)e)(ae) + b\,[(\delta_0(a) + \phi(a)\,e)\,e + a\,(x_0 + y_0 e)] = \\ = \delta_0(b)\,(ae) - \overline{a}\,\phi(b) + b\,[\delta_0(a)\,e - \phi(a) + a\,x_0 + a\,(y_0 e)] = \\ = \delta_0(a\,b)\,e - \overline{a}\,\phi(b) - b\,\phi(a) + b\,(a\,x_0) + ((y_0\,a)b)\,e,$$

$$\delta((ab)e) = \delta(ab)\,e + ab\,\delta(e) = \\ = [(\delta_0(a\,b) + \phi(a\,b)\,e)]\,e + (ab)\,(x_0 + y_0 e) = \\ = \delta_0(a\,b)\,e - \phi(a\,b) + (a\,b)\,x_0 + (y_0(ab))\,e.$$

Сравнивая эти два результата, мы имеем

$$(b\,a - a\,b)\,x_0 = \overline{a}\,\phi(b) + b\,\phi(a) - \phi(a\,b) = -\overline{b}\,\phi(a) - a\,\phi(b) + \phi(b\,a). \qquad (3.68)$$

Последнее равенство здесь легко получить из (3.65) и условий типа $[(a + \overline{a}), \phi(b)] = 0$. Соотношение (3.68) связывает x_0 с параметрами отображения ϕ. Действительно, положим в (3.68) $a = j$, $b = i$, тогда имеем ($k = i\,j$)

$$x_0 = -\frac{k}{2}\,(\overline{j}\,\phi(i) + i\,\phi(j) - \phi(j)\,\overline{i} - \phi(i)\,j) = \\ = -i\,\mathrm{Re}\,(a_0) - j\,z_0 - k\,\mathrm{Re}\,(b_0). \qquad (3.69)$$

Пользуясь формулами (3.63)–(3.69), можно построить матричные представления для $\mathrm{Der}\,(\mathbf{O})$ и показать, что они совпадают с матричными представлениями алгебры $\mathcal{G}_2$.

3.6. Алгебры Йордана и Альберта

При изложении материала в этом пункте мы в основном будем следовать работе [25].

Заметим, что из альтернативности (3.10) с учетом тождества Муфанг (3.15) следуют условия Йордана

$$(x\,y)\,x^2 = x\,(y\,x^2), \quad x^2\,(a\,x) = (x^2\,a)\,x. \qquad (3.70)$$

Алгебры с коммутативным умножением, удовлетворяющие этим условиям, называются алгебрами Йордана. В этом случае условия (3.70) можно переписать в виде

$$a\,(a^2\,b) = a^2\,(a\,b), \quad a\,b = b\,a. \qquad (3.71)$$

Легко проверить, что любая ассоциативная алгебра (например алгебра матриц над полем ассоциативных чисел) является алгеброй Йордана относительно коммутативного (но неассоциативного) умножения

$$x \circ y \equiv \frac{(x\,y + y\,x)}{2}. \qquad (3.72)$$

Если алгебра Йордана допускает представление (3.72), то такая алгебра называется специальной.

Линеаризуя соотношение (3.71), т. е. полагая $a \to a + c$, мы получаем

$$a((2a\,c + c^2)b) + c((2a\,c + a^2)b) = (2a\,c + c^2)(a\,b) + (2a\,c + a^2)(c\,b).$$

Линеаризуем это соотношение еще раз $a \to a + d$:

$$a((d\,c)b) + d((a\,c)\,b) + c((a\,d)\,b) = (c\,d)(a\,b) + (c\,a)(d\,b) + (d\,a)(c\,b) \tag{3.73}$$

и перепишем его в виде

$$L_a\,L_{dc} + L_d\,L_{ac} + L_c\,L_{ad} = L_{cd}\,L_a + L_{ca}\,L_d + L_{da}\,L_c,$$

