

С332(07)  
М-559



Учебно-  
методические  
пособия  
Учебно-научного  
центра ОИЯИ  
Дубна

УНЦ-2008-31

И. Н. Мешков

ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ  
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

*Учебное пособие*

2008

Учебно-научный центр ОИЯИ

*C 332(07)*  

---

*M-559*

И. Н. Мешков

# **Излучение релятивистских заряженных частиц**

*Учебное пособие*

148731

Объединенный институт  
ядерных исследований  
Дубна • 2008  
БИБЛИОТЕКА

+ 0342 (07)

M55

Учебное пособие написано профессором базовой кафедры МИРЭА  
«Электроника физических установок» при УНЦ ОИЯИ  
И. Н. Мешковым (ОИЯИ)  
и рекомендовано к изданию экспертной комиссией УНЦ ОИЯИ  
и редакционно-издательским советом МИРЭА.

**Мешков И. Н.**

M55 Излучение релятивистских заряженных частиц: Учеб. пособие. —  
Дубна: ОИЯИ, 2008. — 136 с.

Учебное пособие содержит описание физических принципов и методов генерации электромагнитного излучения заряженными частицами, движущимися в электромагнитном поле или среде. Рассмотрены основные виды излучения: рентгеновское тормозное, синхротронное (включая излучение в виллерах и ондуляторах), черенковское, переходное, параметрическое; принцип действия лазеров на свободных электронах.

Пособие предназначено для студентов и аспирантов инженерных и физических специальностей.

**Meshkov I. N.**

The Radiation of the Relativistic Charged Particles: Textbook. — Dubna: JINR, 2008. — 136 p.

The textbook contains a description of physical principles and methods of the electromagnetic radiation generation by charged particles, moving in an electromagnetic field or in matter. Main kinds of the radiation are considered: Roentgen radiation, synchrotron radiation (including one in wigglers and undulators), Cherenkov, transition and parametric radiation and the principle of free electron laser operation.

The book is addressed to the students and PhD students of physical and engineering specializations.

## Оглавление

Предисловие .....	4
<b>ВВЕДЕНИЕ. ИЗЛУЧЕНИЕ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗАРЯДОВ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ</b>	5
§ 1. Дипольное излучение .....	14
§ 2. Мультипольное излучение .....	15
§ 3. Преобразования Лоренца для электромагнитного поля .....	17
§ 4. Потери энергии частицы в электромагнитном поле .....	21
<b>ГЛАВА I. ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ .....</b>	21
§ 1.1. Продольное ускорение .....	21
§ 1.2. Поперечное ускорение .....	33
§ 1.3. Рентгеновское "тормозное" излучение .....	40
<b>ГЛАВА II. СИНХРОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ .....</b>	44
§ 2.1. Магнитотормозное излучение релятивистской частицы .....	44
§ 2.2. Синхротронное излучение сгустка частиц .....	56
§ 2.3. Излучение электрона в пространственно периодическом магнитном поле. Ондуляторы и виллеры .....	61
§ 2.4. Синхротроны – источники СИ. Применение СИ .....	74
<b>ГЛАВА III. ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В СРЕДЕ .....</b>	80
§ 3.1. Излучение Вавилова–Черенкова .....	80
§ 3.2. Переходное излучение .....	93
§ 3.3. Параметрическое излучение заряженной частицы, движущейся сквозь кристалл .....	101
<b>ГЛАВА IV. ЛАЗЕРЫ НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ .....</b>	106
§ 4.1. Общие характеристики ЛСЭ .....	106
§ 4.2. Электронный пучок в полях ондулятора и излучения .....	108
§ 4.3. ЛСЭ с обратной связью .....	117
§ 4.4. ЛСЭ в режиме самоусиления .....	122
§ 4.5. ЛСЭ радиодиапазона .....	130
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	133
Литература .....	134
Предметный указатель .....	135

## Предисловие

Данное пособие написано на основе курса лекций, прочитанного автором в 2007 г. студентам базовой кафедры электроники физических установок Московского государственного института радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА), организованной в г. Дубне при Учебно-научном центре Объединенного института ядерных исследований, и предназначено для студентов очной формы обучения, специальность 200600 "Электроника физических установок".

Пособие имеет целью дать представление о природе излучения релятивистских заряженных частиц и современных достижениях в развитии методов генерации электромагнитного излучения на пучках таких частиц. Изложение материала построено таким образом, чтобы читатель мог понять физику явления, не углубляясь в математические расчеты (значительная часть которых, выделенная мелким шрифтом и/или вынесенная в задачи, предназначена для углубленной проработки). В пособии используется, как правило, гауссова система единиц, адекватная электродинамике. Кроме нее используются системы СИ и атомных единиц. В задачах содержатся примеры вычислений с приведением аналитических выражений к виду, содержащему мировые константы (например, энергия покоя электрона) или позволяющему легко перевести величины из одной системы единиц в другую (например, из СИ в гауссову).

Пособие предназначено студентам, аспирантам и инженерам-физикам, специализирующимся в экспериментальной физике.

Автор пользуется возможностью выразить глубокую благодарность коллегам по ОИЯИ А. С. Водопьянову и А. Д. Коваленко, любезно предоставившим необходимые материалы по различным вопросам, вошедшим в пособие, Е. С. Салдину и М. Ю. Юркову за полезные советы и предоставленную возможность "покрутить ручки" лазера на свободных электронах в лаборатории DESY, а также Н. А. Винокурову, Г. Н. Кулипанову, А. Н. Лебедеву за многолетнее научное сотрудничество и ценные обсуждения, в том числе по проблемам, нашедшим отражение в пособии. Автор благодарит Т. А. Степанову за неоценимую помощь в обработке рукописи и подготовке ее к публикации.

## ВВЕДЕНИЕ. ИЗЛУЧЕНИЕ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗАРЯДОВ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

При движении заряженных частиц в электромагнитном поле, создаваемом внешними источниками – электрическими зарядами и токами (в том числе, атомами среды), возникает электромагнитное излучение. Природа этого излучения зависит от характеристик электромагнитного поля, "вынуждающего" заряженные частицы излучать. Описание этих физических явлений в большинстве случаев может быть дано на языке классической электродинамики. При этом зачастую удобно пользоваться преобразованиями Лоренца для компонент электромагнитного поля. В связи с этим и с целью облегчения чтения данного пособия во Введении даны основные характеристики классического излучения, соотношения для преобразования компонент поля при переходе из одной инерциальной системы в другую и потеря энергии частицы при ее движении в электромагнитном поле.

### § 1. Дипольное излучение

Потенциал системы зарядов, движущихся с нерелятивистскими скоростями, описывается известными выражениями (рис. 1):

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}', t_e)}{|\vec{r}_p - \vec{r}'|} dV, \quad \varphi(\vec{r}_p, t) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t_e)}{|\vec{r}_p - \vec{r}'|} dV, \quad (1)$$
$$t = t_e + \frac{|\vec{r}_p - \vec{r}'|}{c}, \quad \vec{R} = \vec{r}_p - \vec{r}'.$$

Здесь  $\rho$  и  $\vec{j} = \rho \vec{v}$  – плотности заряда и тока;  $t_e$  и  $t$  – моменты "излучения" и наблюдения соответственно;  $\vec{r}$  – радиус-вектор положения элемента объема  $dV$ .

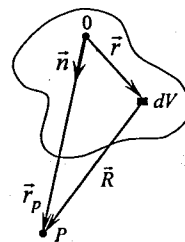


Рис. 1. Система движущихся зарядов.  
O – начало координат; P – точка наблюдения;  
 $dV$  – элемент объема;  $\vec{n} = \vec{r}_p / r_p$

При  $\bar{r}_p \gg \bar{r}$  потенциалы на "больших расстояниях" вычисляются проще.

Действительно, проведя разложение по малым параметрам  $\frac{r}{r_p}$  и  $\frac{\bar{n}, \bar{r}}{c}$ , найдем

$$|\bar{R}| = \sqrt{r_p^2 + r^2 - 2(\bar{r}_p, \bar{r})} \approx r_p \left( 1 + \frac{r^2}{2r_p^2} - \frac{(\bar{r}_p, \bar{r})}{r_p^2} \right) \approx r_p - (\bar{n}, \bar{r}), \quad (2)$$

$$t \approx t_e + \frac{r_p}{c} - \frac{(\bar{n}, \bar{r})}{c}.$$

Первый из малых параметров очевиден – геометрический. Второй менее очевиден. Его надо сравнивать с характерными временами изменения системы зарядов (токов):

$$\Delta t \sim T \equiv \frac{2\pi}{\omega} \equiv \frac{\lambda}{c}, \quad (3)$$

где  $\lambda$  – длина волны, соответствующая частоте  $\omega$ . Пока мы ещё не знаем, что это такое. Тем не менее, появился параметр, имеющий размерность длины. При

$$\Delta t \gg \frac{(\bar{n}, \bar{r})}{c}$$

запаздыванием изменения поля по объему с зарядами можно пренебречь. А это значит, что пренебречь запаздыванием можно при

$$\lambda \gg r \geq (\bar{n}, \bar{r}).$$

Таким образом, появились две области, для которых эффект запаздывания поля вычисляется заметно проще:

$$r \sim r_p - \text{квазистатический случай, ближняя зона};$$

$$r \ll \lambda \ll r_p - \text{волновая зона}.$$

Во втором случае основным при разложении потенциалов (1) является параметр запаздывания

$$\frac{(\bar{n}, \bar{r})}{c \cdot \Delta t} \sim \frac{r}{\lambda} \ll 1, \quad (4)$$

а геометрическим параметром  $r/r_p$  можно пренебречь.

Соответственно, в волновой зоне потенциалы (1) принимают, приближенно, вид

$$\begin{aligned} \bar{A}(\bar{r}_p, t) &\approx \frac{1}{cr_p} \int \bar{j}(\bar{r}, t - \frac{r_p}{c}) \cdot dV + \frac{1}{cr_p} \int \frac{\partial \bar{j}}{\partial t} \frac{(\bar{n}, \bar{r})}{c} dV + \dots, \\ \varphi(\bar{r}_p, t) &\approx \frac{1}{r_p} \int \rho(\bar{r}, t - \frac{r_p}{c}) \cdot dV + \frac{1}{r_p} \int \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{(\bar{n}, \bar{r})}{c} dV + \frac{1}{2r_p} \int \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \frac{(\bar{n}, \bar{r})^2}{c^2} dV + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Сразу же "позаботимся" о первом слагаемом в выражении для  $\bar{A}(\bar{r}_p, t)$ : в данном случае

$$\int_V \bar{j}(\bar{r}) \cdot dV \neq 0, \quad (6)$$

т. к. система *нестационарная* (!). Первое слагаемое в выражении для  $\varphi$  есть

$$\varphi_0(\bar{r}_p, t) \equiv \frac{1}{r_p} \int_V \rho(\bar{r}, t - \frac{r_p}{c}) \cdot dV = \frac{Q(t - \frac{r_p}{c})}{r_p} \quad (7)$$

– кулоновский потенциал системы зарядов, т.е. "нулевое приближение". Второе слагаемое для  $\varphi$  есть

$$\varphi_1(\bar{r}_p, t) = \frac{1}{r_p} \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{(\bar{n}, \bar{r})}{c} dV = \frac{1}{cr_p} \int (-\text{div} \bar{j}) \cdot (\bar{n}, \bar{r}) dV.$$

Поставив сюда  $\text{div} \bar{j} = \sum_{\alpha} \frac{\partial j}{\partial x_{\alpha}}$  и беря каждый из трех интегралов по частям (по соответствующему аргументу  $x_{\alpha}$ ), найдем

$$\varphi_1(\bar{r}_p, t) = \frac{1}{cr_p} \left\{ \sum_{\alpha} \int \int (\bar{n}, \bar{r}) j_{\alpha} dS_{\alpha} - \int (\bar{n}, \bar{j}) dV \right\} = \frac{1}{cr_p} \int (\bar{n}, \bar{j}) dV. \quad (8)$$

Первое слагаемое в фигурных скобках обращаем в нуль, выбрав поверхность  $S_{\alpha}$  за пределами объема с токами. Очевидно, что вектор-потенциал

$$\bar{A}_0(\bar{r}_p, t) \equiv \frac{1}{cr_p} \int \bar{j}(\bar{r}_p, t - \frac{r_p}{c}) \cdot dV \quad (9)$$

связан со скалярным потенциалом  $\varphi_1$  соотношением

$$\varphi_1 = (\bar{n}, \bar{A}_0), \quad |\bar{A}_0| \sim \varphi_1. \quad (10)$$

Далее,

$$\int_V \bar{j} dV = \int_V \rho \bar{v} dV = \sum_N e_n \bar{v}_n = \frac{d}{dt} \sum_n \bar{e}_n \bar{r}_n = \dot{\bar{d}},$$

где  $e_n$  – заряды системы,  $\vec{d}$  – ее электрический дипольный момент. Таким образом,

$$\vec{A}_0 = \frac{\dot{\vec{d}}}{cr_p}, \quad \varphi_1 = \frac{(\vec{n}, \dot{\vec{d}})}{cr_p} = (\vec{n}, \vec{A}_0). \quad (11)$$

Это потенциалы системы зарядов в *дипольном приближении*. При этом

$$\vec{d}(t_e) = \vec{d}\left(t - \frac{r_p}{c}\right), \quad (12)$$

а потенциалы описывают поле системы в *волновой зоне*.

Теперь найдём поле системы зарядов в *дипольном приближении*:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}_0, \quad \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_0}{\partial t} - \nabla \varphi_1. \quad (13)$$

При этом нужно не забывать, что дипольный момент зависит от  $\vec{r}_p$  через запаздывающее время (12), а дифференцирование в (13) производится по координатам точки наблюдения  $r_p$ . Поэтому

$$\vec{B}_d = [\nabla_p, \vec{A}_0] = \left[ \nabla_p, \frac{\dot{\vec{d}}}{cr_p} \right] = \frac{1}{cr_p} [\nabla_p, \dot{\vec{d}}] + \frac{1}{c} \left[ \nabla_p \left( \frac{1}{r_p} \right), \dot{\vec{d}} \right]. \quad (14)$$

$$[\nabla_p, \dot{\vec{d}}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \left( \frac{\dot{\vec{d}} \right)_x & \left( \frac{\dot{\vec{d}} \right)_y & \left( \frac{\dot{\vec{d}} \right)_z \end{vmatrix},$$

$$r_p = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \equiv \sqrt{\sum_{\gamma=1}^3 x_\gamma^2}.$$

Но

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{\dot{\vec{d}} \right)_\beta = \frac{\partial}{\partial t_e} \left( \frac{\dot{\vec{d}} \right)_\beta \frac{\partial t'}{\partial x_\alpha} = \ddot{d}_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( t - \frac{1}{c} \sqrt{\sum_{\gamma=1}^3 x_\gamma^2} \right) = -\ddot{d}_\beta \frac{x_\alpha}{cr_p}.$$

Стало быть, дифференцирование по  $x_\alpha$  сводится к замене

$$\left( \frac{\dot{\vec{d}} \right)_\beta \rightarrow -\frac{1}{cr_p} \left( \ddot{\vec{d}} \right)_\beta \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \rightarrow x_\alpha.$$

Поэтому

$$[\nabla_p, \dot{\vec{d}}] = -\frac{1}{cr_p} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_p & y_p & z_p \\ \left( \frac{\dot{\vec{d}} \right)_x & \left( \frac{\dot{\vec{d}} \right)_y & \left( \frac{\dot{\vec{d}} \right)_z \end{vmatrix} = -\frac{1}{cr_p} [\vec{r}_p, \dot{\vec{d}}] = -\frac{[\vec{n}, \ddot{\vec{d}}]}{c},$$

где  $\vec{n} = \vec{r}_p/r_p$  (рис. 1). Во втором слагаемом в (14) аналогично:

$$\nabla_p \left( \frac{1}{r_p} \right) = -\frac{\vec{r}_p}{r_p^3} \sim 0 \left( \frac{1}{r_p^2} \right).$$

Таким образом,

$$\vec{B}_d = -\frac{\vec{n} \times \ddot{\vec{d}}}{c^2 r_p}. \quad (15)$$

Далее очередь электрического поля:

$$\begin{aligned} \vec{E}_d &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_0}{\partial t} - \nabla(\vec{n}, \vec{A}_0) = -\frac{\ddot{\vec{d}}}{c^2 r_p} - \frac{1}{c} \nabla \left( \frac{\vec{r}_p}{r_p}, \frac{\dot{\vec{d}} \left( t - \frac{r_p}{c} \right)}{r_p} \right) = \\ &= -\frac{\ddot{\vec{d}}}{c^2 r_p} - \frac{1}{c} \left( \nabla \left( \frac{\vec{r}_p}{r_p^2} \right), \dot{\vec{d}} \right) - \frac{1}{c} \left( \frac{\vec{r}_p}{r_p^2}, \ddot{\vec{d}} \right) \cdot \nabla \left( -\frac{r_p}{c} \right) = \\ &= -\frac{\ddot{\vec{d}}}{c^2 r_p} - \frac{1}{c} \sum_\alpha \vec{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \sum_\beta \frac{x_\beta \dot{\vec{d}}}{r_p^2} \right) + \frac{1}{c^2 r_p} (\vec{n}, \ddot{\vec{d}}) \vec{n}, \end{aligned}$$

т. к.  $\nabla r_p = \vec{n}$ , и, кроме того, второе слагаемое равно

$$-\frac{1}{c} \left\{ \sum_\alpha \vec{e}_\alpha \frac{\left( \frac{\dot{\vec{d}} \right)_\alpha}{r_p^2} - \sum_\alpha \vec{e}_\alpha \frac{2x_\alpha}{r_p^4} \sum_\beta x_\beta \dot{\vec{d}}_\beta \right\} = -\frac{1}{c} \left\{ \frac{\dot{\vec{d}}}{r_p^2} - \frac{2\vec{r}_p (\vec{r}_p, \dot{\vec{d}})}{r_p^4} \right\}.$$

Это член порядка  $1/r_p^2$ . Окончательно

$$\vec{E}_d \approx \frac{1}{c^2 r_p} \left( -\ddot{\vec{d}} + \vec{n} (\ddot{\vec{d}}, \vec{n}) \right) = -\frac{[\vec{n}, [\ddot{\vec{d}}, \vec{n}}]}{c^2 r_p} = [\vec{B} \times \vec{n}]. \quad (16)$$

Два следствия...

$$\begin{aligned} 1) \quad & \vec{E} = [\vec{B} \times \vec{n}] \quad \text{и} \quad [\vec{E} \times \vec{B}] = \vec{n} B^2, \\ 2) \quad & |\vec{E}| = |\vec{B}| \propto \frac{1}{r_p}. \end{aligned} \quad (17)$$

Суммируя сказанное выше, приведем формулы, описывающие поле системы зарядов в дипольном приближении:

$$\begin{aligned} A_0(t) &= \frac{1}{c r_p} \int \vec{j} dV = \frac{\dot{\vec{d}}}{c r_p}, \\ \varphi_1(t) &= \frac{(\vec{n}, \dot{\vec{d}})}{c r_p}, \\ \vec{B}_d(t) &= \frac{1}{c} [\dot{\vec{A}}_0, \vec{n}] = \frac{[\ddot{\vec{d}}, \vec{n}]}{c^2 r_p}, \\ E_d(t) &= [\vec{B}_d, \vec{n}]. \end{aligned} \quad (18)$$

Подчеркнём, что в правых частях равенств стоят значения  $\vec{j}(t_e)$ ,  $\dot{\vec{d}}(t_e)$ ,  $\ddot{\vec{d}}(t_e)$  и  $\vec{n}(t_e)$ ,  $t_e = t - \frac{r_p}{c}$ . Плотность потока энергии (интенсивность) дипольного излучения\*) равна (см. рис. 2)

$$\vec{S}_d = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}_d, \vec{B}_d] = \frac{c}{4\pi} [[\vec{B}_d, \vec{n}], \vec{B}_d] = \vec{n} \frac{c}{4\pi} B_d^2 = \frac{\vec{n}}{4\pi} \frac{([\ddot{\vec{d}}, \vec{n}])^2}{c^3 r_p^2} = \vec{n} \frac{|\dot{\vec{d}}|^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3 r_p^2}. \quad (19)$$

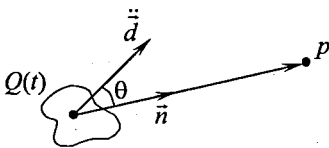


Рис. 2. Система зарядов, излучающих в направлении  $\vec{n}(\theta)$

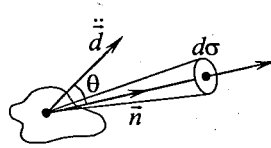


Рис. 3. К вычислению потока в элемент  $d\Omega$ .  $d\sigma = r_p^2 d\Omega$

\*) Строго говоря, следует называть эту величину "плотность потока энергии системы в дипольном приближении". Кроме того, мы еще не объяснили, почему этот поток — "излучение". Об этом ниже.

Поток энергии в единицу телесного угла найдем, записав (рис. 3) поток через площадку  $d\sigma = r_p^2 d\Omega$ :

$$dJ = (\vec{n}, \vec{S}) d\sigma = (\vec{n}, \vec{S}) \cdot r_p^2 d\Omega = \frac{(\ddot{\vec{d}})^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3} d\Omega.$$

Отсюда

$$\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{(\ddot{\vec{d}})^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3}. \quad (20)$$

Таким образом, поток энергии в единицу телесного угла не зависит от расстояния. Так же постоянен и полный поток

$$J = \int_{\Omega} \frac{dJ}{d\Omega} d\Omega = \frac{2}{3} \frac{|\ddot{\vec{d}}|^2}{c^3}. \quad (21)$$

**Задача 1.** Вычислить полный поток дипольного излучения системы зарядов (21).

$$J = \frac{(\ddot{\vec{d}})^2}{4\pi c^3} \int_0^{2\pi} d\alpha \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta = \frac{2}{3} \frac{(\ddot{\vec{d}})^2}{c^3}.$$

**Задача 2.** Найти распределение интенсивности излучения заряда, вращающегося по окружности радиуса  $r_0$ , и среднее по времени значение потока излучения.

Дипольный момент вращающегося заряда  $\vec{d} = e\vec{r}_0(t_e)$ , где  $\vec{r}_0$  – радиус-вектор, проведенный из центра окружности в точку, где находится заряд. Соответственно,  $\ddot{\vec{d}} = -\omega^2 e\vec{r}_0(t_e)$ . Распределение интенсивности описывается соотношением

$$\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega^4 r_0^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta(t_e),$$

где  $\theta(t_e)$  – угол между векторами  $\vec{n}$  и  $\vec{r}_0(t_e)$ .

Для нахождения среднего по времени потока излучения удобно перейти от угла  $\theta(t_e)$  к углам  $\theta_0$  и  $\varphi(t_e)$  цилиндрической системы координат, ось  $z$  которой совпадает с осью вращения заряда. Нетрудно найти, что (рис. 4)  $\sin^2 \theta(t_e) = 1 - \sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi(t_e)$ , а среднее по времени значение  $\langle \sin^2 \theta(t_e) \rangle = 1 - \sin^2 \theta_0 / 2$ . Тогда

$$\left\langle \frac{dJ}{d\Omega} \right\rangle = \frac{e^2 \omega^4 r_0^2}{8\pi c^3} (1 + \cos^2 \theta_0); \quad \langle J \rangle = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega^4 r_0^2}{c^3}.$$



Максимум излучения ( $\theta_0 = 0$ ) направлен вдоль оси  $z$ . Частота излучения равна частоте вращения заряда, а поляризация зависит от направления. Так, излучение вдоль оси  $z$  поляризовано циркулярно – векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  вращаются с частотой  $\omega$ , излучение под углом к оси поляризовано эллиптически, а вдоль плоскости орбиты – линейно.

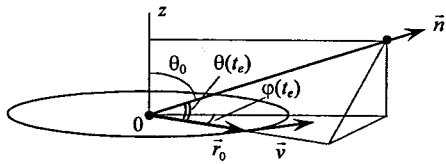


Рис.4. К расчету излучения заряда, вращающегося по окружности

Распределение потока энергии (20) по углу  $\theta$  имеет характерный вид (рис. 5) – оно аксиально-симметрично относительно вектора  $\ddot{d}$  и изменяется пропорционально  $\sin^2\theta$  в плоскости  $(\vec{r}_p, \ddot{d})$ . Принято представлять подобные распределения в виде *векторной диаграммы*, на которой длина радиуса-вектора пропорциональна величине изображаемой функции на данном направлении (рис. 5).

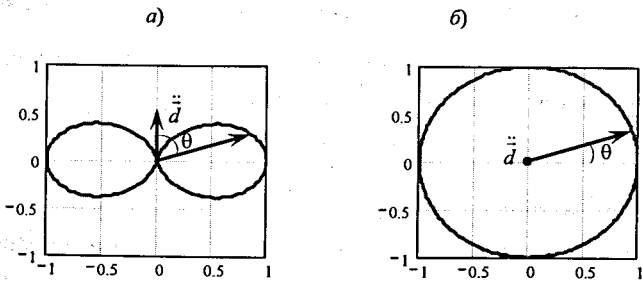


Рис. 5. Векторная диаграмма распределения плотности потока излучения в плоскости вектора  $\ddot{d}$  (а) и в плоскости, ортогональной  $\ddot{d}$  (б):  $f(\theta, \varphi) = \frac{dJ(\theta, \varphi)}{d\Omega} / \left( \frac{dJ}{d\Omega} \right)_{\max}$

Поскольку поток энергии в единицу телесного угла  $dJ/d\Omega$  и полный поток не изменяются с расстоянием от системы до точки наблюдения, а сам поток имеет вполне определённую направленность (см. (19)), то "налицо" все признаки *излучения*: электромагнитное поле покидает систему зарядов, отрывается от неё. Такое поле, рассчитанное в дипольном приближении (18), и называют *дипольным излучением*.

Поляризация дипольного излучения следует из формул (18):  $\vec{A}_0 \parallel \dot{\vec{d}}, \vec{B}_d \parallel [\ddot{\vec{d}}, \vec{n}]$ ;  $\vec{E}_d$  перпендикулярен плоскости векторов  $\vec{B}_d$  и  $\vec{n}$  (рис. 6).

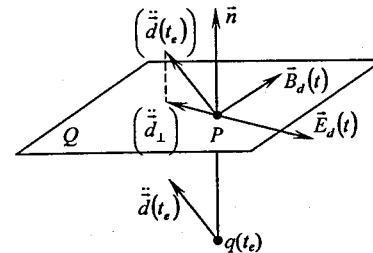


Рис. 6. Поляризация дипольного излучения.  $q(t_e)$  – положение системы зарядов и их величина в момент  $t_e = t - r_p/c$ ;  $t, P$  – момент и точка наблюдения; плоскость  $Q$  ортогональна вектору  $\vec{n}$

В чем же физика дипольного излучения? Заряд, движущийся ускоренно, "стряхивает" с себя электромагнитное поле. То же происходит при колебаниях заряда, ускоренном вращении, и т.п. Важно, чтобы  $\ddot{d} \neq 0$ .



"Срыв" электромагнитного поля при возвратно-вращательном движении системы зарядов аналогичен тому, как собака после купания стряхивает с себя воду – возвратно-поступательные и возвратно-вращательные движения вызывают отрыв воды от шерсти, и вода слетает в виде капель ("излучение").

## § 2. Мультипольное движение

Если дипольный заряд системы, а точнее вторая производная момента по времени, равняется нулю, то это еще не означает, что такая система не может излучать вообще. Действительно, обращаются в нуль поля излучения, найденные в дипольном приближении, и в этом случае нужно учесть следующие члены разложения в выражениях потенциалов. Соответственно получим так называемое *квадрупольное* излучение, вызванное изменением квадрупольного момента (рис. 7), *магнитодипольное* излучение, вызванное изменением магнитного дипольного момента системы, и т.д.

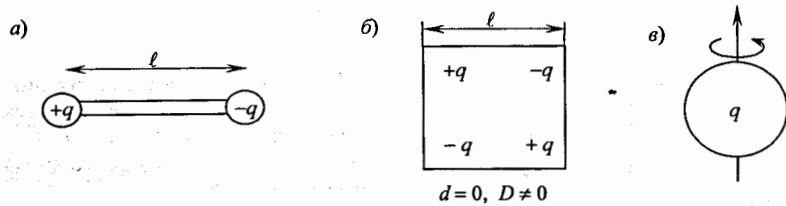


Рис. 7. Три примера систем зарядов: а) "гантель" с зарядами  $\pm q$  на концах,  $d \sim ql$ ; б) квадрат с зарядами  $\pm q$  по углам, квадрупольный момент  $D \sim ql^2$ ; в) заряд  $q$  равномерно распределен по объему шара радиуса  $a$ , вращающегося с угловой скоростью  $\omega$ , магнитный момент шара  $\vec{m} = \frac{qa^2}{3c} \vec{\omega}$

Интенсивность магнитодипольного и квадрупольного излучений – одного порядка. Это имеет следующее простое объяснение. С одной стороны, повышение мультипольности зарядов на единицу приводит к появлению дополнительного множителя  $(v/c)^2$  в интенсивности излучения (см. разложение (5)). С другой стороны, величина магнитного меньше электрического мультиполя того же номера в  $(v/c)$  раз, поскольку первый создается токами  $\vec{j} = \rho\vec{v}$ . Поэтому в интенсивности появляется малый дополнительный множитель  $(v/c)^2$ . Отсюда можно дать общую оценку интенсивности излучения электрических и магнитных мультиполей

$$J_l^{\text{магн}} \sim J_{l-1}^{\text{эл}} \sim \left(\frac{v}{c}\right)^{2(l-1)} J_1,$$

где  $J_1$  – интенсивность дипольного излучения (21).

Наличие у системы магнитных и/или электрических мультиполей зависит от ее структуры. Так, магнитодипольное излучение (как и электрическое) отсутствует у замкнутой системы, состоящей из частиц с одинаковыми значениями  $e/m$  (см. [2], задача 2 в § 124). Действительно, магнитный  $\vec{m}_p$  и механический  $\vec{M}_p$  моменты частицы связаны между собой через гиромагнитное отношение  $g$ :  $\vec{m}_p = g\vec{M}_p$ . При одинаковых  $e/m$  значение  $g$  у всех частиц также одинаково, поэтому полный магнитный момент системы пропорционален ее полному механическому моменту, который у замкнутой системы постоянен:  $\dot{\vec{m}}_p = g\dot{\vec{M}}_p = \text{const}$ , откуда  $\ddot{\vec{M}} = 0$ , и излучение отсутствует.

Для справок приведем формулу интенсивности излучения с учетом вклада магнитодипольной ( $\vec{m}$ ) и квадрупольной ( $D_{\alpha\beta}$ ) составляющих (см. [2], § 125):

$$J = \frac{2}{3c^3} |\ddot{\vec{d}}|^2 + \frac{2}{3c^3} |\ddot{\vec{m}}|^2 + \frac{1}{180c^5} \ddot{D}_{\alpha\beta}^2.$$

## § 3. Преобразования Лоренца для электромагнитного поля

Приведем (без вывода) известные соотношения для преобразования компонент электромагнитного поля  $(\vec{E}, \vec{B})$  при переходе из одной инерциальной системы в другую (см. [1], [2]). Ось  $x$ , как это принято в специальной теории относительности, направлена вдоль вектора  $\vec{v}$  – скорости движения системы  $(x', y', z')$  относительно системы  $(x, y, z)$  (рис. 8).

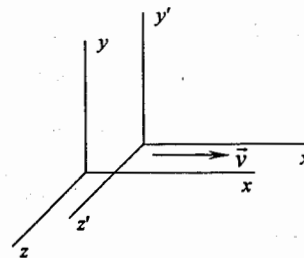


Рис. 8. Выбор осей координат двух инерциальных систем, движущихся одна относительно другой со скоростью  $\vec{v}$

При таком выборе осей координат компоненты поля связаны друг с другом соотношениями

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x, & E_y &= \gamma(E'_y + \beta B'_z), & E_z &= \gamma(E'_z - \beta B'_y), \\ B_x &= B'_x, & B_y &= \gamma(B'_y - \beta E'_z), & B_z &= \gamma(B'_z + \beta E'_y), \end{aligned} \quad (22)$$

где штрихом обозначены компоненты поля в системе  $(x', y', z')$ ,

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}. \quad (23)$$

Параметр  $\gamma$  принято называть *лоренц-фактором*.

Из (22) следует, что при переходе из одной системы в другую продольные (направленные вдоль вектора скорости  $\vec{v}$ ) компоненты поля сохраняются, а поперечные к вектору  $\vec{v}$  компоненты преобразуются друг через друга.

Представим векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  в виде суммы продольной и поперечной компонент:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}, & \vec{B} &= \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp}, \\ \vec{E}_{\parallel} &= \vec{e}_x E_x, & \vec{E}_{\perp} &= \vec{e}_y E_y + \vec{e}_z E_z, & \vec{B}_{\parallel} &= \vec{e}_x B_x, & \vec{B}_{\perp} &= \vec{e}_y B_y + \vec{e}_z B_z, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\vec{e}_{\alpha}$  ( $\alpha = x, y, z$ ) – орты. Тогда (22) можно записать в векторной форме:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\parallel} &= \vec{E}'_{\parallel}, & \vec{E}_{\perp} &= \gamma(\vec{E}'_{\perp} - [\vec{\beta} \times \vec{B}']), \\ \vec{B}_{\parallel} &= \vec{B}'_{\parallel}, & \vec{B}_{\perp} &= \gamma(\vec{B}'_{\perp} + [\vec{\beta} \times \vec{E}']). \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь учтено, что  $[\vec{\beta} \times \vec{E}_{\perp}] = [\vec{\beta} \times \vec{E}]$  и  $[\vec{\beta} \times \vec{B}_{\perp}] = [\vec{\beta} \times \vec{B}]$ .

**Задача 3.** Показать, что из соотношений (25) следуют равенства (22) при соответствующем выборе осей координат.

Направив ось  $x$  вдоль вектора  $\vec{v}$  и используя правую систему координат  $(x, y, z)$ , подставим (24) в (25) и, приравняв слагаемые с одинаковыми  $\vec{e}_{\alpha}$  в левой и правой частях равенств, придем к соотношениям (22).

**Задача 4.** Показать, что первые два соотношения для поля (25) в нерелятивистском пределе дают силу Лоренца, действующую на единичный заряд, покоящийся в системе  $(')$ .

При  $\beta \ll 1, \gamma \approx 1$  из (25) находим

$$\vec{E} = \vec{E}' - [\vec{\beta} \times \vec{B}'].$$

Обратное преобразование полей получим заменой  $\vec{v}$  на  $-\vec{v}$ :

$$\vec{E}' = \vec{E} + [\vec{\beta} \times \vec{B}].$$

На заряд, покоящийся в системе  $(')$ , действует в этой системе сила  $e\vec{E}'$ , а в лабораторной, где он движется со скоростью  $+\vec{v}$ , сила Лоренца

$$\vec{F} = e(\vec{E} + [\vec{\beta} \times \vec{B}]) = \vec{F}',$$

что и требовалось доказать.

**Задача 5.** Показать, что если в одной из систем магнитное поле равно нулю, то в другой (движущейся относительно первой) электрическое и магнитное поля не равны нулю и связаны между собой равенством

$$\vec{B} = [\vec{\beta} \times \vec{E}]. \quad (26)$$

Полагая в (25)  $\vec{B}' = 0$ , запишем значения  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  в лабораторной системе:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\parallel} &= \vec{E}'_{\parallel}, & \vec{E}_{\perp} &= \gamma \vec{E}'_{\perp}, \\ \vec{B}_{\parallel} &= 0, & \vec{B}_{\perp} &= \gamma [\vec{\beta} \times \vec{E}'_{\perp}] = [\vec{\beta} \times \vec{E}_{\perp}]. \end{aligned}$$

Поскольку  $[\vec{\beta} \times \vec{E}_{\parallel}] = 0$ , то два последних равенства дают соотношение (26).

Отметим, что этот результат справедлив, в частности, для поля электрического заряда, движущегося в данной системе.

