

С 332.1(07)
Ш-643



Учебно-
методические
пособия
Учебно-научного
центра ОИЯИ
Дубна

УНЦ-2009-36

Г. Д. Ширков

ОСНОВЫ ФИЗИКИ СТОЛКНОВЕНИЯ ЧАСТИЦ
И ИСТОЧНИКОВ МНОГОЗАРЯДНЫХ ИОНОВ
Часть II. Упругие столкновения частиц

2009

Учебно-научный центр ОИЯИ

C 332.1(07)

Ш-643

Г. Д. Ширков

ОСНОВЫ ФИЗИКИ СТОЛКНОВЕНИЯ ЧАСТИЦ
И ИСТОЧНИКОВ МНОГОЗАРЯДНЫХ ИОНОВ

Часть II. Упругие столкновения частиц

Учебное пособие

единый институт
дубна
БИБЛИОТЕКА

В-19668

Учебное пособие написано профессором базовой кафедры МИРЭА «Электроника физических установок» при УНЦ ОИЯИ Г. Д. Ширковым (ОИЯИ) и рекомендовано к изданию экспертной комиссией УНЦ ОИЯИ и редакционно-издательским советом МИРЭА.

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, проф., член-корреспондент РАН И. Н. Мешков;
д-р физ.-мат. наук, проф. Е. М. Сыресин

Ширков Г. Д.

Ш64 Основы физики столкновения частиц и источников многозарядных ионов: В 3 ч. Ч. II. Упругие столкновения частиц: Учебное пособие. — Дубна: ОИЯИ, 2009. — 38 с.

ISBN 978-5-9530-0275-2

Учебное пособие предназначено для студентов инженерных специальностей, проходящих обучение в МИРЭА, и является второй частью лекций по основам физики столкновения частиц и источников многозарядных ионов. Вторая часть лекций посвящена упругим столкновениям частиц.

Shirkov G. D.

The Physical Basements of Particle Collisions and Multicharged Ion Sources: In 3 parts. Part II. Elastic Particle Collisions: Manual. — Dubna: JINR, 2009. — 38 p.

ISBN 978-5-9530-0275-2

The textbook is addressed to the students of Moscow Institute of Radio Engineering, Electronics and Automation specialized in engineering and it is the second part of the training course on the physical basements of particle collisions and multicharged ion sources. The second part of lectures is dedicated to elastic particle collisions.

ISBN 978-5-9530-0275-2

© Объединенный институт
ядерных исследований, 2009

Введение

Как отмечалось в первой части курса лекций, в основе всех физических явлений лежит взаимодействие или воздействие физических тел или частиц друг на друга, приводящее к изменению их внутреннего состояния или движения. Это воздействие осуществляется посредством полей, создаваемых физическими объектами или путем столкновений.

В физике под *столкновениями* понимают процессы взаимодействия между телами в широком смысле слова, а не буквально соприкосновение тел. Сталкивающиеся тела на бесконечном расстоянии друг от друга являются свободными. Проходя друг мимо друга, они взаимодействуют между собой, в результате чего могут происходить самые различные процессы: тела могут соединиться вместе, могут возникать новые тела и, наконец, может иметь место *упругое столкновение*, при котором тела после некоторого сближения вновь расходятся без изменения своего внутреннего состояния. Столкновения, сопровождающиеся изменением внутреннего состояния тел, называются *неупругими*.

Происходящие в обычных условиях столкновения обычных тел почти всегда бывают в той или иной степени неупругими — уже хотя бы потому, что они сопровождаются некоторым нагреванием тел, т. е. переходом части их кинетической энергии в тепло как в энергию движения частиц, из которых эти тела состоят. Тем не менее, в физике понятие об упругих столкновениях играет важную роль, так как с такими столкновениями часто приходится иметь дело в физическом эксперименте в области атомных явлений. Но и обычные столкновения можно часто с достаточной степенью точности считать упругими.

Лекции посвящены столкновениям частиц в атомной физике, физике плазмы, физике пучков заряженных частиц и ионных источников. Часть изложенного материала может быть использована при изучении газовой динамики и смежных с ней вопросов физики низкотемпературной плазмы, возникающей на поверхности летательных аппаратов при гиперзвуковых скоростях, а также в верхних слоях атмосферы Земли. Основным видом

взаимодействия при указанных процессах является кулоновское взаимодействие заряженных частиц, которое в общем случае описывается теорией электромагнитного взаимодействия и уравнениями Максвелла.

Кроме перечисленных разделов физики, многие столкновительные процессы, связанные с астрономией и взаимодействием космических объектов, описываются сходными уравнениями и имеют близкие методы решения, несмотря на иные пространственные масштабы.

Курс лекций "Столкновения частиц" читается в качестве спецкурса студентам старших курсов МИРЭА в течение ряда лет. Вторая часть учебного пособия в значительной степени основана на соответствующих параграфах классических учебников по теоретической физике Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшица [1, 2] с сохранением основных обозначений и порядка изложения. Кроме того, использованы материалы из книг Б. А. Трубникова [4] и G. Shirkov, G. Zschornack [3]. Все эти издания могут быть рекомендованы также в качестве учебных пособий.

1. Упругие столкновения двух частиц и законы сохранения

Законы сохранения энергии и импульса могут быть использованы для установления соотношений между различными величинами при столкновениях тел.

Рассмотрим упругое столкновение двух частиц с массами m_1 и m_2 . Обозначим скорости частиц до и после столкновения соответственно через v_1, v_2 и v'_1, v'_2 . Будем считать, что одна из частиц, пусть это будет частица m_2 , до столкновения покоилась, т. е. $v_2 = 0$.

Поскольку при упругом столкновении внутренние энергии частиц не меняются, то их можно вообще не учитывать при применении закона сохранения энергии, т. е. считать как бы равными нулю. Так как до и после столкновения частицы предполагаются невзаимодействующими, т. е. свободными, то закон сохранения энергии сводится к сохранению кинетической энергии (общий

множитель $1/2$ мы опустили):

$$m_1 v_1^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2.$$

Закон же сохранения импульса выражается векторным равенством

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2'.$$

Очень прост случай, когда масса первоначально покоившейся частицы значительно больше массы налетающей на нее частицы, т. е. $m_2 \gg m_1$. Из формулы

$$v_2' = \frac{m_1}{m_2} (v_1 - v_1')$$

следует, что при $m_2 \gg m_1$ скорость v_2' будет очень малой. Аналогичное заключение можно сделать и об энергии этой первоначально покоившейся частицы, так как произведение $m_2 v_2'^2$ будет обратно пропорционально массе m_2 . Отсюда можно заключить, что энергия первой (налетающей) частицы в результате столкновения не изменится, т. е. не изменится и абсолютное значение скорости этой частицы. Таким образом, при столкновении легкой частицы с тяжелой может измениться только направление скорости легкой частицы, величина же ее скорости останется неизменной.

Если массы сталкивающихся частиц одинаковы, то законы сохранения приобретают вид

$$v_1 = v_1' + v_2', \quad v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2.$$

Первое из этих соотношений показывает, что векторы v_1, v_1' и v_2' образуют треугольник, а из второго соотношения следует, что этот треугольник является прямоугольным с гипотенузой v_1 . Следовательно, при столкновении частицы с одинаковыми массами разлетаются под прямым углом (рис. 1).

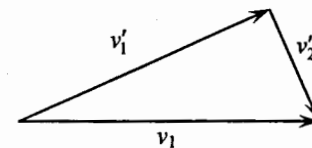


Рис. 1.