что эквивалентно

$$[L_{cd}, L_a] + [L_{ca}, L_d] + [L_{da}, L_c] = 0, \tag{3.74}$$

где $L_a\,b \equiv a\,b$ (в коммутативном случае мы имеем $L_a = R_a$). С другой стороны, заметим, что правая часть (3.73) симметрична по перестановке $a \leftrightarrow b$ и, следовательно, (3.73) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &a((d\,c)\,b) + d((a\,c)\,b) + c((a\,d)\,b) = \\ &\qquad = b((d\,c)\,a) + d((b\,c)\,a) + c((b\,d)\,a) \Rightarrow \\ &\qquad\qquad \Rightarrow [[L_a, L_b], L_c] = L_{a(bc)-b(ac)} = L_{[L_a,L_b]\,c}. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Напомним теперь, что дифференцирование алгебры $D(ab) = (D\,a)\,b + a(D\,b)$ можно переписать в виде соотношения

$$[D, L_a] = L_{(D\,a)}, \tag{3.76}$$

сравнивая которое с (3.75), мы видим, что

$$[L_a, L_b] \equiv D_{a,b} \tag{3.77}$$

является дифференцированием алгебры Йордана J. Можно показать, что все (внутренние) дифференцирования алгебры Йордана могут быть представлены в виде линейной комбинации операторов вида $[L_a, L_b]$. Из соотношений (3.76), (3.77) и того факта, что дифференцирования D образуют алгебру Ли, следует, что дифференцирования $D_{a,b}$ и левые умножения L_a алгебры Йордана J замкнуты относительно антикоммутатора и образуют алгебру Ли. Эта алгебра называется структурной алгеброй для J и обозначается $\mathrm{str}\,(J)$. Алгебра $\mathrm{str}\,(J)$ является алгеброй Ли для структурной группы $\mathrm{Str}\,(J)$.

Рассмотрим теперь йордановское тройное произведение

$$\{a, b, c\} \equiv a\,(b\,c) - b\,(a\,c) + (a\,b)\,c, \quad \{a, b, c\} = \{c, b, a\},$$

которое в случае специальной алгебры J редуцируется к $\{a, b, c\} = \frac{1}{2}(abc + cba)$. С помощью этого тройного произведения можно определить билинейное преобразование S на J:

$$S_{a,b}\,c \equiv \{a, b, c\}.$$

В терминах левых умножений L мы можем записать S в виде

$$S_{a,b} = [L_a, L_b] + L_{a\,b} = D_{a,b} + L_{a\,b}. \tag{3.78}$$

Таким образом, $S_{a\,b}$ является элементом структурной алгебры $\mathrm{str}\,(J)$. В действительности можно показать, что для простой алгебры Йордана операторы S генерируют полную структурную алгебру $\mathrm{str}\,(J)$. Коммутационные соотношения для S имеют вид

$$[S_{cd}, S_{ab}] = S_{\{cda\},b} - S_{a,\{dcb\}}.$$

Ясно, что если взять матричную алгебру над неассоциативным полем октонионов, то с помощью нового умножения (3.72) мы, скорее всего, не получим алгебру Йордана. Однако в случае эрмитовых матриц $(n \times n)$ при $n \leqslant 3$ соответствующие матричные алгебры будут йордановыми. Для $n = 1$ это утверждение очевидно и следует из альтернативности алгебры октонионов (см. (3.70)). Как показал Альберт, для $n = 3$ соответствующая алгебра Йордана не может быть получена из какой бы то ни было ассоциативной алгебры. Эта алгебра называется алгеброй Альберта $(Al) \equiv J_3(\mathbf{O})$, и ее произвольный элемент имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} \mu & x & \overline{y} \\ \overline{x} & \nu & z \\ y & \overline{z} & \lambda \end{pmatrix}, \tag{3.79}$$

где $\mu, \nu, \lambda \in \mathbf{R}$ и $x, y, z \in \mathbf{O}$. Замечательно, что алгебра дифференцирований для Al совпадает с исключительной алгеброй f_4, т. е. $\mathrm{Der}\,(Al) = f_4$. Заметим, что матрица, аналогичная (3.79), для $n = 2$

$$X = \begin{pmatrix} \mu & x \\ \overline{x} & \nu \end{pmatrix} = x_A\,\sigma^A, \quad \det(X) = \mu\,\nu - x\,\overline{x},$$

$$\sigma^A = \begin{pmatrix} 0 & e_A \\ \overline{e_A} & 0 \end{pmatrix} \quad (A = 0, \dots, 7), \tag{3.80}$$

$$\sigma^8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

играет важную роль при идентификации $so(9,1) \sim sl(2;\mathbf{O})$ [23] ($x_0, \dots, x_8$ — пространственные, а x_9 — временная координаты). А именно структурные группы алгебр Йордана $J_2(\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{O}) = J_2^{(t)}$ ($t = 1, 2, 4, 8$) (т. е. алгебр эрмитовых матриц (2×2) над полем $\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{O}$ соответственно) совпадают (с точностью до некоторых центральных элементов) с алгебрами $so(t+1, 1) = \mathrm{Str}\,(J_2^{(t)})$.