#### § 4. Потери энергии частицы в электромагнитном поле

Зная законы дипольного излучения и преобразования электромагнитного поля, можно найти общие соотношения для потерь энергии частицы на излучение при ее движении во внешнем электромагнитном поле  $(\vec{E}_0, \vec{B}_0)$ . Действительно, в мгновенно сопутствующей системе (МСС), где частица мгновенно покоится, на нее действует только электрическое поле  $\vec{E}'$ , и полная потеря энергии частицы на излучение за время  $dt'$  равно (см. (21))

$$d\varepsilon' = \frac{2}{3c^3} \left( \frac{e^2 E'}{m} \right)^2 dt'. \quad (27)$$

148731

Используя известные соотношения для преобразования энергии и времени

$$d\varepsilon = \gamma d\varepsilon', \quad dt = \gamma dt'$$

и формулы преобразования поля (25) из МСС в лабораторную систему, с учетом равенства  $(E')^2 = (E'_{\parallel})^2 + (E'_{\perp})^2$  запишем:

$$d\varepsilon = \frac{2e^4}{3c^3 m^2} \{E_{\parallel}^2 + \gamma^2 (\bar{E}_{\perp} + [\bar{\beta}, \bar{B}])^2\} dt = \frac{2cr_{cl}^2}{3} \gamma^2 \{E^2 - \beta^2 E_{\parallel}^2 + 2(\bar{E}_{\perp}, [\bar{\beta}, \bar{B}]) + ([\bar{\beta}, \bar{B}])^2\} dt,$$

где  $r_{cl} = \frac{e^2}{mc^2}$  – классический радиус частицы. Далее учтем, что

$$\beta E_{\parallel} = (\bar{\beta}, \bar{E}), \quad (\bar{E}_{\parallel}, [\bar{\beta}, \bar{B}]) = 0,$$

и получим

$$d\varepsilon = \frac{2cr_{cl}^2}{3} \gamma^2 \{(\bar{E}_0 + [\bar{\beta}, \bar{B}_0])^2 - (\bar{\beta}, \bar{E}_0)^2\} dt.$$

Здесь индексом "0" обозначены компоненты внешнего поля, в котором движется частица, дабы отличать его от поля излучения частицы. Интегрируя вдоль траектории частицы, окончательно найдем значение *потерь энергии частицы на дипольное излучение* во внешнем поле  $(\bar{E}_0, \bar{B}_0)$  на отрезке траектории  $\Delta s$ :

$$\Delta\varepsilon = \frac{2r_{cl}^2 \Delta s}{3} \int \gamma^2 \{(\bar{E}_0 + [\bar{\beta}, \bar{B}_0])^2 - (\bar{\beta}, \bar{E}_0)^2\} \frac{ds}{\beta}. \quad (28)$$

Отметим, что все величины под интегралами –  $\gamma, \bar{E}, \bar{B}, \bar{\beta}$  – являются, вообще говоря, функциями координаты  $s$ , отсчитываемой вдоль траектории частицы. Из формулы (28) следует, в частности, что потери энергии в единицу времени (*мощность потерь*) для частицы в электрическом поле  $\bar{E}_0$ , параллельном скорости  $\bar{\beta}$ , не зависят от энергии частицы:

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{E_{\parallel}} = \frac{2}{3} cr_{cl}^2 E_0^2, \quad \bar{E}_0 \parallel \bar{\beta}, \quad (29)$$

а в поле  $\bar{E}_0 \perp \bar{\beta}$  растут с энергией пропорционально квадрату ее лоренц-фактора:

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{E_{\perp}} = \frac{2}{3} cr_{cl}^2 \gamma^2 E_0^2, \quad \bar{E}_0 \perp \bar{\beta}. \quad (30)$$

В магнитном поле  $\bar{B} \perp \bar{\beta}$  мощность потерь также быстро растет с энергией:

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{B_{\perp}} = \frac{2}{3} cr_{cl}^2 \beta^2 \gamma^2 B_0^2, \quad \bar{B}_0 \perp \beta. \quad (31)$$

Из формул (28), (29) следует одно важное заключение: мощность потерь существенно зависит от массы частицы (которая содержится в параметре  $r_{cl}$ ). При заданной энергии частицы  $\varepsilon_0$  из (29)–(31) находим

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{E_{\parallel}} \propto \frac{1}{m^2}, \quad \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{E_{\perp}} \propto \frac{1}{m^4}, \quad \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{B_{\perp}} \propto \frac{\varepsilon_0}{m^3} \left(\frac{\varepsilon_0}{mc^2} + 2\right) \xrightarrow{\varepsilon \gg mc^2} \frac{2\varepsilon_0}{m^4 c^2}. \quad (32)$$

Поэтому в природе (и эксперименте) значительно интенсивнее излучают легкие частицы. Так, при равной энергии значения мощности излучения ультрарелятивистских электронов и протонов в магнитном поле относятся как

$$\left(\frac{m_p}{m_e}\right)^4 \approx 1,13 \cdot 10^{13}.$$

Подход, использованный при выводе формулы (28), предполагает испускание частицей, покоящейся (!) в МСС, электромагнитного излучения. Спрашивается, как выполняется в этом случае *закон сохранения энергии-импульса* при описании этого явления на языке квантовой физики? И откуда *покояющаяся частица* берет энергию на испускание кванта излучения (фотона)? Очевидно, что в МСС энергия частицы равна  $mc^2$  до испускания фотона и больше  $mc^2$  после испускания, т. к. частица получает "импульс отдачи", как следует из закона сохранения импульса. Таким образом, исключив из рассмотрения источник ускорения частицы, мы немедленно приходим к нарушению закона сохранения энергии. Отсюда напрашивается вывод: "участие" внешнего поля (источника ускорения) принципиально необходимо в акте излучения – именно из этого источника "черпается" в МСС энергия излучения. А тогда и с законом сохранения энергии-импульса все обстоит благополучно. Это иллюстрирует задача 6.

**Задача 6.** Электрон рассеивается в поле тяжелого атомного ядра и испускает фотон под углом  $\alpha$  к направлению начальной скорости электрона. Найти энергию фотона для случая, когда векторы электрона до соударения и всех трех частиц после соударения лежат в одной плоскости, а импульс

ядра перпендикулярен вектору импульса электрона до соударения ( $\varphi = \pi/2$ , рис. 9), скорость ядра после соударения  $v_M \ll c$ .

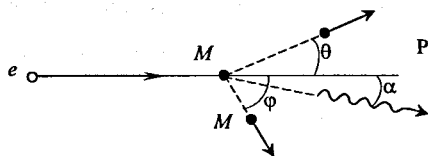


Рис. 9. Кинематика столкновения электрона с ядром

Запишем законы сохранения энергии и импульса (рис. 9):

$$\begin{aligned} \epsilon_e + Mc^2 &= \epsilon_\omega + \epsilon_\theta + \epsilon_M, \\ p_e &= p_\omega \cos \alpha + p_\theta \cos \theta + p_M \cos \varphi, \\ 0 &= -p_\omega \sin \alpha + p_\theta \sin \theta - p_M \sin \varphi, \\ \epsilon_\omega - p_\omega c, \quad \gamma_M &\approx 1 + \frac{p_M^2}{2M}. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь  $\epsilon_e, p_e, \epsilon_\theta, p_\theta$  — энергия и импульс электрона до и после соударения,  $M$  — масса ядра,  $\epsilon_M, p_M$  — его энергия и импульс после соударения;  $\epsilon_\omega = p_\omega c = \hbar\omega$  — энергия фотона;  $p_\omega$  — его импульс.

Исключив из второго и третьего уравнений угол  $\theta$ , для случая  $\varphi = \pi/2$  получим

$$p_\theta^2 = p_e^2 - 2p_\omega p_e \cos \alpha + p_\omega^2 - 2p_\omega p_M \sin \alpha + p_M^2.$$

Далее, записав из первого уравнения

$$\epsilon_\omega^2 = (\epsilon_e - \epsilon_\theta - W)^2 = (\epsilon_e - W)^2 + p_\theta^2 c^2 + m^2 c^4 - 2\epsilon_\theta (\epsilon_e - W),$$

где

$$W = \epsilon_M - Mc^2 \approx \frac{p_M^2}{2M} \ll Mc^2$$

— кинетическая энергия ядра после столкновения, подставим сюда  $p_\theta^2$  из предыдущего равенства и найдем

$$\epsilon_\omega \approx \frac{W(\epsilon_e + Mc^2)}{\epsilon_e + p_e c \cos \alpha - \sqrt{2WMc^2} \sin \alpha}.$$

Отсюда следует, в частности, что в отсутствие импульса отдачи у ядра ( $W=0$ ) энергия фотона равна нулю.

## ГЛАВА I. ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

### § 1.1. Продольное ускорение

Начнем со случая заряда  $e$ , движущегося прямолинейно со скоростью  $\vec{v}$  и ускорением  $\vec{a}_\parallel$ . В системе, где частица покоится, ее излучение в дипольном приближении описывается формулами (18)–(21). Теперь нужно найти значения поля и плотности потока энергии в лабораторной системе (рис. 1.1).

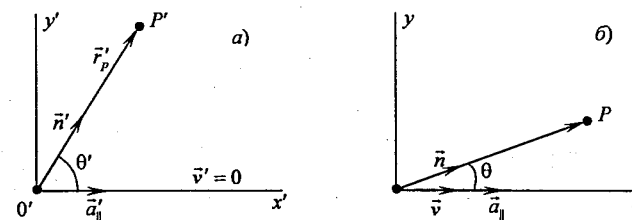


Рис. 1.1. Мгновенно-сопутствующая (а) и лабораторная системы (б), частица покоится в системе а)

Найдем вначале связь между углами  $\theta$  в лабораторной системе и  $\theta'$  в мгновенно-сопутствующей системе (МСС), где частица покоится. Воспользуемся соотношениями между интервалами пространства-времени, разделяющими два события, — испусканием излучения в точке  $O$  и его наблюдением в точке  $P$ :

	Событие	
Система	Испускание излучения	Наблюдение излучения
МСС	$O' \left( 0, t' - \frac{r'_P}{c} \right)$	$P' (\vec{r}'_P, t')$
Лабораторная	$O \left( 0, t - \frac{r_P}{c} \right)$	$P (\vec{r}_P, t)$

Очевидно, при выборе координат, показанном на рис. 1.1 (ось  $x$  направлена вдоль вектора  $\vec{v}$ , ось  $y$  лежит в плоскости  $(\vec{x}, \vec{r}_p)$ ), имеем:

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \gamma(\Delta x - v\Delta t), \\ \Delta y' &= \Delta y, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\Delta x' = r'_p \cos\theta'$ ,  $\Delta y' = r'_p \sin\theta'$ ,  $\Delta y = r_p \sin\theta$ ,  $\Delta t = r_p/c$ . Подставив эти выражения в равенства (1.1) и деля второе на первое, найдем

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \beta)}. \quad (1.2)$$

Отсюда требуемое нам (см. (18), (19)) значение  $\sin\theta'$  равно

$$\sin\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(1 - \beta\cos\theta)}. \quad (1.3)$$

**Задача 1.1.** Частица, движущаяся со скоростью  $\vec{v}$ , испускает фотон под углом  $\theta$  к направлению скорости. Найти соотношение между углом  $\theta$  в лабораторной системе и углом  $\theta'$  в МСС.

*Указание:* воспользоваться формулами преобразования для компонент импульса.

Поскольку для фотона  $\epsilon = \hbar\omega = pc$ , то

$$\begin{aligned} p_{\parallel} &= \frac{\hbar\omega}{c} \cos\theta = \gamma\left(p'_{\parallel} + v\frac{\epsilon'}{c^2}\right) = \gamma\frac{\hbar\omega'}{c}(\cos\theta' + \beta), \\ p_{\perp} &= \frac{\hbar\omega}{c} \sin\theta = p'_{\perp} = \frac{\hbar\omega'}{c} \sin\theta'. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Поделив первое равенство на второе, находим

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta'}{\gamma(\cos\theta' + \beta)}. \quad (1.5)$$

Отметим, что знак перед  $\beta$  в этой формуле имеет значение, противоположное ему в формуле (1.3), что вполне очевидно – прямое и обратное преобразования из системы в систему отличаются знаком скорости.

**Задача 1.2.** В предыдущей задаче найти соотношение между значениями частоты излучения в обеих системах для заданного "угла наблюдения"  $\theta$ .

Первое из равенств (1.4) дает

$$\omega \cos\theta = \gamma\omega'(\cos\theta' + \beta).$$

Записав обратное преобразование (сравни (1.5) и (1.2))

$$\omega' \cos\theta' = \gamma\omega \cdot (\cos\theta - \beta)$$

и выразив  $\cos\theta'$  с помощью (1.3)

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta}, \quad (1.6)$$

найдем

$$\omega = \frac{\omega'}{\gamma(1 - \beta\cos\theta)} \quad (1.7)$$

– эффект Доплера.

Для нахождения поля излучения в точке  $P$  воспользуемся вначале формулами для дипольного излучения (18), которые в данном случае дают нам значения поля в МСС (рис. 1.1, а):

$$\vec{B}'_d = \vec{e}_{\perp} \frac{ea'_{\parallel}}{c^2 r'_p} \sin\theta', \quad \vec{E}'_d = [\vec{B}'_d \times \vec{n}'], \quad (1.8)$$

$\vec{e}_{\perp} \equiv \vec{e}_z$  – единичный вектор, направленный перпендикулярно плоскости  $(\vec{n}', \vec{a}'_{\parallel})$ ,

т. е. параллельно оси  $z'$ . Здесь мы учли значение  $\ddot{d}$ :

$$\ddot{d} = ea'_{\parallel}. \quad (1.9)$$

Ускорение  $\vec{a}'_{\parallel}$  нужно выразить через его значение в лабораторной системе (задача 1.3), а поле в лабораторной системе найти с помощью формул преобразования поля (25).

**Задача 1.3.** Частица движется с ускорением  $\vec{a}$ . Выразить  $\vec{a}$  через ускорение частицы в МСС.

Пусть в момент времени  $t$  скорость частицы в лабораторной системе равна  $\vec{v}(t)$ . Выбрав направления осей МСС так, что ось  $x$  будет параллельна вектору  $\vec{v}$ , а ось  $z$  перпендикулярна плоскости  $(\vec{a}, \vec{v})$  (все направления "мгновенны"), запишем преобразования скорости из лабораторной системы в мгновенно-сопутствующую, предполагая, что в последней частица имеет (пока) скорость  $\vec{v}'$  (далее мы ее положим равной нулю):

$$v \equiv v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y}{\gamma\left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right)}. \quad (1.10)$$

Здесь  $V$  – скорость мгновенно-сопутствующей системы, и  $V = v$ ,  $\vec{v}' = 0$ . Найдём

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt'} \left( \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} \right) \Big|_{v'_x=0} = \frac{a'_x}{\gamma^3}, \quad (1.11)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{d}{dt'} \left( \frac{v'_y}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} \right) \Big|_{v'_x=v'_y=0} = \frac{a'_y}{\gamma^2}. \quad (1.12)$$

Те же результаты можно получить из преобразований компонент импульса и времени:

$$\frac{dp_x}{dt} = \gamma^3 m \frac{dv_x}{dt} = \frac{\gamma dp'_x}{\gamma dt'} = m \frac{dv'_x}{dt'},$$

что даёт (1.11), и

$$\frac{dp_y}{dt} = \gamma m \frac{dv_y}{dt} = \frac{\gamma dp'_y}{dt'} = \frac{m dv'_y}{\gamma dt'},$$

что даёт (1.12).

Значение поля в лабораторной системе запишем, учтя, что компоненты  $\vec{B}'_d$  и  $\vec{E}'_d$ , параллельные  $\vec{v}$ , равны нулю (см. (18)):

$$\vec{B}_d = \gamma (\vec{B}'_{d\perp} + [\vec{\beta} \times \vec{E}'_d]) = \gamma (\vec{B}'_{d\perp} + [\vec{\beta} \times [\vec{B}'_d \times \vec{n}']]) = \gamma \vec{B}'_{d\perp} (1 + \beta \cos \theta'). \quad (1.13)$$

Подставив сюда значения  $\vec{B}'_d$  (1.8) с учетом (1.11),  $\sin \theta'$  (1.3) и  $\cos \theta'$  (1.6), найдём

$$\vec{B}_d = \vec{e}_\perp \frac{ea_\parallel \gamma}{c^2 r'_p} \frac{\sin \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^2}.$$

Осталось выразить  $r'_p$  через  $r_p$ , для чего воспользуемся формулами (1.1):

$$r'_p = \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2} = r_p \sqrt{\gamma^2 (\cos \theta - \beta)^2 + \sin^2 \theta} = \gamma r_p (1 - \beta \cos \theta).$$

Окончательно при  $\vec{a} \parallel \vec{v}$  имеем

$$\vec{B}_d = \vec{e}_\perp \frac{ea_\parallel}{c^2 r_p} \frac{\sin \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^3}, \quad \vec{E}_d = [\vec{B}_d \times \vec{n}]. \quad (1.14)$$

Последнее равенство ещё требует доказательства и записано потому, что "иначе быть не может".

**Задача 1.4.** Показать, что компоненты поля излучения частицы, движущейся прямолинейно и ускоренно, удовлетворяют второму из равенств (1.14).

*Указание:* записать формулы преобразования компонент вектора  $\vec{E}'_d = (\vec{E}'_d)_\parallel + (\vec{E}'_d)_\perp$  и использовать второе из равенств (1.8), справедливое в МСС.

Согласно равенствам (1.8) при выборе осей координат в МСС, показанном на рис. 1.1, вектор  $\vec{B}'_d$  направлен параллельно осям  $z$  и  $z'$ :

$$\vec{B}'_d = \vec{e}_z B'_d, \quad (1.15)$$

а вектор  $\vec{E}'_d$  лежит в плоскости  $(x, y)$  и ортогонален вектору  $\vec{n}$  (рис. 1.1, а):

$$\begin{aligned} \vec{E}'_d &= [\vec{B}'_d \times \vec{n}] = \vec{e}'_{1\perp} \cdot B'_d, \\ \vec{e}'_{1\perp} &= -\vec{e}_z \cdot \sin \theta' + \vec{e}'_y \cdot \cos \theta'. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Отсюда

$$\vec{E}'_d = -\vec{e}_z \cdot B'_d \cdot \sin \theta' + \vec{e}_y \cdot B'_d \cdot \cos \theta'. \quad (1.17)$$

Тогда, воспользовавшись формулами преобразования (24), (25), запишем:

$$\vec{E}_d = -\vec{e}_z \cdot B'_d \cdot \sin \theta' + \gamma (\vec{e}_y \cdot B'_d \cdot \cos \theta' + \vec{e}_y \cdot \beta B'_d).$$

Подставим сюда значения  $\sin \theta'$  (1.3),  $\cos \theta'$  (1.6), выраженные через  $\theta$ , и значение  $B'_d$ , которое найдём, записав преобразование, обратное (1.13):  $B'_d = \gamma (1 - \beta \cos \theta) B_d$ . В результате получим

$$\vec{E}_d = B_d (-\vec{e}_z \sin \theta + \vec{e}_y \cos \theta) = \vec{e}_{1\perp} \cdot B_d = [\vec{B}_d \times \vec{n}].$$

Тем самым второе из равенств (1.14) доказано.

Плотность потока энергии тормозного излучения в случае  $\vec{a} \parallel \vec{v}$  находим, воспользовавшись формулами (1.14):

$$\vec{S}_d = \frac{c}{4\pi} \cdot [\vec{E}_d \times \vec{B}_d] = \vec{n} \frac{e^2 a_\parallel^2}{4\pi c^3 r_p^2} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^6}, \quad \frac{dJ}{d\Omega} = r_p^2 \cdot |\vec{S}_d|. \quad (1.18)$$

Отметим, что в нерелятивистском пределе ( $\beta \rightarrow 0$ ) эти формулы совпадают с (19). Векторная диаграмма для плотности потока энергии существенно изменяет свой вид с ростом скорости частицы (рис. 1.2), вытягиваясь вдоль направления скорости. При этом растёт, вообще говоря, значение плотности потока.

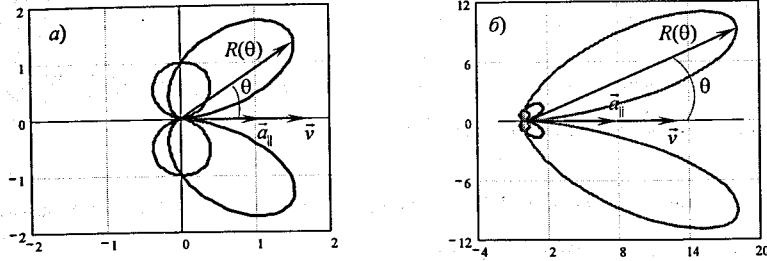


Рис. 1.2. Векторная диаграмма распределения по углу  $\theta$  плотности потока излучения частицы, движущейся прямолинейно и ускоренно:  $R(\theta) = \sin^2 \theta / (1 - \beta \cos \theta)^6$ .  
 а)  $-\beta = 0,01; 0,3$ ; б)  $-\beta = 0,01; 0,3; 0,6$

**Задача 1.5.** Найти значение угла  $\theta$ , при котором плотность потока энергии максимальна, и значение  $dJ/d\Omega$  на этом направлении при  $\beta \rightarrow 1$ .

Дифференцируя функцию

$$f(\theta) = \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^6}$$

по углу  $\theta$ , находим условие экстремума:

$$2\beta x^2 + x - 3\beta = 0, \quad x \equiv \cos \theta_{\text{extr}}$$

Отсюда

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24\beta^2}}{4\beta}$$

Понять значения знаков  $\pm$  помогает крайний случай  $\beta = 0$ :

$$x \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} \begin{cases} 3\beta \rightarrow 0, \\ -\infty. \end{cases}$$

Ясно, что второй случай не имеет физического смысла, так что

$$\theta_{\text{extr}} = \arccos \frac{\sqrt{1 + 24\beta^2} - 1}{4\beta} \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} 0. \quad (1.19)$$

При  $\beta \rightarrow 0$  формула (1.19) дает значение  $\theta_{\text{extr}} = \frac{\pi}{2}$ , что совпадает с результатом § 1 (рис. 5). Чтобы выяснить закон изменения  $\theta_{\text{extr}}$  в зависимости от энергии частицы, подставим  $\beta = (1 - \gamma^{-2})^{1/2}$  в (1.19) и для  $\gamma \gg 1$  найдем

$$\cos \theta_{\text{extr}} \approx 1 - \frac{1}{10\gamma^2}.$$

Поскольку при  $\theta_{\text{extr}} \ll 1$  имеем  $\cos \theta_{\text{extr}} \approx 1 - (\theta_{\text{extr}}^2/2)$ , то получаем

$$\theta_{\text{extr}} \approx \frac{1}{\sqrt{5}\gamma}, \quad \gamma \gg 1. \quad (1.20)$$

Соответственно, из (1.18) следует

$$\left(\frac{dJ}{d\Omega}\right)_{\text{max}} \approx \frac{e^2 a_{\parallel}^2}{4\pi c^3} \frac{\theta_{\text{extr}}^2}{\left(1 - \beta + \frac{\theta_{\text{extr}}^2}{2}\right)^6} \approx \left(\frac{5}{3}\right)^5 \frac{e^2 a_{\parallel}^2 \gamma^{10}}{12\pi c^3}, \quad \gamma \gg 1. \quad (1.21)$$

В переходе к последнему выражению использовано соотношение, полезное и в дальнейшем:

$$1 - \beta \approx \frac{1 - \beta^2}{2} = \frac{1}{2\gamma^2}, \quad \gamma \gg 1. \quad (1.22)$$

Из (1.21) следует, что при фиксированном значении ускорения максимальное значение  $(dJ/d\Omega)_{\text{max}}$  растет с энергией частицы как  $\gamma^{10}$  (!) в релятивистской области значений энергии ( $\gamma \gg 1$ ). Угловая зависимость функции  $dJ/d\Omega$  в этой же области значений энергии частицы имеет приближенное значение (см. (1.21) и (1.18) при  $\theta \ll 1$ )

$$\frac{dJ}{d\Omega} \approx \frac{e^2 a_{\parallel}^2}{4\pi c^3} \frac{\theta^2}{\left(1 - \beta + \frac{\theta^2}{2}\right)^6} \approx \frac{16e^2 a_{\parallel}^2}{\pi c^3} \frac{\theta^2}{\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)^6}, \quad \theta \sim \frac{1}{\gamma} \ll 1. \quad (1.23)$$

Ширина функции

$$f(\theta) = \frac{\theta^2}{\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)^6}$$

на полувысоте  $2\Delta\theta$  (принятая в физике характеристика *FWHM* – Full Width on Half Maximum) следует из равенства

$$\frac{(\theta_{\text{extr}} \pm \Delta\theta)^2}{\left(\frac{1}{\gamma^2} + (\theta_{\text{extr}} \pm \Delta\theta)^2\right)^6} = \frac{1}{2} \frac{\theta_{\text{extr}}^2}{\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta_{\text{extr}}^2\right)^6}.$$

Вводя обозначение

$$x = \gamma^2 (\theta_{\text{extr}} \pm \Delta\theta)^2 \quad (1.24)$$



и подставляя в правую часть значение  $\theta_{\text{extr}}$  (1.20), приходим к алгебраическому уравнению

$$(1+x)^6 - 10 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^6 x = 0,$$

которое можно решить численно. Из шести корней этого уравнения единственный, имеющий физический смысл, равен

$$x^* = 0,6314; \quad \sqrt{x^*} = 0,795.$$

Отсюда и из (1.24) находим

$$\Delta\theta = \pm \left(0,795 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cdot \frac{1}{\gamma} = \pm \frac{0,348}{\gamma}. \quad (1.25)$$

Теперь можно полностью описать картину пространственного распределения мощности излучения  $dJ/d\Omega$  релятивистской частицы при продольном ускорении. Это конический слой (рис. 1.2), ось которого направлена вдоль векторов  $\vec{v}$ ,  $\vec{a}_{\parallel}$ , максимум интенсивности (плотность потока энергии) лежит при  $\theta = \theta_{\text{extr}}$ , а угловой размер "слоя" равен  $\Delta\theta$  (1.25). На оси конуса интенсивность излучения обращается в нуль. С ростом энергии частицы значение максимума интенсивности увеличивается (см. (1.21)), а "толщина" слоя  $\Delta\theta$  уменьшается.

Поляризация излучения при продольном ускорении частицы, как следует из формул (1.14), зависит от направления на точку наблюдения: вектор  $\vec{B}_d$  ортогонален плоскости векторов  $\vec{n}$  и  $\vec{a}_{\parallel}$ , а вектор  $\vec{E}_d$  ортогонален плоскости векторов  $\vec{B}_d$  и  $\vec{n}$  (рис. 1.3).

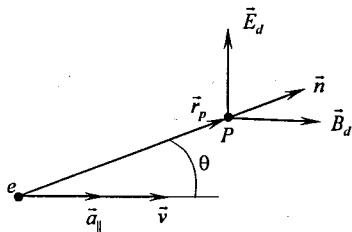


Рис. 1.3. Поляризация излучения при продольном ускорении заряженной частицы

Сильная зависимость от энергии частицы значения максимума интенсивности (1.21) имеет свое объяснение, и ситуация здесь не столь "драматична", как будет показано ниже (задача 1.7 и текст перед ней).

Спектр излучения частицы также зависит от положения точки наблюдения. Действительно, если ускорение частицы изменяется во времени как  $a_{\parallel}(t_e)$ , то излучение приходит в точку наблюдения P в момент (сравни с формулой (12))

$$t_p = t_e + \frac{r_p}{c}. \quad (1.26)$$

Подчеркнем, что оба значения моментов времени определены в лабораторной системе. Интервалы времени  $dt_p$  и  $dt_e$  связаны друг с другом через скорость частицы:

$$dt_p = dt_e + \frac{dr_p}{c},$$

а поскольку (рис. 1.4)

$$dr_p \approx -AC = -AB \cdot \cos\theta = -v \cdot dt_e \cdot \cos\theta,$$

то

$$dt_p = \left(1 - \frac{v}{c} \cdot \cos\theta\right) \cdot dt_e. \quad (1.27)$$

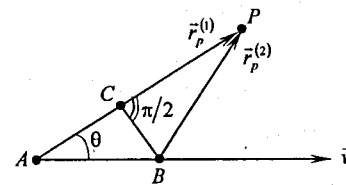


Рис. 1.4. Смещение частицы за время  $dt_e$  и изменение расстояния от частицы до точки наблюдения

В результате, если частица ускоряется и излучает в течение времени  $\Delta t_e$ , то длительность импульса излучения в точке наблюдения составляет

$$\Delta t = (1 - \beta \cdot \cos\theta) \cdot \Delta t_e, \quad (1.28)$$

а характерная частота регистрируемого излучения

$$\omega \sim \frac{\pi}{\Delta t} = \frac{\pi}{(1 - \beta \cdot \cos \theta) \cdot \Delta t_e} \quad (1.29)$$

Отметим, что зависимость частоты излучения от скорости частицы и направления на точку наблюдения (угол  $\theta$ ) есть не что иное, как эффект Доплера. В общем случае переменного во времени ускорения  $a_{\parallel}(t_e)$  спектр излучения, приходящего в точку  $P$ , получим, вычислив фурье-образ функции  $a_{\parallel}(t_e)$ , где  $t$  и  $t_e$  связаны соотношением (1.28). Качественно можно сказать, что спектр излучения релятивистской частицы вблизи направления на максимум излучения существенно сдвигается относительно спектра частот  $\omega_e$  функции  $a_{\parallel}(t_e)$  в область более высоких частот (см. (1.20)):

$$\omega \sim \frac{\omega_e}{1 - \beta \cdot \cos \theta_{\text{extr}}} \sim \frac{5\gamma^2}{3} \omega_e \gg \omega_e \quad (1.30)$$

**Задача 1.6.** Найти полную энергию, излучаемую электроном в интервале частот  $(\omega, \omega + d\omega)$  при постоянном ускорении ( $a_{\parallel} = \text{const}$ ) в течение короткого интервала  $\tau$ . Рассмотреть ультрарелятивистский и нерелятивистский случаи.

Искомая величина пропорциональна спектру мощности излучения электрона и может быть определена как

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{c}{4\pi} r_p^2 \int |E(\omega)|^2 d\Omega, \quad (1.31)$$

где  $E(\omega)$  – фурье-образ поля излучения на заданном направлении, а интеграл берется по всему телесному углу,  $r_p$  – см. рис. 1.3 и 1.4. Поле излучения под углом  $\theta$  к направлению скорости электрона имеет спектральную функцию

$$E(\omega, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(t, \theta) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\tau} E(t', \theta) e^{i\omega(t_e + r_p(t')/c)} (1 - \beta \cos \theta) dt'.$$

Используя соотношения (1.26), (1.27), находим модуль спектральной функции в приближении малых  $\tau$

$$|E(\omega, \theta)| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{ea_{\parallel}}{c^2 r_p} \cdot \frac{\sin \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \cdot \frac{1}{\omega} \left| \sin \frac{(1 - \beta \cos \theta)\omega\tau}{2} \right|.$$

Подставив этот результат в (1.31), найдем искомую величину. В ультрарелятивистском случае

$$\left. \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \right|_{\gamma \gg 1} \approx \frac{64}{\pi} \cdot \frac{e^2 a_{\parallel}^2}{c^3} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\theta^2}{\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)^6} \left| \sin \left( \frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) \frac{\omega\tau}{4} \right| \cdot \frac{\theta d\theta}{\omega^2}.$$

В области низких частот ( $\omega \ll \gamma^2/\tau$ ) спектр мощности

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \sim \frac{64}{\pi} \cdot \frac{e^2 a_{\parallel}^2}{c^3} \gamma^4 \tau^2$$

не зависит от частоты, а в области высоких частот

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \sim \frac{64}{\pi} \cdot \frac{e^2 a_{\parallel}^2}{c^3} \cdot \frac{\gamma^8}{\omega^2}.$$

В нерелятивистском случае интегрирование дает

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \approx \frac{4e^2 a_{\parallel}^2}{3\pi c^3} \left( \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\omega} \right)^2.$$

В области низких частот ( $\omega \ll 1/\tau$ ) нерелятивистский спектр мощности, как и в релятивистском случае, не зависит от частоты. Этот результат известен под названием "инфракрасной катастрофы" – число квантов низкой энергии, излучаемых частицей, стремится к бесконечности при  $\omega \rightarrow 0$ :

$$\frac{dN}{d\omega} = \frac{1}{\hbar\omega} \cdot \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \rightarrow \infty.$$

Однако полная излученная энергия остается конечной.

Теперь вернемся к отложенному вопросу о зависимости интенсивности (мощности) излучения от энергии частицы и найдем полную мощность излучения, проинтегрировав  $dJ/d\Omega$  (1.18) по полному телесному углу. При этом опять-таки необходимо учесть различие интервалов времени излучения  $\Delta t_e$  и наблюдения  $\Delta t$  ((1.27), (1.28)). Более того, как следует из равенства (1.28), значение  $\Delta t$  зависит от направления на точку наблюдения  $\theta$ , и говорить о полной (по всем направлениям) энергии излучения за время  $\Delta t$  просто бессмысленно – можно, строго говоря, определить только энергию излучения, испущенного частицей в течение времени  $\Delta t_e$ , т. е.

$$\Delta\mathcal{E} = \int_{\Omega} \frac{dJ}{d\Omega} \cdot \frac{dt}{dt_e} d\Omega \cdot \Delta t_e = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \cdot \frac{dJ}{d\Omega} (1 - \beta \cos \theta) \cdot \Delta t_e.$$

координат будем, как и прежде, отсчитывать полярные углы  $\theta'$ ,  $\theta$  от осей  $x'$  и  $x$  соответственно, а азимутальные углы  $\varphi'$  и  $\varphi$  от осей  $y'$  и  $y$ . Тогда вектор имеет компоненты

$$\vec{n} = \{\cos\theta, \sin\theta \cdot \cos\varphi, \sin\theta \cdot \sin\varphi\}, \quad (1.35)$$

и, аналогично, вектор  $\vec{n}'$ . Это позволяет вычислить векторы  $\vec{B}'_d$  в МСС (18):

$$\begin{aligned} \vec{B}'_d &= \frac{[\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}']}{c^2 r'_p} = \frac{e}{c^2 r'_p} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & a'_1 & 0 \\ \cos\theta' & \sin\theta' \cos\varphi' & \sin\theta' \sin\varphi' \end{vmatrix} = \\ &= \frac{ea'_1}{c^2 r'_p} \cdot (\vec{e}_x \sin\theta' \sin\varphi' - \vec{e}_z \cos\theta'), \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}'_d &= [\vec{B}'_d \times \vec{n}'] = \frac{ea'_1}{c^2 r'_p} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \sin\theta' \sin\varphi' & 0 & -\cos\theta' \\ \cos\theta' & \sin\theta' \cos\varphi' & \sin\theta' \sin\varphi' \end{vmatrix} = \\ &= \frac{ea'_1}{c^2 r'_p} \cdot \{\vec{e}_x \sin\theta' \cos\theta' \cos\varphi' - \vec{e}_y (\sin^2\theta' \sin^2\varphi' + \cos^2\theta') + \\ &+ \vec{e}_z \sin^2\theta' \sin\varphi' \cos\varphi'\}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Для преобразования компонент поля излучения в лабораторную систему нам нужны соотношения между углами  $\theta'$  и  $\theta$ ,  $\varphi'$  и  $\varphi$  и расстояниями  $r'_p$  и  $r_p$ . Записав равенства, аналогичные (1.1):

$$\begin{aligned} \Delta x' &= r'_p \cos\theta' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = \gamma r_p (\cos\theta - \beta), \\ \Delta y' &= r'_p \sin\theta' \cos\varphi' = \Delta y = r_p \sin\theta \cos\varphi, \\ \Delta z' &= r'_p \sin\theta' \sin\varphi' = \Delta z = r_p \sin\theta \sin\varphi, \end{aligned} \quad (1.38)$$

найдем (сравни (1.3), (1.6))

$$\begin{aligned} tg\varphi' &= tg\varphi, \quad \varphi' = \varphi, \\ tg\theta' &= \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \beta)}, \quad \sin\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(1 - \beta\cos\theta)}, \quad \cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta}, \\ r'_p &= \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2} = \gamma r_p (1 - \beta\cos\theta). \end{aligned} \quad (1.39)$$

Для вычисления полей излучения в лабораторной системе нам потребуется еще выразить  $\vec{a}'_1$  через  $a_1$  (см. (1.12)). В результате получим равенство

$$\frac{a'_1}{r'_p} = \frac{a_1}{r_p} \cdot \frac{\gamma}{1 - \beta\cos\theta}. \quad (1.40)$$

В общем случае анализ полей излучения частицы при поперечном ускорении требует довольно объемных вычислений. Несколько проще подход на основе так называемых потенциалов Лиенара-Вихерта (см. [1, 2]), но он выходит за рамки данного курса. Для понимания физики явления можно ограничиться двумя крайними случаями

- а) векторы  $\vec{n}'$ ,  $\vec{n}$  лежат в плоскости  $(\vec{a}_1, \vec{v})$  или  $(x, y)$ ;
- б) векторы  $\vec{n}'$ ,  $\vec{n}$  ортогональны плоскости  $(\vec{a}_1, \vec{v})$ .