Рассмотрим далее "лобовое" столкновение двух частиц. В результате такого столкновения обе частицы будут двигаться вдоль одной прямой, совпадающей с направлением скорости налетающей частицы. В этом случае мы можем заменить в законе сохранения импульса векторы скоростей их величинами, т. е. записать его в виде

$$m_2 v'_2 = m_1 (v_1 - v'_1).$$

Присоединив сюда закон сохранения энергии, согласно которому

$$m_2 v_2^2 = m_1 (v_1^2 - v_1'^2),$$

можно выразить v'_1 и v'_2 через v_1 . Разделив второе уравнение на первое, получим

$$v'_2 = v_1 + v'_1,$$

и, следовательно,

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1. \quad (2.1)$$

Налетающая (первая) частица будет продолжать двигаться в том же направлении или же изменит свое направление на обратное в зависимости от того, больше или меньше ее масса m_1 массы первоначально покоившейся частицы m_2 . Если массы m_1 и m_2 одинаковы, то $v'_1 = 0$, $v'_2 = v_1$, т. е. обе частицы как бы обмениваются своими скоростями. Если $m_2 \gg m_1$, то $v'_1 = -v_1$ и $v'_2 = 0$.

В общем случае столкновение удобно рассматривать в системе центра инерции сталкивающихся частиц. В этой системе суммарный импульс частиц как до, так и после столкновения равен нулю. Поэтому если обозначить импульсы первой частицы до и после столкновения через p и p' , то импульсы второй частицы до и после столкновения будут $-p$ и $-p'$.

Далее, приравнявая суммы кинетических энергий частиц до и после столкновения, мы найдем, что должно быть $p^2 = p'^2$, т. е. величина импульсов частиц остается неизменной. Таким образом, единственное, что происходит при столкновении, — это поворот импульсов частиц, изменение их направления без изменения величины. Вместе с импульсами таким же образом меняются скорости обеих частиц — они поворачиваются, не меняя величины и оставаясь взаимно

противоположными, как это изображено на рис. 2 (индекс "нуль" у скоростей стоит для указания на то, что они относятся к системе центра инерции).

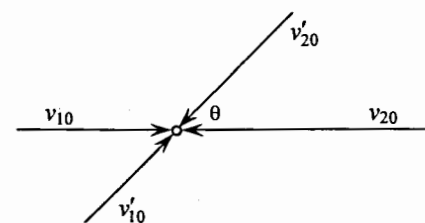


Рис. 2.

Что касается угла, на который происходит поворот скорости, то он не определяется одними только законами сохранения импульса и энергии и зависит от конкретного характера взаимодействия частиц и от их взаимного расположения при столкновении. Для выяснения характера изменения скоростей в исходной, или, как говорят, в *лабораторной* системе отсчета (в которой одна из частиц до столкновения покоилась) применим следующий графический прием. Построим вектор $\overline{0I}$, равный скорости v_{10} первой частицы в системе центра инерции (рис. 3). Эта скорость связана со скоростью v_1 той же частицы в лабораторной системе отсчета (являющейся в то же время относительной скоростью обеих частиц) равенством $v_{10} = v_1 - V$, где

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2.2)$$

это скорость центра инерции. Произведя вычитание, получим формулу

$$v_{10} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1. \quad (2.3)$$

Скорость первой частицы после столкновения v'_{10} получается поворотом скорости v_{10} на некоторый угол θ , т. е. может изображаться любым радиусом $\overline{0I'}$ окружности, начерченной на рис. 3. Для перехода к лабораторной системе отсчета нужно прибавить ко всем скоростям скорость центра инерции V . На рис. 3 она изображается вектором $\overline{A0}$. Вектор $\overline{A1}$ совпадает тогда со скоростью v_1

налетающей частицы до столкновения, а вектор $\overline{A1'}$ даст искомую скорость той же частицы после столкновения. Аналогичное построение можно сделать для скорости второй частицы.

$$v_{10} = 01$$

$$A0 = V$$

$$A1 = V + v_{10} = v_1$$

$$O1' = v'_{01}$$

$$A1' = v'_1 = V + v'_{10}$$

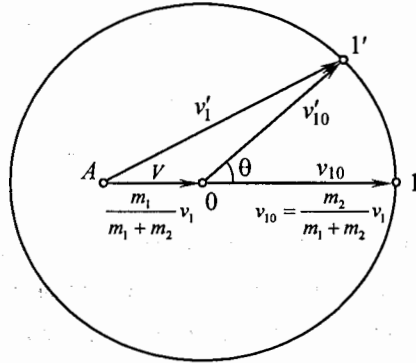


Рис. 3.

На рис. 3 предполагается, что $m_1 < m_2$, так что точка A лежит внутри окружности. При этом вектор $\overline{A1'}$, т. е. скорость v'_1 , может иметь любое направление.

Если же $m_1 > m_2$, то точка A лежит вне окружности (рис. 4). В этом случае угол ϕ между скоростями частицы до и после столкновения не может превышать некоторого максимального значения, соответствующего случаю, когда прямая $A1'$ касается окружности. При этом сторона $A1'$ треугольника $A1'0$ будет перпендикулярна стороне $O1'$, так что

$$\sin \phi_{\max} = \frac{O1'}{A0} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Заметим также, что скорость частицы после столкновения не может быть меньше некоторого минимального значения, достигаемого, когда точка $1'$ на рис. 3 (или на рис. 4) диаметрально противоположна точке 1 . Этот случай соответствует лобовому столкновению частиц, и минимальное значение скорости равно

$$v'_{1\min} = \frac{|m_1 - m_2|}{m_1 + m_2} v_1.$$

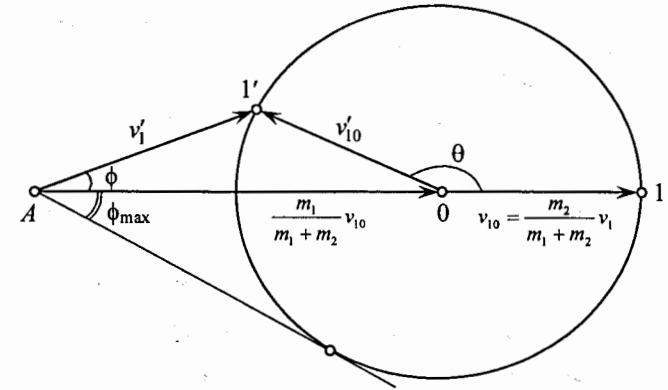


Рис. 4.

2. Момент импульса

Помимо энергии и импульса, для всякой замкнутой системы сохраняется еще одна векторная величина, называемая *моментом импульса* или просто *моментом*. Эта величина складывается из моментов отдельных материальных точек, которые определяются следующим образом.

Пусть материальная точка имеет импульс p , а ее положение относительно некоторого произвольного начала отсчета O определяется радиусом-вектором r . Тогда момент M этой материальной точки определяется как вектор, по величине равный

$$M = rp \sin \theta \quad (2.4)$$

(где θ — угол между p и r) и направленный перпендикулярно плоскости, проходящей через направления p и r . Последнее условие само по себе еще не определяет полностью направления M , так как остаются две возможности — "вверх" и "вниз". Принято определять это направление так: если представить себе

винт, вращаемый по направлению от r к p , то винт будет перемещаться вдоль M (рис. 5).

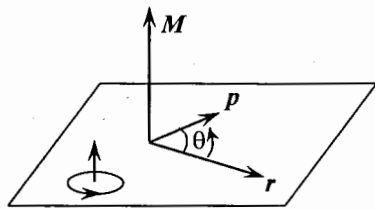


Рис. 5

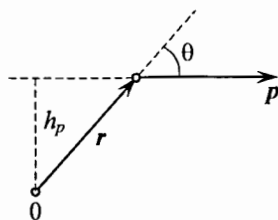


Рис. 6

Величину M можно представить еще и в другом, более наглядном виде, если заметить, что произведение $r \sin \theta$ есть длина h_p перпендикуляра, опущенного из точки 0 на направление импульса частицы (рис. 6); это расстояние часто называют *плечом* импульса относительно точки 0. Момент частицы равен произведению плеча на величину ее импульса

$$M = ph_p.$$

Приведенное определение вектора M как раз совпадает с известным из векторной алгебры понятием *векторного произведения*: вектор M , составленный по указанным правилам из векторов r и p , называют векторным произведением r и p и записывают его следующим образом:

$$M = [rp]$$

или, поскольку $p = mv$,

$$M = m[rp].$$

Этой формулой определяется момент отдельной частицы. Моментом системы частиц называется сумма

$$M = [r_1 p_1] + [r_2 p_2] + \dots$$

моментов отдельных частиц. Такая сумма для любой замкнутой системы остается постоянной во времени. В этом и заключается *закон сохранения момента*.