Магический квадрат Фрейденталя в подходе Титса (см., например, [26]). Ганс Фрейденталь и Жак Титс показали, что все исключительные алгебры Ли можно получить, рассматривая некоторую конструкцию, которая строится по двум алгебрам A, B с делением. Рассмотрим алгебру Йордана $J_3(A)$ — алгебру (3×3) эрмитовых матриц с элементами, принадлежащими некоторой вещественной алгебре A с делением (т. е. $\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$ или $\mathbf{O}$). Для любой пары (A, B) таких алгебр с делением можно определить алгебру Ли

$$L = (\mathrm{der}(A) \oplus \mathrm{der}(J_3(B))) \oplus (A_0 \otimes J_3(B)_0), \tag{3.81}$$

где $\mathrm{der}\,(A)$ обозначает алгебру Ли дифференцирований на алгебре A, а индекс 0 обозначает бесследовую часть. Алгебра Ли L содержит $\mathrm{der}(A) \oplus \mathrm{der}(J_3(B))$ как подалгебру, которая, естественно, действует на $A_0 \otimes J_3(B)_0$. Скобка Ли на $A_0 \otimes J_3(B)_0$ (которая не есть подалгебра) неочевидна. Однако Титс показал, как она может быть определена, что, в свою очередь, приводит к следующей таблице компактных алгебр Ли:

	B	**R**	**C**	**H**	**O**
A	der (A или B)	0	0	sp_1	g_2
R	0	so_3	su_3	sp_3	f_4
C	0	su_3	$su_3 \oplus su_3$	su_6	e_6
H	sp_1	sp_3	su_6	so_{12}	e_7
O	g_2	f_4	e_6	e_7	e_8

Заметим, что по построению ряд таблицы с $A = \mathbf{R}$ дает $\mathrm{der}\,(J_3(B))$ и аналогично столбец с $B = \mathbf{R}$ дает $\mathrm{der}\,(J_3(A))$. Магия квадрата Фрейденталя заключается в том, что вышеприведенная квадратная таблица симметрична при замене $A \leftrightarrow B$, хотя эта симметрия не заложена явно в формуле (3.81).

3.7. Расслоения Хопфа и алгебры с делением

Здесь мы кратко обсудим расслоения Хопфа (см. [24, 26])

$$S^1 \xrightarrow{S^0} S^1 = \mathbf{R}P^1, \quad S^3 \xrightarrow{S^1} S^2 = \mathbf{C}P^1,$$
$$S^7 \xrightarrow{S^3} S^4 = \mathbf{H}P^1, \quad S^{15} \xrightarrow{S^7} S^8 = \mathbf{O}P^1.$$

Первое отображение $S^1 \xrightarrow{S^0} S^1$ тривиально. Рассмотрим далее простейшее нетривиальное отображение p: $S^3 \to S^2$ трехмерной сферы на двумерную. Пусть сфера S^3 задана с помощью двух комплексных чисел $\{z_1, z_2\}$, удовлетворяющих соотношению $z_1 \overline{z}_1 + z_2 \overline{z}_2 = 1$, а сфера S^2 представлена как комплексная проективная прямая $w = z_1/z_2$ (т. е. как множество пар $[z_1, z_2]$ комплексных чисел, одновременно не равных нулю, в котором произведено отождествление $[z_1, z_2] \sim [\lambda z_1, \lambda z_2]$, где $\lambda \neq 0$). Тогда проекция p определяется формулой $p(\{z_1, z_2\}) = [z_1, z_2]$.