а) В этом случае  $\varphi' = \varphi = 0$ , и формулы (1.36), (1.37) показывают, что в МСС отличны от нуля только три компоненты поля излучения:

$$B'_{dz} = -\frac{ea'_1}{c^2 r'_p} \cos\theta', \quad E'_{dx} = \frac{ea'_1}{c^2 r'_p} \sin\theta' \cos\theta' \quad \text{и} \quad E'_{dy} = -\frac{ea'_1}{c^2 r'_p} \cos^2\theta'. \quad (1.41)$$

Используя формулы преобразования поля (22), получим, с учетом (1.39), (1.40)

$$\begin{aligned} B_{dz} &= \gamma(B'_{dz} + \beta E'_{dy}) = -\gamma \frac{ea'_1}{c^2 r'_p} (\cos\theta' + \beta \cos^2\theta') = \frac{ea_1}{c^2 r_p} \frac{\beta - \cos\theta}{(1 - \beta\cos\theta)^3}, \\ B_{dx} &= B_{dy} = 0, \\ E_{dx} &= E'_{dx} = -\frac{ea_1}{c^2 r_p} \frac{(\beta - \cos\theta) \sin\theta}{(1 - \beta\cos\theta)^3}, \\ E_{dy} &= \gamma(E'_{dy} + \beta B'_{dz}) = -\gamma \frac{ea'_1}{c^2 r'_p} (\cos^2\theta' + \beta \cos\theta') = \frac{ea_1}{c^2 r_p} \frac{\beta - \cos\theta}{(1 - \beta\cos\theta)^3} \cos\theta, \\ E_{dz} &= 0. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Отсюда плотность потока энергии излучения в лабораторной системе для случая "а" есть

$$\begin{aligned} \vec{S}_a &= \frac{c}{4\pi} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ E_{dx} & E_{dy} & 0 \\ 0 & 0 & B_{dz} \end{vmatrix} = \frac{c}{4\pi} (\vec{e}_x E_{dy} - \vec{e}_y E_{dx}) \cdot B_{dz} = \\ &= \frac{e^2 a_1^2}{4\pi c^3 r_p^2} \frac{\vec{e}_x \cos\theta + \vec{e}_y \sin\theta}{(1 - \beta\cos\theta)^6} (\beta - \cos\theta) = \vec{n} \frac{e^2 a_1^2}{4\pi c^3 r_p^2} \frac{(\beta - \cos\theta)^2}{(1 - \beta\cos\theta)^6}, \quad \varphi = 0. \end{aligned} \quad (1.43)$$

б) Аналогично предыдущему случаю из (1.36), (1.37) запишем для  $\varphi' = \varphi = \frac{\pi}{2}$ :

$$\begin{aligned} B'_{dx} &= \frac{ea'_1}{c^2 r'_p} \sin \theta', & B'_{dy} &= 0, & B'_{dz} &= -\frac{ea'_1}{c^2 r'_p} \cos \theta', \\ E'_{dx} &= 0, & E'_{dy} &= -\frac{ea'_1}{c^2 r'_p}, & E'_{dz} &= 0. \end{aligned} \quad (1.44)$$

И так же, как и в предыдущем случае, из формул преобразования найдем

$$\begin{aligned} B_{dx} &= B'_{dx} = \frac{ea_1}{c^2 r_p} \frac{\sin \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^2}, & B_{dy} &= 0, \\ B_{dz} &= \gamma(B'_{dz} + \beta E'_{dy}) = -\frac{ea_1}{c^2 r_p} \frac{\cos \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^2}, \\ E_{dx} &= 0, & E_{dy} &= \gamma(E'_{dy} + \beta E'_{dz}) = -\frac{ea_1}{c^2 r_p} \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^2}, & E_{dz} &= 0. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Плотность потока энергии в случае "б" равна

$$\begin{aligned} \bar{S}_b &= \frac{c}{4\pi} \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 0 & E_{dy} & 0 \\ B_{dx} & 0 & B_{dz} \end{vmatrix} = \frac{c}{4\pi} (\bar{e}_x B_{dz} - \bar{e}_z B_{dx}) \cdot E_{dy} = \\ &= \frac{e^2 a_1^2}{4\pi c^3 r_p^2} \frac{\bar{e}_x \cos \theta + \bar{e}_z \sin \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^4} = \bar{n} \frac{e^2 a_1^2}{4\pi c^3 r_p^2} \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^4}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Отличие распределений (1.43), (1.46) от полученного в предыдущем параграфе распределения (1.18) состоит, прежде всего, в том, что поток излучения теперь имеет максимальное значение на направлении скорости (рис. 1.6). Угловой размер потока излучения, как и в случае продольного ускорения, составляет

$$\Delta\theta \sim \frac{1}{\gamma}. \quad (1.47)$$

Это следует из (1.43), (1.46): при  $\beta \rightarrow 0$  заменяем

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}, \quad 1 - \beta \approx \frac{1}{2\gamma^2},$$

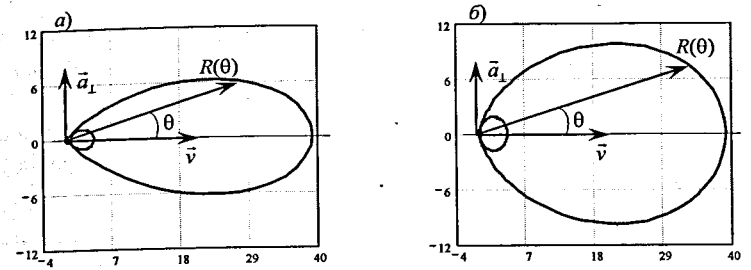


Рис. 1.6. Векторная диаграмма распределения плотности потока излучения по углу  $\theta$  частицы, движущейся с ускорением, направленным перпендикулярно вектору скорости: а)  $\varphi = 0$ ,  $R(\theta) = (\beta - \cos \theta)^2 / (1 - \beta \cos \theta)^6$ , б)  $\varphi = \pi/2$ ,  $R(\theta) = 1 / (1 - \beta \cos \theta)^6$ ,  $\beta = 0,3; 0,6$

и приходим к выражениям

$$\begin{aligned} \bar{S}_a &= \bar{n} \frac{4e^2 a_1^2}{\pi c^3 r_p^2} \frac{\left(\frac{1}{\gamma^2} - \theta^2\right)^2}{\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)^6}, \\ \bar{S}_b &= \bar{n} \frac{4e^2 a_1^2}{\pi c^3 r_p^2} \frac{1}{\left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2\right)^4}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Следует отметить, что острая направленность дипольного излучения релятивистской частицы является кинематическим релятивистским эффектом (задача 1.8).

**Задача 1.8.** Источник света, излучающий изотропно в МСС, движется со скоростью  $v \sim c$ . Найти угловой размер потока излучения в лабораторной системе.

**Указание:** рассмотреть движение фотона, вылетевшего под углом  $\theta$ ,  $\theta'$  к направлению скорости, и найти интервал значений  $\Delta\theta$ .

Компоненты импульса фотона  $\vec{p}$  в лабораторной и мгновенно сопутствующей системах связаны между собой преобразованиями Лоренца:

$$p_{\parallel} = \gamma \left( p'_{\parallel} + \frac{v \epsilon'}{c^2} \right), \quad p_{\perp} = p'_{\perp}, \quad \epsilon = \hbar \omega = pc.$$

Отсюда:

$$p_{\parallel} = p \cos \theta = \gamma(\cos \theta' + \beta) \cdot p', \quad p \sin \theta = p' \sin \theta'.$$

Разделив второе равенство на первое, найдем

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta'}{\gamma(\cos \theta' + \beta)}.$$

Для  $0 \leq \theta' \leq \pi/2$  получим

$$0 \leq \operatorname{tg} \theta \leq \frac{1}{\beta \gamma},$$

и тот же результат для  $\pi/2 \leq \theta' \leq \pi$ . Таким образом, две полусферы потока излучения в МСС – передняя и задняя – в лабораторной системе "схлопываются" в конус с углом раствора (1.47) при  $\beta \approx 1$ .

При поперечном ускорении в электрическом поле полная мощность потерь энергии частицы на излучение существенно зависит от ее энергии, как это следует из (28):

$$\Delta \varepsilon = \frac{2cr_{cl}^2}{3} \int_0^{\Delta S} \gamma^2 E^2 \frac{ds}{\beta}, \quad \vec{E} \perp \vec{v}. \quad (1.49)$$

**Задача 1.9.** Ультррелятивистская частица рассеивается на неподвижном кулоновском центре (заряд  $Ze$ ) на малый угол. Оценить потери на излучение для заданного прицельного параметра  $\rho$ .

Считая траекторию частицы прямолинейной и вводя координату  $x$  вдоль траектории ( $x = 0$  на минимальном расстоянии от центра), запишем компоненты поля:

$$E_{\parallel} = Ze \frac{x}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}}; \quad E_{\perp} = Ze \frac{\rho}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}}.$$

Потери энергии частицы в единицу времени равны

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2}{3} r_{cl}^2 c \gamma^2 \{E_{\perp}^2 + E_{\parallel}^2 (1 - \beta^2)\},$$

и можно полные потери представить в виде суммы двух членов ( $\beta = 1$ ):

$$\varepsilon_{\perp} \approx \frac{2}{3} r_{cl}^2 \gamma^2 \int_{-\infty}^{\infty} E_{\perp}^2 dx; \quad \varepsilon_{\parallel} \approx \frac{2}{3} r_{cl}^2 \int_{-\infty}^{\infty} E_{\parallel}^2 dx.$$

Интегрируя, найдем

$$\varepsilon_{\perp} \approx \frac{\pi}{4} \cdot \frac{Z^2 e^2 r_{cl}^2}{\rho^3} \gamma^2; \quad \varepsilon_{\parallel} \approx \frac{\pi}{12} \cdot \frac{Z^2 e^2 r_{cl}^2}{\rho^3}.$$

Таким образом,  $\varepsilon_{\perp} = \gamma^2 \varepsilon_{\parallel} / 3 \gg \varepsilon_{\parallel}$ , т. е. основные потери на излучение в данном случае связаны с поперечным ускорением частицы. Этот результат является достаточно общим, как мы увидим в следующих главах.

**Задача 1.10.** Оценить потери энергии на излучение электрона с энергией 100 МэВ при рассеянии на ядре  $^{238}\text{U}^{92}$  с прицельным параметром  $10^{-8}$  см.

Используя результаты предыдущей задачи, найдем

$$\Delta \varepsilon_{\perp} \approx \frac{\pi}{4} \cdot \frac{92^2 \cdot 4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 300 \cdot (2,8 \cdot 10^{-13})^2}{(10^{-8})^3} \cdot \left(\frac{100}{0,511}\right)^2 \approx 2,87 \text{ эВ}.$$

*Поляризация излучения* при поперечном ускорении также зависит от направления на точку наблюдения. Из формул (1.42) и (1.45) находим:

а)  $\varphi = 0$

$$\vec{B}_d = \vec{e}_z \frac{ea_{\perp}}{c^2 r_p} \frac{(\beta - \cos \theta)}{(1 - \beta \cos \theta)^3}, \quad (1.50)$$

$$\vec{E}_d = (-\vec{e}_x \sin \theta + \vec{e}_y \cos \theta) \cdot \frac{ea_{\perp}}{c^2 r_p} \frac{\beta - \cos \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^3} = \vec{e}_{\perp} \cdot B_d = [\vec{B}_d \times \vec{n}],$$

б)  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\vec{B}_d = (\vec{e}_x \sin \theta - \vec{e}_z \cos \theta) \cdot \frac{ea_{\perp}}{c^2 r_p} \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^2} = \vec{e}_{\perp} \frac{ea_{\perp}}{c^2 r_p} \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)}, \quad (1.51)$$

$$\vec{E}_d = -\vec{e}_y \cdot \frac{ea_{\perp}}{c^2 r_p} \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^2}.$$

В случае "а" единичный вектор  $\vec{e}_{\perp}$  лежит в плоскости  $(x, y)$  и ортогонален вектору  $\vec{n}$  (рис. 1.7, а). В случае "б" единичный вектор  $\vec{e}_{\perp}$  лежит в плоскости  $(x, z)$  и ортогонален вектору  $\vec{n}$  (рис. 1.7, б). В обоих случаях *излучение линейно поляризовано*.

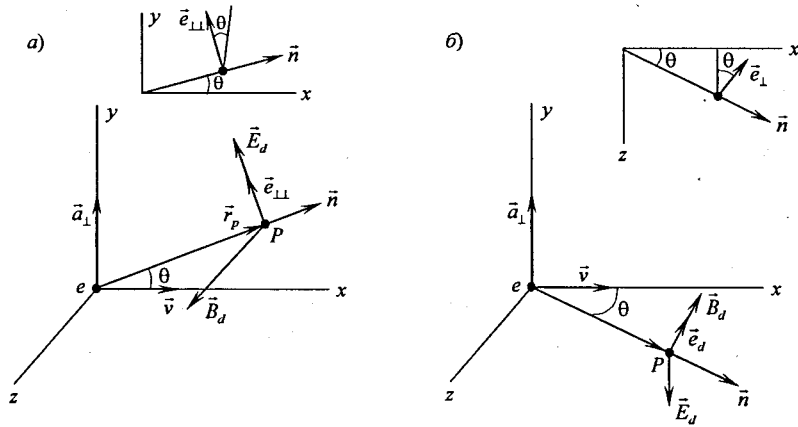


Рис. 1.7. Поляризация излучения при поперечном ускорении в плоскостях  $(x, y)$  (а) и  $(x, z)$  (б) – случаи "а" ( $\varphi = 0$ ) и "б" ( $\varphi = \pi/2$ )

Спектр излучения при поперечном ускорении качественно имеет тот же характер, что и при продольном ускорении: частота излучения зависит от направления на точку наблюдения, а для вычисления спектра необходимо произвести с функциями (1.48) операции фурье-преобразований, аналогичные проделанным в задаче 1.6 выше.

### § 1.3. Рентгеновское "тормозное" излучение

Открыто В. К. Рентгеном (W. K. Roentgen) в 1895 г. Это электромагнитное излучение в области коротких длин волн:

$$\begin{aligned} \lambda < 10 \text{ нм}, \\ \epsilon_{\text{photon}} > 100 \text{ эВ}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

В английской литературе можно встретить для этого излучения термин X-лучи, введенный еще Рентгеном, для которого это излучение было действительно неизвестно (отсюда "X"). Классический способ генерации – соударение быстрых электронов с мишенью, так называемое *тормозное излучение* (рис. 1.8). Дальше мы увидим, что электромагнитное излучение рентгеновского диапазона (1.52)

возникает и в других видах генерации излучения. Физика тормозного излучения – ускоренное движение заряженных частиц в электрических полях атомов (см. задачи 1.9, 1.10). Таким образом, этот вид излучения правильнее называть *электротормозным излучением*,\*) в отличие от магнитотормозного, или синхротронного (см. следующий параграф).

Спектр электротормозного излучения непрерывный (рис. 1.9):

$$0 \leq \epsilon_{\omega} \leq \epsilon_e, \quad \lambda_{\min} = \frac{2\pi\hbar}{\epsilon_e} \approx \frac{1,24}{(\epsilon_e)_{\text{кэВ}}} \text{ нм}, \quad (1.53)$$

где  $\epsilon_e$  – энергия электрона, соударяющегося с мишенью. Максимум спектра находится при

$$\epsilon_{\omega}^* \approx 0,7\epsilon_e \quad (\lambda \approx 1,5\lambda_{\min}). \quad (1.54)$$

Диаграмма направленности этого вида излучения качественно повторяет рис. 1.6, что ясно из физики генерации данного излучения – основной вклад в плотность мощность дает излучение при поперечном ускорении (см. (29), (30) и (1.49)).

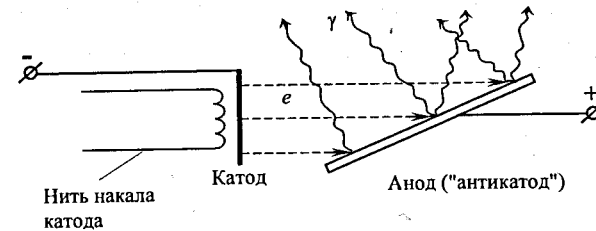


Рис. 1.8. Схема генерации рентгеновского излучения (рентгеновская трубка)

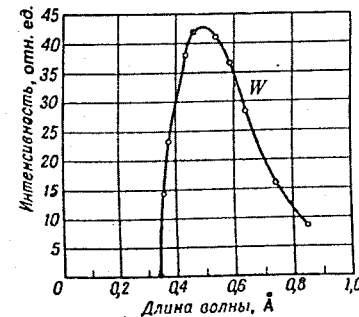


Рис. 1.9. Непрерывный рентгеновский спектр: энергия электронов 37 кэВ, анод – вольфрам

\*) В физической литературе часто используется термин Bremsstrahlung – тормозное излучение, нем.

Поляризация электротормозного рентгеновского излучения существенно зависит от энергии электронов. Для нерелятивистских электронов,  $\varepsilon \ll 0,5$  МэВ, излучение носит классический дипольный характер. В тонких мишенях, где электроны низкой энергии испытывают мало соударений, они тормозятся преимущественно вдоль направления скорости. Поэтому в излучении из тонких мишеней преобладает поляризация вектора  $\vec{E}_d$  вдоль вектора скорости (рис. 6), а степень поляризации может быть близка к 100%. С увеличением толщины мишени растет число соударений электрона с ее атомами, траектории электронов значительно отклоняются от начального направления и степень поляризации излучения падает. По мере роста энергии электронов характеристики излучения все больше и больше становятся "релятивистскими", и при энергии электронов  $\varepsilon > 0,5$  МэВ поляризация излучения принимает вид, свойственный излучению, рассмотренному в §§ 1.1, 1.2 (рис. 1.3, 1.7).

При соударении быстрых электронов с мишенью кроме электротормозного излучения возникает так называемое *характеристическое*. Это излучение атомов мишени, возбужденных быстрыми электронами. Как известно, энергия фотона, испускаемого атомом при переходе одного из электронов с уровня  $n_1$  на уровень  $n_2$ , равна

$$\Delta\varepsilon_{12} = \frac{Z^2 e^2}{2R_{\text{Bohr}}} \cdot \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right), \quad n_1 > n_2,$$

или

$$\lambda_{12} = 2\pi c \frac{\hbar}{\Delta\varepsilon_{12}} = \frac{1}{Z^2 R_{\text{y}}} \cdot \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)^{-1}. \quad (1.55)$$

Здесь  $Z$  – заряд ядра,  $R_{\text{Bohr}}$  – боровский радиус,  $R_{\text{y}} = 10973731,534(13) \text{ м}^{-1}$  – постоянная Ридберга. При возбуждении характеристического излучения в сплошном рентгеновском спектре электротормозного излучения появляются узкие линии, если энергия электронов достаточно велика, в соответствии с формулой (1.55). Это наглядно иллюстрирует рис. 1.10: при энергии электронов 35 кэВ характеристическое излучение возбуждается в молибдене ( $Z = 42$ ), но не возбуждается в вольфраме ( $Z = 74$ ). В этом диапазоне длин волн (более длинноволновые линии характеристического излучения вольфрама находятся вне

диапазона, указанного на рис. 1.10. Соответственно, длина волны линии характеристического излучения уменьшается обратно пропорционально  $Z^2$  с ростом атомного номера (табл. 1.1). В многоэлектронных атомах значение энергии уровней отклоняется от закона (1.55) и подчиняется экспериментально найденному закону Мозли (*H. Moseley*, 1913 г.):

$$\lambda = \frac{1}{(Z - \sigma)^2 R_{\text{y}}} \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)^{-1}, \quad (1.56)$$

где  $\sigma$  – постоянная экранирования, учитывающая экранирование поля ядра электронами внутренних оболочек. Например, при пересчете  $\lambda$  от Li к Fe формула (1.55) дает  $\lambda_{\text{Fe}} = 0,304$  нм при экспериментальном значении 0,194 (табл. 1.1).

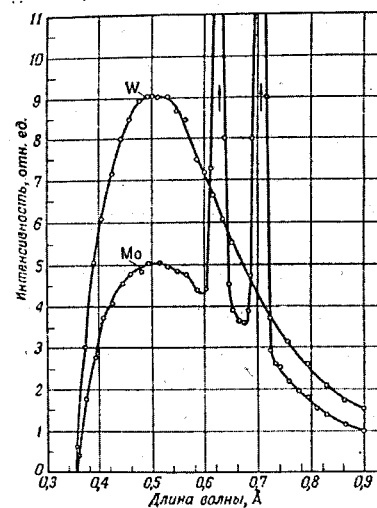


Рис. 1.10. Спектр вольфрама и молибдена при энергии электронов 35 кэВ

Таблица 1.1. Характеристическое излучение некоторых элементов (переход  $2P - 1S$ ).

Элемент	Li	Ti	Fe	Mo	W
Длина волны излучения, нм	22,8	0,275	0,194	0,0714	0,0214
Ширина линии излучения (FWHM)	–	1,9	3,0	6,18	37,4
$Z$	3	22	26	42	74

## ГЛАВА II. СИНХРОТРОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

### § 2.1. Магнитотормозное излучение релятивистской частицы

На заряженную частицу, движущуюся в постоянном магнитном поле, действует сила Лоренца

$$\vec{F} = \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{B}_0], \quad (2.1)$$

всегда (!) перпендикулярная направлению скорости. Поэтому скорость частицы в постоянном магнитном поле не изменяется по величине, а лишь меняет свое направление.<sup>\*)</sup> Соответственно, траектория частицы в постоянном поле  $\vec{B}$  – спираль, радиус которой направлен вдоль вектора силы  $\vec{F}$ , создающей центростремительное ускорение

$$\vec{a}_\perp = \frac{\vec{F}}{\gamma m}. \quad (2.2)$$

Компонента скорости  $\vec{v}$ , параллельная полю  $\vec{B}$ , постоянна во времени. Если магнитное поле изменяется в пространстве, траектория становится более сложной – превращается в пространственную кривую, элементы которой представляют собой "кусочки" дуг окружностей. Их мгновенный радиус (часто называемый *ларморовским*) находим из равенства

$$\frac{\gamma m v^2}{\rho_L} = F,$$

что дает

$$\rho_L(\vec{r}) = \frac{pc}{eB_0(\vec{r})}. \quad (2.3)$$

Движение частицы с ускорением сопровождается, как мы уже знаем, испусканием электромагнитного излучения. Впервые на возможность такого излучения указал немецкий физик А. Шотт (*A. Schott*, 1907 г.). Но только в 1944 г. советские физики Иваненко и Померанчук создали теорию излучения электрона в

<sup>\*)</sup> Заметим, что в переменном во времени магнитном поле появляется еще вихревое электрическое поле, изменяющее и величину скорости частицы.

магнитном поле. Экспериментально оно было обнаружено американским физиком Блюитом (1946 г.), зарегистрировавшим свертывание круговой орбиты электронов, и его учеником Хабером (1947 г.), который первым визуально наблюдал свет от электронов, ускоряемых в синхротроне. Отсюда и название – *синхротронное излучение* (СИ). С развитием техники встречных пучков активным "участником" физических экспериментов стал позитрон (антиэлектрон) – второй источник синхротронного излучения. Первые детальные исследования характеристик СИ были выполнены в конце 50-х – начале 60-х годов прошлого столетия группой во главе с О. П. Куликовым на электронном синхротроне Физического института им. П. Н. Лебедева АН СССР (Москва), а первые исследования структуры материи (в т. ч. биологических объектов) с использованием синхротронного излучения начаты в конце 60-х годов по инициативе А. Н. Скринского и Г. Н. Кулипанова на электрон-позитронном накопителе ВЭПП-3 в Институте ядерной физики им. Г. И. Будкера (Новосибирск) группами экспериментаторов – физиков, биологов, и др.

Физика синхротронного излучения вполне понятна – это *магнитотормозное излучение* частицы, движущейся с ускорением  $\vec{a}_\perp$  (2.2). Поэтому здесь можно использовать результаты § 1.2.

Рассмотрим излучение частицы, движущейся в однородном магнитном поле  $\vec{B}_0$ , и выберем цилиндрическую систему координат, ось которой параллельна вектору  $\vec{B}_0$  и проходит через центр окружности – траектории частицы, а азимутальную координату – угол  $\phi$  – отсчитываем вдоль направления движения частицы (рис. 2.1). Считаем, что компоненты скорости частицы вдоль поля  $v_z = 0$ .

Направления поля и скорости частицы на рис. 2.1 показаны для электрона (заряд  $-e$ ). В дальнейшем будем считать заряд  $e$  алгебраической величиной (т. е. знак включен в алгебраическую величину). Центростремительное ускорение частицы направлено по радиусу к центру окружности и, как следует из (2.1)–(2.3), равно



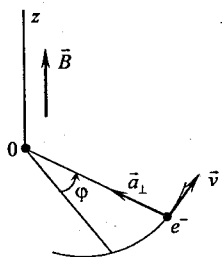


Рис. 2.1. Траектория электрона в однородном магнитном поле ( $v_z = 0$ )

$$\vec{a}_\perp = -\vec{e}_r \omega_B^2 \rho_L = -\vec{e}_r \frac{eB_0 v}{\gamma m c}, \quad (2.4)$$

где

$$\omega_B = \frac{eB_0}{\gamma m c} \quad (2.5)$$

– угловая скорость (частота вращения) частицы в магнитном поле. Два выражения для ускорения  $a_\perp$  в (2.4) приведены для удобства использования в дальнейшем (в зависимости от того, какие параметры известны). Теперь можно воспользоваться результатами § 1.2, подставив в соответствующие выражения значение  $a_\perp$  (2.4). Как и прежде, видим, что для синхротронного излучения релятивистской частицы характерна острая направленность – угловой размер потока излучения порядка  $1/\gamma$  (1.47). И эта особенность СИ во многом определяет его характеристики. Подчеркнем, что в этом параграфе мы рассматриваем излучение *одиночной частицы*. Далее мы обсудим характеристики излучения ансамбля (сгустка) частиц.

Длина формирования излучения – одна из наиболее важных характеристик любого излучения, поскольку она в первую очередь определяет *когерентность излучения*. Для синхротронного излучения значение длины его формирования легко получить, рассмотрев поток излучения в плоскости орбиты. Нетрудно видеть (рис. 2.2), что излучение в точку наблюдения приходит из точек орбиты, расположенных в интервале углов

$$\Delta\varphi \sim \frac{1}{\gamma} \quad (2.6)$$

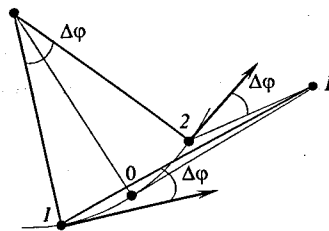


Рис. 2.2. Схема формирования СИ в плоскости орбиты: поток излучения начинает поступать в точку P (с запаздыванием!), когда частица приходит в точку 1, и прекращается, когда частица достигает точки 2

Соответственно, длина формирования СИ равна длине участка орбиты

$$\ell_{\text{form}} = \rho_L \Delta\varphi \sim \frac{\rho_L}{\gamma} \quad (2.7)$$

Иными словами, излучение поступает в точку наблюдения с участка орбиты протяженностью  $\ell_{\text{form}}$ . Отсюда следует длительность времени излучения

$$\Delta t_{\text{rad}} \sim \frac{\rho_L}{\gamma v} \quad (2.8)$$

Испускаемое частицей СИ приходит в точку наблюдения в виде одиночного всплеска, длительность которого существенно меньше  $\Delta t_{\text{rad}}$ . Причина этого та же, с которой мы встретились выше, – эффект Доплера (§ 1.1, формула (1.27)). В данном случае картина сжатия интервала времени еще яснее: от точки 1 до точки 2 частица движется вслед излучению, продолжая излучать (рис. 2.3). В момент  $t_2$ , когда частица приходит в точку 2, "голова" излучения находится в точке 4, пройдя путь

$$\Delta l_{14} = c \cdot \Delta t_{\text{rad}}$$

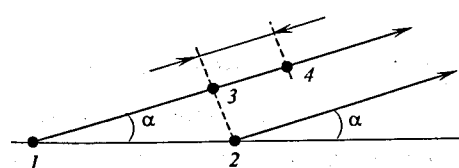


Рис. 2.3. Схема сжатия импульса СИ

Поскольку  $\alpha \sim \Delta\varphi \ll 1$ , протяженность всплеска (импульса) СИ, приходящего в точку P (рис. 2.2), есть

$$\Delta_P = \Delta_{14} - \Delta_{13} \approx \Delta_{14} - \Delta_{12} = c \cdot \Delta t_{\text{rad}} - \ell_{\text{form}} = \frac{1-\beta}{\beta\gamma} \rho_L.$$

Для  $\gamma \gg 1$  отсюда получаем длительность импульса СИ в точке наблюдения  $P$ , отстоящей на расстояние  $\Delta_P$  от участка излучения:

$$\Delta t_P = \frac{\Delta_P}{c} \approx \frac{\rho_L}{2\gamma^3 c}. \quad (2.9)$$

Полезно записать значение  $\Delta t_P$  через частоту обращения частицы  $\omega_B$ :

$$\Delta t_P \sim \frac{1}{\gamma^3 \omega_B} \quad (2.10)$$

и ввести понятия характерной частоты и характерной длины волны СИ, которые мы используем ниже:

$$\omega_0 = \gamma^3 \omega_B, \quad \lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} = 2\pi \frac{\rho_L}{\beta\gamma^3}. \quad (2.11)$$

**Задача 2.1.** Оценить длительность импульса СИ электрона с энергией 1 ГэВ в магнитном поле 1Тл.

При энергии электрона 1 ГэВ найдем

$$\gamma \approx 2 \cdot 10^3, \quad \omega_B = \frac{e \cdot 10^4 \text{ Гс} \cdot 300}{2 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 10^8 \text{ эВ}} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ см/с} = 0,9 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1},$$

$$\Delta t_P \sim \frac{1}{(2 \cdot 10^3)^3 \cdot 10^8} \approx 10^{-18} \text{ с}.$$

В электронных синхротронах длительность импульса СИ определяется протяженностью сгустка электронов (см. ниже).

При периодическом движении электрона в магнитном поле излучение в точке наблюдения имеет вид коротких всплесков длительностью порядка  $\Delta t_P$  (2.10), следующих с частотой обращения электрона  $\omega_B$  и периодом обращения

$$T_B = \frac{2\pi}{\omega_B}. \quad (2.12)$$

Зависимость плотности потока энергии в точке наблюдения  $P$  от времени в этой точке  $t_P$  можно получить, подставив в (1.43), (1.46) значение функции  $\theta(t_P)$ , которое найдем из (1.27), (1.28), учитывая, что (рис. 2.2)

$$d\theta = d\varphi = \omega_B \cdot dt_e. \quad (2.13)$$

В результате получим трансцендентное уравнение для  $\theta(t_P)$ :

$$d\theta \cdot (1 - \beta \cos \theta) = \omega_B dt_P,$$

или

$$\theta - \beta \sin \theta = \omega_B t_P, \quad (2.14)$$

где угол  $\theta$  и время  $t_P$  отсчитываются от момента, когда касательная к траектории частицы в точке местонахождения частицы (точка 0 на рис. 2.2) проходит через точку наблюдения  $P$ . Аналитическое решение этой задачи требует привлечения аппарата специальных функций и довольно сложно (см. [2], § 74). Мы ограничимся численным примером для случая  $\gamma = 100$  ( $\varepsilon_e \approx 51$  МэВ) и воспользуемся формулами для плотности потока энергии (1.43), (1.46). При этом удобно в качестве параметра, пропорционального времени  $t_P$ , выбрать

$$\xi = \omega_0 t_P = \gamma^3 (\theta - \beta \sin \theta). \quad (2.15)$$

В этом случае результат (рис. 2.4) зависит только от энергии частицы  $\varepsilon_e$ , или  $\gamma$ . Как мы видим, функции  $S_a(\xi)$  и  $S_b(\xi)$  при  $|\xi| \leq 0,3$  хорошо аппроксимируются гауссовой функцией. Это обстоятельство позволяет сделать определенные выводы о спектре излучения, приходящего в точку  $P$ . Но прежде чем анализировать этот спектр, решим две нижеследующие задачи.

**Задача 2.2.** Найти спектр периодической последовательности  $N$  импульсов электромагнитного излучения, имеющих гауссову зависимость времени:

$$A_n(t) = A_0 e^{-t^2/2\tau^2}, \quad t_n = t - nT, \quad 0 \leq n \leq N; \quad (2.17)$$

$T$  — период следования импульсов (рис. 2.6, а);  $A$  — одна из компонент векторов  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ .

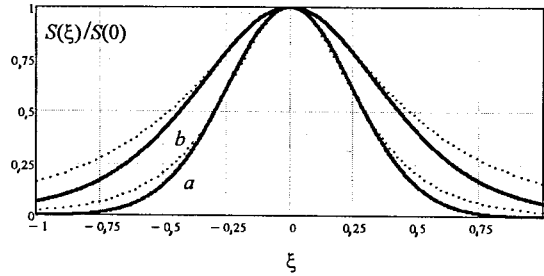


Рис. 2.4. Функции  $S_a(\xi)/S_a(0)$  и  $S_b(\xi)/S_b(0)$ , аппроксимированные гауссовыми функциями (точечные кривые)  $f_{a,b}(\xi) = S_{a,b}(\xi) \cdot e^{-\theta^2(\xi)/2\tau_{a,b}^2}$ ,

$$S_a(\xi) = \frac{(\beta - \cos \theta(\xi))^2}{16\gamma^8(1 - \beta \cos \theta(\xi))^5}, \quad S_b(\xi) = \frac{1}{16\gamma^8(1 - \beta \cos \theta(\xi))^4},$$

$$S_a(0) = \frac{1}{16\gamma^2(1 - \beta)^4} = S_b(0), \quad \tau_a = 0,0046, \quad \tau_b = 0,0067.$$

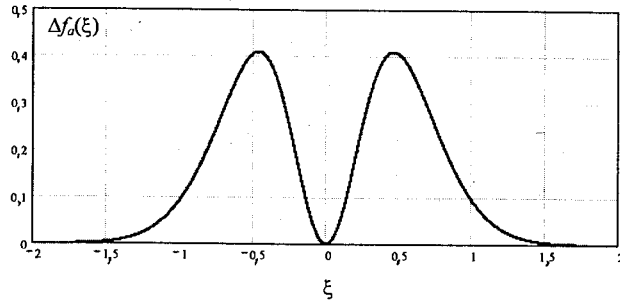


Рис. 2.5. Функция  $\Delta f_a(\xi) = f_a(\xi) - S_a(\xi)/S_a(0)$ . Функции  $S_a(\xi)$  и  $f_a(\xi)$  определены в подписи к рис. 2.4

Спектр функции (2.17) найдем, записав интеграл Фурье:

$$A_\omega(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(t) \cdot e^{i\omega t} dt = \frac{A_0\tau}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \cdot e^{i\omega\tau x} dx \cdot \sum_{n=0}^N e^{i\omega nT}, \quad (2.18)$$

где  $x = \frac{t - nT}{\tau}$ . Дополняя показатель экспоненты до полного квадрата и учитывая значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = \sqrt{2\pi}, \quad (2.19)$$

получим, после суммирования геометрической прогрессии  $e^{i\omega nT}$ ,

$$A_\omega(\omega) = \frac{A_0\tau}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\omega^2\tau^2/2} \cdot \left| \frac{\sin \frac{N\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} \right|.$$

Это выражение удобно представить в виде

$$A_\omega(\omega) = A_\omega(0) \cdot e^{-\omega^2\tau^2/2} \cdot \left| \frac{\sin \frac{N\pi\omega}{\omega_T}}{\sin \frac{\pi\omega}{\omega_T}} \right|, \quad (2.20)$$

$$A_\omega(0) = N \frac{A_0\tau}{\sqrt{2\pi}}, \quad \omega_T = \frac{2\pi}{T}.$$

Спектральная функция  $A_\omega(\omega)$  представляет собой (рис. 2.6, б) набор главных максимумов

$$A_\omega^{\max} = NA_\omega(\omega_k) = N^2 \frac{A_0\tau}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\omega_k^2\tau^2/2}, \quad \omega_k = k \cdot \omega_T, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.21)$$

и второстепенных (соответствующих максимуму "быстрого" синуса в числителе дроби в (2.20)):

$$(A_\omega)_\ell = \frac{A_\omega(0)}{\left| \frac{\sin \frac{\pi\omega_\ell}{\omega_0}}{\sin \frac{\pi\omega_\ell}{\omega_0}} \right|}, \quad \omega_\ell = \left( \ell + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\omega_0}{N}, \quad \ell = 1, 2, 3, \dots \quad (2.22)$$

Спектральная функция промодулирована огибающей

$$f(\omega) = e^{-\omega^2\tau^2/2}, \quad (2.23)$$

которая приводит к ее быстрому уменьшению с ростом  $\omega$ . Ширину главных максимумов находим из условия сдвига фазы быстрого синуса на  $\pi$ :

$$\delta\omega_{\max} \approx \frac{\omega_T}{N}, \quad (2.24)$$

а ширина спектра порядка

$$\Delta\omega_{\text{спектр}} \sim \frac{2}{\tau}. \quad (2.25)$$

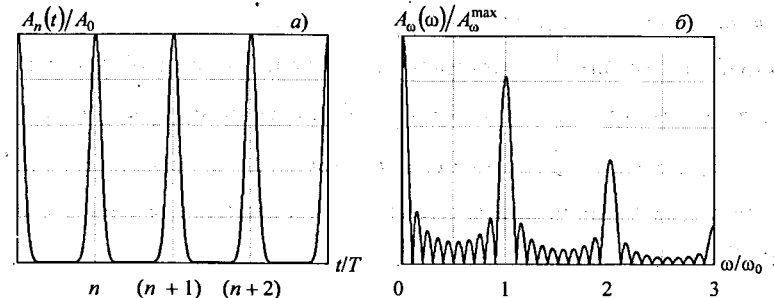


Рис. 2.6. Периодическая последовательность гауссовых импульсов (а) и ее спектр (б): формулы (2.17), (2.20),  $A_0 = 1$ ,  $\tau = 10$ ,  $N = 10$

Задача 2.3. Найти спектр непрерывной ( $N \rightarrow \infty$ ) последовательности импульсов электромагнитного излучения, имеющих гауссову форму (2.17), при условии  $T \gg \tau$ .

При  $N \rightarrow \infty$  интеграл Фурье (2.18) переходит в ряд Фурье:

$$A(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\omega_n t}, \quad \omega_n = n\omega_T = n \frac{2\pi}{T}, \quad A_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A(t) \cdot e^{-i\omega_n t} dt.$$

Подставив в подынтегральное выражение значение  $A(t)$  (2.18), находим при  $T \gg \tau$

$$A_n = \frac{A_0}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i/2 t^2 - i\omega_n t} dt \approx \frac{A_0 \tau}{T} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \cdot e^{-i\omega_n^2 \tau^2/2} = \frac{A_0 \tau \sqrt{2\pi}}{T} e^{-i\omega_n^2 \tau^2/2}. \quad (2.27)$$

Таким образом, спектральная функция непрерывной последовательности "гауссовых" импульсов излучения представляет собой набор гармоник частоты  $\omega_0$ , амплитуда которых убывает с номером гармоники как  $e^{-n^2 \omega_0^2 \tau^2/2}$  (сравни (2.20), (2.23)).