Обратим внимание на то, что в определении момента фигурирует произвольно выбранное начало 0, от которого отсчитываются радиусы-векторы частиц. Хотя величина и направление вектора M зависят от выбора этой точки, но

легко видеть, что эта неопределенность несущественна для закона сохранения момента. Действительно, если мы сместим точку 0 на некоторое заданное (по величине и направлению) расстояние a , то на эту же величину изменятся все радиусы-векторы частиц, так что к моменту прибавится величина

$$[ap_1] + [ap_2] + \dots = [a(p_1 + p_2 + \dots)] = [aP].$$

где P — полный импульс системы. Но для замкнутой системы P есть постоянная величина. Мы видим, следовательно, что изменение выбора начала координат не отражается на постоянстве полного момента замкнутой системы.

Обычно принято определять момент системы частиц, выбрав в качестве начала отсчета радиусов-векторов центр инерции системы. Именно такой выбор мы и будем подразумевать в дальнейшем.

Определим производную по времени от момента импульса частицы. Согласно правилу дифференцирования произведения имеем

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}[rp] = \left[\frac{dr}{dt} p \right] + \left[r \frac{dp}{dt} \right]. \quad (2.5)$$

Так как $\frac{dr}{dt}$ есть скорость частицы v , а $p = mv$, то первый член есть $m[vv]$ и равен нулю, поскольку равно нулю векторное произведение любого вектора самого на себя. Во втором члене производная $\frac{dp}{dt}$ есть, как мы знаем, действующая на частицу сила F . Таким образом,

$$\frac{dM}{dt} = [rF]. \quad (2.6)$$

Векторное произведение $[rF]$ называют *моментом силы* (относительно заданной точки 0); мы будем обозначать его посредством K :

$$K = [rF].$$

Аналогично сказанному выше о моменте импульса можно сказать, что величина момента силы равна произведению величины силы F на ее "плечо" h_F , т. е. на длину перпендикуляра, опущенного из точки 0 на направление действия силы,

$$K = Fh_F.$$

Таким образом, скорость изменения момента импульса материальной точки равна моменту действующей на нее силы

$$\frac{dM}{dt} = K.$$

Полный момент импульса замкнутой системы сохраняется; это значит, что производная по времени от суммы моментов, входящих в систему частиц, равна нулю:

$$\frac{d}{dt}(M_1 + M_2 + \dots) = \frac{dM_1}{dt} + \frac{dM_2}{dt} + \dots = 0. \quad (2.7)$$

Отсюда следует, что

$$K_1 + K_2 + \dots = 0.$$

Мы видим, что в замкнутой системе не только сумма действующих на все частицы сил, но и сумма моментов сил равны нулю. Первое из этих утверждений эквивалентно закону сохранения импульса, а второе — закону сохранения момента импульса.

3. Движение в центральном поле

Закон сохранения момента выполняется для замкнутой системы, а не для отдельных входящих в ее состав частиц. Но возможен случай, когда он выполняется для одной частицы, движущейся в силовом поле. Для этого необходимо, чтобы поле было центральным.

Центральным называют такое силовое поле, в котором потенциальная энергия частицы является функцией только от расстояния r до определенной точки — центра поля: $U = U(r)$. Сила, действующая на частицу в таком поле, тоже зависит лишь от расстояния r и направлена в каждой точке пространства вдоль радиуса, проведенного в эту точку из центра поля.

Хотя частица, движущаяся в таком поле, и не представляет собой замкнутую систему, тем не менее, для нее выполняется закон сохранения момента импульса, если определять момент по отношению к центру поля. Действительно, поскольку

направление действующей на частицу силы проходит через центр поля, то равно нулю плечо силы относительно этой точки, а потому равен нулю и момент силы.

Согласно уравнению $\frac{dM}{dt} = K = 0$. Отсюда следует, что $M = \text{const}$.

Поскольку момент $M = m[rv]$ перпендикулярен направлению радиуса-вектора r , то из постоянства направления M следует, что при движении частицы ее радиус-вектор должен оставаться все время в одной плоскости — плоскости, перпендикулярной направлению M . Таким образом, в центральном поле частицы движутся по плоским орбитам — орбитам, лежащим в плоскостях, проходящих через центр поля.

Закону сохранения момента импульса при таком "плоском" движении можно придать наглядную форму. Для этого запишем M в виде

$$M = m[rv] = m \left[r \frac{ds}{dt} \right] = m \frac{[rds]}{dt}. \quad (2.8)$$

где ds — вектор перемещения материальной точки за время dt . Величина векторного произведения двух векторов геометрически представляет собой, как известно, площадь построенного на них параллелограмма. Площадь же параллелограмма, построенного на векторах ds и r , есть удвоенная площадь бесконечно узкого сектора $0AA'$ (рис. 7), описанного радиусом-вектором движущейся точки за время dt .

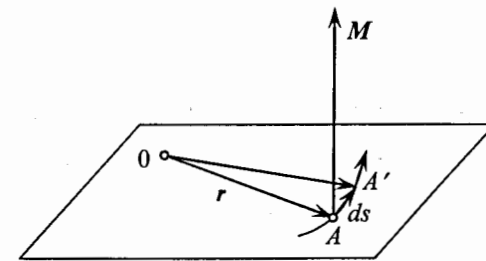


Рис. 7.

Обозначив эту площадь через dS ($dS = rds$), можно записать величину момента в виде

$$M = 2m \frac{dS}{dt}.$$

Величина $\frac{dS}{dt}$ называется *секториальной скоростью*.

Таким образом, закон сохранения момента импульса можно сформулировать как постоянство секториальной скорости: радиус-вектор движущейся точки описывает за равные времена равные площади. В таком виде это утверждение называется *вторым законом Кеплера*.

Задача о движении в центральном поле в особенности важна потому, что к ней сводится задача об относительном движении двух взаимодействующих друг с другом материальных точек — так называемая *задача двух тел*.

Рассмотрим это движение в системе центра инерции обеих частиц. В этой системе отсчета суммарный импульс частиц равен нулю

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0,$$

где v_1, v_2 — скорости частиц. Введем также относительную скорость частиц $v = v_1 - v_2$. Из этих двух равенств легко получить формулы

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v, \quad v_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v, \quad (2.9)$$

выражающие скорости каждой из частиц через их относительную скорость.

Подставим эти формулы в выражение полной энергии частиц

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + U(r),$$

где $U(r)$ — взаимная потенциальная энергия частиц как функция их относительного расстояния r (т. е. абсолютной величины вектора $r = r_1 - r_2$).

После простого приведения членов получим

$$E = \frac{\mu v^2}{2} + U(r),$$

где μ обозначает величину

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (2.10)$$

называемую *приведенной массой* частиц.

Мы видим, что энергия относительного движения двух частиц такая же, как если бы одна частица с массой m двигалась со скоростью $v = \frac{dr}{dt}$ в центральном внешнем поле с потенциальной энергией $U(r)$. Другими словами, задача о движении двух частиц сводится к задаче о движении одной "приведенной" частицы во внешнем поле.

Если эта последняя задача решена (т. е. найдена траектория $r = r(t)$ "приведенной" частицы), то можно непосредственно найти и реальные траектории двух частиц m_1 и m_2 по формулам

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r, \quad r_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} r, \quad (2.11)$$

связывающим радиусы-векторы частиц r_1 и r_2 относительно их центра инерции с их взаимным расстоянием $r = r_1 - r_2$ (эти формулы вытекают из соотношения $m_1 r_1 = m_2 r_2 = 0$ и соответствуют приведенным выше аналогичным формулам для скоростей):

$$v_1 = \frac{dr_1}{dt} \quad \text{и} \quad v_2 = \frac{dr_2}{dt}.$$

Отсюда видно, что обе частицы будут двигаться относительно центра инерции системы по геометрически подобным траекториям, отличающимся лишь своими размерами, обратно пропорциональными массам частиц

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

В течение движения частицы всегда находятся на концах некоторой прямой, проходящей через центр инерции.