Любую пару $[z_1, z_2]$ можно нормировать, разделив ее на $\lambda = (|z_1|^2 + |z_2|^2)^{1/2}$. Следовательно, образом всей сферы S^3 является вся сфера S^2. Если пара $\{z_1, z_2\}$ принадлежит S^3, то и пара $\{\lambda z_1, \lambda z_2\}$ при $|\lambda| = 1$ принадлежит S^3 и отображается в ту же точку сферы S^2, что и $\{z_1, z_2\}$. Обратно, если $p(z_1, z_2) = p(z_1', z_2')$, то $z_1/z_2 = z_1'/z_2'$ и, следовательно, $\{z_1', z_2'\} = \{\lambda z_1, \lambda z_2\}$ для некоторого λ, равного по абсолютной величине единице (последнее следует из условий $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$, $|z_1'|^2 + |z_2'|^2 = 1$).

Таким образом, полный прообраз точки сферы S^2 получается из любой его точки на S^3 умножениями на числа вида $\exp(i\theta)$ ($0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$). Следовательно, полный прообраз оказывается одномерной замкнутой кривой C, которая совпадает с большой окружностью сферы S^3 (кривая C: $(e^{i\theta} z_1, e^{i\theta} z_2)$ содержит точки (z_1, z_2) и $(-z_1, -z_2)$, симметрично расположенные относительно начала координат).

Итак, S^3 разложена на семейство больших окружностей с пространством разбиения, являющимся S^2. Прообразами двух разных точек сферы S^2 являются две разные окружности в S^3. Коэффициент зацепления этих окружностей является инвариантом отображения p и называется инвариантом Хопфа.

Изложенная выше конструкция обобщается на случай отображения $p_4: \; S^7 \xrightarrow{S^3} S^4$ следующим образом. Рассмотрим сферу S^7, заданную условиями $z_1 \overline{z}_1 + z_2 \overline{z}_2 = 1$, где $z_1, z_2 \in \mathbf{H}$, и сферу S^4, заданную как проективная кватернионная плоскость $w = z_2^{-1} z_1$ или $[z_1, z_2] \sim [\lambda z_1, \lambda z_2]$, где $\lambda \in \mathbf{H}$, $z^{-1} = |z|^{-2}\,\overline{z}$. Одна и та же точка $w = z_2^{-1} z_1$ на S^4 при $z_1 \overline{z}_1 + z_2 \overline{z}_2 = 1$ соответствует кривой $\{z'_1, z'_2\} = \{\lambda z_1, \lambda z_2\}$, вложенной в S^7 при $|\lambda|^2 = 1$, так как

$$1 = \overline{z}'_1 z'_1 + \overline{z}'_2 z'_2 = \overline{z}_1 (\overline{\lambda}\lambda) z_1 + \overline{z}_2 (\overline{\lambda}\lambda) z_2 = (\overline{\lambda}\lambda)(\overline{z}_1 z_1 + \overline{z}_2 z_2). \tag{3.82}$$

Следовательно, прообразом точки из S^4 оказывается большая сфера $S^3 \subset S^7$: $\{\lambda z_1, \lambda z_2\}$, $|\lambda|^2 = 1$ (эта сфера содержит диаметрально противоположные точки $\{z_1, z_2\} \in S^3$ и $\{-z_1, -z_2\} \in S^3$).

Цепочка равенств (3.82) обобщается и на неассоциативный случай октонионов в силу тождеств альтернативности и тождества Муфанг (3.15), что приводит к описанию отображения $S^{15} \xrightarrow{S^7} S^8$.