Спектр излучения от однократного прохождения частицы через точку 0 в области частот  $\omega$ , соответствующих  $|\Delta\xi| \leq 0,2$ , или  $\Delta t_p \leq 0,2/\omega_0$ , совпадает со спектром одиночного гауссова импульса (формула (2.20) при  $N=1$ ):

$$A_{\omega}^{(1)}(\omega) = \frac{A_0 \tau}{\sqrt{2\pi}} e^{-\omega^2 \tau^2/2}, \quad \tau = \{\tau_a, \tau_b\}. \quad (2.28)$$

Это область высоких частот (рис. 2.6)

$$\omega > \frac{1}{\Delta t_p} \sim 5\omega_0.$$

Отличие функций  $S(\xi)$  от гауссовых при больших  $t_p$  ("негауссовы хвосты") приводит к отклонению спектральной функции от гауссовой в области низких частот  $\omega \leq 3\omega_0$  (рис. 2.7). Спектральная функция выходит на константу  $A_{\omega}(0) \neq 0$ , как и следует ожидать для одиночного импульса  $S_a(t_p) > 0$ . На рис. 2.7 показаны спектральные функции, рассчитанные численно для приведенного выше примера (рис. 2.4) по формулам

$$\begin{aligned} S_{\omega a}^{(1)}(\omega) &= \int_{-5}^5 S_a(\xi(x)) \cdot \cos \omega \xi(x) \cdot \frac{d\xi}{dx} \cdot dx, \\ S_{\omega a}^{(2)}(\omega) &= \int_{-5}^5 S_a(\xi(x)) \cdot \sin \omega \xi(x) \cdot \frac{d\xi}{dx} \cdot dx, \\ S_{\omega a}(\omega) &= \sqrt{[S_{\omega a}^{(1)}(\omega)]^2 + [S_{\omega a}^{(2)}(\omega)]^2}, \\ x = \gamma\theta, \quad \frac{d\xi}{dx} &= \gamma^2(1 - \beta \cos \theta). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Картина несколько меняется при периодическом вращении частицы в магнитном поле. Как следует из результатов задачи 2.3, спектральная функция превращается в набор линий, бесконечно узких в пределе "идеально-невозмущенного" вращения (см. (2.27)). Особенность СИ релятивистской частицы в том, что частота излучения много больше частоты вращения:

$$\omega_0 = \gamma^3 \omega_B \gg \omega_B. \quad (2.30)$$

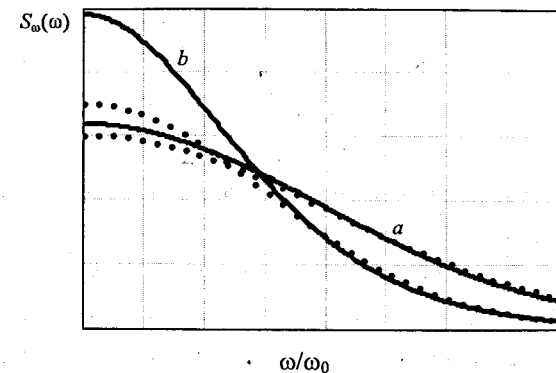


Рис. 2.7. Спектральные функции плотности потока энергии и их фитирование гауссовыми функциями (точечные кривые)

Поэтому номера гармоник очень велики для типичных значений энергии частицы:

$$n \sim \frac{\omega_0}{\omega_B} = \gamma^3 \gg 1.$$

Так же велика ширина спектра

$$\Delta n \sim \frac{1}{\omega_B \tau} \gg 1. \quad (2.31)$$

"Негауссова" форма импульса всплеска излучения (рис. 2.4) приводит к тому, что спектральная функция в области низких частот (хотя и все еще высоких гармоник частоты обращения  $\omega_B$ ) убывает с уменьшением частоты как  $\omega^{1/3}$ . Таким образом, в спектре излучения появляются две области частот:

$$S_{\omega}(\omega) \propto \begin{cases} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{1/3}, & \omega \ll \omega_0, \\ \sqrt{\frac{\omega}{\omega_0}} \cdot e^{-\omega/\omega_0}, & \omega \gg \omega_0. \end{cases} \quad (2.32)$$

Максимум спектральной функции лежит при (см. [2], § 74)

$$\omega_{\max} = 0,29 \cdot \left(\frac{3}{2}\omega_0\right) \approx 0,43\omega_0. \quad (2.33)$$

Спектр излучения единичной частицы непрерывный не только из-за большого значения  $n$ . Излучая, частица теряет энергию, и эти потери в ускорителях электронов и позитронов — активно излучающих частиц — восполняются ускоряющей системой. Она представляет собой высокочастотный резонатор, в котором специальным генератором возбуждается электромагнитное поле на одной из гармоник частоты обращения частицы ( $n_{\text{ВЧ}} \sim 1-100$  в зависимости от параметров ускорителя). Но такое "подускорение" сопровождается фазовыми колебаниями частицы (относительно фазы ВЧ), в результате чего частота обращения осциллирует во времени (параметр  $\gamma$  в знаменателе формулы (2.5)). Кроме того, излучение носит случайный характер: на фоне средних за оборот потерь энергии частицы (см. ниже) имеют место *квантовые флуктуации излучения* (задача 2.4 ниже). Оба эти эффекта "размывают" дискретный характер излучения, делая его непрерывным.

*Потери энергии частицы за оборот  $\Delta \varepsilon$*  являются важной характеристикой.

Воспользовавшись формулой (31) Введения, запишем

$$\Delta \varepsilon_T = \frac{2}{3} cr_{cl}^2 \beta^2 \gamma^2 \cdot B_0^2 \cdot T_B,$$

и подставив сюда значение  $T_B$  (2.12) и  $\omega_B$  (2.5), найдем

$$\Delta \varepsilon_T = \frac{4\pi}{3} \beta^2 \gamma^3 r_{cl}^2 B_0^2 \frac{mc^2}{e}. \quad (2.34)$$

Часто удобно использовать выражение, в котором магнитное поле исключено с помощью формулы (2.3), но задан радиус орбиты  $\rho_L$ :

$$\Delta \varepsilon_T = \frac{4\pi}{3} \beta^3 \gamma^4 mc^2 \frac{r_{cl}}{\rho_L}. \quad (2.35)$$

Для электрона (позитрона) это выражение может быть представлено в виде

$$\left(\Delta \varepsilon_T^{(e)}\right)_{\text{эВ}} \approx 6,04 \cdot 10^{-9} \frac{\beta^3 \gamma^4}{(\rho_L)_{\text{м}}}. \quad (2.36)$$

Так, электрон с энергией 50 МэВ ( $\gamma \approx 100$ ) на траектории радиуса 1 м теряет за оборот примерно 6 кэВ.

**Задача 2.4.** Оценить разброс частоты обращения и характерной частоты излучения электрона с энергией 50 МэВ в магнитном поле из-за квантовых флуктуаций. Радиус траектории  $\rho_L = 1$  м.

Частота обращения электрона в данном случае составляет

$$\omega_B = \frac{\beta c}{\rho_L} = 3 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}.$$

Характерная частота излучения и соответствующая ей энергия кванта излучения тогда равны

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \gamma^3 \omega_B = 3 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}, \\ \varepsilon_0 &= \hbar \omega_0 \approx 0,2 \text{ эВ}. \end{aligned}$$

За один оборот электрон испускает  $N_0$  квантов (см. численный пример выше)

$$N_0 \sim \frac{\Delta \varepsilon_T^{(e)}}{\varepsilon_0} \sim 3 \cdot 10^4,$$

а их статистические флуктуации

$$\Delta N_0 \sim \sqrt{N_0} \sim 170.$$

Соответственно, разброс энергии электрона от оборота к обороту составляет

$$\delta \varepsilon \sim \Delta N_0 \cdot \varepsilon_0 \sim 30 \text{ эВ},$$

что дает

$$\frac{\delta \omega_B}{\omega_B} \sim \frac{\delta \gamma}{\gamma} \sim \frac{\delta \varepsilon}{\gamma \cdot mc^2} \sim 6 \cdot 10^{-7}, \quad \delta \omega_B \sim 200 \text{ с}^{-1}.$$

Такой, казалось бы, незначительный разброс частоты обращения приводит к существенному разбросу частот излучения в точке наблюдения:

$$\delta \omega_0 = 3 \cdot \omega_0 \cdot \frac{\delta \gamma}{\gamma} \sim 5 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1} \gg \delta \omega_B.$$

Этот эффект и приводит к "размыванию" линейчатого спектра, превращая его в сплошной.

Поляризация СИ имеет ту же природу, что и при поперечном ускорении частицы, но теперь еще картина усложняется движением частицы по круговой траектории (рис.2.8). Излучение линейно поляризовано, если точка наблюдения лежит в плоскости орбиты, и эллиптически поляризовано при других положениях точки наблюдения. Направление вращения векторов поля излучения совпадает с направлением вращения электрона, видимым из точки наблюдения. Поэтому по разные стороны от плоскости орбиты излучение имеет разную эллиптическую поляризацию – левую или правую.

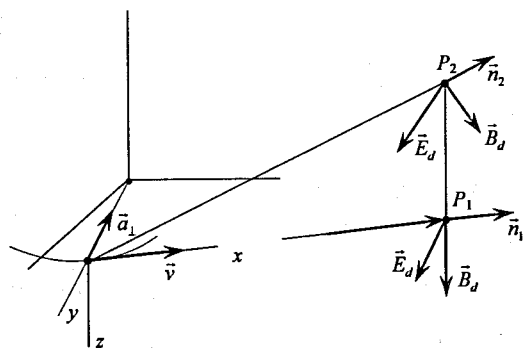


Рис. 2.8. Поляризация СИ.  $P_1$  – точка наблюдения лежит в плоскости орбиты,  $P_2$  – над плоскостью орбиты, векторы  $\vec{E}_d, \vec{B}_d, \vec{n}$  взаимно ортогональны и образуют "правую тройку"

Когерентность СИ – важнейшая характеристика излучения. О ней поговорим в следующем параграфе.

## § 2.2. Синхротронное излучение сгустка частиц

Электроны и позитроны в современных синхротронах и накопительных кольцах имеют такие параметры траекторий и значения энергии, что заметная доля их энергии расходуется на синхротронное излучение (см. (2.34)–(2.36)). Эти потери энергии восполняются, как уже сказано, ускоряющей системой – высокочастотными резонаторами, в которых возбуждается электромагнитное поле на частоте, кратной частоте обращения частиц. Частицы автоматически синхронизируются в этом случае с частотой поля (знаменитый "принцип

автофазировки" Векслера–Мак-Миллана), собираясь в сгустки определенной протяженности. Такие сгустки являются яркими источниками СИ.

Параметры излучения сгустка существенно зависят от его размера. Так, в предельном случае пучка частиц, равномерно распределенных по орбите, поле пучка практически не содержит волновой компоненты – это излучения  $2^N$ -поля, где  $N$  – число частиц (см. Введение, Мультипольное излучение). Еще проще это объяснить на языке интерференции излучения: при большом  $N$  на каждой длине волны излучения для данной частицы найдется "пара" – частица, отстоящая на  $\lambda/2$ , и суммарное излучение этой пары частиц отсутствует. В реальном пучке присутствуют флуктуации плотности:

$$\Delta N_1 \sim \sqrt{N_1},$$

где  $N_1$  – число частиц в некотором, достаточно малом, объеме пучка. Этот объем выглядит, на фоне пучка со средней и равномерной плотностью, как сгусток  $\Delta N_1$  частиц. Такие сгустки излучают как точечный заряд, а поскольку интенсивность излучения пропорциональна квадрату заряда (см. (1.43), (1.46)), то интенсивность излучения такой флуктуации пропорциональна  $(\Delta N_1)^2 = N_1$ . Очевидно, поля этих "сгустков"-флуктуаций складываются в случайных фазах, так что полная интенсивность пропорциональна  $\sum N_i = N$  – полному числу частиц в пучке. Это типичный случай *некогерентного излучения* (coherent – согласованный, англ.). Если же частицы собраны в сгусток очень малых размеров, т.е. сгусток  $N$  частиц излучает как "точка", интенсивность излучения пропорциональна  $N^2$  – излучение *когерентно*. Именно эта характеристика излучения сгустка – его когерентность – представляет собой интерес для большого числа приложений.

Источники СИ принято характеризовать их *яркостью*, которую определяют как поток фотонов СИ на заданной длине волны  $\lambda$  в интервале  $\Delta\lambda$  с единицы поверхности источника в единицу телесного угла в единицу времени:

$$B_\lambda = \frac{d^2 N(\lambda)}{dt \cdot d\lambda} \cdot \frac{\Delta\lambda}{S \cdot \Omega}, \quad (2.37)$$

где  $S$  – площадь источника,  $\Omega$  – телесный угол потока излучения. Принято выбирать  $\Delta\lambda = 10^{-3}\lambda$ , и, соответственно, *стандартной единицей яркости* является

$$1 \text{ фотон} \cdot \text{с}^{-1} \cdot (0,1\% \lambda) \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{ср}^{-1}.$$

В накопительных кольцах-синхротронах частицы совершают поперечные ("бетатронные") колебания, что приводит к угловому разбросу пучка  $2 \cdot \Delta\theta_{\text{бет}}$ . Произведение поперечного полуразмера пучка  $a$  на угловой разброс по каждому из поперечных направлений называют эмиттансом пучка:

$$\varepsilon_{x,y} = a_{x,y} \cdot \Delta\theta_{x,y}. \quad (2.38)$$

Напомним, что единицы измерения эмиттанса –  $1 \text{ п} \cdot \text{мм} \cdot \text{мрад}$ . Часто используют единицу  $1 \text{ нм}$  ( $1 \text{ нанометр} = 10^{-9} \text{ м}$ ), опуская "мысленно"  $\pi$  и радиан:

$$1 \text{ п} \cdot \text{нм} \cdot \text{рад} = 10^{-7} \text{ п} \cdot \text{см} \cdot \text{рад} = 10^{-3} \text{ п} \cdot \text{мм} \cdot \text{мрад}.$$

Наличие углового разброса пучка – разброса мгновенных направлений вектора  $\vec{v}$  частиц сгустка – вызывает, как нетрудно сообразить, угловой разброс потока излучения. В частности, при  $\Delta\theta_{\text{бет}} \gg 1/\gamma$  угловой размер потока излучения равен

$$\Delta\Omega \sim \Delta\theta_x \cdot \Delta\theta_y,$$

и тогда

$$B_\lambda = \frac{d^2 N(\lambda)}{dt \cdot d\lambda} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\varepsilon_x \varepsilon_y}. \quad (2.39)$$

Естественно задать вопрос: как ведет себя яркость при  $\varepsilon_x, \varepsilon_y \rightarrow 0$ ? Оказывается, что яркость стремится к определенному пределу, имеющему вполне ясный физический смысл. Как мы знаем из электродинамики, угловой раствор излучения, испускаемого источником, имеющим размер  $D$ , не может быть меньше чем

$$\theta_D \geq \frac{\lambda}{2D},$$

где  $\lambda$  – длина волны излучения. Это известное физическое явление – дифракция излучения на апертуре  $D$  (рис. 2.9).

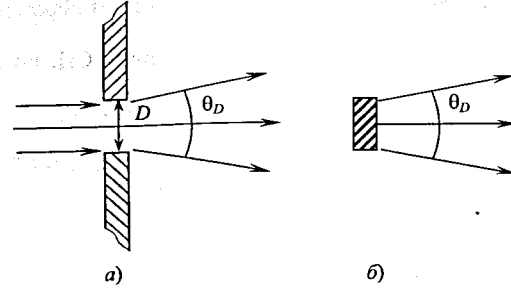


Рис. 2.9. Дифракция параллельного пучка света (электромагнитного излучения) на щели ширины  $D$  (а) и минимальный угловой раствор светового потока, испускаемого светящейся полосой того же размера (б)

Поэтому с уменьшением размера источника  $D$  его "эмиттанс" не может быть меньше

$$\varepsilon \geq \varepsilon_D = \frac{D}{2} \cdot \frac{\lambda}{D} = \frac{\lambda}{4}.$$

Совершенно аналогично для сгустка частиц минимальные значения эмиттансов определяются *дифракционным пределом*

$$\varepsilon_x \sim \varepsilon_y \geq \varepsilon_D = a_{x,y} \cdot \frac{\lambda}{2a_{x,y}} = \frac{\lambda}{4}, \quad (2.40)$$

$$B_\lambda \leq \frac{d^2 N(\lambda)}{dt \cdot d\lambda} \cdot \frac{16\Delta\lambda}{\lambda^2}.$$

Теперь выясним, какими должны быть размеры сгустка, чтобы он излучал когерентно. Потребуем, чтобы разность хода лучей до точки наблюдения от крайних точек сгустка, форму которого можно считать эллипсоидальной с размерами  $a_x \cdot a_y \cdot a_z$  (рис. 2.10), не превышала  $\lambda/2$ . Как следует из рисунка, разность хода лучей составляет для точек испускания излучения

$$\begin{aligned} 1, 3 &\Rightarrow \Delta_{13} = \Delta(11') = 2a_z \cos \alpha \approx \ell_{\parallel}, \\ 2, 4 &\Rightarrow \Delta_{24} = \Delta(44') = 2a_y \sin \alpha, \end{aligned} \quad (2.41)$$

и, аналогично, для размера  $a_x \rightarrow 2a_x \cdot \alpha_x$ , где  $\alpha_{x,y} \leq \Delta\theta_{x,y}$  – угловой размер излучения, равный, по порядку величины, угловому разбросу пучка. Тогда, учитывая равенства (2.38), приходим к *условиям когерентности излучения сгустка частиц в накопителе*:

$$\ell_{\parallel} \sim \varepsilon_x \sim \varepsilon_y < \frac{\lambda}{4}, \quad (2.42)$$

где  $\ell_{\parallel} \equiv 2a_x$  – продольный размер сгустка;  $\epsilon_x, \epsilon_y$  – его эмиттансы. Таким образом, эмиттанс пучка определяет не только яркость сгустка как источника СИ, но и когерентность излучения сгустка.

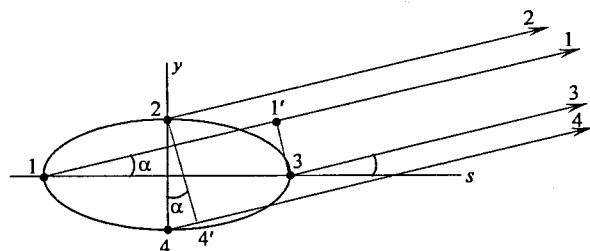


Рис. 2.10. Схема излучения сгустка

Ниже, в § 2.4, в табл. 2.1 приведены параметры современных источников СИ. Для источников 3-го поколения характерны очень малые значения эмиттанса – единицы нанометров. Поэтому такие источники в состоянии генерировать яркое когерентное излучение в широком диапазоне вплоть до мягкого рентгеновского:

$$\lambda_{X\text{-ray}} \sim 10 \text{ нм} = 100 \text{ \AA}, \quad \epsilon_{X\text{-ray}} \sim 100 \text{ эВ}.$$

Отметим, что потери энергии частиц на синхротронное излучение являются основным ограничением максимальной энергии электронов в синхротронах. По-видимому, "последним из могикан" электронных синхротронов сверхвысокой энергии был электрон-позитронный коллайдер LEP (Large Electron-Positron Collider) в ЦЕРН, в котором электроны и позитроны ускорялись до энергии 110 ГэВ. Периметр коллайдера составлял 26,658883 км, а радиус кривизны траектории  $\rho_L = 3,0962$  км (что в 1, 37 раз меньше среднего радиуса из-за наличия прямолинейных промежутков). Потери электрона за оборот (2.36) составляли  $\Delta\epsilon_T \approx 4,2$  ГэВ (!).

Здесь уместно привести полезную формулу мощности потерь энергии пучка  $N$  электронов в синхротроне (см. (2.35))

$$P = \frac{\Delta\epsilon_T}{T} N = \frac{4\pi}{3} \beta^3 \gamma^4 \frac{eI}{\rho_L}, \quad (2.43)$$

где  $T$  – период обращения электронов,  $I$  – средний ток пучка. В пределе  $\gamma \gg 1$  этой формуле можно придать вид, удобный для оценок:

$$P_{[\text{кВт}]} = 90 \frac{\epsilon_{[\text{ГэВ}]^4} \cdot I_{[\text{Ампер}]}}{(\rho_L)_{[\text{м}]}}. \quad (2.44)$$

Подчеркнем, что эта формула справедлива для электронов (позитронов). Так, в приведенном выше примере коллайдера LEP при типичном токе пучка электронов (позитронов) 3 мА потери на СИ были на уровне 1 МВт на пучок, что и было одним из главных ограничений энергии частиц. Для сравнения в электрон-позитронном коллайдере ВЭПП-4М<sup>\*)</sup> Института ядерной физики им. Г.И. Будкера (г. Новосибирск) при энергии частиц 5 ГэВ и токе в каждом из двух пучков 30 мА потери на СИ ( $\rho_L = 45,5$  м) составляют примерно 37 кВт. На смену коллайдеру LEP пришел протон-протонный коллайдер LHC (Large Hadron Collider), занявший тот же 27-километровый туннель. В нем энергия протонов достигает 7 ТэВ ( $10^{12}$  эВ), а средний ток каждого из пучков  $I = 0,58$  А. Для протонов в формуле (2.43) появляется множитель  $(m_e/m_p)^4 \approx 8,8 \cdot 10^{-14}$ . Несмотря на ослабление мощности СИ на 13 порядков для протонов, увеличение энергии частиц и тока делают потери на СИ ощутимыми и в LHC:

$$\Delta\epsilon_T \approx 6,6 \text{ кэВ}, \quad P \approx 3,6 \text{ кВт}.$$

### § 2.3. Излучение электрона в пространственно-периодическом магнитном поле. Ондюляторы и виглеры

Для усиления интенсивности СИ и управления его спектром в накопители электронов вводят устройства с поперечным к траектории электронов и периодически изменяющимся вдоль нее магнитным полем. Такие устройства в отечественной литературе получили название "змейки", а в зарубежной, в

<sup>\*)</sup> ВЭПП – встречные электрон-позитронные пучки



зависимости от характера излучения из них, – вигглеры (wiggle – извиваться, англ.) и ондуляторы (undulate – волнообразный, англ.). Их общее название "Insertion devices" ("встроенные приборы" – англ.), или, правильнее, *встроенные излучатели*. Ондулятор был предложен В. Л. Гинзбургом в 1947 г. как устройство генерации когерентного излучения, но построен на накопителе-синхротроне только в начале 70-х гг. Змейки делают как на основе постоянных магнитов (рис. 2.11), так и электромагнитные. Начиная с 90-х г. прошлого века, получили распространение сверхпроводящие электромагниты с полем до 10 Тл (см. ниже).

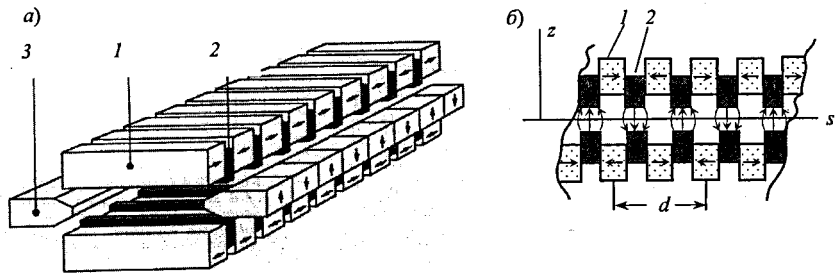


Рис. 2.11. Схема змейки на постоянных магнитах: 1 – пластинки постоянных магнитов NdFeB (неодим-феррум-бор); 2 – полюса из мягкой стали; 3 – дополнительные полюса из стали для коррекции магнитного поля, стрелки показывают направления знакопеременной намагниченности в магните и силовые линии поля в межполюсном зазоре; а – общий вид, б – сечение в вертикальной плоскости

Магнитное поле в змейке (рис. 2.12) в первом приближении можно аппроксимировать функцией

$$B_y(s) = B_0 \sin k_d s, \quad k_d = \frac{2\pi}{d}, \quad (2.45)$$

где  $B_0$  – амплитуда поля,  $d$  – период структуры змейки, равный удвоенному расстоянию между серединами соседних полюсов. В таком поле частица совершает синусоидальные колебания в плоскости  $(x, s)$ , что следует из уравнений ее движения по  $x$  и  $s$ :

$$\gamma m \ddot{x} = \frac{e}{c} \dot{s} B_z(s), \quad (2.46)$$

$$\dot{s} \approx \text{const} \equiv \beta c, \quad \beta \equiv v_0/c.$$

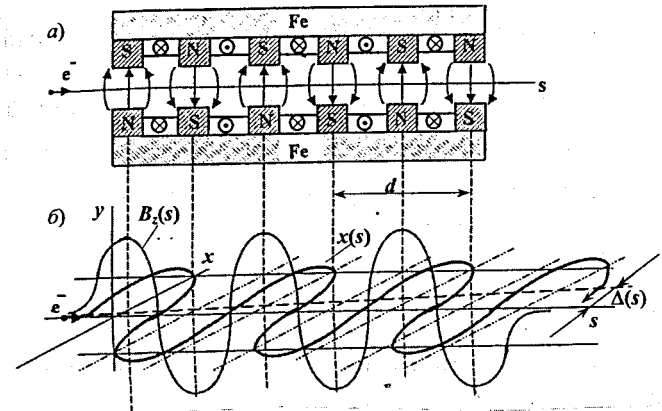


Рис. 2.12. Схема змейки на электромагнитах (а), распределение поля в средней плоскости змейки  $B_z(s)$  и траектория частицы  $x(s)$  (б). N, S – "северный" и "южный" стальные полюса электромагнита;  $\otimes \ominus$  – направление тока в обмотках; Fe – стальное ярмо электромагнита. Пунктир – смещение траектории, пропорциональное  $s$  (слагаемое  $\Delta(s)$  в формуле  $x(s)$  (2.49))

Отсюда

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{1}{\rho_L} \sin k_d s, \quad \rho_L \equiv \frac{\beta \gamma m c^2}{e B_0}. \quad (2.47)$$

Здесь, как нетрудно видеть, изменение скорости частицы вдоль оси  $s$ , связанное с колебаниями по  $x$  и равно<sup>\*)</sup>

$$\Delta \dot{s} = v_0 - \sqrt{v_0^2 - (\dot{x})^2} \approx \frac{(\dot{x})^2}{2v_0} \ll v_0, \quad (2.48)$$

а также  $\dot{x}$  считаются пренебрежимо малыми. Интегрируя уравнение (2.47) дважды, получим

$$x'(s) = x'(0) + \frac{1}{k_d \rho_L} (1 - \cos k_d s), \quad ( )' \equiv \frac{d}{ds}, \quad (2.49)$$

$$x(s) = x(0) + \Delta(s) - \frac{1}{k_d^2 \rho_L} \sin k_d s, \quad \Delta(s) = \left( x'(0) + \frac{1}{k_d^2 \rho_L} \right) \cdot s.$$

<sup>\*)</sup> Напомним, что при движении частицы в постоянном магнитном поле ее полная энергия и, соответственно, полная скорость ( $v_0$ ) не изменяются:  $\gamma = \text{const}$ ,  $v_0 = \text{const}$ .

Здесь  $x'(0) \equiv \left( \frac{dx}{ds} \right)_{s=\Delta} \leq \Delta \theta_x$  – угол между проекцией вектора скорости частицы на плоскость  $(x, s)$  и осью  $s$  при входе в змейку. Из этих выражений видно, что характер траекторий частицы в змейке существенно зависит от величины, которая имеет смысл амплитуды колебаний угла траектории частицы с осью змейки ("угловая амплитуда"):

$$\alpha_0 = \frac{1}{k_d \rho_L} = \frac{d}{2\pi \rho_L}. \quad (2.50)$$

Линейное с координатой смещение  $\Delta(s)$  траектории частицы в змейке не сказывается на параметрах излучения (это слагаемое не дает вклада в ускорение частицы,  $\ddot{\Delta}(s) = 0$ ) до тех пор, пока оно не выведет частицы за пределы рабочей области магнитного поля змейки. Но столь большие смещения недопустимы при нормальной работе накопителя – источника СИ. Период изменения поля  $d$  и длины змейки  $L$  подбираются так, чтобы на выходе змейки поперечная скорость частицы (угол  $x'(L)$ ) и смещение  $\Delta(s)$  внутри змейки равнялись нулю. Первое достигается выбором  $d$  и  $L$  из условия (см. (2.49))

$$L = nd, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.51)$$

а для "зануления" смещения  $\Delta(L)$  вводятся дополнительные магниты – корректоры орбиты (см. (2.52) и задачу 2.5 ниже), которые, например, задают всем частицам на входе в змейку угол (см. (2.49))

$$x'(0) = -\alpha_0. \quad (2.52)$$

Угол  $x'(L) = -\alpha_0$  на выходе змейки в этом случае компенсируют дополнительным корректором (см. также условие (2.70) и текст ниже).

Внутри змейки частица-"прожектор", двигаясь вдоль траектории (2.49), излучает в конусе с углом раствора  $1/\gamma$ , а ось конуса совершает периодические колебания в пространстве с угловой амплитудой  $\alpha_0$ . Отношение этих двух угловых размеров называют *параметром ондуляторности*

$$K = \alpha_0 \gamma = \frac{eB_0 d}{2\pi m c^2}, \quad \beta \approx 1. \quad (2.53)$$

$$K = (B_0)_{[Tn]} \cdot d_{[cm]}.$$

Излучение из змейки приходит в точку наблюдения, расположенную под углом  $\theta$  к оси  $s$  (рис. 2.12) в виде периодических всплесков длительности (см. (2.9))

$$\Delta t_p \sim \frac{\rho_L(s)}{2\gamma^3 c}, \quad (2.54)$$

где теперь  $\rho_L(s)$  – мгновенное значение радиуса кривизны траектории частицы в точке излучения. Эти всплески следуют с периодом  $T$ , который, в отличие от частицы в синхротроне, значительно короче периода колебаний частицы в поле змейки

$$T_B \approx \frac{d}{(\dot{s})^T}, \quad (2.55)$$

что связано все с тем же эффектом "погони" частицы за своим излучением (эффект Доплера). Как и при выводе формул (2.9), запишем для расстояния между двумя соседними всплесками на направлении  $\theta$  (рис. 2.13)

$$\Delta_p = \Delta_{14} - \Delta_{13} = c \cdot T_B - d \cos \theta. \quad (2.56)$$

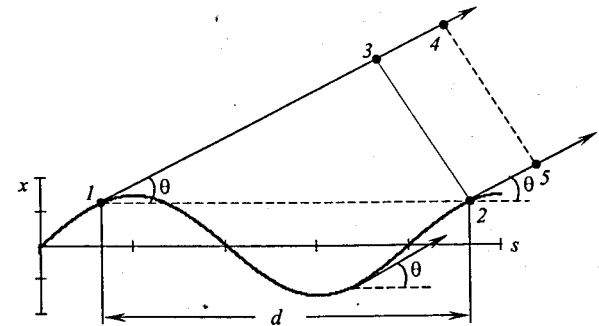


Рис. 2.13. Участок траектории электрона в ондуляторе и излучение из двух синфазных ее точек: 1 – точка излучения в момент  $t_0$ ; 2, 3 – положение фронта излучения из точки 2 в момент  $t_0 + T_B$ ; 4–5 – для фронта излучения из точки 1

Учтем также, что в выражении для  $T_B$  (2.55) стоит среднее по времени значение  $s$ -компоненты скорости частицы (см. (2.48))

$$(\dot{s})^T = \left( \sqrt{v_0^2 - (\dot{x})^2} \right)^T \approx v_0 - \frac{1}{2v_0} (\dot{x})^2 T.$$

Значение  $\overline{(\dot{x})^2}^T$  с хорошей точностью (хотя и не вполне строго) найдем, воспользовавшись формулой для  $x'(s)$  в (2.49) и считая выполненным условие коррекции (2.52). Тогда

$$x'(s) = -\alpha_0 \cos k_d s,$$

$$\overline{(\dot{x})^2}^T = v_0^2 \overline{(x'(s))^2}^d = \frac{\alpha_0^2 v_0^2}{2}, \quad \overline{(\dot{s})}^T \approx v_0 \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{4}\right).$$

Подставив полученное значение  $\overline{(\dot{s})}^T$  в (2.55), имеем

$$T_B \approx \frac{d}{v_0} \left(1 + \frac{\alpha_0^2}{4}\right). \quad (2.57)$$

Подставив это значение в (2.56), найдем период следования всплесков излучения ( $\beta \approx 1$ )

$$T(\theta) = \frac{\Delta_p}{c} \approx T_B - \frac{d}{c} \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) = \frac{d}{v_0} \left(1 + \frac{\alpha_0^2}{4} - \beta \cdot \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right) \approx \frac{d}{v_0} \left(\frac{1}{2\gamma^2} + \frac{\alpha_0^2}{4} + \frac{\theta^2}{2}\right),$$

или, окончательно ( $v_0 \approx c$ ),

$$T(\theta) \approx \frac{d}{2\gamma^2 c} \left(1 + \frac{K^2}{2} + \gamma^2 \theta^2\right). \quad (2.58)$$

У змеек различают два режима – ондуляторный и виглерный.

1) *Ондуляторный режим:*

$$\Delta t_p \sim T(\theta). \quad (2.59)$$

Ясно, что в этом случае в точку наблюдения под углом  $\theta$  приходят  $2n$  всплесков излучения, где  $n$  – число периодов змейки, и они следуют друг за другом, почти накладываясь один на другой (точнее, "соприкасаясь"). Таким образом, излучение из змейки в ондуляторном режиме приближается по форме к гармонической функции  $A \cdot (1 - \cos 2\pi t/T(\theta))$ . Условие (2.59) выполняется, если  $K \ll 1$ ,  $\theta \sim 1/\gamma \ll 1$ ; и подстановка  $\Delta t_p$  (2.54) и  $T(\theta) \approx d/2\gamma^2 c$  в условие (2.59) дает

$$\rho_L \sim \gamma d. \quad (2.60)$$

При этом параметр ондуляторности имеет значение

$$K \sim \frac{1}{2\pi}.$$

В ондуляторном режиме период следования импульсов излучения в точке  $P$  и определяет длину волны излучения

$$\lambda_{\text{undulator}} = cT(\theta) \approx \frac{d}{2\gamma^2}. \quad (2.61)$$

Как видим, длина волны в  $2\gamma^2$  раз короче периода змейки-ондулятора. Так, при энергии электронов 500 МэВ, периоде змейки  $d = 4$  см и амплитуде магнитного поля 0,5 Тл длина волны излучения под углом  $\theta = 10$  мрад равна 2,06 мкм.

*Монохроматичность ондуляторного излучения* определяется числом периодов магнитной структуры ондулятора:

$$N_{\text{undulator}} = \frac{L}{d}.$$

Как следует из решения задачи 2.2, ширина главных максимумов  $\delta\omega_{\text{max}}$  (2.24) одинакова, а относительная ширина соответствующих им спектральных линий равна

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\delta\omega_{\text{max}}}{\omega_T} \geq \frac{1}{N_{\text{undulator}}}. \quad (2.62)$$

Типичный размер ондулятора  $L \sim 5$  м, что при  $d = 4$  см дает

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = 8 \cdot 10^{-3}.$$

*Ширина спектра* (число спектральных линий, или *гармоник*) ондуляторного излучения также можно найти, воспользовавшись решением задачи 2.2. Амплитуда гармоник (рис. 2.6, б) спадает с ростом номера гармоник как (см. (2.21))

$$A_k = A_{\omega}^{\text{max}} \cdot e^{-\omega^2 t^2/2}, \quad \omega = k\omega_0. \quad (2.63)$$

В случае ондулятора со слабым полем ( $K \ll 1$ ), когда

$$\tau \equiv \Delta t_p \sim T(0) = \frac{2\pi}{\omega_0},$$

это дает

$$A_k \approx A_{\omega}^{\text{max}} \cdot e^{-2\pi^2 k^2},$$

и уже вторая гармоника ( $k=2$ ) имеет амплитуду спектральной линии, которая исчезающе мала ( $\sim 10^{-24}$ ) по сравнению с амплитудой первой гармоники. Картина существенно изменяется с ростом поля, когда  $\Delta t_p$  падает, а  $K$  растет, так что осуществляется режим

$$\Delta t_p \ll T(0).$$

В этом случае амплитуда второй гармоники становится сравнимой с амплитудой первой, что позволяет эффективно использовать излучение ондулятора на вдвое меньшей длине волны.