Сведя задачу о движении двух тел к задаче о движении одного тела, мы пришли вопросу об определении движения частицы во внешнем поле, в котором ее потенциальная энергия зависит только от расстояния r до определенной неподвижной точки; такое поле называют *центральным*. Сила

$$F = -\frac{dU(r)}{dr} = -\frac{dU}{dr} \frac{r}{r},$$

действующая на частицу, по абсолютной величине зависит при этом тоже только

от r и направлена в каждой точке вдоль радиуса-вектора.

При движении в центральном поле сохраняется момент системы относительно центра поля. Для одной частицы это есть

$$M = [rp].$$

Поскольку векторы M и r взаимно перпендикулярны, постоянство M означает, что при движении частицы ее радиус-вектор все время остается в одной плоскости — плоскости, перпендикулярной к M .

Таким образом, траектория движения частицы в центральном поле лежит целиком в одной плоскости. Это обстоятельство приводит к существенному упрощению задачи интегрирования уравнений движения при наличии циклических координат.

В данном случае обобщенный импульс совпадает с моментом $M_z = M$, так что мы возвращаемся к закону сохранения момента

$$M = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}, \quad (2.12)$$

где, как принято в механике, точка над величиной обозначает полную производную по времени: $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$.

Заметим, что для плоского движения одной частицы в центральном поле этот закон допускает простую геометрическую интерпретацию.

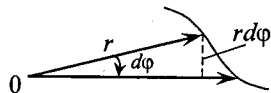


Рис. 8.

Выражение $\frac{1}{2}r \cdot r d\varphi$ представляет собой площадь сектора, образованного двумя бесконечно близкими радиусами-векторами и элементом дуги траектории (рис. 8).

Обозначив ее как df , напишем момент частицы в виде

$$M = 2mf', \quad (2.13)$$

где производную f' называют *секториальной скоростью*. Поэтому сохранение момента означает постоянство секториальной скорости — за равные промежутки времени радиус-вектор движущейся точки описывает равные площади.

Полное решение задачи о движении частицы в центральном поле проще всего получить, исходя из законов сохранения энергии и момента, не выписывая при этом самих уравнений движения. Выражая $\dot{\varphi}$ через M из (2.12) и подставляя в выражение для энергии, получим

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r). \quad (2.14)$$

Отсюда

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}} \quad (2.15)$$

или, после разделения переменных и интегрирования,

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} + \text{const}. \quad (2.16)$$

Далее, написав (2.12) в виде

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2} dt,$$

подставляя сюда dt из (2.15) и интегрируя, находим

$$\varphi = \int \frac{\frac{M^2}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} + \text{const}. \quad (2.17)$$

Формулы (2.16) и (2.17) решают в общем виде поставленную задачу. Вторая из них определяет связь между r и φ , т. е. уравнение траектории. Формула же (2.16) определяет в неявном виде расстояние r движущейся точки от центра как функцию времени. Отметим, что угол φ всегда меняется со временем монотонным образом — из (2.12) видно, что φ никогда не меняет знака.

Выражение (2.14) показывает, что радиальную часть движения можно рассматривать как одномерное движение в поле с "эффективной" потенциальной

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

энергией

$$U_{\text{эфф}} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}. \quad (2.18)$$

Величину $M^2/2mr^2$ называют центробежной энергией. Значения r , при которых квадратный корень в (2.17) равен нулю, или

$$U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = E, \quad (2.19)$$

определяют границы области движения по расстоянию от центра. При выполнении равенства (2.19) радиальная скорость \dot{r} обращается в нуль. Это не означает остановки частицы (как при истинном одномерном движении), так как угловая скорость $\dot{\varphi}$ не обращается в нуль. Равенство $\dot{r} = 0$ означает "точку поворота" траектории, в которой функция $r(t)$ переходит от увеличения к уменьшению или наоборот.

Если область допустимого изменения r ограничена лишь одним условием $r \geq r_{\min}$, то движение частицы инфинитно — ее траектория приходит из бесконечности и уходит на бесконечность.

Если область изменения r имеет две границы r_{\min} и r_{\max} , то движение является финитным и траектория целиком лежит внутри кольца, ограниченного окружностями $r = r_{\max}$ и $r = r_{\min}$. Это, однако, не означает, что траектория непременно является замкнутой кривой. За время, в течение которого r изменяется от r_{\max} и r_{\min} и затем до r_{\max} , радиус-вектор повернется на угол $\Delta\varphi$, равный согласно (2.17)

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m(E - U) - \frac{M^2}{r^2}}}. \quad (2.20)$$

Условие замкнутости траектории заключается в том, чтобы этот угол был равен рациональной части от 2π , т. е. имел вид $\Delta\varphi = 2\pi m/n$, где m, n — целые числа.

Тогда через n повторений этого периода времени радиус-вектор точки, сделав m

полных оборотов, совпадет со своим первоначальным значением, т. е. траектория замкнется.

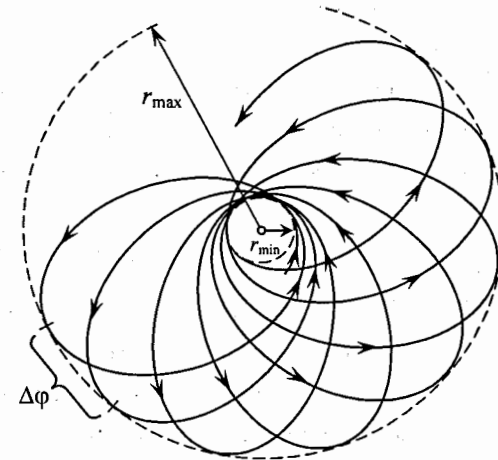


Рис. 9.

Однако такие случаи исключительны, и при произвольном виде $U(r)$ угол $\Delta\varphi$ не является рациональной частью от 2π . Поэтому в общем случае траектория финитного движения не замкнута. Она бесчисленное число раз проходит через минимальное и максимальное расстояние (как, например, на рис. 9) и за бесконечное время заполняет все кольцо между двумя граничными окружностями.

Существуют лишь два типа центральных полей, в которых все траектории финитных движений замкнуты. Это поля, в которых потенциальная энергия частицы пропорциональна $1/r$ или r^2 . Первый из этих случаев рассмотрен в следующем разделе, а второй соответствует так называемому пространственному осциллятору.

В точке поворота квадратный корень (2.15) (а вместе с ним и подынтегральные выражения в (2.16) и (2.17)) меняет знак. Если отсчитывать угол φ от направления радиуса-вектора, проведенного в точку поворота, то примыкающие с двух φ сторон к этой точке отрезки траектории будут отличаться

лишь знаком φ при всех одинаковых значениях r ; это значит, что траектория симметрична относительно указанного направления. Начав, скажем, от какой-либо из точек $r = r_{\max}$, мы пройдем отрезок траектории до точки с $r = r_{\min}$, затем будем иметь симметрично расположенный такой же отрезок до следующей точки с $r = r_{\max}$ и т. д., т. е. вся траектория получается повторением в прямом и обратном направлениях одинаковых отрезков. Это относится и к инфинитным траекториям, состоящим из двух симметричных ветвей, простирающихся от точки поворота r_{\min} до бесконечности.

Наличие центробежной энергии (при движении с $M \neq 0$), обращающейся при $r \rightarrow 0$ в бесконечность, как $1/r^2$, приводит обычно к невозможности проникновения движущихся частиц к центру поля, даже если последнее само по себе имеет характер притяжения. "Падение" частицы в центр возможно лишь, если потенциальная энергия достаточно быстро стремится к $-\infty$ при $r \rightarrow 0$. Из неравенства

$$\frac{mr^2}{2} = E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} > 0$$

или

$$r^2 U(r) + \frac{M^2}{2m} < Er^2$$

следует, что r может принимать стремящиеся к нулю значения лишь при условии

$$r^2 U(r) \Big|_{r \rightarrow 0} < -\frac{M^2}{2m}, \quad (2.21)$$

т. е. $U(r)$ должно стремиться к $-\infty$ либо как $-\alpha/r^2$ с $\alpha > M^2/2m$, либо пропорционально $-1/r^n$ с $n > 2$.