Список литературы

1. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса; группы, порожденные отражениями; системы корней. Гл. IV–VI. М.: Мир, 1972.
2. *Хамфрис Дж.* Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. М.: МЦНМО, 2003.
3. *Вейль Г.* Теория представлений непрерывных полупростых групп при помощи линейных преобразований // Избр. тр. Математика, теоретическая физика. М., 1984. С. 100–197.
4. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. М.: Наука, 1973.
5. *Наймарк М. А.* Теория представлений групп. М.: Наука, 1973.
6. *Racah G.* Group Theory and Spectroscopy // Lectures Delivered at the Institute for Advanced Study. Princeton, 1951; Preprint CERN 61-8. 1961.
7. *Дынкин Е. Б.* Классификация простых групп Ли // Матем. сб. 1946. Т. 18(60), №3. С. 45.
8. *Frappat L., Sciarrino A., Sorba P.* Dictionary on Lie Superalgebras. Preprint. 1996. arXiv: hep-th/9607161.
9. *Olive D.* Gauge Theories and Lie Algebras with some Applications to Spontaneous Symmetry Breaking and Integrable Dynamical Systems // Lectures Given at the University of Virginia. 1982; Preprint. 1983.
10. *Kac V.* A Sketch of Lie Superalgebra Theory // Comm. Math. Phys. 1977. V. 53. P. 31–64.
11. *Toda M.* Studies of a Non-Linear Lattice // Phys. Rep. 1975. V. 18, No. 1. P. 1.
12. *Лезнов А. Н., Савельев М. В.* Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985.
13. *Olshanetsky M., Perelomov A.* // Inventiones Math. 1979. V. 54. P. 261.
14. *Dunkl C. F.* Differential-Difference Operators Associated to Reflection Groups // Transact. of the AMS. 1989. V. 311. P. 167.
15. *Heckman G. J.* A Remark on the Dunkl Differential-Difference Operators // Harmonic Analysis on Reductive Groups / Eds.: W. Barker and P. Sally. Boston, 1991. P. 181–191.

16. *Желобенко Д. П.* Компактные группы Ли и их представления. М.: Наука, 1970.
17. *Постников М. М.* Группы и алгебры Ли: Лекции по геометрии, семестр V. М.: Наука, 1982.
18. *Schafer R. D.* An Introduction to Nonassociative Algebras. N.Y.: Acad. Press Inc., 1966.
19. *G. 't Hooft* Computation of the Quantum Effects Due to a Four-Dimensional Pseudoparticle // Phys. Rev. D. 1976. V. 14. P. 3432.
20. *Prasad M. K.* Instantons and Monopoles in the Theories of Gauge Yang–Mills Fields // Physica D. 1980. V. 1. P. 167–191 (рус. пер.: Геометрические идеи в физике: Сб. ст. / Под ред. Ю. И. Манина. М.: Мир, 1983).
21. *Atiyah M. F., Hitchin N. J., Drinfeld V. G., Manin Yu. I.* // Phys. Lett. A. 1978. V. 65. P. 185.
22. *Christ N., Weinberg E. J., Stanton N. K.* General Self-Dual Yang–Mills Solutions // Phys. Rev. D . 1978. V. 18. P. 2013;
    Corrigan E., Fairlie D., Tempelton S., Goddard P. A Green Function for the General Self-Dual Gauge Field // Nucl. Phys. B. 1978. V. 140. P. 31.
23. *Kugo T., Townsend P.* Supersymmetry and the Division Algebras // Nucl. Phys. B. 1983. V. 221. P. 357;
    Sudbery A. Division Algebras, (Pseudo)Ortogonal Groups and Spinors // J. Phys. A. 1984. V. 17. P. 939.
24. *Steenrod N.* The Topology of Fibre Bundles. Princeton, New Jersey, 1951 (рус. пер.: *Стинрод Н.* Топология косых произведений. М.: Изд-во иностр. лит., 1953;
    Монастырский М. И. Топология калибровочных полей и конденсированных сред. М.: ПАИМС, 1995.
25. *Gunaydin M.* Quadratic Jordan Formulation of Quantum Mechanics and Construction of Lie(Super) Algebras from Jordan(Super) Algebras. Talk presented at the VIII Intern. Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics, Kiriat Anavim, Israel, March 25–29, 1979; Preprint BONN-HE-79-9. 1979.
26. *Baez J.* The Octonions // Bull. of the Am. Math. Soc. 2001. V. 39, No. 2. P. 145; arXiv:math.AG/0105155.

№ 2

Учебное издание

Исаев Алексей Петрович

Теория групп и симметрий.
Системы корней простых конечномерных алгебр Ли, исключительные алгебры Ли и алгебры с делением

УНЦ-2010-46

Редактор *А. И. Петровская*

Получено 24.09.2010. Подписано в печать 21.12.2010.
Формат 60 × 90/16. Усл. печ. л. 7,31. Уч.-изд. л. 7,29. Тираж 285. Заказ № 57201.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6
E-mail: publish@jinr.ru
www.jinr.ru/publish/