**Задача 2.5.** Получить условие генерации 2-й гармоники ондуляторного излучения.

Из условия (см. (2.63))

$$e^{-\omega^2 \tau^2 / 2} \geq 0,5, \text{ или } \omega \tau \leq 1,$$

подставив сюда  $\tau = \Delta t_p$  (2.54) и  $\omega = k\omega_0 = k \cdot \frac{2\pi}{T(0)}$ , найдем для  $K \geq 1$  и второй гармоники ( $k=2$ )

$$B_0 \geq \frac{4\pi}{d} \cdot \frac{mc^2}{e} \approx \frac{2,14}{d_{[\text{см}]}} \text{ Гл.} \quad (2.64)$$

Дифракционный предел угловой расходимости ондуляторного излучения можно оценить, рассмотрев дифракцию излучения на выходной апертуре ондулятора (рис. 2.14). В отличие от схемы дифракции, представленной на рис. 2.8, теперь это — дифракция Френеля излучения нитевидного источника длины  $L$  на "мысленной" апертуре, в качестве которой естественно принять размер 1-й зоны Френеля на выходе ондулятора для излучения точечного источника, расположенного на его входе (рис. 2.14):

$$R_1 \sim \sqrt{\lambda \cdot L}.$$

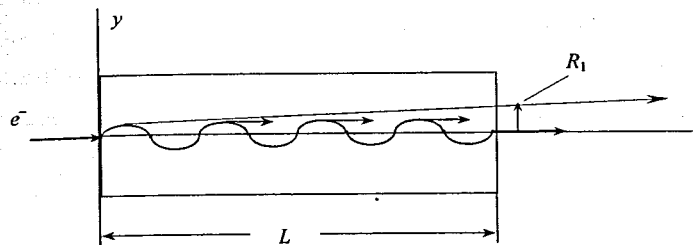


Рис. 2.14. Схема дифракционного расхождения потока излучения из ондулятора

Отсюда угловой растрор излучения, определяемый дифракцией, есть

$$\theta_D \sim \frac{R_1}{L} \sim \sqrt{\frac{\lambda}{L}}, \quad (2.65)$$

а поперечный размер источника излучения ондулятора равен

$$\Delta y_D \sim L \cdot \theta_D = R_1 \sim \sqrt{L\lambda}. \quad (2.66)$$

Подставляя в (2.37)  $S = 2\Delta y_D \cdot 2\Delta x_D \sim 4L\lambda$  и  $\Omega \sim 2\theta_D^{(y)} \cdot 2\theta_D^{(x)} \sim \frac{4\lambda}{L}$ , приходим к выражению для дифракционного предела яркости ондулятора, совпадающему с (2.40).

2) Виглерный режим:

$$\Delta t_p \ll T(\theta). \quad (2.67)$$

Теперь длительность всплесков излучения много меньше периода их следования. Такой режим, как видно из сравнения (2.54) и (2.58), осуществляется при

$$\rho_L \ll \frac{\gamma d}{2} \left( 1 + \frac{K^2}{2} + \gamma^2 \theta^2 \right),$$

или (см. (2.53) и (2.50)) это условие выполняется при

$$K \gg 1 \quad (K \geq 2). \quad (2.68)$$

В виглерном режиме всплески излучения в точке наблюдения независимы (не коррелируют), точно так же, как и импульсы СИ частицы в накопителе. Этот

режим используется, когда не требуется высокая монохроматичность излучения, но нужна его высокая интенсивность.

Виглеры бывают двух типов. *Многополюсные виглеры*, большой длины, аналогичны по своей конструкции ондуляторам, но имеют, согласно (2.68) и (2.53), гораздо большее значение магнитного поля (сравни (2.64)),

$$B_0 > \frac{2\pi mc^2}{ed} = \frac{1,07}{d_{[cm]}} \text{ Тл.} \quad (2.69)$$

Однополосные виглеры, или *шифтеры* (shift – сдвиг, англ., имеется в виду сдвиг спектра излучения), проще по конструкции, но требуют для достижения той же мощности излучения (при заданной энергии) более высоких значений магнитного поля из-за их меньшей длины (см. формулу (2.74) ниже). По существу, это просто сильнополевой магнит. Для компенсации его влияния на движение частиц в накопителе шифтер снабжают двумя дополнительными полюсами с меньшим полем, но большей протяженности вдоль орбиты (рис. 2.15), выбирая значения поля так, чтобы интеграл от поля вдоль траектории равнялся нулю:

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_y(s) ds = B_0^{\max} L_0 + 2B_{\text{comp}}^{\max} \cdot L_{\text{comp}} = 0. \quad (2.70)$$

Здесь  $B^{\max}$  – максимальное значение поля на центральном ( $B_0$ ) и компенсирующих ( $B_{\text{comp}}$ ) участках шифтера;  $L_0, L_{\text{comp}}$  – эффективные длины участков поля:

$$L = \frac{1}{B_{\max}} \int B(s) ds.$$

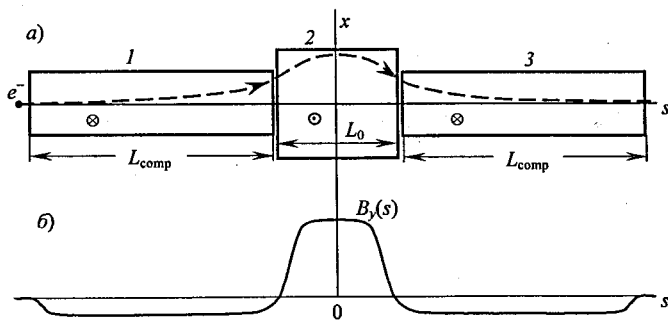


Рис. 2.15. Схема шифтера и траектория позитрона ( $e > 0!$ ) в нем (а), распределение магнитного поля (б). 2 – главный полюс (поле  $B_0$ ); 1, 3 – компенсирующие дипольные магниты

Условие (2.70) является необходимым, но не достаточным для полной компенсации возмущения траектории частиц полем шифтера. Оно "зануляет" только изменение поперечной компоненты импульса частицы при прохождении через шифтер. Но, аналогично тому, как это происходит в ондуляторе и "длинном" виглере, частица, вообще говоря, смещается в поперечном направлении (см. (2.49)). Действительно, из уравнений (2.46) находим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx(0)}{dt} + \frac{e}{\gamma mc} \int_0^t B_y(s) \cdot s dt = \frac{dx(0)}{dt} + \frac{e}{\gamma mc} \int_0^\eta B_y(\xi) d\xi, \quad (2.71)$$

где  $\xi$  – переменная интегрирования. Отсюда, потребовав  $\dot{x}(s \rightarrow \infty) = 0$ , приходим к условию (2.70). Смещение частицы в шифтере, очевидно, равно

$$x(s) = \dot{x}(0)L + \frac{e}{\gamma mc} \int_0^t dt \int_0^{s(t)} B_y(\xi) d\xi \approx \dot{x}(0)L + \frac{e}{\beta \gamma mc} \int_{-\infty}^s d\eta \int_{-\infty}^\eta B_y(\xi) d\xi, \quad (2.72)$$

$\eta$  – также переменная интегрирования (здесь учтено, что  $B(\pm\infty) = 0$ ). Таким образом, появилось требование равенства нулю *второго интеграла* от поля вдоль траектории в шифтере. Это требование автоматически выполняется в двух случаях:

а)  $B(s) = B(-s)$  – симметрия поля шифтера относительно середины полюса 2 (точка  $s = 0$ , рис. 2.15, а),

б)  $\int_{-\infty}^0 B(s) ds = \int_0^{\infty} B(s) ds = 0.$

**Задача 2.6.** Показать, что при выполнении одного из двух условий "а" или "б", координаты частицы на выходе шифтера ( $s = \pm\infty$ ) равна ее координате на входе ( $s = -\infty$ ).

Координата частоты на выходе шифтера есть  $x(s = \infty)$ . Разобьем интеграл в (2.72) на две части:

$$\text{Int} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^\eta B_y(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^0 d\eta \int_{-\infty}^\eta B_y(\xi) d\xi + \int_0^{\infty} d\eta \int_0^\eta B(\xi) d\xi.$$

В первом слагаемом проведем замену  $\eta \rightarrow -\eta$  и "перевернем" пределы. Получим

$$\text{Int} = \int_0^{\infty} d\eta \cdot \left( \int_{\eta}^{\infty} B(\xi) d\xi + \int_0^\eta B(\xi) d\xi \right) = \int_0^{\infty} d\eta \int_0^{\infty} B(\xi) d\xi.$$

Отсюда видно, что  $\text{Int} = 0$  при условии "б". Если же выполнено условие "а" и, кроме того, равен нулю первый интеграл поля, то условие "б" выполняется автоматически. Действительно,

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} B(s) ds = \int_{-\infty}^0 B(s) ds + \int_0^{\infty} B(s) ds = -\int_{\infty}^0 B(-s) ds + \int_0^{\infty} B(s) ds = 2 \int_0^{\infty} B(s) ds = 2 \int_{-\infty}^0 B(s) ds.$$

Таким образом, условие "а" приводит к условию "б" и, соответственно, к равенству  $\text{Int} = 0$ .

В современных вилгерах на сверхпроводящих магнитах поле достигает  $B_0 = 10$  Тл. Один из вариантов вилгерных излучателей – короткие дипольные магниты с полем такого уровня, которые встраиваются в фокусирующую систему накопителя, а роль компенсирующих "слабополевых" магнитов играют остальные элементы этой структуры. Подобный вариант накопителя с четырьмя (симметрично расположенными по орбите) сильнополевыми диполями был предложен и осуществлен недавно в Институте ядерной физики им. Г.И. Будкера (Новосибирск) для накопителя BESSY-II в Берлине (см. § 2.4).

*Поляризация* излучения частицы в периодическом поле также существенно зависит от режима работы встроенного излучателя. В *ондуляторах плоского типа*, рассмотренных выше (рис. 2.11), поляризация *линейная*, и вектор  $\vec{E}_d$  параллелен вектору ускорения, т. е. лежит в плоскости  $(x, s)$  и перпендикулярен вектору  $\vec{B}_y$  (сравни рис. 1.7). Существуют *спиральные ондуляторы* (рис. 2.16), в которых магнитное поле изменяет свое направление с координатой  $s$  по закону

$$B_x(s) = B_0 \cos 2\pi \frac{s}{d}, \quad B_y(s) = B_0 \sin 2\pi \frac{s}{d}, \quad |\vec{B}| = B_0 = \text{const.} \quad (2.73)$$

Нетрудно понять, что излучение из таких ондуляторов будет *циркулярно поляризовано*.

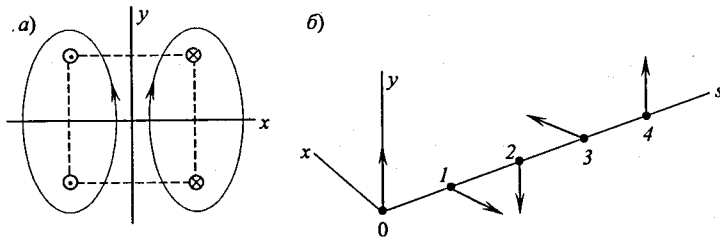


Рис. 2.16. Схема простейшего спирального ондулятора: четыре проводника, формирующих дипольное поле и свернутые в спираль с шагом  $d$  вдоль оси  $x$ . *a* – поперечное сечение спирального ондулятора плоскостью  $s = 0$ , показаны силовые линии поля; *б* – изменение вектора  $\vec{B}$  с координатой  $s$ , расстояния (01), (23), (34), ... равны четверти шага (периода) спирали

*Потери энергии* электрона в змейке не зависят от режима её работы и определяются все той же формулой (28), которая для ультрарелятивистской частицы ( $\beta \approx 1$ ) в пространственно-периодическом магнитном поле может быть представлена в виде

$$\Delta \varepsilon_B = \frac{2}{3} \gamma_{cl}^2 \int_0^{L_0} B^2(s) ds = \frac{2\gamma_{cl}^2}{3} \langle B^2(s) \rangle \cdot L_0,$$

где  $r_{cl}$  – классический радиус электрона;  $L_0$  – длина змейки;  $\langle B^2(s) \rangle$  – среднее по длине магнитное поле, которое в случае плоского ондулятора (формула (2.45)) равно

$$\langle B^2(s) \rangle_{\text{undulator}} = \frac{B_0^2}{2}, \quad (\Delta \varepsilon_B)_{\text{undulator}} = \frac{\gamma_{cl}^2 B_0^2 L_0}{3}. \quad (2.74)$$

**Задача 2.7.** Оценить значение потерь энергии электрона с энергией 8 ГэВ при прохождении шифтера с максимальным полем 10 Тл и длинами магнитов  $L_0 = 1$  м,  $L_{\text{comp}} = 2,5$  м (рис. 2.14).

Из условия (2.70) находим

$$B_{\text{comp}}^{\text{max}} = -\frac{B_0^{\text{max}}}{2} \cdot \frac{L_0}{L_{\text{comp}}} = -2 \text{ Тл}.$$

Тогда

$$\Delta \varepsilon_B \approx \frac{2}{3} \gamma_{cl}^2 r_{cl}^2 \left( L_0 + \frac{L_0^2}{2L_{\text{comp}}} \right) \cdot (B_0^{\text{max}})^2 \approx 10 \text{ МэВ}.$$

Здесь использованы равенства

$$r_{cl}^2 B^2 = e^2 \left( \frac{eB}{mc^2} \right)^2 = e \cdot 4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 300 \cdot \left( \frac{300 \cdot B_{[\text{Гл}]}^2}{0,51 \cdot 10^6} \right)^2 = 4,983 \cdot 10^{-6} \cdot B_{[\text{Тл}]}^2 \text{ эВ/см}.$$

**Задача 2.8.** Оценить энергию фотона, излучаемого электроном в вилгере задачи 2.7.

Воспользовавшись формулой (2.30), найдем

$$\varepsilon_{\text{photon}} \sim \hbar \omega_0 = \hbar \gamma^2 \frac{eB}{mc} = 6,6 \cdot 10^{-16} \cdot (1,566 \cdot 10^4)^2 \cdot \frac{10^5 \cdot 300 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{0,5 \cdot 10^6} \approx 290 \text{ кэВ}.$$

## § 2.4. Синхротроны – источники СИ. Применение СИ

К 2007 г. в мире действовало более 100 синхротронов – источников СИ и еще несколько десятков строилось. Такие источники имеют все развитые страны – США, Канада, Германия, Великобритания, Франция, Италия, Швейцария, Япония, Корея, Тайвань – и некоторые так называемые "развивающиеся" – Китай, Индия, Сингапур, Бразилия. В России есть только два исследовательских центра, где работают современные источники СИ – Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера Сибирского отделения РАН в Новосибирске и РНЦ "Курчатовский институт" в Москве. Строится еще один синхротрон в Зеленограде под Москвой. В таблице 2.1 наиболее значительные из них представлены в порядке убывания энергии электронов. Начиная с 1960-х гг. источники СИ получают все большее распространение, и растет их яркость. Принято различать четыре поколения этих источников (рис. 2.17). Каждое следующее поколение приводило к повышению яркости излучения как минимум на порядок. Это достигается несколькими способами:

- повышение энергии электронов (см. (2.34), (2.35), (2.74));
- повышение числа частиц (тока пучка) (см. § 2.2);
- уменьшение эмиттанса пучка (см. (2.39));
- увеличение магнитного поля и протяженности змеек (см. (2.74)).

Все указанные параметры в синхротронах взаимосвязаны, и достижение максимальной яркости – дело профессионального искусства физиков и инженеров, строящих накопитель – источник СИ.

Для источников СИ третьего поколения приняты критерии: эмиттанс пучка  $\leq 10$  нм и яркость  $\geq 3 \cdot 10^{16}$  стандартных единиц. Кроме того, источники 3-го поколения оснащены встроенными излучателями – виглерами и ондуляторами. Как уже сказано, виглеры позволяют генерировать жесткое рентгеновское излучение (благодаря высокому уровню магнитного поля), ондуляторы – когерентное, но сравнительно мягкое излучение в рентгеновском и УФ-диапазонах.

Источники второго поколения имеют менее жесткую фокусирующую систему, не позволяющую сжать электронный пучок до требуемых малых

размеров и, соответственно, получить высокую яркость излучателя, которым является сгусток электронов.

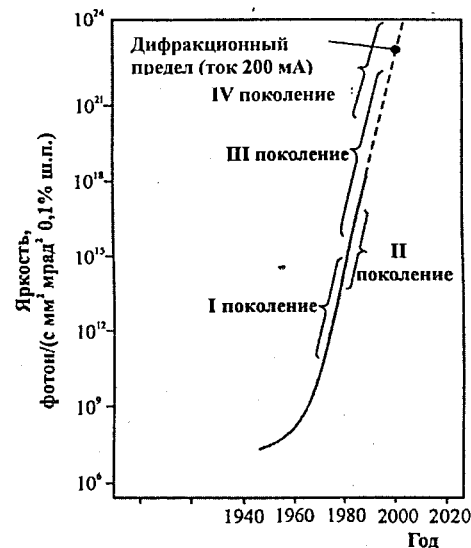


Рис. 2.17. Рост яркости источников синхротронного излучения по мере их совершенствования

Строгого (принятого) определения источников четвертого поколения нет. Чаще всего к ним относят лазеры на свободных электронах. Иногда к источникам СИ четвертого поколения причисляют самые мощные комплексы СИ – SPRing8 и ESRF, PETRA III, SOLEIL, DIAMOND (см. табл. 2.1 ниже).

Со второй половины 60-х гг. прошлого столетия, когда была осознана возможность использования электронных синхротронов в качестве ярких источников интенсивного и направленного электромагнитного излучения, началось активное применение СИ в экспериментальных исследованиях. Вскоре были поняты и достоинства СИ в технологических приложениях, что, в свою очередь, стимулировало развитие самих источников (о чем сказано выше – рис. 2.17, и табл. 2.1). Сегодня СИ стало одним из главных технологических "инструментов" в так называемых нанотехнологиях – направлении, появившемся с началом этого столетия. Своим названием эти технологии обязаны единице

Таблица 2.1. Наиболее современные источники синхротронного излучения

1	Источник (комплекс) СИ	Год ввода в действие	Энергия электронов, ГэВ	Периметр, м	Встроенные излучатели	Число каналов СИ	Эмиттанс эл. пучка, нм гор./верт.	Макс. ток пучка, мА	Время жизни пучка, ч	Яркость СИ, станд. ед.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
<b>Источники 3-го поколения</b>										
1	SPRing-8 или Nishi Harima (Коуто, Япония)	1997	8	1436	26 каналов СИ на ондуляторном излучении; 10 Тл виглер	20	3	100	100	$10^{18}-10^{20}$
2	APS – Advanced Photon Source (Аргоннская лаб., США)	2000	7	1104	17 ондуляторов, виглер	68	82	100	7,5	$> 1 \cdot 10^{13}$
3	Photon Factory КЕК (Цукуба, Япония)	1982	6,5 2,5	187	6 ондуляторов, 1 виглер	21	36	770	20	$3 \cdot 10^{13}-3 \cdot 10^{17}$
4	ESRF (Гренобль, Франция)	1990	6	300	67 ондуляторов, 6 виглеров	47 (42)	4/0,03	200		$4 \cdot 10^{19}-3,8 \cdot 10^{20}$
5	NLSL – National Synch. Light Source (Брукхейвен. лаб., США) X-Ray Ring VUV Ring	1982 1990	2,8 0,8		2 ондулятора, 2 виглера	71	20	500 850	– 5	$1 \cdot 10^{14}-2 \cdot 10^{18}$
6	PLS – Pohang Light Source (Поханг, Ю. Корея)	1995	2,5	280,5	Виглер, ондуляторы	12	12	400	15	$2 \cdot 10^{12}-1,5 \cdot 10^{17}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
7	ELETTRA (Триест, Италия)	1999	2,4 2,0	259,2	10 ондуляторов, 3 виглера	25 (21)	8,3	140 320	28 8,5	$8 \cdot 10^{12}-1 \cdot 10^{15}$
8	SLS – Swiss Light Source (Виллиген, Швейцария)	2001	2001	252	Ондуляторы	11	1	400	4	$3 \cdot 10^{15}-1,5 \cdot 10^{20}$
9	ALS – Advanced Light Source (Беркли, США)	~1995	1,9	196,8	7 ондуляторов, виглер	17	6	400 240	5 13	$1 \cdot 10^{13}-1 \cdot 10^{18}$
10	BESSY II (Берлин, Германия)	1997	1,9	240	14 ондуляторов	78	6	300	8	$2 \cdot 10^{14}-3 \cdot 10^{18}$
11	DIAMOND (Варингтон, Великобритания)	2007	3,0	561,6	До 22 ондуляторов	30	2,7	300	10	
12	SOLEIL (L'Orme des Merisiers, Франция)	2006	2,75	354,1	Ондуляторы	24	3,74	500	24	$8 \cdot 10^{15}-2 \cdot 10^{20}$
<b>Источники 2-го поколения</b>										
1	DORIS III (DESY, Гамбург, Германия)	~1988	4,45	289,2	3 ондулятора, 2 виглера	47 (42)	404	120		$3 \cdot 10^{13}$ (15) $1 \cdot 10^{15}$ (20) $1 \cdot 10^{16}$ (3)
2	SPEAR 3 (SLAC, Стэнфорд, США)	~1986	3	234,14	6 ондуляторов	3	17	500	18	(7,48)
3	ВЭПП-4М (Новосибирск, Россия)	~1986	3	450	–	3	200	100	~8	?



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	Сибирь-2 (Курчатовский институт, Россия)	1999	2,5	124,3	В проекте	34 (4)	90	300	5	$1 \cdot 10^{15}$ (7,1)
5	ANKA (Карлсруэ, Германия)	2000	2,5	110,4	В проекте	28 (10)	80	400	-	$3 \cdot 10^{13}$ (30)
6	ВЭПП-3 (Новосибирск, Россия)	1973	2,0	74,4	1 ондулятор, 1 вигглер	8	270	200	4	? (?) $2 \cdot 10^{13}$ (30) $2 \cdot 10^{18}$ (0,35)
7	SRS - Synch. Rad. Source (Дарсбери, Великобритания)	~1980	2,0	96	2 ондулятора, 3 вигглера	38	104	210	6,8 43	5 эВ - 70 кэВ
<b>Проекты</b>										
1	PETRA III (DESY, Гамбург, Германия)	2009	?	2300	Ондуляторы	13	?	?	?	X-ray source
2	INDUS II (Индор, Индия)	строится	2,0	?		?	?	?	?	?
3	ТНК (Зеленоград, Россия)	строится	2,5	124,3	В проекте	?	~90	300	5	$1 \cdot 10^{15}$
4	SESAME (Амман, Иордания)	строится	2,5	128,4		?	?	?	?	?

длины *нанометр* ( $1 \text{ нм} = 10^{-9} \text{ м}$ ), а приставка *нано* происходит от греч. *nanos* (карлик). Название означает, что такие технологии имеют дело с объектами, характерные размеры которых порядка 1–10 нм. Напомним, что размер атома равен примерно  $0,05 \cdot A^{1/3} \text{ нм}$ , где  $A$  – атомный вес. Так что объекты в нанотехнологиях имеют размеры всего лишь десятка – сотни атомов.

Перечень применений СИ очень обширен. Востребован диапазон длин волн СИ от инфракрасного до рентгеновского. Назовем лишь более распространенные сегодня области применения СИ и характеристики используемого в них излучения (табл. 2.2).

Напомним принятые в спектроскопии сокращения:

ИК – инфракрасное излучение,

УФ – ультрафиолетовое излучение,

ВУФ – "вакуумный ультрафиолет" (поглощается в воздухе).

Таблица 2.2. Примеры применения СИ

Область применения	Характеристики СИ
1. Ядерная физика	Жесткий рентген из вигглеров, $E_{\text{photon}} \geq 300 \text{ кэВ}$
2. Атомная физика	ИК + мягкий рентген
3. Физика конденсированных сред	Рентген
3.1. Физика поверхности	ВУФ
3.2. Кристаллография	
4. Химия	ИК + рентген
5. Биофизика	- " -
6. Медицина	Рентген
7. Технологии материалов	Рентген
8. Микроэлектроника	УФ, рентген
9. Микромеханика	- " -

## ГЛАВА III. ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В СРЕДЕ

До сих пор были рассмотрены два крайних случая:

- 1) частица излучает, натолкнувшись на препятствие – рентгеновское тормозное и характеристическое излучение,
- 2) частица движется в вакууме и излучает под действием внешнего магнитного поля.

В этой главе мы обсудим физику излучения частицы, движущейся в достаточно "прозрачной" для нее среде, так что частица не исчезает, а может проходить сквозь среду.

### § 3.1. Излучение Вавилова–Черенкова

Эффект Вавилова–Черенкова представляет собой излучение заряженной частицы, движущейся в среде с постоянной скоростью. История открытия эффекта является прекрасным и поучительным примером тщательного подхода к экспериментальному исследованию (см. [3]). В начале 30-х гг. С. И. Вавилов и его аспирант П. А. Черенков проводили эксперименты по изучению флюоресценции жидкостей под действием гамма-излучения радия. Черенков обратил внимание на необычность излучения, свойства которого существенно отличались от флюоресценции. Вавилов сделал предположение (1934 г.), что наблюдаемое видимое излучение является тормозным излучением электронов, выбиваемых гамма-лучами из атомов. И только три года спустя Тамм и Франк дали объяснение механизма излучения, обнаруженного в эксперименте. Излучали действительно электроны, выбитые гамма-лучами, но механизм излучения был совсем иным.

Схема эксперимента Вавилова–Черенкова представлена на рис. 3.1. Радиевый препарат помещался в одно из двух положений  $R_1$ ,  $R_2$  для изучения зависимости свечения от направления потока гамма-лучей. Стенки сосуда и

подставка поглощали альфа-частицы и электроны из источника, так что в сосуд проникало только гамма-излучение.

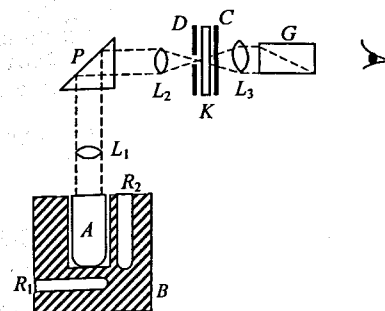


Рис. 3.1. Схема эксперимента Вавилова–Черенкова.  $A$  – платиновый сосуд с исследуемой жидкостью;  $B$  – деревянная подставка;  $R_1$ ,  $R_2$  – пазы для размещения радиевых источников;  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  – линзы;  $P$  – призма;  $D$  – диафрагма – элементы оптической системы наблюдения;  $K$  – оптический клин для измерения относительной яркости излучения;  $C$  – светофильтр;  $G$  – "призма Глана" для измерения поляризации излучения

Черенковское излучение, как его теперь принято называть, возникает, когда скорость частицы превосходит скорость света в среде, сквозь которую она движется. Отсюда следует, что в вакууме эффект Вавилова–Черенкова не наблюдается. Условие возникновения черенковского излучения нетрудно получить из простой "интерференционной" схемы (рис. 3.2). Предположим, что частица, движущаяся со скоростью  $\vec{v} = \text{const}$ , испускает (по какой-то причине) излучение в каждой точке своей траектории под углом  $\theta$  к вектору  $\vec{v}$ . Излучение

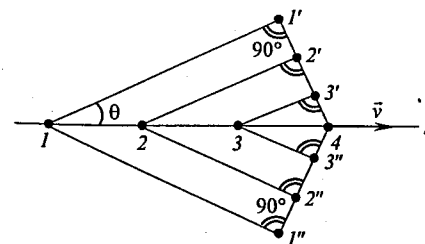


Рис. 3.2. Схема формирования фронта черенковского излучения

из каждой точки достигает плоскости, ортогональной лучу  $11'$  (рис. 3.2), одновременно, если отрезки  $(11')$ ,  $(22')$ ,  $(33')$  и т. д. удовлетворяют равенствам

$$(i'') = (i4) \cdot \cos \theta, \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (3.1)$$

Выразим значения отрезков через значения скорости света в среде  $c_n$  и частицы:

$$(ii') = c_n \cdot \Delta t_i, \quad (i4) = v \cdot \Delta t_i, \quad (3.2)$$

где  $\Delta t_i$  – время прохождения светом в среде и частицей соответствующих отрезков  $(ii')$  и  $(i4)$ ;  $c_n = c/n$  – скорость света в среде;  $n_e = \sqrt{\epsilon\mu}$  – показатель преломления среды;  $\epsilon$  и  $\mu$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. Подставив значения  $(ii')$  и  $(i4)$  в (3.1), найдем условие формирования черенковского излучения:

$$\cos \theta^* = \frac{1}{\beta n_e} \leq 1, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad (3.3)$$

где  $\theta^*$  – угол, под которым возникает излучение. Отсюда следует, что это излучение возникает только при достаточно большой скорости частицы в достаточно плотной среде:

$$\beta \geq \frac{1}{n_e}. \quad (3.4)$$

Для удаленного наблюдателя черенковское излучение представляется в виде кольца радужной окраски, центр которого лежит на прямой, совпадающей с вектором  $\vec{v}$ . Радужная окраска возникает из-за дисперсии показателя преломления: зависимость  $n(\lambda)$  приводит к тому, что угол  $\theta$  также становится функцией длины волны  $\lambda$ . Эта же зависимость определяет толщину конуса черенковского излучения, или, точнее, *угловой растров* конического слоя, в котором лежит излучение. Его найдем из условия (3.3):

$$\Delta \theta = \frac{1}{\beta n_e^2 \sin \theta^*} \frac{dn}{d\lambda} \cdot \Delta \lambda. \quad (3.5)$$

Длина формирования черенковского излучения, как и синхротронного, зависит от геометрии схемы наблюдения – от длины отрезка траектории, с которого излучение приходит в точку наблюдения. Правда, теперь эта длина зависит от величины спектрального интервала  $\Delta \lambda$ , в котором наблюдается излучение. При  $\Delta \theta \ll \theta^*$  и  $L_1 - L_2 \ll (L_1 + L_2)/2 \equiv L$ , из геометрии рис. 3.3 находим

$$\ell_{\text{form}} = L_1 \cos \theta_1 - L_2 \cos \theta_2 \approx L \sin \theta^* \cdot \Delta \theta,$$

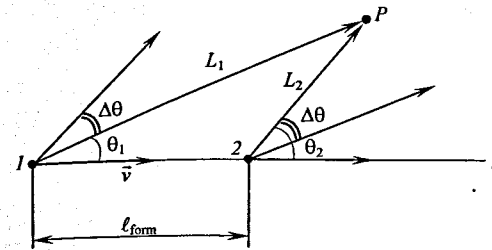


Рис. 3.3. Угловой растров  $\Delta \theta$  черенковского излучения и длина формирования  $\ell_{\text{form}}$

или, с учетом (3.5),

$$\ell_{\text{form}} = \frac{L}{\beta n_e^2} \frac{dn}{d\lambda} \cdot \Delta \lambda. \quad (3.6)$$

Длительность вспышки черенковского излучения является важной характеристикой. Воспользовавшись рис. 3.3, нетрудно получить ее значение:

$$\Delta t_p = \frac{L_1}{c_e} - \left( \frac{\ell_{\text{form}}}{v} + \frac{L_2}{c_e} \right), \quad c_e \equiv \frac{c}{n_e}.$$

Подставив сюда  $L_{1,2} = L \pm \Delta L$ ,  $\Delta L \ll L$  и  $\ell_{\text{form}}$  (3.6), имеем

$$\Delta t_p = \frac{2\Delta L}{c} n_e - \frac{L \sin \theta^*}{v} \Delta \theta. \quad (3.7)$$

Значение  $\Delta L$  найдем из треугольника 1P2:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1}, \quad \text{откуда} \quad 2 \frac{\Delta L}{L} \approx \text{ctg} \theta^* \cdot \Delta \theta,$$

т. к.  $\theta_2 = \theta_1 + \Delta \theta \equiv \theta^* + \Delta \theta$ ,  $\Delta \theta \ll \theta^*$ . Подставив значения  $2\Delta L$  и  $\Delta \theta$  (3.5) в (3.7) и учитывая значение  $\cos \theta^*$  (3.3), приходим к выражению

$$\Delta t_p = \frac{L}{c} \frac{1}{\beta^2 n_e^2 (\beta^2 n_e^2 - 1)} \frac{dn}{d\lambda} \cdot \Delta \lambda. \quad (3.8)$$

**Задача 3.1.** Оценить значения  $\theta^*$ , углового раствора, длин формирования и длительности вспышки черенковского излучения ультрарелятивистской частицы в воде при наблюдении излучения в видимом свете с расстояния  $L = 10$  м.

Для воды показатель преломления имеет следующие значения в видимой области спектра:

$$\lambda_1 = 0,4358 \text{ мкм}, \quad n_e(\lambda_1) = 1,3402,$$

$$\lambda_2 = 0,6563 \text{ мкм}, \quad n_e(\lambda_2) = 1,3310.$$

Для заданных значений  $n_e(\lambda)$ ,  $L$  и принимая  $\beta = 1$ , из (3.3), (3.5), (3.6) находим

$$\theta^* = 41^\circ 37' (0,725 \text{ рад}), \Delta\theta = 26,7' (7,8 \text{ мрад}), \ell_{\text{form}} = 5,1 \text{ см}, \Delta t \approx 0,22 \text{ нс.}$$

Теперь выясним, как же возникает черенковское излучение. Для этого найдем интенсивность этого излучения и силу торможения частицы в среде под действием излучения. Воспользуемся подходом, предложенным Л. Д. Ландау [3], который отличается от использованного в оригинальной работе И. Е. Тамма и И. М. Франка [3], и дадим несколько упрощенный вывод на основе этого подхода.

Запишем уравнения для потенциалов поля заряженной частицы, движущейся в среде с постоянной скоростью  $\vec{v}$ :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{A} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{dt^2} &= -\frac{4\pi}{c} \mu e \vec{v} \delta(\vec{r} - \vec{v}t), \\ \Delta \varphi - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{dt^2} &= -4\pi \frac{e}{\epsilon} \delta(\vec{r} - \vec{v}t), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где  $\delta(\vec{R})$  – трехмерная дельта-функция;  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки пространства, в которой "измеряются" потенциалы. Как мы видели, дисперсия показателя преломления  $n_e = n_e(\omega)$  играет существенную роль в черенковском излучении. Поэтому естественно произвести фурье-преобразование, т. е. представить потенциалы в виде суперпозиции плоских волн  $(\vec{k}, \omega)$ <sup>\*)</sup>

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \vec{A}(\vec{k}) \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} d^3k, \\ \varphi &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \varphi(\vec{k}) \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} d^3k. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Аналогично, трехмерная дельта-функция может быть представлена в виде

<sup>\*)</sup> Здесь мы используем "симметричную" форму записи интегралов Фурье и фурье-образов:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{ikx} dk, \quad f(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Такая форма в данном случае удобнее общепринятой

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{ikx} dk, \quad f(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx.$$

$$\delta(\vec{R}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \delta(\vec{k}) \cdot e^{i\vec{k}\vec{R}} d^3k, \quad (3.11)$$

где

$$\mathcal{E}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \delta(\vec{R}) \cdot e^{-i\vec{k}\vec{R}} dV = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}.$$

Подставляя в правую часть первого из соотношений (3.11)  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{v}t$ , получаем показатель экспоненты в виде  $(\vec{k}\vec{r} - \vec{k}\vec{v}t)$  и, сравнивая это выражение с показателями экспонент в (3.10), находим  $\omega = (\vec{k}, \vec{v}) = kv \cos \theta^*$ . С учетом значения угла  $\theta^*$  (3.3) имеем

$$\omega = \frac{kv}{\beta n_e}. \quad (3.12)$$

Подстановкой фурье-разложений (3.10), (3.11) в уравнения (3.9) находим

$$\vec{A}(\vec{k}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{c\mu e \vec{v}}{c^2 k^2 - n_e^2 \omega^2}, \quad \varphi(\vec{k}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{c^2 e / \epsilon}{c^2 k^2 - n_e^2 \omega^2}. \quad (3.13)$$

Подставив потенциалы (3.10) в выражение для электрического поля

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad (3.14)$$

найдем, используя (3.13),

$$\vec{E}(\vec{k}) = \frac{i\omega}{c} \vec{A}(\vec{k}) - i\vec{k}\varphi(\vec{k}) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \mu e \frac{\omega \vec{v} - \frac{\vec{k}c^2}{n_e^2}}{c^2 k^2 - n_e^2 \omega^2}. \quad (3.15)$$

Фурье-компонента силы торможения, действующей на частицу, определяется только электрическим полем:  $\vec{F}_{\text{rad}}(\vec{k}) = e\vec{E}(\vec{k})$ , откуда  $(\vec{r} = \vec{v}t)$

$$\vec{F}_{\text{rad}} = \frac{i\mu e^2}{2\pi^2} \int d^3k \frac{\omega \vec{v} - \frac{\vec{k}c^2}{n_e^2}}{c^2 k^2 - n_e^2 \omega^2}. \quad (3.16)$$

Представим теперь вектор  $\vec{k}$  в виде  $\vec{k} = \vec{k}_s + \vec{q}$ ,  $k^2 = k_s^2 + q^2$ , где ось  $s$  направлена по  $\vec{v}$ . Из соображения симметрии ясно, что сила  $\vec{F}_{\text{rad}}$  направлена вдоль оси  $s$ .

Подставив в (3.16) значение  $d^3k = 2\pi q dq d\omega/v$  и переходя в (3.16) к интегрированию по  $q$  и  $\omega$ , найдем

$$F_{\text{rad}} = \frac{i\mu e^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega d\omega \left(1 - \frac{1}{n_e^2 \beta^2}\right) \int_0^{\infty} \frac{q dq}{c^2 q^2 - \frac{\omega^2}{\beta^2} (\beta^2 n_e^2 - 1)} =$$

$$= \frac{i\mu e^2}{2\pi c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega d\omega \left(1 - \frac{1}{n_e^2 \beta^2}\right) \ln \left[ c^2 q^2 - \frac{\omega^2}{\beta^2} (\beta^2 n_e^2 - 1) \right]_{q=0}^{q=\infty}. \quad (3.17)$$

Поскольку физические поля, потенциалы и, соответственно, сила торможения — действительные величины, то их фурье-компоненты (комплексные функции) удовлетворяют соотношениям  $\vec{A}(-\vec{k}) = \vec{A}^*(\vec{k})$ ,  $\varphi(-\vec{k}) = \varphi^*(\vec{k})$ . Поэтому (3.17) можно интегрировать по  $\omega$  в пределах  $(0, \infty)$  и взять удвоенную действительную часть полученного выражения. Отсюда следует, что вклад в силу торможения дает только мнимая часть интеграла, если аргумент логарифма отрицателен, что имеет место на нижнем пределе  $q=0$  при условии  $\beta n_e \geq 1$ , т. е. при условии черенковского излучения (3.4). Тогда можно воспользоваться известными соотношениями для комплексных величин  $Z$ \*)

$$\text{Im}(\ln(-Z)) = \text{Im}(\ln Z) \pm \pi. \quad (3.18)$$

В результате получаем

$$F_{\text{rad}} = \pm \frac{\mu e^2}{c^2} \int_0^{\omega_0} \omega d\omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n_e^2(\omega)}\right), \quad (3.19)$$

где граничная частота  $\omega_0$  определяется из условия черенковского излучения  $\beta n_e(\omega_0) = 1$ . Знак минус соответствует торможению частицы и излучению ею электромагнитных волн, а знак плюс — обратному процессу, т. е. поглощению частицей падающей на нее волны и черенковскому ускорению.