4. Рассеяние частиц

Полное определение результата столкновения двух частиц (определение угла χ на рис. 10) требует решения уравнений движения с учетом конкретного закона взаимодействия частиц.

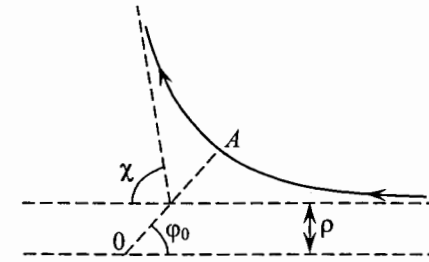


Рис. 10

В соответствии с общим правилом будем рассматривать сначала эквивалентную задачу об отклонении одной частицы с массой m в поле $U(r)$ неподвижного силового центра (расположенного в центре инерции частиц).

Траектория частицы в центральном поле симметрична по отношению к прямой, проведенной в ближайшую к центру точку орбиты (OA на рис. 10). Поэтому обе асимптоты орбиты пересекают указанную прямую под одинаковыми углами. Если обозначить эти углы посредством φ_0 то угол χ отклонения частицы при ее пролете мимо центра есть, как видно из рисунка,

$$\chi = |\pi - 2\varphi_0|. \quad (2.22)$$

Угол же φ определяется согласно (2.17) интегралом

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}}, \quad (2.23)$$

взятым между ближайшим к центру и бесконечно удаленным положениями частицы. Напомним, что r_{\min} является корнем выражения, стоящего под знаком радикала.

При инфинитном движении, с которым мы имеем здесь дело, удобно ввести вместо постоянных E и M другие: скорость v_{∞} частицы на бесконечности и так называемое *прицельное расстояние* ρ . Последнее представляет собой длину перпендикуляра, опущенного из центра на направление v_{∞} , т. е. расстояние, на котором частица прошла бы мимо центра, если бы силовое поле отсутствовало

(рис. 10). Энергия и момент выражаются через эти величины согласно

$$E = \frac{mv_{\infty}^2}{2}, \quad M = m\rho v_{\infty}, \quad (2.24)$$

а формула (2.23) принимает вид

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{mv_{\infty}^2}}}. \quad (2.25)$$

Вместе с (2.22) она определяет зависимость χ от ρ .

В физических приложениях приходится обычно иметь дело не с индивидуальным отклонением частицы, а, как говорят, с *рассеянием целого пучка* одинаковых частиц, падающих на рассеивающий центр с одинаковой скоростью v_{∞} . Различные частицы в пучке обладают различными прицельными расстояниями и, соответственно, рассеиваются под различными углами χ . Обозначим посредством dN число частиц, рассеиваемых в единицу времени на углы, лежащие в интервале между χ и $\chi + d\chi$. Само по себе это число неудобно для характеристики процесса рассеяния, так как оно зависит от плотности падающего пучка (пропорционально ей). Поэтому введем отношение

$$d\sigma = \frac{dN}{n}, \quad (2.26)$$

где n — число частиц, проходящих в единицу времени через единицу площади поперечного сечения пучка (мы предполагаем, естественно, что пучок однороден по всему своему сечению). Это отношение имеет размерность площади и называется *эффективным сечением рассеяния*. Оно всецело определяется видом рассеивающего поля и является важнейшей характеристикой процесса рассеяния.

Будем считать, что связь между χ и ρ — взаимно однозначна. Это так, если угол рассеяния является монотонно убывающей функцией прицельного расстояния. В таком случае рассеиваются в заданный интервал углов между χ и $\chi + d\chi$ лишь те частицы, которые летят с прицельным расстоянием в определенном интервале между $\rho(\chi)$ и $\rho(\chi) + d\rho(\chi)$. Число таких частиц равно произведению n на площадь кольца между окружностями с радиусами ρ и $\rho + d\rho$,

т. е. $dN = 2\pi\rho d\rho n$. Поэтому эффективное сечение —

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho. \quad (2.27)$$

Чтобы найти зависимость эффективного сечения от угла рассеяния, достаточно переписать это выражение в виде

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi) \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\chi. \quad (2.28)$$

Мы пишем здесь абсолютное значение производной $d\rho/d\chi$, имея в виду, что она может быть отрицательной (как это обычно бывает)^{*)}. Часто относят $d\sigma$ не к элементу плоского угла $d\chi$, а к элементу телесного угла $d\omega$. Телесный угол между конусами с углами раствора χ и $\chi + d\chi$ есть $d\omega = 2\pi \sin\chi d\chi$. Поэтому имеем из (2.28)

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin\chi} \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| d\omega. \quad (2.29)$$

Возвращаясь к фактической задаче о рассеянии пучка частиц не на неподвижном силовом центре, а на других первоначально покоившихся частицах, мы можем сказать, что формула (2.29) определяет эффективное сечение в зависимости от угла рассеяния в системе центра инерции. Для нахождения же эффективного сечения в зависимости от угла рассеяния θ в лабораторной системе надо выразить в этой формуле χ через θ . При этом получают выражения как для сечения рассеяния падающего пучка частиц (χ выражено через θ_1), так и для частиц, первоначально покоившихся (χ выражено через θ_2).

5. Формула Резерфорда

Одно из важнейших применений полученных выше формул — рассеяние заряженных частиц в кулоновском поле.

Положив в (2.25) $U = \alpha/r$ и производя элементарное интегрирование, получим

^{*)} Если функция $\rho(\chi)$ многозначна, то надо взять сумму по всем ветвям этой функции.

$$\varphi_0 = \arccos \frac{\frac{\alpha}{mv_\infty^2 \rho}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2 \rho}\right)^2}},$$

откуда

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} \operatorname{tg}^2 \varphi_0,$$

или, при введении согласно (2.2) $\varphi_0 = (\pi - \chi)/2$:

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\chi}{2}. \quad (2.30)$$

Дифференцируя это выражение по χ и подставляя в (2.28) или в (2.29), получим

$$d\sigma = \pi \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\sin^3 \frac{\chi}{2}} \quad (2.31)$$

или

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2} \right)^2 \frac{d\theta}{\sin^4 \frac{\chi}{2}}. \quad (2.32)$$

Это так называемая *формула Резерфорда*. Отметим, что эффективное сечение не зависит от знака α , так что полученный результат относится в равной степени к кулоновскому полю отталкивания и притяжения.

Формула (2.31) дает эффективное сечение в системе отсчета, в которой покоится центр инерции сталкивающихся частиц. Для частиц, первоначально покоившихся, подставляя $\chi = \pi - 2\theta$ в (2.31), получим

$$d\sigma_2 = 2\pi \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2} \right)^2 \frac{\sin \theta_2}{\cos^3 \theta_2} d\theta_2 = \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2} \right)^2 \frac{d\theta_2}{\cos^3 \theta_2}. \quad (2.33)$$

Для падающих же частиц преобразование приводит в общем случае к весьма громоздкой формуле. Отметим лишь два частных случая. Если масса m_2 рассеивающей частицы велика по сравнению с массой m_1 рассеиваемой частицы,

то $\chi \approx \theta_1$, а $m \approx m_1$, так что

$$d\sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{4E_1} \right)^2 \frac{d\theta_1}{\sin^4 \frac{\theta_1}{2}}, \quad (2.34)$$

где $E_1 = m_1 v_\infty^2 / 2$ — энергия падающей частицы.