Соотношение (3.19) указывает на решающую роль дисперсии, которая ограничивает диапазон излучаемых частот. В отсутствие дисперсии  $\omega_0 = \infty$  и сила торможения оказалась бы бесконечной.

\*) Это равенство легко получить, представив комплексную величину  $Z$  в виде  $Z = |Z| \cdot e^{i\varphi}$ . Тогда  $-Z = |Z| \cdot e^{i(\varphi \pm \pi)}$ , что и приводит, после логарифмирования, к равенству (3.18).

По порядку величины, как видно из (3.19), сила торможения равна ( $\mu \approx 1$ )

$$F_{\text{rad}} \sim -\frac{e^2}{c^2} \cdot \frac{\omega_0^2}{2} \sin^2 \theta^* \equiv -\frac{e^2}{\lambda_0^2} \sin^2 \theta^*, \quad (3.20)$$

где

$$\lambda_0 \equiv \frac{c}{\omega_0}.$$

Физический смысл этой оценки очень простой: торможение частицы вызывается натяжением силовых линий поля, "отстающего" от частицы на расстояниях  $r \geq \lambda_0$ . Вблизи частицы ( $r \leq \lambda_0$ ) условие черенковского излучения нарушается из-за дисперсии и конфигурация поля имеет обычный вид (см. [2], § 122), при котором торможение отсутствует.

Прделанные вычисления силы торможения справедливы при условии, что граничная длина волны  $\lambda_0$  много больше среднего расстояния между молекулами среды. Только в этом случае поле в среде можно описывать макроскопически, т. е. вводить  $\epsilon$  и  $\mu$ . Поскольку  $\lambda_0$  — порядка длины волны собственного излучения атома среды, т. е.  $\lambda_0 \sim 10^{-5}$  см, то даже в газе это условие выполняется для плотности много большей  $10^{15}$  см $^{-3}$  (при нормальных условиях плотность газа  $\sim 2,7 \cdot 10^{19}$  см $^{-3}$ ).

Спектр черенковского излучения найдем, заметив, что мощность излучения равна энергии, которую теряет частица в единицу времени:

$$P_{\text{rad}} = -F_{\text{rad}} \cdot v. \quad (3.21)$$

Тогда

$$\frac{dP_{\text{rad}}}{d\omega} = \frac{\mu e^2 \beta \omega}{c} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n_e^2(\omega)}\right). \quad (3.22)$$

Это излучение распространяется, как мы уже видели, в интервале углов  $\Delta\theta$  (3.5).

Отметим одну важную особенность черенковского излучения: его интенсивность не зависит от массы частиц, поэтому черенковское излучение наблюдается и у тяжелых частиц. Например, протон в воде начинает излучать видимый свет при  $\beta_{\text{min}} = 0,746$  (кинетическая энергия 470 МэВ). Независимость от массы объясняется тем, что излучателем в данном случае является не сама

частица, а атомные электроны, возбужденные ее полем. Подчеркнем также, что формулы (3.16), (3.17), (3.19) содержат квадрат заряда частицы.<sup>\*)</sup> Поэтому излучение релятивистского иона с зарядом  $Ze$ , где  $e$  – заряд электрона, пропорционально  $Z^2 e^2$ . Для оценок полезно привести формулу для числа фотонов черенковского излучения, испускаемых частицей на единицу пути в среде в интервале длин волн  $(\lambda_1, \lambda_2)$ :

$$\frac{dN}{ds} = \frac{1}{\beta c} \cdot \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{dP}{d\omega} \cdot \frac{1}{(\hbar\omega)} \cdot d\omega \approx \frac{e^2}{\hbar c^2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \mu(\omega) \cdot \sin^2 \theta^*(\omega) \cdot d\omega. \quad (3.23)$$

В прозрачных средах, которые используются для регистрации черенковского излучения, как правило,  $\mu(\omega) \approx 1$ . Поэтому можно принять

$$\frac{dN}{ds} = \frac{e^2}{\hbar c^2 \langle \sin^2 \theta^* \rangle} \cdot (\omega_2 - \omega_1). \quad (3.24)$$

Здесь  $\langle \sin^2 \theta^* \rangle$  – среднее значение функции  $\sin^2 \theta^*(\omega)$  по интервалу  $(\omega_1, \omega_2)$ .

Заменив  $\omega = 2\pi c/\lambda$ , получим окончательно

$$\begin{aligned} \frac{dN}{ds} &= 2\pi Z^2 \alpha \langle \sin^2 \theta^* \rangle \cdot \left| \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right|, \\ Z &= \begin{cases} 1, & \text{электроны, протоны,} \\ \geq 1, & \text{ионы,} \end{cases} \\ \alpha &= \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} - \text{постоянная тонкой структуры.} \end{aligned} \quad (3.25)$$

**Задача 3.2.** Найти число фотонов видимого света, испускаемых протоном энергией 500 МэВ на единицу пути в воде.

*Указание:* использовать данные задачи 3.1.

При данной энергии протона ( $\beta = 0,758$ ) найдем  $\langle \sin^2 \theta^* \rangle \approx 0,024$ , и простые вычисления по

формуле (3.25) дают

$$\frac{dN}{ds} \approx 8,55 \text{ фотона/см.}$$

<sup>\*)</sup> Пропорциональность мощности излучения квадрату заряда частицы характерна для всех видов излучения заряженных частиц, в чем можно убедиться, прочитав эту книжку.

Поляризация черенковского излучения следует из формулы (3.15) для электрического поля волны

$$\vec{E} \propto \pm \left( \vec{v} - \frac{\vec{k}c^2}{\omega n_e^2} \right). \quad (3.26)$$

С другой стороны, фазовая скорость есть скорость движения фронта излучения – в данном случае фронта черенковского излучения (рис. 3.2):

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = v \cos \theta^*.$$

Поэтому из (3.26) и условия (3.3) находим (рис. 3.4)

$$\vec{E} \propto \pm \left( \vec{v} - \frac{\vec{k}}{k} v \cos \theta^* \right) = \vec{v}_\tau, \quad (3.27)$$

где  $\vec{v}_\tau$  – компонента вектора  $\vec{v}$ , касательная плоскости фронта излучения. Вектор  $\vec{k}$  перпендикулярен фронту излучения. Таким образом, вектор  $\vec{E}$  поля волны направлен, "как и должно быть", перпендикулярно вектору  $\vec{k}$  и к оси конуса излучения. Вектор  $\vec{H}$  магнитного поля волны перпендикулярен векторам  $\vec{E}$  и  $\vec{k}$ , т. е. направлен по "азимуту" конуса черенковского излучения. Качественно этот результат виден уже из того факта, что частица, движущаяся со скоростью  $\vec{v}$ , есть "элемент тока", направленного вдоль скорости. Поэтому и вектор-потенциал направлен так же, а вектор  $\vec{E}$  должен, как уже сказано, тормозить частицу.

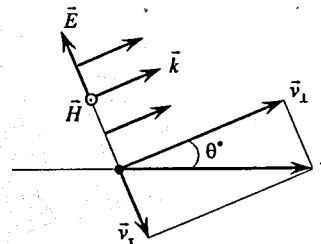


Рис. 3.4. Движение частицы и фронта волны черенковского излучения. Векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{k}$  образуют правую тройку, и вектор  $\vec{H}$  ортогонален плоскости рисунка

Эффект Вавилова–Черенкова имеет важное применение в физике элементарных частиц – на нем основан способ измерения скорости заряженной релятивистской частицы (по углу  $\theta^*(3.3)$ ). На рис. 3.5, а, б схематически изображены разные типы черенковских счетчиков. Первый счетчик – так называемый пороговый (рис. 3.5, а), регистрирующий частицы, скорость которых превышает  $\beta_{\min} = 1/n_e^{**}$ , где  $n_e^{**}$  – значение показателя преломления в диапазоне длин волн  $\Delta\lambda$ , определяемом областью чувствительности детектора светового излучения (фотоумножителя). Такие счетчики применяются в различных детекторах заряженных частиц для отделения быстрых частиц от медленных. Обычно детекторы представляют собой сложные анализирующие устройства, измеряющие параметры частиц, рождающихся в различных реакциях, и черенковские счетчики в этих приборах выполняют функцию определения одного из параметров – скорости. Для повышения пороговой скорости регистрации и ее удобной регулировки используют газовые черенковские счетчики высокого давления (до нескольких десятков атмосфер). Кроме того, такие счетчики слабо тормозят и почти не поглощают релятивистские частицы.

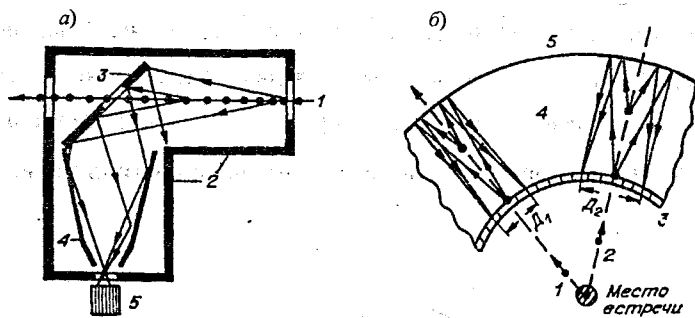


Рис. 3.5. Две схемы черенковских счетчиков. а – схема порогового черенковского счетчика (1 – траектория частицы; 2 – стенки корпуса счетчика; 3 – плоское зеркало; 4 – параболическое зеркало; 5 – фотоумножитель), б – схема дифференциального черенковского счетчика (1, 2 – траектории регистрируемых частиц; 3 – детектор светового излучения; 4 – газовая среда; 5 – зеркало;  $D_{1,2}$  – размеры изображений конусов излучения)

Черенковские счетчики второго типа – дифференциальные, позволяющие измерять скорость частицы. Их модификация, именуемая RICH (Ring Image

Cherenkov detector), нашла широкое применение в экспериментах на ускорителях со встречными пучками – так называемых "коллайдерах" (от collide – сталкиваться, англ.). В таких счетчиках пространственно-протяженный детектор светового излучения (рис. 3.5, б), регистрирует диаметр светового конуса, излучаемого частицей. На рис. 3.5, б частицы летят навстречу друг другу вдоль прямой, ортогональной плоскости рисунка, и сталкиваются в "месте встречи"; родившиеся частицы (1, 2 на рис. 3.5, б), разлетающиеся в поперечном к пучкам направлении, излучают в пространстве 4, заполненном газом или специальной легкой и прозрачной пластмассой, а световое излучение регистрируется проволочными пропорциональными камерами, измеряющими координаты фотонов, поступающих в детектор. Сигналы камеры анализируются ЭВМ, и по диаметру конуса измеряется скорость частиц. Схема такого RICH-детектора, применяемого в эксперименте "LHC" на Большом адронном коллайдере (Large Hadron Collider – LHC) в ЦЕРН, показана на рис. 3.6.

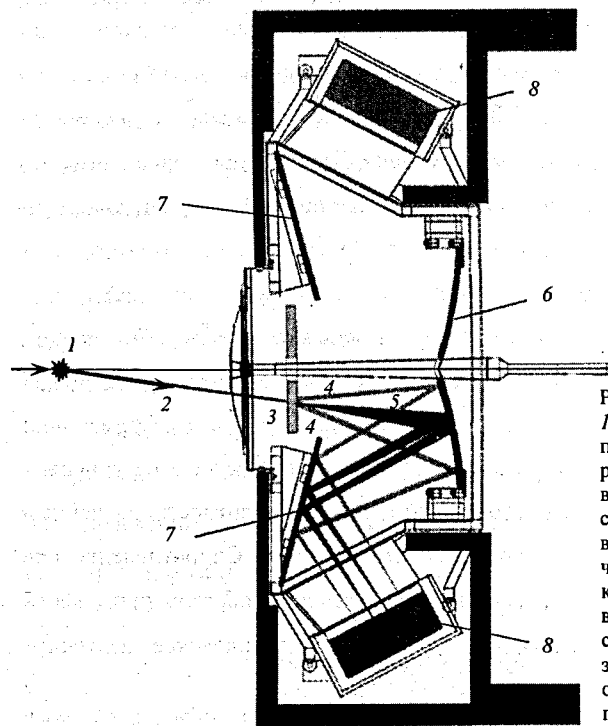


Рис. 3.6. Схема RICH-детектора: 1 – точка встречи (столкновения) пучков; 2 – траектория частицы, родившейся в соударении двух встречных частиц; 3 – контейнер с аэрогелем, пересекая его, вторичная частица испускает черенковское излучение, лучи которого (4, 5 – разные длины волн) переносятся с помощью сферического (6) и плоского (7) зеркал на фотодетекторы (8), образуя на их приемной поверхности кольцеобразные радужные изображения



Интересно отметить, что черенковское излучение было предсказано теоретически немецким физиком Зоммерфельдом еще в 1904 г. для *сверхсветового движения частиц в вакууме*. Однако после появления теории относительности работа эта была прочно забыта.<sup>\*)</sup> В последние годы зоммерфельдовское излучение опять заинтересовало физиков в связи с поиском гипотетических частиц – тахионов, которые, по предположению, всегда движутся быстрее света. Существование таких частиц не противоречит теории относительности. Тахионы, однако, нарушают принцип причинности. Во всяком случае, если они и существуют, то должны, по Зоммерфельду, интенсивно излучать электромагнитные волны. По такой короткой вспышке излучения их и надеются обнаружить в эксперименте. Любопытно, что при уменьшении энергии тахион ускоряется ( $v \rightarrow \infty$ ).

Для механических волн черенковское излучение было известно (под другим названием!) с незапамятных времен. Мы имеем в виду так называемую носовую волну корабля, образующую на поверхности достаточно мелкой воды характерную картину, похожую на клин, угол раствора которого тем меньше, чем больше скорость корабля (рис. 3.7). Носовая волна является основным источником сопротивления при движении корабля. Отсюда характерная, похожая на плуг, форма носовой части быстроходных кораблей, рассчитанная на "отваливание" волны и уменьшение ее высоты. Отметим, что для подводных лодок черенковское излучение отсутствует, так как нет медленных поверхностных волн, а звуковые волны в воде – слишком быстрые. Это значит, что подводные лодки при сравнимой мощности двигателей могут развивать значительно большие скорости. Соответственно изменяется и форма носа подводной лодки. Другой пример механического черенковского излучения – образование так называемой ударной волны (резкий скачок плотности, давления и температуры воздуха) при сверхзвуковом полете самолета. Сопротивление при этом резко возрастает и требует специальных мер, главным образом применения характерного заостренного носа самолета. Звуковое черенковское излучение

<sup>\*)</sup> Когда И. Е. Тамм и И. М. Франк делали в 1937 г. свою "нобелевскую работу", они не были знакомы с работой Зоммерфельда.

воспринимается наблюдателем как взрыв. При излучении механических волн возможен также аномальный эффект Доплера, приводящий к возбуждению источника. В авиации это явление известно под названием флаттер (от англ. *flutter* – дрожать).

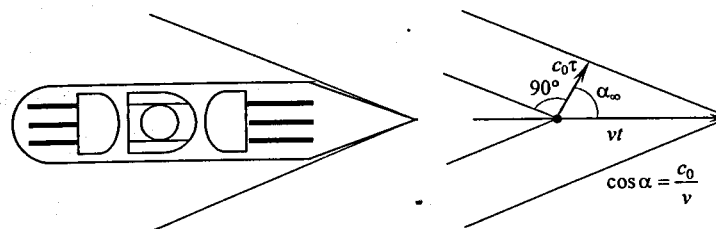


Рис. 3.7. Черенковское излучение на поверхности мелкой воды;  $c_0$ ,  $v$  – скорости корабля и волны соответственно

### § 3.2. Переходное излучение

Переходное излучение – еще один вид излучения заряженной частицы, движущейся с постоянной скоростью. Возникает оно при движении частицы в среде с пространственно-неоднородными свойствами, в частности при пересечении частицей границы двух разных областей среды.

Переходное излучение обнаружено еще в 1919 г. немецким физиком Лилиенфельдом при бомбардировке металлической поверхности электронами, однако природа этого излучения в то время понята не была, а теория была дана только в 1945 г. советскими физиками В. Л. Гинзбургом и И. М. Франком.

Ниже мы приведем некоторые простые оценки переходного излучения ультрарелятивистской частицы. Для этого нам нужно вспомнить формулы для поля заряженной частицы, движущейся в вакууме с постоянной скоростью  $\vec{v} \equiv \vec{\beta}c$  (см. [3], т. 2, § 122):

$$\vec{E} = \frac{e\vec{R}}{R^3} \cdot \frac{1}{\gamma^2(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}, \quad \vec{B} = [\vec{\beta}, \vec{E}]. \quad (3.28)$$

Здесь  $\vec{R}$  – радиус-вектор, проведенный в точку наблюдения  $P$  (рис. 3.8) из точки  $e$ , где заряд находится в момент наблюдения. Подчеркнем, что здесь все величины определены в момент наблюдения, т. е. запаздывание распространения поля (см. формулу (1)) учтено.

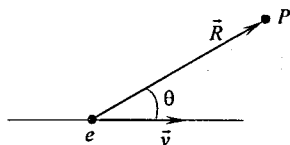


Рис. 3.8. Траектория заряда и точка наблюдения  $P$

Задача 3.3. Найти поле равномерно движущегося заряда, пользуясь преобразованиями Лоренца для координат – времени и поля.

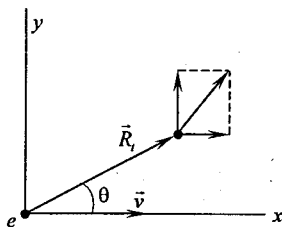


Рис. 3.9. Выбор системы координат в задаче 3.3

Все измеряем в лабораторной системе (рис. 3.9):

$$t, \vec{R}, = \{x, y, z\}, \vec{E} = \{E_x, E_y, E_z\}.$$

Тогда в системе заряда

$$(R')^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = \gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2;$$

$$\vec{E}' = \frac{e}{(R')^3} \vec{R}'.$$

Воспользовавшись преобразованиями Лоренца для поля (25), запишем

$$\vec{E} = \gamma \vec{E}'_{\perp} + \vec{E}'_{\parallel} = \gamma \frac{e}{(R')^3} \vec{R}'_{\perp} + \frac{e}{(R')^3} \vec{R}'_{\parallel} = \frac{e}{(\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \left\{ \gamma \sqrt{y^2 + z^2} \vec{e}_{\perp} + \gamma x \vec{e}_{\parallel} \right\} =$$

$$= \frac{e}{\gamma^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2} R^2} \gamma \left\{ (\vec{R}_{\perp})_{\perp} + (\vec{R}_{\parallel})_{\parallel} \right\} = \frac{e \vec{R}_{\perp}}{\gamma^2 R^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}},$$

где  $\sin \theta = \sqrt{y^2 + z^2} / R$ , (рис. 3.8). Таким образом, мы пришли к первой из формул (3.28). Вторая формула, для  $\vec{B}$ , следует из равенства (26), полученного в задаче 5 Введения.

Особенность поля (3.28) для релятивистской частицы в том, что оно имеет большие значения на направлениях, перпендикулярных  $\vec{v}$ , и минимально на направлении скорости (рис. 3.10):

$$\vec{E}|_{\theta=\pi/2} = \vec{e}_{\perp} \gamma \frac{e}{R^2}, \quad \vec{E}|_{\theta=0,\pi} = \pm \vec{e}_{\parallel} \frac{e}{\gamma^2 R^2}, \quad (3.29)$$

$\vec{e}_{\perp}, \vec{e}_{\parallel}$  – единичные векторы, перпендикулярный и параллельный вектору  $\vec{v}$  соответственно. Такая "сплюснутость" поля релятивистской частицы и позволяет понять природу переходного излучения.

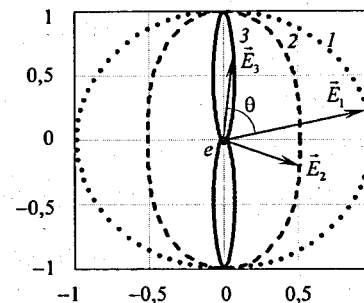


Рис. 3.10. Векторные диаграммы пространственного распределения электрического поля частицы, движущейся с постоянной скоростью.  $\beta = 0,1$  (1);  $0,7$  (2);  $0,99$  (3)

Начнем обсуждение с наиболее показательного примера: релятивистская частица движется в вакууме вдоль оси цилиндрической трубы переменного сечения (рис. 3.11). Поле частицы при  $v \approx c$  ( $\gamma \gg 1$ ) направлено почти ортогонально скорости, так что оно по своей структуре близко к полю плоской волны. Когда частица влетает в трубу меньшего диаметра, последняя "срезает" поле частицы, и оно, отразившись от торцевой стенки на стыке труб, излучается в направлении, обратном движению частицы. Потери энергии частицы на излучение можно оценить, приняв их равными энергии поля частицы, сосредоточенной в цилиндрическом слое между радиусами  $a$  и  $b$ , имеющем продольный размер

$$l_{\parallel} \sim b \cdot \Delta\theta \sim \frac{b}{\gamma}. \quad (3.30)$$

Здесь  $\Delta\theta$  – угловой растрор векторной диаграммы поля релятивистской частицы, значение которого следует из разложения выражения в знаменателе (в скобках) формулы (3.28):

$$1 - \beta^2 \sin^2 \theta = 1 - \beta^2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} - \Delta\theta \right) \approx \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{(\Delta\theta)^2}{2}, \quad \Delta\theta \ll 1.$$

При  $\Delta\theta = 1/\gamma$  знаменатель возрастает в  $2^{3/2}$  раз.

Плотность энергии поля, которое несет на себе частица, можно оценить в этой области углов  $\theta$  как (см. (3.28),  $\beta \approx 1$ )

$$\rho = \frac{E^2 + B^2}{8\pi} \approx \frac{E_{\perp}^2}{4\pi}, \quad \text{где } E_{\perp} = E(\theta = \pi/2) = \gamma \frac{e}{R^2}. \quad (3.31)$$

Кроме того, при  $\theta \approx \pi/2$  радиус-вектор  $R$  совпадает практически с радиусом  $r$  цилиндрической системы координат. С учетом этого обстоятельства и значения  $\rho(r)$  (3.31) запишем выражение для энергии слоя, "обрезанного" трубой  $a$ :

$$\Delta\epsilon \sim \frac{1}{4\pi} \int_a^b E_{\perp}^2(r) 2\pi r dr \cdot \ell_{\parallel} \approx e^2 \gamma^2 \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \cdot \ell_{\parallel}. \quad (3.32)$$

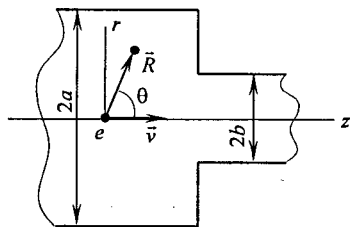


Рис. 3.11. К оценке переходного излучения заряженной частицы в трубе переменного сечения

Подставив сюда  $\ell_{\parallel}$  (3.30), окончательно получим

$$\Delta\epsilon \sim \frac{\gamma e^2}{b} \left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \right). \quad (3.33)$$

Подчеркнем, что, как и в случае черенковского излучения, энергия переходного излучения пропорциональна квадрату заряда частицы и не зависит (при заданной скорости) от массы частицы. При  $b \ll a$  приходим к задаче об излучении частицы, пролетающей сквозь круглое отверстие в плоском экране.

Очевидно, длина формирования переходного излучения в данном случае есть  $\ell_{\parallel}$  (3.30), а длительность вспышки и ширина спектра излучения

$$\tau \sim \frac{\ell_{\parallel}}{c} \sim \frac{b}{\gamma c}; \quad \omega \sim \Delta\omega \sim \frac{\pi}{\tau} \sim \frac{\pi \gamma c}{b}; \quad \lambda \sim \frac{b}{\gamma}. \quad (3.34)$$

Сгусток из  $N$  частиц в данной ситуации будет излучать когерентно (т. е. потери энергии вырастут в  $N^2$  раз), если его размеры  $\Delta z < \ell_{\parallel}$ ,  $\Delta r \ll b$ . Если же мы имеем дело с длинным и (для простоты) тонким пучком частиц ( $\Delta z \gg \ell_{\parallel}$ ), то излучение будет происходить некогерентно. Точнее, здесь нужно решить задачу о поле движущегося заряженного релятивистского цилиндра. Аналогичные оценки по порядку величины дают

$$E_{\perp} \sim \frac{2eN}{r\ell}; \quad \ell_{\parallel} \sim b; \quad \Delta\epsilon_N \sim \frac{2e^2 N^2}{\ell^2} b \ln \frac{a}{b}, \quad (3.35)$$

где  $\ell \gg b$  – длина сгустка в лабораторной системе. Излучение будет происходить на фронте сгустка, на длине  $\Delta z \sim a$ , пока не установится стационарное поле. Такая же энергия теряется на заднем фронте сгустка.

Приведем численный пример. Электрон с энергией 100 ГэВ при влете в трубу радиусом  $b = 1$  см ( $b \ll a$ ) теряет ничтожно малую долю своей энергии  $\Delta\epsilon \sim 1,5 \cdot 10^{-2}$  эВ. Сгусток из  $N = 10^{12}$  таких электронов длиной  $\ell = 1$  см в тех же условиях теряет  $\Delta\epsilon \sim 3 \cdot 10^{17}$  эВ, или 150 кэВ на электрон.

**Задача 3.4.** Оценить энергию переходного излучения назад при прохождении релятивистской частицы из вакуума в диэлектрик. Граница раздела плоская, скорость частицы направлена по нормали к границе. Дисперсией среды пренебречь.

Применяя к "плоскому" полю релятивистской частицы формулу отражения плоской волны от границы диэлектрика

$$E_{\text{отр}} = E_{\text{пад}} \frac{(\sqrt{\epsilon} - 1)}{(\sqrt{\epsilon} + 1)},$$

аналогично (3.32) запишем

$$\Delta\epsilon \sim \frac{(\sqrt{\epsilon} - 1)^2}{4\pi} \cdot \gamma^2 e^4 2\pi \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{r dr}{r^4} \cdot \ell_{\parallel}.$$

Для оценки  $\ell_{\parallel}$  учтем, что "плоское" поле сосредоточено вблизи угла  $\theta = \pi/2$ , так что, аналогично

(3.30), имеем  $\ell_{\parallel} = \ell_{\parallel}(r) \sim r/\gamma$ . Интегрируя, получим

$$\Delta \varepsilon \sim (\sqrt{\varepsilon} - 1)^2 \gamma e^2 / 2r_{\min}. \quad (3.36)$$

В качестве  $r_{\min}$  естественно выбрать величину, характеризующую поляризационные свойства среды:

$$r_{\min} \sim \lambda_p = 2\pi c / \omega_p; \quad \omega_p^2 = 4\pi n_e e^2 / m; \quad (3.37)$$

$\omega_p$  – плазменная частота;  $n_e$  – полное число электронов вещества в единице объема. Окончательно получим

$$\Delta \varepsilon \sim \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{4\pi c} \gamma e^2 \omega_p. \quad (3.38)$$

Из формулы (3.38) можно сделать определенные заключения и о влиянии дисперсии среды. Поскольку с ростом частоты диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon(\omega)$  убывает:  $\varepsilon(\omega) \approx 1 - (\omega_p/\omega)^2$ , энергия излучения при  $\omega \gg \omega_p$  убывает как  $\omega^{-4}$ . Поэтому в спектральном составе излучения назад будут преобладать низкие частоты  $\omega \leq \omega_p$ . Именно поэтому в излучении назад присутствует свет (что и было обнаружено Лиленфельдом). Для графита, например,  $\omega_p \approx 4,6 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$ ,  $\lambda_p \sim 400 \text{ \AA}$  (мягкий рентген).

Гораздо более коротковолновое излучение генерируется вперед при прохождении частицы из диэлектрика в вакуум. В этом случае дисперсия среды играет определяющую роль. В области  $n_e(\omega) > 1$  поле частицы имеет "черенковский" характер, и о переходном излучении вперед говорить не приходится: частица приходит на границу раздела "раздетой" – ее поле тянется сзади (см. рис. 3.2, 3.4), и, едва выбравшись в вакуум, частица должна "срочно" формировать свое поле. Столь забавная ситуация еще раз указывает на необходимость последовательного учета дисперсии среды. Можно, однако, сделать определенные заключения и без громоздких выкладок (задача 3.5).

**Задача 3.5.** Оценить энергию переходного излучения при прохождении ультрарелятивистской частицы из диэлектрика в вакуум по нормали к границе.

В области высоких частот, где  $n_e(\omega) \leq 1$ , поле релятивистской частицы будет иметь ту же структуру, что и в вакууме. Для этих частот можно вновь использовать приведенный выше прием

(только теперь нас интересует энергия в проходящей "волне"). Аналогично (3.38) проведем оценки энергии излучения

$$\Delta \varepsilon \sim \frac{4\sqrt{\varepsilon}}{(\sqrt{\varepsilon} + 1)^2} \int_V \frac{\varepsilon E^2}{4\pi} dV, \quad (3.39)$$

где множитель перед интегралом дает долю проходящей "волны" от полной энергии, падающей на границу раздела;  $\varepsilon(\omega)$  – диэлектрическая проницаемость в "нечеренковской" области ( $\varepsilon(\omega) \leq 1$ ). Из приведенной оценки видно, что в области высоких частот ( $\omega > \omega_p$ ) нет резкого падения интенсивности (ср. (3.38)). Аналогично задаче 3.4 получим

$$\Delta \varepsilon \sim \frac{\gamma e^2 \omega_p}{2\pi c}. \quad (3.40)$$

Этот результат отличается только отсутствием малого множителя  $(\sqrt{\varepsilon} - 1)^2$ .

Спектр излучения определяется длиной его формирования  $\ell_{\parallel} \sim r_{\min}/\gamma \sim \lambda_p/\gamma$ , откуда ширина спектра излучения

$$\Delta \omega \sim \omega \sim \gamma \omega_p. \quad (3.41)$$

Переходное излучение имеет общую природу с излучением Вавилова–Черенкова: в обоих случаях "излучателями" являются атомарные электроны. Различие состоит в том, что в черенковском излучении колебания электронов "привязаны" к фазе волны, и поэтому излучают когерентно. В переходном излучении такая "привязка" отсутствует, и электроны среды излучают некогерентно. Тем не менее, в среде, если выполняется условие черенковского излучения (3.4), а протяженность области излучения велика по сравнению с длиной его формирования  $\ell_{\parallel}$  (3.35) и  $\ell_{\text{form}}$  (3.6), оба вида излучения принципиально неразличимы. Подобный случай может иметь место при прохождении заряженных частиц через тонкие пленки (см. ниже – детекторы переходного излучения).

Переходное излучение находит применение в детекторах ультрарелятивистских заряженных частиц: по энергии излучения измеряется лоренц-фактор  $\gamma$  и, главное, объединение такого детектора с трековым детектором рентгеновского излучения (рис. 3.12) позволяет зарегистрировать траекторию излучающей частицы. Такие *детекторы переходного излучения* – ДПИ (*Transition Radiation Detectors* – TRD, англ.) являются сегодня обязательным элементом больших многофункциональных детекторов в физике высоких энергий. ДПИ

чаще всего используют для регистрации электронов и позитронов, т. к. энергия переходного излучения (число фотонов на один "переход") пропорциональна лоренц-фактору (см. (3.38), (3.40)), который при заданной энергии для легких частиц, в отношении масс ( $m_1/m_2$ ) больше, чем у тяжелых (мезонов, протонов и др.).

Один из примеров использования ДПИ – детектор эксперимента ALICE на Большом адронном коллайдере (Large Hadron Collider – LHC) в ЦЕРН. В многофункциональном детекторе ALICE детекторы переходного излучения (рис. 3.12, а) имеют радиаторы, состоящие из 100 полипропиленовых пленок толщиной 20 мкм с промежутками между ними в 400 мкм. Радиатор и дрейфовая камера соединены в единый модуль (рис. 3.12, б), и шесть таких модулей располагаются по радиусу детектора ALICE, "на оси которого сталкиваются частицы встречных протонных пучков. ДПИ регистрируют легкие "продукты" – электроны и позитроны.

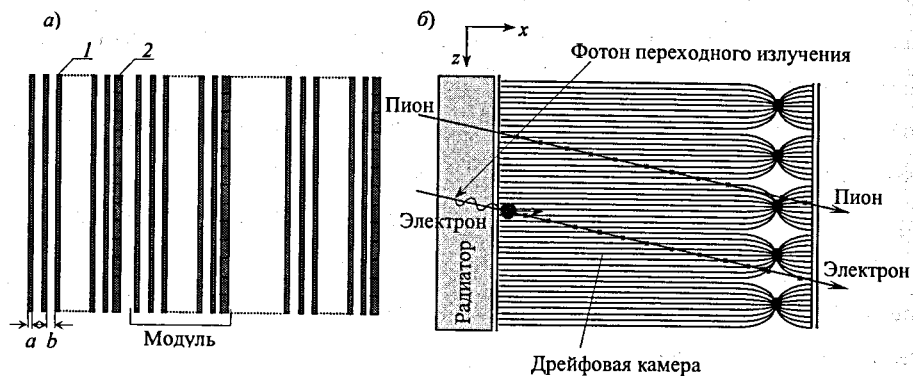


Рис. 3.12. Принципиальные схемы детектора переходного излучения (а) и одного из его модулей (б). 1 – набор пленок радиатора переходного излучения, изготовленных из материала с малым средним атомным номером (для уменьшения рассеяния регистрируемых частиц); 2 – детектор рентгеновских фотонов переходного излучения (дрейфовая проволоочная камера).

Рентгеновские фотоны летят практически по направлению движения излучающей частицы, проходя через большое число пленок радиаторов (1) почти без потерь энергии. В дрейфовых камерах (2) фотоны выбивают из газа (ксенон) комптоновские электроны, которые регистрируются, приходя на один из анодов (с усилением в лавине газового разряда вблизи анодной проволоочки, рис. 3.12, б).

### § 3.3. Параметрическое излучение заряженной частицы, движущейся сквозь кристалл

Этот тип излучения быстрых заряженных частиц является своеобразной комбинацией их переходного излучения с дифракцией этого излучения на кристаллической структуре. В одиночных "актах" взаимодействия частицы с атомом (ионом) кристаллической решетки возникает излучение, а коллективный характер взаимодействия частицы с набором ионов приводит к интерференции излучения от отдельных "актов", в результате чего появляется когерентность излучения.

Действительно, релятивистская (даже "умеренно релятивистская") частица проходит через достаточно тонкий кристалл по практически прямолинейной траектории, так что ее тормозное излучение отсутствует. Но электрическое поле частицы "дергает" электроны ионов кристалла, и они излучают. Основные характеристики этого излучения можно получить на уровне качественных оценок в приближении классической электродинамики. Поле релятивистской частицы можно рассматривать как плоскую волну (сравни § 3.2), распространяющуюся вместе с частицей вдоль направления скорости  $\vec{v}_0$  частицы. Электроны ионов кристалла колеблются вдоль направления вектора  $\vec{E}$ , излучая в соответствии с диаграммой дипольного излучения (рис. 4 Введения). Схема интерференции излучения от различных ионов кристалла (рис. 3.13) может быть представлена в том же виде, что и для дифракции рентгеновского излучения в кристалле (см. [3], § 139). Воспользовавшись этой схемой, найдем разность фаз лучей излучения, падающего ( $\omega_i, k_i$ ) на ионы А и В кристалла и рассеянного ( $\omega_r, k_r$ ) ими. Ограничимся простейшим случаем, когда падающий и рассеянные лучи лежат в плоскости кристаллической решетки (рис. 3.11). Кроме того, учтем, что поле движущейся частицы "воспринимается" ионом как импульс  $\vec{E}(t)$ , ограниченный по времени (сравни (3.34)). Поэтому функцию  $\vec{E}(t)$  можно представить в виде интеграла Фурье по монохроматическим функциям – плоским волнам – и проводить дальнейший анализ для волны  $E_0 d\omega \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$ . После рассеяния на

неподвижном ионе в кристалле, частота  $\omega$  и волновое число  $k = \omega/c$  этой гармоникки (как и всякой другой) не изменяются. Соответственно, разность фаз двух "лучей" этой волны 11' и 22' (рис. 3.13) равна

$$\Delta\psi = k(\Delta_i - \Delta_r),$$

$$\Delta_i = CB = CD + DB = (AE - DE)\sin\theta_i + DB = (pa - qb \cdot \text{tg}\theta_i) \cdot \sin\theta_i + \frac{qb}{\cos\theta_i} = p\sin\theta_i + qb\cos\theta_i,$$

$$\Delta_r = AC' = AD' - C'D' = AD' - (BF + FD')\sin\theta_r = \frac{qb}{\cos\theta_r} - (pa + qb \cdot \text{tg}\theta_r) \cdot \sin\theta_r = -p\sin\theta_r + qb\cos\theta_r.$$

Здесь  $p, q$  – число горизонтальных ( $p$ ) и вертикальных ( $q$ ) плоскостей кристаллической решетки, разделяющих ионы  $A$  и  $B$ ;  $a, b$  – вертикальный и горизонтальный размеры ячейки решетки. В результате

$$\Delta\psi_{pq} = k[qa(\sin\theta_i + \sin\theta_r) + b(\cos\theta_i - \cos\theta_r)]. \quad (3.42)$$

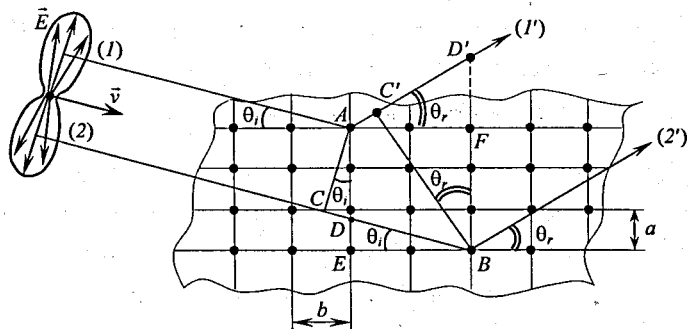


Рис. 3.13. Схема интерференции излучения, возникающего при воздействии быстрой заряженной частицы на ионы кристалла

Суммируя по всем ионам, находящимся в поле частицы, найдем, что интенсивность (поток плотности энергии) рассеянной волны

$$J \propto \left| \sum_{p,q=1}^N e^{i\Delta\psi_{pq}} \right|^2. \quad (3.43)$$

Очевидно, что  $J \propto N^2$ , если все  $\Delta\psi_{pq}$  кратны  $2\pi$ , а это условие достигается, если в

$$\begin{aligned} 1) \quad & \theta_r = \theta_i \text{ и } k\sin\theta_i = m\pi, \text{ или } 2a\sin\theta_i = n\lambda, \\ & \text{или} \\ 2) \quad & \theta_r = \pi + \theta_i \text{ и } kb\cos\theta_i = m\pi, \text{ или } 2b\cos\theta_i = n\lambda; \end{aligned} \quad (3.44)$$

$n = 1, 2, \dots$  – порядок дифракционного максимума. Первый случай есть отражение волны от горизонтальных плоскостей решетки (рис. 3.13 и 3.14, а), а второй – от вертикальных (рис. 3.14, б), когда углы скольжения  $\theta_i$  и  $\theta_r$  нужно заменить на  $\pi/2 - \theta_i$  и  $\pi/2 - \theta_r$ . Случай, когда  $\theta_r = \pi - \theta_i$  тривиален – это отсутствие отражения (рассеяния), волна проходит сквозь кристалл, не изменяя направления. Аналогично выглядят условия образования максимума отраженной волны по третьему измерению (ортогонально плоскости рис. 3.13, 3.14).

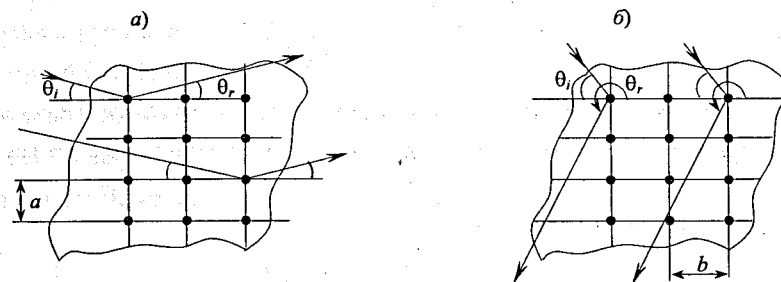


Рис. 3.14. Отражение электромагнитной волны от плоскостей кристаллической решетки – горизонтальных (а) и вертикальных (б)

Равенства (3.44) называются условиями Вульфа-Брэгга и найдены для рентгеновских лучей русским физиком Г.В. Вульфом (1912 г.) и, независимо, английским физиком У.Л. Брэггом (W.L. Bragg, 1913 г.).

Из сказанного ясно, что все ионы кристалла, формирующие отраженную волну, излучают когерентно, а интенсивность отраженной волны

$$J \propto e^2 N^2 \quad (3.45)$$

и, как и в случае черенковского и переходного излучения, не зависит от массы частицы, "генерирующей" излучение. Подчеркнем, что для иона в (3.45) стоит полный его заряд  $(Ze)^2$ .

В соответствии с условиями Вульфа-Брэгга кристалл "отбирает" (формирует) на направлении максимума излучение с определенной длиной волны, т.е. играет роль "монохроматора". Длину формирования излучения можно оценить, анализируя, как и прежде, кинематику движения частицы и волны (рис. 3.15). Но теперь, как мы увидим, длина формирования ограничена еще условиями Вульфа-Брэгга. Пусть излучение приходит в точку наблюдения с некоторого слоя  $d$  кристалла. Тогда длина формирования равна

$$\ell_{\text{form}} = AB = \frac{d}{\sin \theta},$$

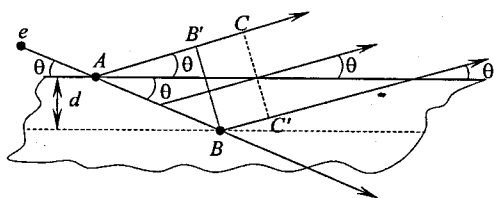


Рис. 3.15. Формирование параметрического излучения при прохождении заряженной частицы через тонкий кристалл.  $CC'$  и  $BB'$  – передний и задний фронты волны излучения

а длительность всплеска излучения есть

$$\tau \sim \frac{B'C}{c} = \frac{c\Delta t - \ell_{\text{form}} \cos 2\theta}{c},$$

где

$$\Delta t = \frac{AB}{v_0} = \frac{d}{\beta c \sin \theta},$$

$v_0 = \beta c$  – скорость частицы. Отсюда

$$\tau \sim \frac{d}{c} \cdot \frac{1 - \beta \cos 2\theta}{\sin \theta}, \quad (3.46)$$

и длина волны излучения, соответствующая длительности всплеска  $\tau$ , составляет порядка

$$\lambda \sim c\tau \sim d \cdot \frac{1 - \beta \cos 2\theta}{\sin \theta}.$$

Подставив сюда значение  $\sin \theta$  из первого условия (3.44), находим толщину слоя кристалла, из которой формируется когерентное излучение:

$$d \sim \frac{\lambda^2}{2a} \cdot \frac{1}{1 - \beta + \beta^2 \frac{\lambda^2}{2a^2}}. \quad (3.47)$$

При  $\lambda \ll a$  ( $\theta \ll 1$ ) и  $\gamma \gg 1$  имеем

$$d \sim \frac{\lambda^2 \gamma^2}{a}. \quad (3.48)$$

Отсюда видно, что число ионов кристалла, участвующих в формировании когерентного излучения, растет как квадрат энергии частицы, а энергия когерентного излучения, соответственно, как  $\gamma^4$ . Строгий расчет интенсивности излучения требует привлечения квантово-механического подхода.

Существование параметрического излучения было теоретически предсказано в конце 60-х гг. прошлого столетия (М. Л. Тер-Микаэлян, Г. М. Гарибяян). Однако только недавно его существование убедительно продемонстрировано экспериментально на пучке протонов и ионов углерода нуклотрона ОИЯИ (А. Д. Коваленко, А. М. Таратин и др.). В этих экспериментах энергия протонов составляла 5 ГэВ, ионов  $C^{6+}$  – 2,2 ГэВ/нуклон. Излучение с энергией фотонов 9,5 кэВ от протонов и 10,8 кэВ от ионов наблюдалось при прохождении через кристалл кремния (рис. 3.16).

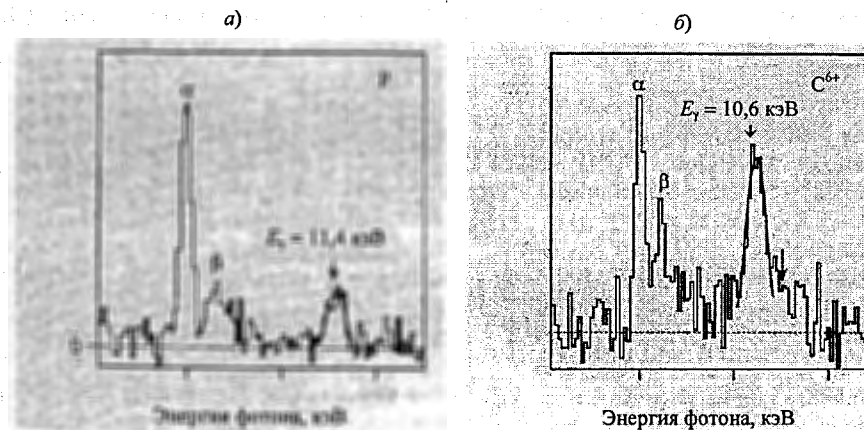


Рис. 3.16. Спектры излучения при прохождении пучков протонов (а) и ионов  $C^{6+}$  (б) через пленку кристалла кремния. Энергия протонов – 5 ГэВ, ионов – 2,2 ГэВ/нуклон;  $\alpha$ ,  $\beta$  – пики характеристического излучения подложки;  $E_\gamma$  – 11,4 и 10,6 кэВ – пики параметрического излучения из кремния

§ 4.1. Общие характеристики ЛСЭ

Лазеры на свободных электронах (ЛСЭ)<sup>\*)</sup> – источники когерентного излучения, в которых "активной средой" является пучок релятивистских электронов. Проходя через участок магнитного поля (например, ондулятор), электроны совершают колебания, испускают электромагнитное излучение и, взаимодействуя с волной излучения, отдают ей свою энергию, усиливая интенсивность излучения. В общем случае условие усиления излучения можно сформулировать в виде

$$\frac{\partial f(v)}{\partial v} > 0, \quad (4.1)$$

где  $f(v)$  – функция распределения электронов по скоростям  $v$  (точнее, по продольной компоненте скорости  $\dot{s}$ ). В этом случае число быстрых электронов, отдающих энергию волне, обгоняя ее, превышает число более медленных электронов, отбирающих у волны ее энергию. И тогда волна усиливается. На этом принципе создан обширный класс излучателей, которые позволяют, в разных конструкциях, получать излучение в широком диапазоне – от СВЧ-радиоизлучения до рентгена. Всех их объединяет наличие двух характерных элементов:

- 1) интенсивный (мощный) пучок электронов;
- 2) периодическая структура, взаимодействуя с которой электроны излучают.

Принципиально важно, что благодаря *эффекту Доплера* длина волны излучения значительно меньше периода структуры или длины формирования излучения. С этим явлением мы уже встречались раньше, в главе II, при обсуждении синхротронного излучения частиц. В качестве такой структуры используют магнитостатические ондуляторы (§ 2.3), продольное магнитное поле (спираль циклотронного вращения играет роль "ондулятора", § 4.5), среду или оболочку

<sup>\*)</sup> Английский термин "Free Electron Laser" (FEL).

канала транспортировки электронного пучка, имеющую пространственно-периодическую структуру, которая инициирует черенковское или/и переходное излучение (§ 4.5). В последние годы в связи с появлением ЛСЭ оптического и рентгеновского диапазонов это название чаще всего используют для лазеров с магнитостатическими ондуляторами и пучками ультрарелятивистских электронов (§§ 4.3, 4.4). Строго говоря, это "несправедливо" по отношению к ЛСЭ СВЧ-диапазона (§ 4.5).

Пучок электронов в периодической структуре является *активной средой*, способной усиливать внешнее излучение. В этом отношении ЛСЭ принципиально не отличаются от лазеров и мазеров, в которых активной средой является набор атомов и молекул. При введении обратной связи такой усилитель становится генератором, а условие генерации ничем не отличается от хорошо известного из радиотехники.

Действительно, если часть мощности излучения с выхода усилителя подается системой обратной связи на его вход (рис. 4.1), то уравнение баланса мощности, очевидно, имеет вид

$$P_2 = \kappa(P_1 + \xi P_2), \quad (4.2)$$

где  $\kappa$  и  $\xi$  – коэффициенты усиления и обратной связи соответственно. Отсюда

$$P_2 = \frac{\kappa}{1 - \xi\kappa} \cdot P_1 \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \xi = \frac{1}{\kappa}.$$

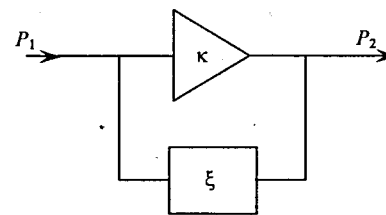


Рис. 4.1. Схема генератора:  $\kappa$  – усилитель,  $\xi$  – система обратной связи

Таким образом, условие генерации (или автогенерации, как иногда говорят) имеет вид

$$\xi\kappa = 1 \quad (4.3)$$

Это условие является общим для любых усилительных систем (не только в технике, но и в природе!), и вид этого условия не зависит от конкретного устройства усилителя-генератора.



В технике принято измерять коэффициент усиления в логарифмических единицах *беллах* (Б – русское сокращение, В – англ.), в честь американца шотландского происхождения А. Г. Белла (A. G. Bell) – изобретателя телефона (1876 г.). На практике используется единица, в десять раз меньшая, – *децибел* (дБ, dB – англ.). В физике традиционно используют эти единицы для измерения величины усиления или ослабления уровня сигнала (электрического, звукового, т. е. механического давления, и некоторых других). При этом принято определение

$$\kappa_{[\text{дБ}]} = 20 \cdot \lg \frac{A_2}{A_1}, \quad \text{или} \quad \kappa_{[\text{Б}]} = 2 \cdot \lg \frac{A_2}{A_1}. \quad (4.4)$$

Иными словами, при усилении 20 дБ (или 2 Б) отношение уровней сигнала на входе и выходе равно  $A_2/A_1 = 10$ . Кроме того, иногда пользуются также единицей *децибел мощности* (мдБ, mdB – англ.), которой измеряют отношение квадратов уровней сигнала (мощность):

$$\kappa_{[\text{мдБ}]} = 10 \cdot \lg \frac{P_2}{P_1}, \quad \text{или} \quad \kappa_{[\text{мБ}]} = \lg \frac{P_2}{P_1}. \quad (4.5)$$

где  $P = A^2$  – мощность сигнала. Сравнивая (4.4) и (4.5), видим, что  $\kappa_{[\text{мдБ}]} = \kappa_{[\text{дБ}]}$ , а различие имеет место на уровне измерений: следует различать, что измеряет прибор – сигнал или его мощность.

#### § 4.2. Электронный пучок в полях ондулятора и излучения

Рассмотрим механизм усиления излучения при взаимодействии электромагнитной волны с электронным пучком, проходящим сквозь плоский ондулятор (рис. 2.11), поперечное поле которого измеряется по закону (2.45).<sup>\*)</sup> Пренебрегая изменением скорости электрона  $v_0$  за один проход ондулятора (считаем:  $\dot{s} \approx v_0 = \text{const}$ ), из (2.49) запишем значение  $x$ -компоненты скорости электрона, приняв  $x'(0) = 0$ :

$$v_x = v_0 \cdot x'(s) = \alpha_0 v_0 (1 - \cos k_d s), \quad (4.6)$$

где  $\alpha_0$  – угловая амплитуда (2.50). Электромагнитную волну излучения в ондуляторе в общем случае можно представить в виде суперпозиции двух волн, распространяющихся по пучку и против него:

$$\vec{E}_w(s, t) = \vec{E}_{w1} \cdot \sin(ks - \omega t + \varphi_1) + \vec{E}_{w2} \cdot \sin(ks + \omega t + \varphi_2), \quad (4.7)$$

где  $E_{w1}, w2, \varphi_1, 2$  – амплитуды и фазы волн;  $k$  и  $\omega$  – волновое число и частота. (Индекс  $w$  здесь и ниже от англ. wave – волна). Волны (4.7), очевидно, линейно поляризованы. При  $\vec{E}_{w1} = \vec{E}_{w2} = \vec{E}_0$  имеем случай стоячей волны

$$\vec{E}(s, t) = 2\vec{E}_0 \sin\left(ks + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right). \quad (4.8)$$

В поле этих волн энергия электрона изменяется,<sup>\*)</sup> что следует из уравнения движения (2.46), куда теперь следует добавить электрическое поле волны:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{B}(s)] + e\vec{E}. \quad (4.9)$$

Умножая это уравнение скалярно на вектор  $\vec{v}$  и учитывая равенства

$$\frac{d\varepsilon_e}{dt} = \left(\frac{\vec{p}}{\varepsilon}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right) = \left(\vec{v}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right), \quad (\vec{v}, [\vec{v}, \vec{B}]) = 0,$$

получим

$$\frac{d\varepsilon_e}{dt} = e(\vec{E}, \vec{v}) = e(E_x v_x + E_y v_y). \quad (4.10)$$

Но в ондуляторе электрон совершает вынужденные колебания по направлению  $x$ , поэтому  $v_x \gg v_y$ , и основной вклад в изменение энергии дает  $x$ -составляющая поля волн (4.7). Поэтому, как мы увидим и дальше, в плоском ондуляторе излучение ЛСЭ поляризовано линейно, и вектор  $\vec{E}$  направлен параллельно оси  $x$ .

Подставив в (4.10) значения  $E_x$  (4.7) и  $v_x$  (4.6), произведем простое тригонометрическое преобразование:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_e}{dt} = eE_x v_x = e\alpha_0 v_0 E_1 \times \\ \times \left\{ \sin(ks - \omega t + \varphi_1) - \frac{1}{2} [\sin((k + k_d)s - \omega t + \varphi_1) + \sin((k - k_d)s - \omega t + \varphi_1)] \right\} + \\ + e\alpha_0 v_0 E_2 \times \\ \times \left\{ \sin(ks + \omega t + \varphi_2) - \frac{1}{2} [\sin((k + k_d)s + \omega t + \varphi_2) + \sin((k - k_d)s + \omega t + \varphi_2)] \right\}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

<sup>\*)</sup> Не путать с потерями энергии на излучение: здесь  $\vec{E}$  – электрическое поле внешней электромагнитной волны, а не волны, испускаемой частицей. Впрочем, как будет видно дальше (§ 4.4), в определенных условиях эти волны разделить невозможно.

<sup>\*)</sup> В этом параграфе используется подход, заимствованный из монографии [4], с. 4–11.

Далее учтем, что координаты частицы  $s$  есть  $s = v_0 t$ , а частота и волновое число излучения связаны равенством  $\omega = ck$ . Теперь преобразуем аргументы синусов в (4.11), в том порядке, как они представлены в этом выражении, и опустим на время фазы  $\varphi_1, \varphi_2$  (см. примечание после формулы (4.19) ниже). Получим:

$$\begin{aligned} ks - \omega t &= \omega \left( \frac{v_0}{c} - 1 \right) t \approx -\frac{\omega t}{2\gamma^2}, \\ (k + k_d)s - \omega t &\approx -\frac{\omega t}{2\gamma^2} + k_d v_0 t, \\ (k - k_d)s - \omega t &\approx -\frac{\omega t}{2\gamma^2} - k_d v_0 t, \\ ks + \omega t &= \omega \left( \frac{v_0}{c} + 1 \right) t \approx 2\omega t, \\ (k + k_d)s + \omega t &\approx 2\omega t + k_d v_0 t, \\ (k - k_d)s + \omega t &\approx 2\omega t - k_d v_0 t. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Первые два выражения содержат медленные частоты

$$\frac{\omega}{2\gamma^2} \text{ и } \frac{\omega}{2\gamma^2} - k_d v_0, \quad (4.13)$$

а остальные четыре – быстрые частоты, порядка  $2\omega t$ .

Основной вклад в изменение энергии электрона за пролет ондулятора дают именно медленные частоты, что видно хотя бы из общего выражения

$$f(\tau) = \int_0^\tau \sin \omega t \cdot dt = \frac{1 - \cos \omega \tau}{\omega} \leq \frac{2}{\omega}.$$

(Здесь  $\omega$  – произвольная частота). Таким образом, изменение энергии обратно пропорционально частоте. Поэтому слагаемые, содержащие быстрые частоты, можно попросту отбросить.\*) Кроме того, из двух медленных частот вторая более медленная, вплоть до того, что ее можно обратить в ноль, выполнив условие резонанса

$$\omega = 2\gamma_{\text{res}}^2 k_d \beta_{\text{res}} c, \text{ или } \lambda = \frac{\pi}{\beta_{\text{res}} \gamma_{\text{res}}^2 k_d} = \frac{d}{2\beta_{\text{res}} \gamma_{\text{res}}^2}, \quad (4.14)$$

где  $\beta_{\text{res}} = (v_0)_{\text{res}}/c$ . Этот результат имеет довольно ясный физический смысл: в точке  $s = v_0 t$  самая медленная фаза в (4.11) постоянна, если выполнено условие

\* Эта операция соответствует математическому приему усреднения по быстрым колебаниям.

резонанса. Поэтому и взаимодействие электрона с волной в резонансе максимально. Обратим внимание, что в этих выражениях частота  $\omega$  и длина волны  $\lambda$  волны излучения считаются заданными, а через них определена резонансная энергия электрона

$$\varepsilon_{\text{res}} = \gamma_{\text{res}} \cdot mc^2.$$

Именно такой выбор фиксированных ( $\omega, \lambda$ ) и изменяющихся ( $\varepsilon_{\text{res}}, \gamma_{\text{res}}$ ) параметров позволяет наиболее ясно описать картину усиления и генерации излучения в ЛСЭ.

Сравнивая последнее выражение с (2.61), видим, что в ондуляторном режиме ( $K \ll 1$ ) волна, распространяющаяся вдоль оси пучка ( $\theta = 0$ ), максимально возможно изменяет энергию электрона, если ее длина волны совпадает с длиной волны ондуляторного излучения:

$$\lambda = \lambda_{\text{undulator}}. \quad (4.15)$$

Это и есть *необходимое условие* максимального усиления излучения при проходе пучка сквозь ондулятор. Достаточное условие состоит в правильном выборе фазы волны относительно фазы скорости  $v_x$  электрона – фаза должна быть такой, чтобы электрон отдавал энергию волне, т. е. чтобы в среднем по всем электронам пучка (сгустка электронов) величина изменения энергии была отрицательной:

$$\left\langle \frac{d\varepsilon_e}{dt} \right\rangle < 0. \quad (4.16)$$

Чтобы выяснить, что для этого нужно, посмотрим, как изменяется энергия электрона со временем при прохождении ондулятора. Теперь, как мы только что выяснили, достаточно рассмотреть вклад резонансного слагаемого в (4.11):

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_e}{dt} &\approx \frac{\alpha_0 v_0 e E_w}{2} \sin \psi(t), \\ \psi(t) &= \left( \frac{\omega}{2\gamma^2} - k_d v_0 \right) \cdot t - \varphi_1, \quad \psi(0) = -\varphi_1 \equiv \psi_0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Здесь  $E_w \equiv E_1 = \text{const}$  – амплитуда сопутствующей волны. Энергия электрона изменяется в соответствии с уравнением (4.17), отклоняясь от своего значения на входе в ондулятор  $\varepsilon_e(0)$  на величину  $\varepsilon_e(t) - \varepsilon_e(0)$ . При этом энергия электрона отличается от резонансного значения на величину

$$\delta\varepsilon_e(t) = \varepsilon_e(t) - (\varepsilon_e)_{\text{res}} \ll (\varepsilon_e)_{\text{res}}.$$

Значение  $\delta\varepsilon_e(t)$  на входе в ондулятор, т. е.  $\delta\varepsilon_e(0)$ , называют *отстройкой по энергии*.

Произведя разложение  $\gamma = \gamma_{\text{res}} + \delta\gamma$ , из (4.17) получим

$$\psi(t) \approx \left[ \frac{\omega}{2\gamma^2} \left( 1 - 2 \frac{\delta\gamma(t)}{\gamma} \right) - k_d v_0 \right] \cdot t + \psi_0, \quad \delta\gamma = \frac{\delta\varepsilon_e}{mc^2} \ll 1,$$

что при условии выполнения резонанса (4.14) дает

$$\psi(t) \approx -\frac{\omega}{\gamma_{\text{res}}^3} \delta\gamma(t) \cdot t + \psi_0, \quad \text{или} \quad \frac{d\psi}{dt} \approx -\frac{\omega}{\gamma_{\text{res}}^3} \cdot \frac{\delta\varepsilon_e(t)}{mc^2}. \quad (4.18)$$

Здесь принято

$$\left| t \cdot \frac{d(\delta\gamma)}{dt} \right| \ll \delta\gamma,$$

что хорошо выполняется для медленных колебаний  $\delta\gamma$  (см. задачу 4.1 ниже). Дифференцируя (4.18) по времени и подставляя в полученное выражение значение  $d\varepsilon_e/dt$  из (4.17), приходим к уравнению фазовых колебаний

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dt^2} + \Omega^2 \sin\psi &= 0, \\ \Omega^2 &= \alpha_0 (v_0)_{\text{res}} \omega \frac{eE_w}{\gamma_{\text{res}}^3 mc^2} = \frac{2\beta_{\text{res}} r_e B E_w}{\gamma_{\text{res}}^2 m}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Второе из выражений для  $\Omega^2$  в (4.19) получено подстановкой значения  $\alpha_0$  (2.50) с учетом значений  $\rho_L$  (2.47) и  $d$  из (4.14):

$$\alpha_0 = \frac{\gamma_e B \lambda}{\pi mc^2}. \quad (4.20)$$

Это уравнение полностью совпадает по форме с уравнением фазовых колебаний в теории резонансных (циклических и линейных) ускорителей. Параметр  $\Omega$  есть частота (малых) фазовых колебаний, поскольку при  $\psi \ll 1$  уравнение (4.19) принимает вид уравнения линейных (малых) колебаний  $\ddot{\psi} + \Omega^2 \psi = 0$ .<sup>\*)</sup> Решение этого уравнения, как известно, имеет вид

<sup>\*)</sup> Величина  $\Omega^2$  должна быть положительной для устойчивого фазового движения. Отсюда следует, что для электрона (заряд  $e < 0$ ) это условие выполняется в области фаз волны  $\varphi_1, \varphi_2$ , где  $E_w(t) < 0$ . Далее считаем, что этот "выбор" фаз выполняется автоматически, а другой случай — неустойчивых фазовых колебаний — интереса для физики ЛСЭ не представляет.

$$\psi(t) = \psi_0 \cdot \cos \Omega t + \frac{\dot{\psi}_0}{\Omega} \cdot \sin \Omega t, \quad (4.21)$$

где  $\psi_0 \equiv \psi(0)$ ,  $\dot{\psi}_0 \equiv \left. \frac{d\psi}{dt} \right|_{t=0}$ . Для реалистических параметров ЛСЭ величина  $\Omega$  довольно мала, так что изменение фазы малых колебаний за пролет ондулятора много меньше единицы (задача 4.1). С увеличением амплитуды период фазовых колебаний увеличивается, т. е. частота еще больше уменьшается.

**Задача 4.1.** Оценить частоту малых фазовых колебаний электрона в ондуляторе с полем в максимуме  $B_0 = 0,5$  Тл, если плотность потока энергии излучения составляет  $S_w = 1$  МВт/см<sup>2</sup>. Оценить набег фазы колебаний на длине 1 м. Энергия электронов — 450 МэВ.

Ларморовский радиус электрона с данной энергией в поле 0,5 Тл составляет 3,0 м. Амплитуда поля волны

$$E_w = \sqrt{\frac{4\pi}{c} \cdot S_w} \approx 60 \text{ Гс}. \quad (4.20)$$

Из (4.19) найдем  $\Omega \approx 6,5 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$  ( $f \approx 40$  кГц), и набег фазы малых колебаний составит

$$d\psi \approx \frac{\Omega \cdot \Delta s}{\beta c} \sim 2 \cdot 10^{-3} \text{ рад на длине на 1 м.}$$

Отметим, что зависимость частоты  $\Omega$  от плотности потока излучения довольно слабая — как корень четвертой степени. Поэтому набег фазы на длине ондулятора ( $L = 10-100$  м, см. табл. 4.1 ниже) остается малым даже при существенно больших потоках энергии излучения. Результаты задачи 4.1 подтверждают предположение, сделанное при выводе уравнения (4.19). Это обстоятельство позволяет найти далее приближенное решение задачи о потерях энергии электроном в ондуляторе и в поле волны. В общем виде решение этой задачи в аналитических функциях найти не удастся.

Поскольку изменение фазы в единицу времени много меньше единицы, в приближении  $\Omega t \ll 1$  можно принять

$$\psi_1(t) = \psi_0 + \dot{\psi}_0 \cdot t.$$

Это, в частности, справедливо для малых колебаний (4.21). Подставив это значение  $\psi_1(t)$  в уравнение фазовых колебаний (4.19), найдем (считая здесь  $\Omega(t) \approx \text{const}$ , см. § 4.4)

$$\frac{d\psi}{dt} \approx -\Omega^2 \int \sin(\psi_0 + \dot{\psi}_0 t) \cdot dt = -\frac{\Omega^2}{\dot{\psi}_0} \cos(\psi_0 + \dot{\psi}_0 t) + C_1,$$

а из начальных условий (4.21) получим значение константы

$$C_1 = \dot{\psi}_0 + \frac{\Omega^2}{\dot{\psi}_0} \cos \psi_0.$$

Интегрируя еще раз, имеем в следующем приближении

$$\psi_2(t) = -\frac{\Omega^2}{\dot{\psi}_0^2} \sin(\psi_0 + \dot{\psi}_0 t) + C_1 t + C_2.$$

Из условия  $\psi_2(0) = \psi_0$  находим

$$C_2 = \psi_0 + \frac{\Omega^2}{\dot{\psi}_0^2} \sin \psi_0.$$

В результате проделанных вычислений  $\psi(t)$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \psi_0 + \dot{\psi}_0 t + \delta\psi(t), \\ \delta\psi(t) &= \frac{\Omega^2 \cos \psi_0}{\dot{\psi}_0} t - \frac{\Omega^2}{\dot{\psi}_0^2} (\sin(\psi_0 + \dot{\psi}_0 t) - \sin \psi_0). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Сказанное выше также позволяет утверждать, что

$$\delta\psi \ll \psi_0 + \dot{\psi}_0 \cdot t,$$

и произвести разложения по  $\delta\psi$  в последующих вычислениях.

Потери энергии электрона за проход ондулятора в поле электромагнитной волны найдем, подставив (4.22) в (4.17):<sup>\*)</sup>

$$\Delta \varepsilon_e \approx \frac{\alpha_0 v_0 e E_w}{2} \int_0^\tau \sin \psi(t) dt, \quad \tau = \frac{L}{v_0}, \quad (4.23)$$

где  $L$  – длина ондулятора. Представив подынтегральное выражение в виде

$$\sin \psi(t) \approx \sin(\psi_0 + \dot{\psi}_0 t) + \cos(\psi_0 + \dot{\psi}_0 t) \cdot \delta\psi(t),$$

найдем

<sup>\*)</sup> Обратим внимание на различие  $\Delta \varepsilon_e$  и  $\delta \varepsilon_e(t)$ . Первая величина есть суммарная потеря энергии электрона за проход ондулятора.

$$\begin{aligned} f(\psi_0) &\equiv \int_0^\pi \sin \psi(t) dt = \frac{\cos \psi_0 - \cos(\psi_0 + \dot{\psi}_0 \tau)}{\dot{\psi}_0} + \\ &+ \frac{\Omega^2 \cos \psi_0 (\cos(\psi_0 + \dot{\psi}_0 \tau) - \cos \psi_0)}{\dot{\psi}_0^3} + \frac{\Omega^2 \tau \cos \psi_0 \sin(\psi_0 + \dot{\psi}_0 \tau)}{\dot{\psi}_0^2} + \\ &+ \frac{\Omega^2}{\dot{\psi}_0^3} \left[ \frac{-\sin^2(\psi_0 + \dot{\psi}_0 \tau) + \sin^2 \psi_0}{2} + \sin \psi_0 \sin(\psi_0 + \dot{\psi}_0 \tau) - \sin^2 \psi_0 \right]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Теперь можно приступить к вычислению усиления энергии электромагнитной волны в ондуляторе, через который проходит пучок моноэнергетических электронов. Считаем, что электроны пучка имеют одинаковую энергию и они равномерно распределены по фазе влета:

$$\begin{aligned} \frac{dN_e}{d\psi_0} &= \frac{N_e}{2\pi}, \quad 0 \leq \psi_0 \leq 2\pi, \\ N_e &= \frac{I_e \tau}{e}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

где  $N_e$  – число электронов пучка с током  $I_e$ , которое "умещается" в ондуляторе длины  $L = v_0 \tau$ . Электрон, взаимодействуя с волной в ондуляторе, отдает ей или забирает из нее энергию – в зависимости от фазы влета в ондулятор  $\psi_0$ .

В среднем по пучку (т. е. по фазе влета) изменение энергии электрона за проход ондулятора составит

$$\langle \Delta \varepsilon_e \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta \varepsilon(\psi_0) d\psi_0 = \frac{\alpha_0 v_0 e E_w}{4\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi_0) d\psi_0. \quad (4.26)$$

Подставив сюда  $f(\psi_0)$  (4.24), вычислим

$$\langle f \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi_0) d\psi_0 = -\frac{\Omega^2}{\dot{\psi}_0^3} \left( 1 - \cos \dot{\psi}_0 \tau - \frac{\dot{\psi}_0 \tau \sin \dot{\psi}_0 \tau}{2} \right).$$

Отсюда видно, что  $\langle f \rangle$  содержит функцию аргумента  $\chi = \dot{\psi}_0 \tau$  (рис. 4.2):

$$F(\chi) = \frac{1}{\chi^3} \left( 1 - \cos \chi - \frac{\chi \sin \chi}{2} \right), \quad \langle f \rangle = \Omega^2 \tau^3 F(\chi). \quad (4.27)$$

В литературе можно встретить другую форму записи функции  $F(\chi)$ , тождественную (4.27):

$$F(\chi) = -2 \frac{d}{d\chi} \left( \frac{\sin^2 \chi / 2}{\chi^2} \right).$$

Аргумент  $\chi$  пропорционален отстройке по энергии электронов пучка (см. (4.18)):

$$\chi = \psi_0 \tau = -\frac{\omega \tau}{\gamma_{\text{res}}^3} \frac{\delta \varepsilon(0)}{mc^2}. \quad (4.28)$$

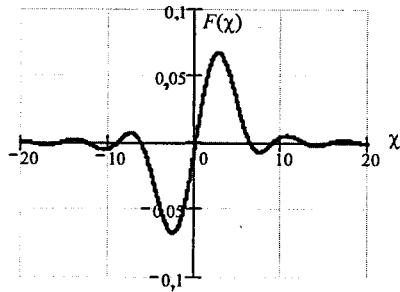


Рис. 4.2. Функция  $F(\chi)$

Подставив в (4.27) значение  $\Omega^2$  из (4.19) и учитывая значение параметра  $\alpha_0$  (2.50), запишем величину  $\langle \Delta \varepsilon_e \rangle$  в виде

$$\langle \Delta \varepsilon_e \rangle = \frac{(\alpha_0 v_0 e E_w)^2}{2\gamma_{\text{res}}^3 mc^2} \omega \tau^3 F(\chi). \quad (4.29)$$

Отметим, что этот результат не зависит от знака частиц,  $F(\chi)$  – асимметричная функция аргумента  $\chi$ , отрицательная при  $\chi < 0$  ( $\delta \varepsilon(0) > 0$ ). Следовательно, при  $\delta \varepsilon(0) > 0$  электроны пучка теряют (в среднем) энергию, отдавая ее волне. В точном резонансе ( $\chi = 0$ ) передачи энергии от электрона или к электрону нет. Максимум функция  $|F(\chi)|$  достигает при  $\chi = \pm 2,6$ :  $|F(\chi)|_{\text{max}} = 0,0675$ . Зная величину  $\langle \Delta \varepsilon \rangle$ , находим коэффициент усиления энергии излучения за один проход ондулятора:

$$\kappa = \frac{\varepsilon_w(0) - \langle \Delta \varepsilon_e \rangle N_e}{\varepsilon_w(0)} = 1 + \frac{-\langle \Delta \varepsilon_e \rangle N_e}{\varepsilon_w(0)}.$$

Знак (-) отражает направление передачи энергии – от электрона волне. Энергия волны в объеме  $V_w$  равна

$$\varepsilon_w = \frac{E_w^2}{4\pi} V_w. \quad (4.30)$$

Подставив это значение и  $\langle \Delta \varepsilon \rangle$  (4.29) в (4.30), получим

$$\kappa = 1 + \frac{4\pi^2 \alpha_0^2 \beta^2 r_e c^3 \tau^3}{\gamma_{\text{res}}^3 V_w \lambda} \cdot F(\chi) N_e. \quad (4.31)$$

Отметим, что этот результат справедлив и для сгруппированного пучка, если длина сгустка  $\ell_b$  (индекс  $b$  здесь и ниже от англ. bunch – сгусток) много больше длины волны излучения, а расстояние между сгустками больше длины ондулятора (сгустки излучают независимо, так что взаимное влияние сгустков исключено). Тогда в (4.31) и (4.25)  $N_e = N_{\text{bunch}}$  – число электронов в сгустке,  $I_e$  – пиковый ток пучка

$$I_{\text{peak}} = \frac{e N_{\text{bunch}}}{\tau_b}, \quad \tau_b = \frac{\ell_b}{v_0}. \quad (4.32)$$

Наконец, еще одна особенность полученных значений  $\langle \Delta \varepsilon_e \rangle$  (4.29) и  $\kappa$  (4.31). Нетрудно проследить, что при выводе этих выражений (формулы (4.23)–(4.31)) значение напряженности поля излучения  $E_w$  молчаливо предполагалось постоянным во времени. Это означает, что передача электронов в излучение за проход ондулятора принята здесь пренебрежимо малой по сравнению с энергией излучения, сопровождающего пучок. Иными словами, выражение для коэффициента усиления  $\kappa$  (4.31) справедливо в *режиме малого усиления*. Такой режим характерен для ЛСЭ с обратной связью, к обсуждению которых и переходим.