Если массы обеих частиц одинаковы ($m_1 = m_2$, $m = m/2$), то согласно (2.10)

$\chi = 2\theta$, и подстановка в (2.31) дает

$$d\sigma_1 = 2\pi \left(\frac{\alpha}{E_1} \right)^2 \frac{\cos \theta_1}{\sin^3 \theta_1} d\theta_1 = \left(\frac{\alpha}{E_1} \right)^2 \frac{\cos \theta_1}{\sin^4 \theta_1} d\theta_1. \quad (2.35)$$

Если не только массы обеих частиц равны, но эти частицы вообще тождественны, то не имеет смысла различать после рассеяния первоначально двигавшиеся и первоначально покоившиеся частицы. Общее эффективное сечение для всех частиц мы получим, складывая $d\sigma_2$ и заменяя θ_1 и θ_2 общим значением θ :

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{E_1} \right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4 \theta} + \frac{1}{\cos^4 \theta} \right) \cos \theta d\theta. \quad (2.36)$$

Вернемся снова к общей формуле (2.31) и определим с ее помощью распределение рассеянных частиц по отношению к теряемой ими в результате столкновения энергии. При произвольном соотношении между массой рассеиваемой (m_1) и рассеивающей (m_2) частиц приобретаемая последней скорость выражается через угол рассеяния в η -системе посредством

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_\infty \sin \frac{\chi}{2}$$

(см. (2.6)). Соответственно, приобретаемая этой частицей, а тем самым и теряемая частицей m_1 энергия равна

$$\varepsilon = \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{2m^2}{m_2} v_\infty^2 \sin^2 \frac{\chi}{2}.$$

Выразив отсюда $\sin \frac{\chi}{2}$ через ε и подставив в (2.31), получаем

$$d\sigma = 2\pi \frac{\alpha^2}{m_2 v_\infty^2 \varepsilon^2} d\varepsilon. \quad (2.37)$$

Эта формула отвечает на поставленный вопрос, определяя эффективное сечение как функцию от потери энергии ϵ ; последняя пробегает при этом значения от нуля до $\epsilon_{\max} = 2m^2v_\infty^2/m_2$.

6. Рассеяние под малыми углами

Вычисление эффективного сечения значительно упрощается, если рассматривать лишь те столкновения, которые происходят на больших прицельных расстояниях, где поле U является слабым, так что углы отклонения, соответственно, малы. При этом вычисление можно производить сразу в лабораторной системе отсчета, не вводя систему центра инерции.

Выберем ось x по направлению первоначального импульса рассеиваемых частиц (частицы m_1), а плоскость xy — в плоскости рассеяния. Обозначив посредством p'_1 импульс частицы после рассеяния, имеем очевидное равенство

$$\sin\theta_1 = \frac{p'_{1y}}{p'_1}.$$

Для малых отклонений можно приближенно заменить $\sin\theta_1$ на θ_1 , а в знаменателе — заменить p'_1 первоначальным импульсом $p_1 = m_1v_\infty$:

$$\theta_1 \approx \frac{p'_{1y}}{m_1v_\infty}. \quad (2.38)$$

Далее, поскольку $\dot{p}_y = F_y$, то полное приращение импульса вдоль оси y

$$p'_{1y} = \int_{-\infty}^{\infty} F_y dt. \quad (2.39)$$

При этом сила:

$$F_y = -\frac{dU}{dy} = -\frac{dU}{dr} \frac{dr}{dy} = -\frac{dU}{dr} \frac{y}{r}.$$

Поскольку интеграл (2.39) уже содержит малую величину U , то при его вычислении можно в том же приближении считать, что частица вовсе не

отклоняется от своего первоначального пути, т. е. движется прямолинейно (вдоль прямой $y = \rho$) и равномерно (со скоростью v_∞). Соответственно этому полагаем в (2.39)

$$F_y = -\frac{dU}{dr} \frac{\rho}{r}, \quad dt = \frac{dx}{v_\infty}$$

и получаем

$$p'_{1y} = -\frac{p}{v_\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dU}{dr} \frac{dx}{r}.$$

Наконец, от интегрирования по dx перейдем к интегрированию по dr . Поскольку для прямолинейного пути $r^2 = x^2 + \rho^2$, то при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ r изменяется от ∞ до ρ и затем снова до ∞ . Поэтому интеграл по dx перейдет в удвоенный интеграл по dr от ρ до ∞ , причем dx заменяется на

$$dx = \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}.$$

Окончательно получим для угла рассеяния (2.38) следующее выражение:

$$\theta_1 = -\frac{2\rho}{m_1v_\infty^2} \int_{\rho}^{\infty} \frac{dU}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}, \quad (2.40)$$

чем и определяется искомая зависимость θ_1 от ρ при слабом отклонении. Если произвести весь изложенный вывод в η -системе, то мы получим для χ такое же выражение с m вместо m_1 в соответствии с тем, что малые углы θ_1 и χ должны быть связаны соотношением $\theta_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \chi$.

Эффективное сечение рассеяния (в l -системе) получается по такой же формуле, как (2.29) (с θ_1 вместо χ), причем $\sin\theta_1$ можно и здесь заменить на θ_1 :

$$d\sigma = \left| \frac{dp}{d\theta_1} \right| \frac{\rho(\theta_1)}{\theta_1} d\theta_1. \quad (2.41)$$

7. Упругие (кулоновские) столкновения потоков заряженных частиц

Заряженные частицы создают вокруг себя электрические поля. Двигаясь в полях других частиц, они изменяют свою траекторию и, в свою очередь, своими электрическими полями влияют на другие частицы. Таким образом, происходит обмен и перераспределение энергий между сталкивающимися частицами. Эти процессы мы называем *упругими кулоновскими столкновениями* заряженных частиц.

Рассмотрим общую картину движения электронов и ионов в плазме и многокомпонентных пучках заряженных частиц. Заряженные частицы создают вокруг себя дальнедействующее электрическое поле, которое убывает с расстоянием как $1/r$. Этими полями частицы влияют друг на друга, в результате чего меняются их энергии и импульсы. В большинстве случаев при движении частицы проходят на больших расстояниях друг от друга, и это сопровождается только незначительными изменениями их траекторий. Если при этом внутренние состояния частиц остаются неизменными, то такие взаимодействия будут упругими кулоновскими столкновениями. Многократные упругие столкновения со временем могут приводить к изменению функций распределения для каждого типа частиц и (это является особенно важным для источников многозарядных ионов) к перераспределению энергий между различными заряженными компонентами. Эти вопросы были хорошо изучены несколько десятков лет назад в связи с развитием физики плазмы и уже стали классическими.

При строгом рассмотрении, в любой момент времени каждая заряженная частица подвергается воздействию громадного числа окружающих частиц, и все эти взаимодействия должны быть учтены. Такая задача, в принципе, является трудно разрешимой. Чтобы сделать решение возможным, делают некоторые упрощения. Наиболее простым является приближение парных столкновений. В этом приближении непрерывный процесс одновременного взаимодействия каждой частицы с большим числом других частиц сводится к мгновенным

последовательным столкновениям пар отдельных частиц, приводящим к тем же изменениям энергии и импульса. В то же время тройные, четверные и т. п. столкновения, когда одновременно на одно и то же расстояние сближаются три и более частиц, являются крайне маловероятными процессами. По этой причине приближение парных столкновений хорошо отражает реальную картину и приводит к правильным физическим результатам.

Рассмотрим рассеяние заряда Z_1 , имеющего массу m_1 и налетающего из бесконечности со скоростью v на неподвижный заряд Z_2 с массой m_2 (рис. 11).

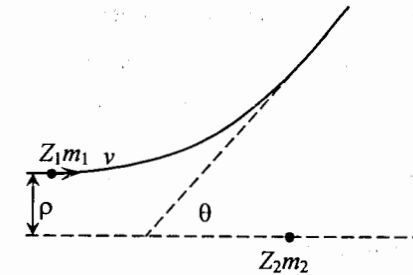


Рис. 11. Упругое рассеяние частицы с зарядом Z_1 и массой m_1 и с относительной скоростью v на частице с зарядом Z_2 и массой m_2

Эффективное сечение рассеяния на угол θ выражается хорошо известной формулой Резерфорда:

$$\sigma(\theta, v) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2\mu v^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}, \quad (2.42)$$

где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ — приведенная масса и $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{\rho_{\perp}}{\rho}$. Здесь ρ — прицельный

параметр столкновения, $\rho_{\perp} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\mu v^2}$ — прицельный параметр, при котором

происходит рассеяние под прямым углом.

Если мы имеем налетающий поток частиц первого сорта с плотностью n_1 , то, проинтегрировав силу, действующую от одной налетающей частицы, по всем

возможным прицельным расстояниям ρ , можем получить среднюю силу F , действующую на неподвижный заряд со стороны налетающих частиц:

$$\bar{F} = 4\pi L \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4 n_1}{\mu v^3} \bar{v}, \quad (2.43)$$

где L — так называемый кулоновский логарифм:

$$L = \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{\rho d\rho}{\rho_{\min}^2 + \rho^2} = \ln \left(\frac{\sqrt{\rho_{\max}^2 + \rho_{\min}^2}}{\rho_{\min}} \right) \cong \ln \frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}}. \quad (2.44)$$

Физически правильный выбор значений пределов интегрирования устраняет математическую расходяемость интеграла и обеспечивает конечное значение кулоновского логарифма. Обычно ρ_{\min} принимается равным максимальному значению из трех величин:

$$\rho = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\mu v^2} \text{ — прицельного параметра для рассеяния под прямым углом;}$$

$$a_0 \text{ — размеров сталкивающихся частиц;}$$

$$\lambda = \frac{hc}{p} \text{ — длины волны Де Бройля налетающей частицы с импульсом } p.$$

Последний случай имеет место при больших энергиях сталкивающихся частиц, когда классическая механика становится неприемлема. Это происходит, если $v > Z_1 Z_2 \alpha c$, где $\alpha = 1/137$ — постоянная тонкой структуры.

Верхний предел интегрирования ρ_{\max} принимается равным либо размерам рассматриваемого сгустка частиц, либо, при больших плотностях заряженных частиц, величине

$$r_0 = \sqrt{\frac{T}{8\pi n e^2}},$$

где T — температура и n — концентрация частиц. Величина r_0 называется дебаевским радиусом и определяет характерное расстояние, на котором заряженные частицы экранируют собственные электрические поля.

Реально отношение ρ_{\min}/ρ_{\max} принимает очень большие значения, и кулоновский логарифм для широкого класса задач изменяется в очень

незначительных пределах. Обычно $L = 10 \dots 15$. По этой причине оценочный характер определения пределов интегрирования в (2.44) вполне допустим, так как не приводит, в конечном счете, к значительным ошибкам.

По установившейся терминологии отдельно рассматриваемая частица называется пробной. Все остальные частицы рассматриваются как среда, в которой движется пробная частица. Эти частицы называются полевыми частицами.

Зная среднюю силу, действующую на пробную частицу, не трудно определить для нее среднее изменение импульса и энергии, вызываемое потоком полевых частиц:

$$\left\langle \frac{dp}{dt} \right\rangle = -\frac{4\pi n_1}{\mu v^3} Z_1^2 Z_2^2 e^4 L v, \quad (2.45)$$

$$\left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle = -\frac{4\pi n_1}{\mu v^3} Z_1^2 Z_2^2 e^4 L v^2. \quad (2.46)$$

Теперь рассмотрим случай, когда поток пробных частиц движется через среду полевых частиц. В результате столкновений поток будет расплываться в поперечном и продольном направлениях. В частности, говоря в понятиях физики пучков заряженных частиц, будет увеличиваться эмиттанс пучка. Описать эти процесс возможно следующими уравнениями:

$$\left\langle \frac{dp_l}{dt} \right\rangle = -\frac{p_l}{\tau_l^{12}}, \quad (2.47)$$

где τ_l^{12} — среднее время продольного замедления частиц "1" в среде "2";

$$\left\langle \frac{dP_l^2}{dt} \right\rangle = -\frac{P_l^2}{\tau_l^{12}}, \quad (2.48)$$

где τ_l^{12} — среднее время поперечного среднеквадратичного отклонения;

$$\left\langle \frac{d\varepsilon_2^2}{dt} \right\rangle = \frac{\varepsilon_2^2}{\tau_e}, \quad (2.49)$$

где τ_e есть среднее время увеличения разброса по энергиям или расплывания потока пробных частиц в продольном направлении (например — увеличение эмиттанса пучка).

Предположим, что полевые частицы сами находятся в хаотическом движении и упруго взаимодействуют друг с другом. В этом случае наиболее вероятно, что полевые частицы распределены по закону Максвелла:

$$f_2 = n_2 \left(\frac{m_2}{2\pi T_2} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m_2 v^2}{2T_2} \right], \quad (2.50)$$

где T_2 — температура полевых частиц.

Интегрируя уравнения (2.47)–(2.50) с функцией распределения (2.49), можно получить характерные времена изменения параметров однородного пучка частиц в среде с максвелловским распределением.

Опуская вычисления, получим

$$\tau_s^{12} = \frac{\tau_1^{12}}{\left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \gamma}; \quad (2.51)$$

$$\tau_i^{12} = \frac{\tau_1^{12}}{2 \left(\gamma + \gamma' - \frac{\gamma}{2x_2} \right)}; \quad (2.52)$$

$$\tau_e^{12} = \frac{\tau_1^{12}}{\frac{4\gamma}{x_2}}. \quad (2.53)$$

Здесь мы использовали обозначения:

$$x_2 = \frac{\epsilon_2}{T_2} = \frac{m_2}{m_1} \frac{\epsilon_1}{T_2}$$

— отношение энергии частиц потока к температуре полевых частиц;

$$\tau_1^{12} = \frac{\sqrt{m_1 \epsilon_1^3}}{\sqrt{2\pi} Z_1^2 Z_2^2 e^4 n_2 L_{12}} \quad (2.54)$$

— простейшее время релаксации;

$$\gamma = \gamma(x_2) = \int_0^{x_2} e^{-t} \sqrt{t} dt = \gamma \left(\frac{3}{2}, x_2 \right); \quad (2.55)$$

$$\gamma'(x) = \frac{d\gamma}{dx} = e^{-x} \sqrt{x}; \quad (2.56)$$

где $\gamma(\alpha, x)$ есть неполная нормализованная гамма-функция.

Кроме полученных выше характерных времен, может быть определена скорость потерь энергии и передача ее среде пробными частицами:

$$\tau_{rr}^{12} = \frac{\tau_0^{12}}{2 \left(\gamma' - \frac{m_1}{m_2} \gamma \right)}. \quad (2.57)$$

В отличие от импульса (2.47), который всегда передается только от потока к среде, и поток тормозится, изменение энергии частиц потока, описываемое уравнением

$$\frac{d\epsilon_1}{dt} = \frac{2\epsilon_1}{\tau_1^{12}} \left[\gamma' - \frac{m_1}{m_2} \gamma \right], \quad (2.58)$$

может иметь оба знака, поскольку поток быстрых частиц будет нагревать среду, при этом на время замедляясь, а поток медленных частиц может ее охлаждать.

Приведем конкретные значения времен релаксации при больших значениях энергии потока. В этих условиях $x \gg 1$, $\lambda(x_2) = \sqrt{\pi}/2$, $\gamma(x_2) = 0$. Тогда, принимая

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{m_1} \epsilon_1^{3/2}}{\sqrt{2\pi} e^4 n_2 L},$$

получаем значения τ_i , τ_s , τ_e , τ_{rr} для следующих случаев:

- 1) пучок электронов с энергией ϵ_e в среде ионов с температурой T_i , зарядом i и массой $A_i M$, где A_i — массовое число иона;
- 2) пучок электронов с энергией ϵ_e в среде электронов с температурой T_e ;
- 3) пучок ионов с энергией ϵ_i , с зарядом i и массой $A_i M$, в среде ионов с температурой T_k , зарядом k и массой $A_k M$;
- 4) пучок ионов с энергией ϵ_i , зарядом i и массой $A_i M$, в среде электронов с температурой T_e .

Эти значения приведены в таблице.

Формулы (2.51)–(2.53) и табличные значения функции $\gamma(3/2, x)$ позволяют определить времена релаксации τ_i , τ_s , τ_e , τ_{rr} при других отношениях энергии пучка к температуре среды.

τ	ei	ee	ik	ie
τ_i	τ_0/i^2	$\tau_0/2$	$\sqrt{\frac{A_i M}{m_e} \frac{A_k}{A_i + A_k} \frac{\tau_0}{i^2 k^2}}$	$\sqrt{\frac{m_e}{A_i M} \frac{\tau_0}{i^2}}$
τ_e	$\tau_0/2i^2$	$\tau_0/2$	$\sqrt{\frac{A_i M}{m_e} \frac{\tau_0}{2i^2 k^2}}$	$\sqrt{\frac{A_i M}{m_e} \frac{\tau_0}{2i^2}}$
τ_e	$\frac{\varepsilon_e}{4T_e i^2} \frac{A_i M}{m_e} \tau_0$	$\frac{\varepsilon_e}{4T_e} \tau_0$	$\frac{\varepsilon_i}{4T_e i^2 k^2} \frac{A_k}{A_i} \sqrt{\frac{A_i M}{m_e}} \tau_0$	$\frac{\varepsilon_i}{4T_e i^2} \sqrt{\frac{m_e}{A_i M}} \tau_0$
τ_{ir}	$\frac{1}{2i^2} \frac{A_i M}{m_e} \tau_0$	$\tau_0/2$	$\frac{1}{2i^2 k^2} \frac{A_k}{A_i} \sqrt{\frac{A_i M}{m_e}} \tau_0$	$\frac{1}{2i^2} \sqrt{\frac{m_e}{A_i M}} \tau_0$
Условие применимости	$\varepsilon_e \gg \frac{T_i m_e}{A_i M}$	$\varepsilon_e \gg T_e$	$\varepsilon_i \gg \frac{T_k A_i}{A_k}$	$\varepsilon_i \gg T_e \frac{A_i M}{m_e}$

И, наконец, для завершения картины следует рассмотреть установление равновесия в двухкомпонентной среде заряженных частиц, где каждая из компонент имеет свою температуру. Для этого необходимо проинтегрировать уравнение (2.58) с функцией распределения Максвелла частиц первого типа и получить

$$\frac{dT_1}{dt} = \frac{T_1 - T_2}{\tau_T^{12}}, \quad (2.59)$$

где

$$\tau_T^{12} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \frac{m_2}{m_1} \tau_1^{12} \left(T_1 + \frac{m_2}{m_1} T_2 \right). \quad (2.60)$$

Не трудно видеть, что

$$n_1 \frac{dT_1}{dt} = -n_2 \frac{dT_2}{dt}. \quad (2.61)$$

Выпишем в явном виде характерные времена установления равновесной температуры между двумя компонентами электронов с разной температурой T_1 и T_2 :

$$\tau_T^{ee} = \frac{3\sqrt{m_e} (T_1 + T_2)^{3/2}}{8\sqrt{2\pi} e^4 L n_2}; \quad (2.62)$$

электронами и ионами с температурами T_e и T_i :

$$\tau_T^{ei} = \frac{3(A_i M T_e + m_e T_i)^{3/2}}{8\sqrt{2\pi} \sqrt{A_i m_e} M i^2 e^4 L n_i}. \quad (2.63)$$

(Заметим, что выполняется очевидное равенство $\frac{\tau_T^{ei}}{n_e} = \frac{\tau_T^{ie}}{n_i}$.)

Между ионами с различными зарядами i и k , массами $A_i M$ и $A_k M$ и температурами T_1 и T_2 :

$$\tau_T^{ik} = \frac{3}{8\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{M} (A_k T_i + A_i T_k)^{3/2}}{\sqrt{A_i A_k} i^2 k^2 e^4 L n_k}. \quad (2.64)$$

Рассмотрим в качестве иллюстрации конкретные примеры:

1. Электронный пучок с высокой энергией распространяется через среду ионов и электронов низкой энергии ($\varepsilon_e \gg T_i, T_e$). Согласно таблице, если ионы имеют заряд $Z > 1$, то пучок рассеивается и тормозится на ионах быстрее, чем на электронах. В то же время обмен энергией происходит, в первую очередь, между пучком и электронами, которые будут нагреваться в $A_i M / i^2 m_e$ раз быстрее, чем ионы.

2. Пусть есть среда, состоящая из испытывающих упругие кулоновские столкновения двух компонент — электронов и ионов. Предположим, что энергия электронов много выше, чем энергия ионов. Тогда из (2.61)–(2.63) можно получить

$$\tau_T^{ee} : \tau_T^{ii} : \tau_T^{ei} \cong 1 : \sqrt{\frac{A_i M}{m_e}} \frac{1}{i^2} : \frac{A_i M}{m_e i^2},$$

и учитывая, что $M/m_e = 1836$, получим $\tau_T^{ee}, \tau_T^{ii} \ll \tau_T^{ei}$.

Следовательно, процесс установления равновесия для каждой компоненты в отдельности (в том числе и между ионами разных типов и зарядностей) гораздо более быстрый, чем процесс передачи энергии и выравнивания температур между электронами и ионами. Это является следствием большого различия масс между ними. Установление равновесия внутри одной компоненты, или процесс т. н. максвеллизации, требует отдельного рассмотрения.

В общем случае движение частиц в пространстве координат r и скоростей v определяется функцией распределения $f = f(r, v, t)$, удовлетворяющей кинетическому уравнению

$$\frac{df}{dt} = S f, \quad (2.65)$$

где символ Stf называют интегралом столкновений, означающим скорость изменения функции распределения в результате столкновений. Для наших задач интеграл столкновений определяется кулоновским рассеянием заряженных частиц на малые углы и, в соответствии с формулой Резерфорда (2.32), сводится к тем же выражениям, что приведены в правых частях уравнений (2.43) и (2.44). Равновесная функция распределения, соответствующая стационарному решению уравнения (2.65), есть распределение Больцмана,

$$f_0 \cong \exp\left\{-\frac{U(r)}{T}\right\} \exp\left(-\frac{Mv^2}{2T}\right), \quad (2.66)$$

которое приводит к распределению Максвелла по скоростям движения частиц (2.50). Здесь $U(r)$ — потенциальная энергия частиц.

Для точного определения времени установления равновесной функции распределения требуется решение кинетического уравнения. В общем виде это сделать невозможно. Однако можно показать, что по порядку величины это время совпадает с

$$\tau_i(T) = \frac{\sqrt{M}}{\pi\sqrt{2}} \frac{1}{i^4 e^4} \frac{T^{3/2}}{Ln}, \quad (2.67)$$

где $T = 2\bar{\epsilon}/3$. Здесь $\bar{\epsilon}$ — средняя энергия всех частиц данной компоненты.

Мы рассмотрели упругие кулоновские столкновения между заряженными частицами при распространении пучка через среду и для среды, состоящей из заряженных частиц нескольких типов. Сравнение характерных времен релаксации с характерными временами ионизации и перезарядки показывает, что величины τ^{ei} оказываются сравнимыми, а τ^{ei} и τ^{ii} гораздо меньше, чем времена $\tau^i = 1/v_e \sigma^i n_e$ и $\tau^{ex} = 1/v_i \sigma^{ex} n_i$. Следовательно, упругие столкновения являются причиной перераспределения энергии между различными компонентами и могут оказывать значительное влияние на скорость реакции ионизации и перезарядки, и, что особенно важно, на скорость потерь ионов и электронов из источников многозарядных ионов.

Рекомендованная литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. I. Механика. М.: Наука, 1965.
2. Ландау Л.Д., Ахиезер А.И., Лифшиц Е.М. Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. М.: Наука, 1965.
3. Shirkov G., Zschornack G. Electron Impact Ion Sources for Highly Charged Ions. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1996. 320 p.
4. Трубников Б.А. Теория плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1996. 464 с.
5. Мешков И.Н. Классическая механика. Учебно-методическое пособие УНЦ ОИЯИ. Дубна, 2003. 278 с.

Оглавление

Введение	3
1. Упругие столкновения двух частиц и законы сохранения	4
2. Момент импульса	9
3. Движение в центральном поле	12
4. Рассеяние частиц	20
5. Формула Резерфорда	23
6. Рассеяние под малыми углами	26
7. Упругие (кулоновские) столкновения потоков заряженных частиц	28
Рекомендованная литература	37