### § 4.3. ЛСЭ с обратной связью

Схема ЛСЭ с обратной связью практически та же, что и у оптических лазеров (рис. 4.3), и, подобно "лазерам на красителях", рабочее тело (активная среда) протекает сквозь оптический резонатор.

Условие генерации (4.3) применимо здесь полностью. Коэффициент обратной связи  $\xi$  можно получить, записав баланс потоков энергии излучения, аналогичный (4.1), но несколько отличный по форме записи. Поэтому начнем этот

вывод сначала. Стоячая волна излучения, образующаяся в резонаторе, есть суперпозиция двух встречных волн, бегущих навстречу друг другу. Пусть поток

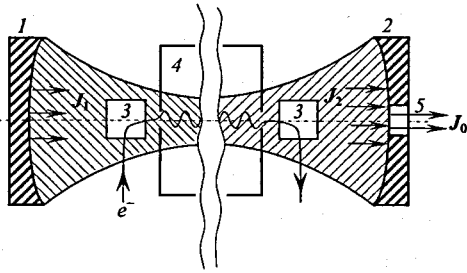


Рис. 4.3. Принципиальная схема ЛСЭ с оптическим резонатором: 1, 2 – зеркала резонатора; 3 – поворотные магниты ввода-вывода электронного пучка; 4 – ондулятор; 5 – поток излучения из резонатора

энергии волны, бегущей слева направо, равен  $J_1$  на поверхности зеркала 1. В лазере этот поток сопровождается пучком электронов и усиливается в  $\kappa$  раз:  $J_2 = \kappa J_1$  есть поток, падающий на зеркало 2. Здесь этот поток частично выходит через отверстие в зеркале 2 – "полезное" излучение  $J_0 = \mu_0 J_2$ , где  $\mu_0 < 1$  – "коэффициент полезного действия" ЛСЭ. Часть потока  $J_2$  теряется – поглощается зеркалом и уходит через его края (известные *дифракционные потери* лазера). Отразившийся поток распространяется навстречу пучку и поэтому не усиливается. Достигнув зеркала 1, этот поток частично теряется, как и поток  $J_2$ , но преимущественно отражается, добавляясь в поток  $J_1$ . В начале генерации излучения процесс идет с нарастанием энергии излучения, пока не достигается насыщение или *установившийся режим* непрерывной генерации излучения. В установившемся режиме баланс потоков энергии, очевидно, имеет вид

$$\begin{aligned} J_2 &= \kappa J_1, \quad J_0 = \mu_0 J_2, \\ J_1 &= (1 - \mu_1)(J_2 - \mu_2 J_2 - J_0), \end{aligned} \quad (4.33)$$

где  $\mu_1 \approx \mu_2 = \mu$  – коэффициент потерь энергии на зеркалах 1, 2. Подставив  $J_0$  в третье равенство и полученное значение  $J_1$  в первое, приходим к условию существования установившегося режима генерации:

$$\kappa(1 - \mu)(1 - \mu - \mu_0) = 1. \quad (4.34)$$

Коэффициенты  $\mu$ ,  $\mu_0 \ll 1$  (иначе ЛСЭ не начнет генерировать в таком режиме – см. § 4.4). Поэтому условию (4.34) можно придать вид

$$\begin{aligned} \kappa &\approx 1 + 2\mu + \mu_0 \approx 1 + Q^{-1}, \\ Q &= \frac{1}{2\mu + \mu_0}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

где  $Q$  – добротность ЛСЭ, равная отношению потока энергии, запасенной в резонаторе, к потоку энергии потерь. Сравнивая полученное условие для  $\kappa$  с выражением (4.31), получим значение *порогового тока* генерации излучения в ЛСЭ:

$$\begin{aligned} I_e &= \frac{eN_e}{L} \beta c \geq \frac{\gamma^3 \lambda \sigma_w}{2\pi Q \alpha_0^2 L^3 F_{\max}} I_0, \\ I_0 &= \frac{mc^3}{e} \approx 17 \text{ кА}; \quad \sigma_w = \frac{V_w}{L}, \quad \beta \approx 1. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Здесь  $\sigma_w$  – среднее, по длине потока излучения, значение площади поперечного сечения потока, параметр  $F_{\max} = 0,0675$  (см. (4.27) и текст там же). Присутствие этого параметра в знаменателе порогового тока имеет важный физический смысл: при увеличении тока электронов от нулевого значения генерация начинается на моде оптического резонатора, для которой *отстройка энергии* электронов (см. (4.28)) соответствует значению  $\chi \approx 2,6$ . Зависимость порогового тока от энергии электронов очень сильная:  $I_e \propto \gamma^5$ , т. к. параметр  $\alpha_0 \propto \gamma^{-1}$  (см. (2.50)). Однако правильнее считать заданной длину волны, которой определяются резонансная энергия электронов или, при заданной энергии, период ондулятора (см. (4.14)).

Обратим еще раз внимание на тот факт, что ЛСЭ с обратной связью работает в режиме малого усиления, когда энергия, запасенная в стоячей волне в резонаторе, значительно больше энергии, которая передается в излучение сгустком электронов за один проход ондулятора и, соответственно, покидает лазер (динамическое равновесие (4.33)).

**Задача 4.2.** Оценить пороговый ток генерации ЛСЭ на длине волны  $\lambda = 10$  мкм, если период ондулятора составляет 9 см, его длина 80 м, добротность резонатора  $Q = 10^3$  и максимум поля в ондуляторе  $B_0 = 0,5$  Тл.

Из (4.14) находим  $\gamma_{res} = 67,08$  ( $\varepsilon_e = 34,28$  МэВ), что соответствует  $\rho_L = 22,8$  см и  $\alpha_0 = 0,063$ . Подстановка в (4.36) дает

$$I_e > 9,2 \text{ А.}$$

ЛСЭ с обратной связью делают на основе двух видов ускорителей электронов – линейных и циклических (синхротронов-накопителей). В обоих случаях электронные пучки сгруппированы, а проблема высокой средней мощности пучка, необходимой для генерации мощного излучения, решается в каждом случае по-разному.

В накопителях-синхротронах пучок циркулирует непрерывно и потери энергии электронов восполняются ускоряющей ВЧ-системой синхротрона. В магнитную систему ЛСЭ вводятся дополнительные отклоняющие элементы, позволяющие сжать ступок дополнительно перед входом в ондулятор – за счет начального разброса по энергии и различия длин траекторий электронов с разной энергией внутри поворотного магнита. Такая схема получила название "оптический клистрон" (Н. А. Винокуров, А. Н. Скринский, 1977 г.).

В ЛСЭ на основе линейных ускорителей ("линаков") используют однопролетный пучок, энергия электронов которого поглощается в коллекторе (приемнике) на выходе генератора. Более перспективными являются ЛСЭ на основе линаков-рекуператоров, в которых "отработанные" электроны замедляются, снова проходя ускоряющую структуру в замедляющей фазе. Такой ЛСЭ-рекуператор (рис. 4.4) создан в Институте ядерной физики им. Г. И. Будкера (Новосибирск) и в перспективе станет мощным генератором ИК-диапазона на длину волны от 10 до 2 мкм – проект MARS (Multipass Accelerator-Recuperator Source). К 2007 г. введена первая ступень MARS'a, генерирующая излучение с длиной волны около 10 мкм при непрерывной мощности несколько кВт. Излучение этого ЛСЭ используется в экспериментальных исследованиях в химии.

ЛСЭ с обратной связью<sup>\*)</sup> работают во многих лабораториях мира: в Японии – 9, США – 6, Германии – 3, Голландии – 3, Франции – 2, Италии – 2 и по одному в России, Израиле, Китае и Ю. Корее. Все вместе они перекрывают диапазон длин волн излучения от единиц мм (СВЧ-радиодиапазон) до 200 нм ("вакуумный" ультрафиолет).

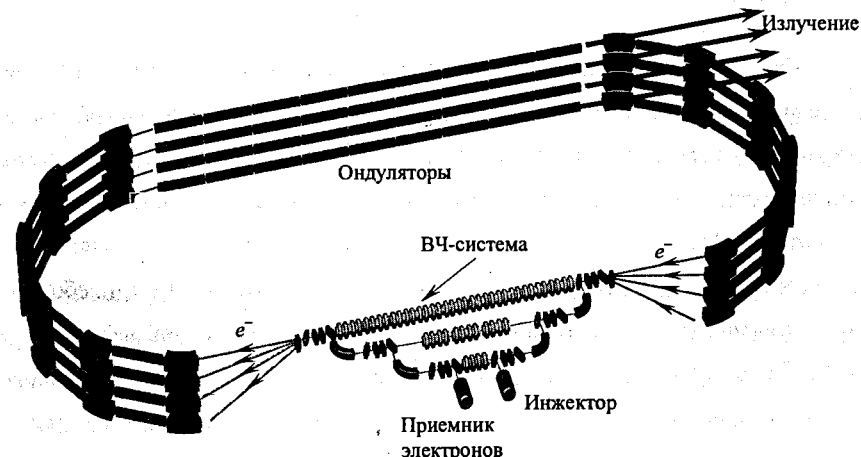


Рис. 4.4. Схема ЛСЭ MARS. Электронный пучок из инжектора набирает энергию в ускоряющей системе, проходит через ондулятор и излучает; ускоряется еще раз и "поднимается" на вторую ступень со вторым ондулятором; и т. д., пока электроны не получают максимальную энергию в последней ступени. Время пролета подбирается так, что, пройдя последнюю ступень, электрон попадает в замедляющую фазу поля ВЧ-системы и начинает скатываться по энергии, пока не "доберется" до энергии инжекции и, отклонившись в приемник, поглощается в нем. Длина волны излучения падает от ступени к ступени как  $\varepsilon_e^{-2}$  (см.(4.14)).

ЛСЭ с обратной связью обладают рядом преимуществ по сравнению с классическими лазерами:

<sup>\*)</sup> В зарубежной литературе принят термин "FEL oscillator", что подразумевает использование оптического резонатора – "осциллятора".

1. Плавная перестройка (изменением энергии электронов) длины волны излучения.
2. Возможность генерации излучения в диапазоне (диапазонах) длин волн, недоступном классическим лазерам.
3. Отсутствие проблемы перегрева активной среды ("рабочего тела"), что заметно ограничивает предельную мощность классических твердотельных лазеров.

Главным ограничением мощности излучения ЛСЭ-"осцилляторов" являются их зеркала. Нагрев и, как следствие, деформация зеркал, "уводящая" настройку резонатора, ограничивает мощность лазера. Отсутствие качественных зеркал в рентгеновском диапазоне сдерживает продвижение в коротковолновую область диапазона. На этом направлении, правда, наметился в последние годы значительный прогресс, в том числе в отечественных лабораториях (Н. Н. Салащенко с сотрудниками, Институт прикладной физики РАН, Н. Новгород). Тем не менее, главные надежды на создание ЛСЭ рентгеновского диапазона связывают сегодня с "лазерами без обратной связи", к рассмотрению которых мы и переходим.

#### § 4.4. ЛСЭ в режиме самоусиления

Первая формулировка принципа действия таких лазеров принадлежит российским физикам – А. М. Кондратенко и Е. Л. Салдину, которые работали в то время (1980 г.) в Институте ядерной физики им. Г. И. Будкера в Новосибирске. Тем не менее, в отечественной литературе нет устоявшегося названия подобных устройств. В иностранной литературе принят термин SASE FEL: Self-Amplification of Spontaneous Emission in FEL – "ЛСЭ в режиме самоусиления спонтанного излучения". Такой ЛСЭ, в отличие от осциллятора, не имеет зеркал, и сгусток релятивистских электронов при определенных параметрах "само-усиливает" начальную флуктуацию *спонтанного* (самопроизвольного) излучения.

Механизм усиления тот же, что и рассматриваемый в § 4.2. Отличие в том, что теперь нужен большой коэффициент усиления, чтобы за время пролета сквозь ондулятор энергия излучения могла возрасти до предельного уровня (*режим насыщения*, см. рис. 4.5 с. 127). Отсюда следует, что подход, использованный при выводе выражений (4.29), (4.31), когда значение  $E_w$  считалось постоянным за время  $\tau$  (4.23), теперь неприменим – SASE FEL работает принципиально в *режиме большого усиления*.

"Затравочный" уровень спонтанного излучения определяется величиной потерь энергии электрона на ондуляторное излучение (2.74). Это излучение "извлекает" из сгустка электронов энергию, которая поступает в излучение, увеличивая напряженность поля  $E_w$ , что, в свою очередь, ведет к росту потерь энергии электронов и т. д. – поле излучения "лавинообразно" нарастает.

Для вывода уравнения, описывающего рост энергии излучения в SASE FEL по мере прохода сгустка электронов сквозь ондулятор, приходится "начать все сначала", с уравнений (4.17), где теперь поле  $E_w$  есть функция времени  $E_w(t)$ . Ограничимся упрощенным анализом, используя, в частности, приближенное значение фазы  $\psi(t)$  (4.18).

Прирост энергии излучения равен сумме потерь энергии (с обратным знаком) электронов сгустка

$$\delta \epsilon_w(t) = - \sum_{i=1}^{N_b} (\delta \epsilon_e(t))_i. \quad (4.37)$$

Тогда первое из уравнений (4.17) можно переписать для энергии излучения, просуммировав по электронам сгустка. При этом учтем соотношение (4.30) между энергией излучения  $\epsilon_w$  и напряженностью поля излучения  $E_w$ . Кроме того, примем объем излучения равным, по порядку величины, объему сгустка

$$V_w \sim \pi \sigma_x \sigma_y \ell_b, \quad (4.38)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y$  – поперечные размеры сгустка-эллипсоида;  $\ell_b$  – его длина. В результате уравнения (4.17) можно представить в виде (см. 4.18)



$$\frac{d\varepsilon_w(t)}{dt} \approx -C \sum_{i=1}^{N_b} \sqrt{\varepsilon_w(t)} \cdot \sin \psi(t), \quad (4.39)$$

$$\psi(t) \approx \psi_0 + \delta\psi(t),$$

где

$$C = \frac{\beta_{\text{res}} \gamma_{\text{res}} c r_e \lambda B}{\pi \sqrt{\sigma_x \sigma_y} \ell_b}, \quad \delta\psi(t) \approx -\frac{\omega}{\gamma_{\text{res}}^3 m c^2} \cdot \int_0^t \delta\varepsilon_e(t) \cdot dt. \quad (4.40)$$

Конечно, можно  $\delta\varepsilon_e(t)$  в (4.40) выразить через  $\delta\varepsilon_w(t)$  и "замкнуть" систему уравнений. Но это приведет к системе нелинейных дифференциальных уравнений, аналитически неразрешимых. Поэтому поступим иначе – произведем усреднение по начальной фазе  $\psi_0$  до интегрирования по времени (в § 4.2 порядок действий был обратный). При суммировании по электронам сгустка в (4.39) введем функцию распределения электронов по начальным фазам  $\psi_0$ :

$$\frac{dN_e}{d\psi_0} = N_b f(\psi_0). \quad (4.41)$$

Поскольку

$$\int_0^{2\pi} \frac{dN_e}{d\psi_0} \cdot d\psi_0 = N_b,$$

то так выбранная функция распределения  $f(\psi_0)$  нормирована на единицу:

$$\int_0^{2\pi} f(\psi_0) \cdot d\psi_0 = 1. \quad (4.42)$$

Теперь можно произвести усреднение в первом из уравнений (4.39):

$$\frac{d\langle \varepsilon_w(t) \rangle}{dt} \approx -\frac{CN_b}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{\varepsilon_w(t, \psi_0)} \cdot f(\psi_0) \cdot \sin \psi(t, \psi_0) \cdot d\psi_0. \quad (4.43)$$

Если функции  $\varepsilon_w(\psi_0)$  и  $f(\psi_0)$  в подынтегральном выражении гладкие и симметричные относительно точки  $\psi_0 = \pi$  (середина сгустка), то интеграл в (4.43), очевидно, равен нулю.<sup>\*)</sup> Тем самым приходим к выводу, что сгусток электронов, "растянутый" по всему интервалу фаз  $\psi_0$  от 0 до  $2\pi$ , "мгновенно" не излучает.

<sup>\*)</sup> Это можно показать и другим способом: вынести, используя теорему о среднем,  $\sqrt{\varepsilon_w}$  и  $f(\psi_0)$  из под интеграла и учесть, что  $\int_0^{2\pi} \sin(\psi_0 + \delta) \cdot d\psi_0 = 0$ .

Слово "мгновенно" здесь вставлено, чтобы подчеркнуть отличие от случая малых потерь, рассмотренного в § 4.2. Там электроны теряли энергию в поле внешней волны постоянной амплитуды, и величина потерь за время  $\tau$ , в среднем по интервалу фаз (0,  $2\pi$ ), была отлична от нуля. Иначе обстоит дело в режиме самоусиления: очевидно, что правая часть уравнения (4.43) не равна нулю, если сгусток короткий, так что он уместается в интервал фаз

$$\Delta\psi_0 < \pi. \quad (4.44)$$

Вспомним теперь, что собственное излучение сгустка летит со скоростью света, сопровождая электроны. Поэтому условие (4.44) выполняется, если длина сгустка в собственной системе ("система частиц")<sup>\*)</sup> короче половины длины волны в той же системе:

$$\ell'_b < \frac{\lambda'}{2}, \quad \text{или} \quad \ell_b < \gamma^2 \frac{\lambda}{2}. \quad (4.45)$$

Второе неравенство следует из первого при переходе из системы частиц в лабораторную (задача 4.3). Это условие удастся выполнить в ЛИСЭ благодаря большому значению  $\gamma$  (см. задачу 4.4).

**Задача 4.3.** Получить второе неравенство в условиях (4.45): а) с помощью преобразований Лоренца; б) рассмотрением движения частицы и волны в лабораторной системе.

а) Запишем преобразования Лоренца для интервала длины  $\ell_b$  и волнового числа (обе величины "измеряем" в движущейся системе):

$$\ell'_b = \frac{\ell_b}{\gamma}, \quad k' = \gamma(1 - \beta)k, \quad \text{или} \quad \lambda' = \frac{\lambda}{\gamma(1 - \beta)}.$$

Отсюда условие  $\ell'_b < \lambda'/2$  дает

$$\ell_b < \frac{\lambda}{2(1 - \beta)} \approx \gamma^2 \lambda, \quad \beta \approx 1.$$

б) В этом случае первое из неравенств (4.45) нужно заменить требованием того, что фаза волны в точке нахождения движущейся частицы за время  $\tau_b \sim \ell_b/v$  сдвигается не более чем на  $\pi$ . Отсюда

$$c\tau_b \leq v\tau_b + \frac{\lambda}{2}, \quad \text{или} \quad \tau \leq \frac{\lambda}{2(c - v)},$$

что и дает то же неравенство, что и в случае "а".

Тем самым показано, что для процессов в ЛСЭ не всегда обязательно прибегать к специальной теории относительности, как справедливо отметили авторы [4] в Предисловии своей книги.

**Задача 4.4.** Найти максимально допустимые значения длины сгустка в ЛСЭ FLASH и XFEL (табл. 4.1).

Подставив в (4.45) значения  $\gamma$  и  $\lambda$  для каждого из ЛСЭ, находим

$$\ell_b < \begin{cases} 0,9 \text{ см,} & \text{FLASH,} \\ 30 \text{ см,} & \text{XFEL.} \end{cases}$$

Таким образом, у обоих ЛСЭ условие (4.45) выполняется с большим запасом.

Получив условие (4.45) усиления самоизлучения, можно заметно упростить уравнение (4.43), приняв

$$\pi \leq \psi_0 \leq 2\pi, \quad \delta\psi \leq \psi_0. \quad (4.46)$$

Тогда приближенно можно записать (4.43) в виде

$$\frac{d\langle \epsilon_w(t) \rangle}{dt} \sim \frac{CN_b}{\pi} \sqrt{\langle \epsilon_w(t) \rangle}. \quad (4.47)$$

Однако это выражение дает заниженное значение  $\langle \epsilon_w(t) \rangle$ , т. к. при его выводе принято, что  $\ell_b \sim \gamma^2 \lambda$ . На практике же длина сгустка в SASE FEL много меньше (см. задачу 4.4 и табл. 4.1):

$$\ell_b \ll \gamma^2 \lambda.$$

В этом случае при усреднении по  $\psi_0$  в (4.43) нужно просто положить  $\sin\psi = -1$  (излучение генерируется в фазе максимального усиления). А тогда в (4.47) вместо коэффициента  $\pi$  в знаменателе появляется единица. Этот вариант и следует принять для оценок. Проинтегрировав исправленное таким образом уравнение (4.47), получим

$$\langle \epsilon_w(t) \rangle \sim (CN_b)^2 \cdot \frac{t^2}{2}.$$

Подставив сюда значение  $C$  (4.40), окончательно запишем формулу *нарастания энергии излучения* со временем в SASE FEL:

$$\langle \epsilon_w(t) \rangle \sim \frac{(\beta_{\text{res}} \gamma_{\text{res}} r_e \lambda B N_b)^2}{2\pi^2 \sigma_x \sigma_y \ell_b} \cdot (ct)^2. \quad (4.48)$$

Обратим внимание, что энергия излучения (4.48) пропорциональна квадрату числа частиц сгустка. А это – характерный признак когерентности в режиме SASE: все электроны сгустка излучают как одна частица с зарядом  $N_b e$ . Кроме того, эта энергия излучения пропорциональна квадрату энергии электронов ( $\gamma_{\text{res}}^2$ ) и квадрату амплитуды  $B$  магнитного поля ондулятора, и обратно пропорциональна объему сгустка ( $\sigma_x \sigma_y \ell_b$ ).

Рост излучения в лазере SASE (где нет зеркал) продолжается определенное время  $\tau_w$ , которое ограничено сверху, по крайней мере, двумя значениями – временем пролета сгустка частиц сквозь ондулятор  $\tau$  (4.23) и временем, за которое излучение "убегает" от сгустка:

$$\tau_{\text{SASE}} \sim \frac{\ell_b}{c - v_0} \approx \frac{2\gamma^2 \ell_b}{c}. \quad (4.49)$$

Очевидно,

$$\tau_w \leq \min\{\tau, \tau_{\text{SASE}}\}. \quad (4.50)$$

Эффект SASE – самоусиление излучения электронов в ондуляторе – впервые был продемонстрирован (М. Юрков и др.) на ЛСЭ "TESLA Test Facility" (TTF) в лаборатории DESY (рис. 4.5).

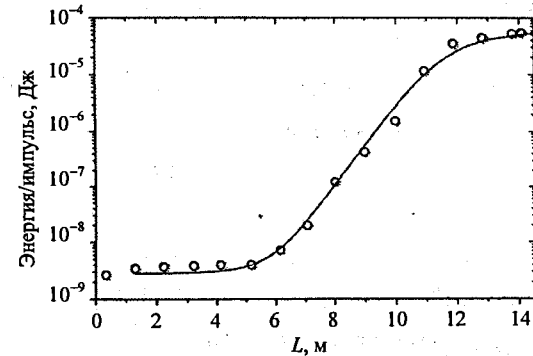


Рис. 4.5. Изменение с длиной ондулятора  $L$  энергии излучения за импульс ускорителя; на длине  $L \approx 14$  м энергия излучения приходит в насыщение;  $\circ$  – эксперимент, — – расчетная кривая

В настоящее время в DESY работает "вторая фаза" TTF, получившая название FLASH ("вспышка") – Free electron LASer at Hamburg (рис. 4.6) и

разрабатывается грандиозный проект Европейского рентгеновского ЛСЭ (XFEL, буква X – от "x-ray", рентген). В этом проекте (табл. 4.1), как и в двух предыдущих, генератором электронного пучка служит линейный ускоритель на сверхпроводящих ниобиевых резонаторах, а начальным источником электронов – электронная пушка с фотокатодом, испускающая под действием импульсов лазерного излучения короткие сгустки электронов.

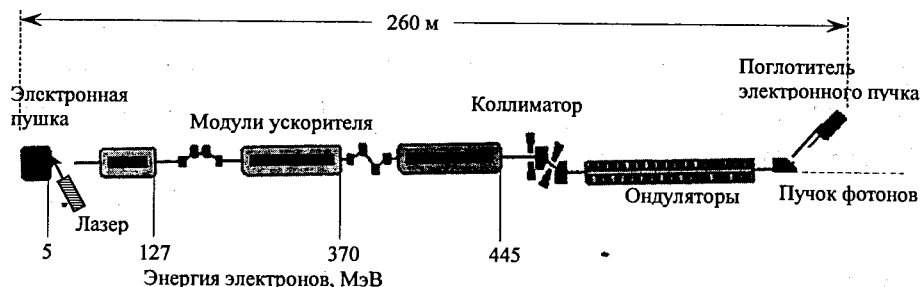


Рис. 4.6. Схема ЛСЭ FLASH

Таблица 4.1. Основные параметры ЛСЭ FLASH и XFEL

	FLASH	XFEL (проект)
Энергия электронов, ГэВ	0,45 (0,73)	20
Длина волны, нм	12–30	0,2 (0,1)
Яркость, $\text{фотон} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{мм}^{-2} \cdot \text{мрад}^{-2} \cdot (0,1\% \Delta\lambda/\lambda)$	–	$10^{30}$ ( $5 \cdot 10^{33}$ )
Параметры сгустка		
Заряд в сгустке, нКл	1,0	1,0
Пиковый ток, кА	2,5	5,0
Длина, мкм	120	60
Число электронов в сгустке, $10^9$	6,25	6,25
Параметры ондулятора		
Длина, м	30	100 – плоский, 150 – спиральный
Период, см	2,73	–
Амплитуда магнитного поля, Тл	0,49	–

Аналогом FLASH по принципу действия является ЛСЭ в режиме SASE, действующий в Японской лаборатории Spring-8. Этот крупный физический комплекс, размещенный в 800-метровом туннеле, генерирует мягкое рентгеновское излучение с длиной волны 49 нм.

В лаборатории DESY начато строительство еще более мощного ЛСЭ рентгеновского диапазона XFEL (табл. 4.1). Это – международный проект, в котором участвует и Россия.

Задача 4.5. Оценить энергию в импульсе излучения ЛСЭ FLASH и XFEL (табл. 4.1).

Для обоих лазеров значение  $\tau_w = \tau$ , что видно из оценок, приведенных в табл. 4.2.

Таблица 4.2. Оценки значений  $\tau$  и  $\tau_{\text{SASE}}$  для лазеров FLASH и XFEL

	FLASH	XFEL
$\tau_{\text{SASE}}$ , мкс	1,5	250
$\tau$ , мкс	0,1	3,3 (5)

Энергия импульса излучения, испущенного сгустком частиц за время прохождения ондулятора, составляет согласно (4.48) 3 Дж в лазере FLASH и 440 Дж – в лазере XFEL.

Одним из главных достоинств ЛСЭ является высокая пиковая яркость. Особенно это характерно для лазеров, в которых используются электронные пушки с фотокатодом. Применяемый в них лазерный "поджиг" (иницирование фотоэмиссии электронов) позволяет получать, как уже отмечалось, короткие и высокоинтенсивные сгустки электронов с малым эмиттансом. Однопролетный режим ЛСЭ, отличающий их от накопителей – синхротронов, исключает практически полностью рост эмиттанса пучка из-за флуктуаций синхротронного излучения. В результате яркость ЛСЭ в УФ и рентгеновском диапазоне на много порядков превосходит яркость накопителей электронов (рис. 4.7). Платой за это является относительно невысокая средняя мощность излучения ЛСЭ в режиме SASE (из-за низкой частоты повторения импульсов поджигающего лазера).

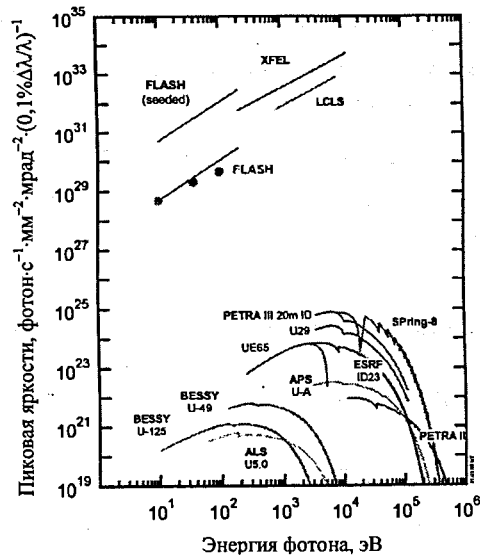


Рис. 4.7. Пиковая яркость ЛСЭ в режиме SASE (FLASH, European XFEL, LCLS (Стэнфорд) и накопителей синхротронов 3-го и 4-го поколений BESSY (Берлин), ALS (Национальная лаборатория Лоуренс-Беркли), APS (Аргонская национальная лаборатория), ESRF (Гренобль), Spring-8 (Япония), PETRA (DESY))

#### § 4.5. ЛСЭ радиодиапазона

ЛСЭ-генераторы радиоизлучения в СВЧ-диапазоне появились гораздо раньше своих более коротковолновых "собратей" (§§ 4.3, 4.4). Первыми, и наиболее успешно развитыми к настоящему времени, являются *гиротроны*, созданные в середине 60-х гг. в значительной мере усилиями нижегородской школы радиофизиков академика А. В. Гапонова. По своей "лазерной классификации" эти генераторы причисляют к *мазерам на циклотронном резонансе* (от англ. MASER – Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation). Принцип их действия тот же, что и у ЛСЭ с обратной связью оптического диапазона (§§ 4.2, 4.3). Роль ондулятора играет продольное магнитное поле  $\vec{B}_0$  (рис. 4.8), в котором электроны движутся по спиральной траектории, испуская *магниторезонансное излучение* (§ 2.1). Отличие от

синхротронного излучения состоит здесь, прежде всего, в том, что электроны в гиротронах имеют "умеренно релятивистскую" энергию

$$\varepsilon_e \sim 300 \text{ кэВ.}$$

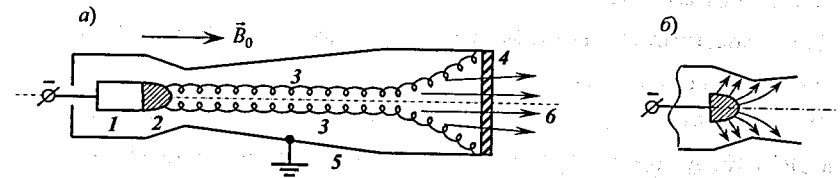


Рис. 4.8. Схема гиротрона (а) и геометрия электрического поля в электронной пушке (б). 1 – электронная пушка; 2 – катод; 3 – спиральные траектории электронов; 4 – окно для выхода излучения; 5 – вакуумная камера-резонатор; 6 – излучение; соленоид магнитного поля  $\vec{B}_0$  не показан

Отсюда направленность излучения – преимущественно вдоль оси спиральной траектории, совпадающей с вектором  $\vec{B}_0$  (см. рис. 4 Введения). *Резонатор гиротрона* настроен на частоту излучения  $\omega$ , которая, как и в случае синхротронного и ондуляторного излучений, выше частоты вращения (колебания) частицы в магнитном поле (сравни вывод формул (2.10) и (2.58)). В данном случае, применив формулы релятивистских преобразований частоты и волнового числа (*эффект Доплера*), можно обойтись без рассмотрения кинематики сгустка излучения. Действительно, в лабораторной системе частота излучения равна

$$\begin{aligned} \omega &= \gamma_{\parallel} \cdot (\omega' + k'v_{\parallel}) = \gamma_{\parallel} \omega_B (1 + \beta_{\parallel}), \\ k' &= \frac{\omega'}{c}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

где  $\beta_{\parallel}$  и  $\gamma_{\parallel}$  вычисляются через продольную (вдоль вектора  $\vec{B}_0$ ) компоненту скорости электрона  $v_{\parallel}$ , а частота циклотронного вращения (2.5)

$$\omega_B = \frac{eB_0}{\gamma_{\perp} mc} \quad (4.46)$$

содержит лоренц-фактор поперечной компоненты скорости электрона в системе, движущейся со скоростью  $v_{\parallel}$ . Заметим, что из соотношений (4.45) следует равенство

$$\omega - kv_{\parallel} = \omega_B, \quad (4.47)$$

которое имеет тот же кинематический вид, что и ранее – электрон, "догоняющий" свое излучение.

Различие между  $v_{\perp}$ ,  $v_{\parallel}$  и  $v_0$  в гиротронах существенно, т. к. для повышения интенсивности магнитотормозного излучения приходится увеличивать значение  $v_{\perp}$ . Это достигается полусферической формой катода и геометрией электрического поля в пушке (рис. 4.4).

Равенства (4.45), (4.47) есть условия резонанса, при выполнении которых, как в ЛСЭ оптического диапазона, электрон максимально взаимодействует с волной. Это приводит к самогруппировке пучка электронов: теряя энергию на излучение в тормозящей фазе волны, электроны замедляются, а приобретая энергию в ускоряющей фазе, электроны увеличивают свою скорость. В результате появляется возможность когерентного излучения, и в среднем по пучку баланс энергии сдвигается от нуля к положительному в "пользу" излучения значению. Результаты расчетов § 4.2 могут быть перенесены и на гиротрон. Роль "затравочного" излучения в нем, как и в оптических ЛСЭ с обратной связью, играет излучение флуктуаций плотности электронного пучка.

Основное применение гиротронов сегодня связывают с нагревом плазмы в термоядерных реакторах, где требуется излучение с длиной волны порядка 1 мм. Для этого, согласно формулам (4.45), (4.46), требуются магнитные поля ( $\gamma_{\parallel} \sim \gamma_{\perp} \sim 1$ )

$$B_0 \sim \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{mc^2}{e} = \frac{1,07}{\lambda_{[\text{см}]}} \text{ Тл,}$$

т. е.  $B_0 \approx 10$  Тл при  $\lambda = 1$  мм. Такие поля получают в сверхпроводящих соленоидах. В современных гиротронах достигаются мощности порядка 100 кВт в непрерывном режиме и в 10 раз выше в импульсном при к.п.д. до 40 %. Основное ограничение – необходимость снимать мощность со стенок вакуумной камеры в тех местах, куда приходит электронный пучок в расходящемся магнитном поле соленоида (рис. 4.8), а также потери энергии излучения в выходном окне. Заметим, что при мощности излучения 100 кВт и к.п.д. 40 % параметры непрерывного электронного пучка довольно внушительны:  $\varepsilon_e = 300$  кэВ,  $I_e \approx 8$  А,  $P \sim 250$  кВт.

Неоднократно обсуждались предложения ЛСЭ на черенковском и переходном излучении, в которых вместо ондулятора используются структуры с периодически изменяющимися свойствами (рис. 4.9) – так называемые *флимагроны*. Но они не доведены еще до параметров, представляющих практический интерес. Основная причина – низкая мощность излучения, что вполне очевидно в случае, показанном на рис. 4.9, б.

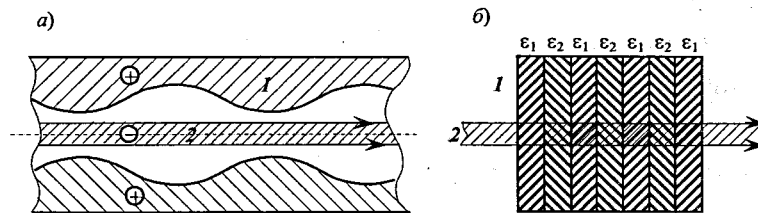


Рис. 4.9. Схема ЛСЭ типа флимагроны.

1 – структура, вызывающая излучение электронов: гифрированный волновод (а) и стопка пластин с двумя разными и чередующимися периодически значениями  $\varepsilon$ . В схеме (а) излучение электронов возникает из-за изменения размера диполя "электрон – изображение" (кружки  $\oplus$  и  $\ominus$ ), в схеме (б) – на переходе из диэлектрика  $\varepsilon_1$  в диэлектрик  $\varepsilon_2$ , и наоборот (см. задачу 3.4)

В обоих случаях период и длина волны излучения определяются формулами для ондулятора (2.58), в которых  $d$  – период структуры.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методы генерации электромагнитного излучения, со времен открытия Рентгена и изобретения радио, всегда были и остаются одной из наиболее активно развивающихся областей техники. Основанные на физических принципах, эти методы требуют применения современных достижений в области физики пучков заряженных частиц, использования самых последних достижений техники формирования магнитных полей, материаловедения (например, зеркала ЛСЭ) и т. д. Значительный прогресс, достигнутый за 2–3 последних десятилетия в области генерации электромагнитного излучения, произвел буквально революцию во многих областях науки и техники, обусловив прогресс в исследованиях и создании новых технологий.

## Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля. М.: Наука, 1967.
2. Мешков И. Н., Чириков Б. В., Электромагнитное поле, т. 1. Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1987.
3. Мешков И. Н., Чириков Б. В., Электромагнитное поле, т. 2. Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1987.
4. Saldin E. L., Schneidmiller E. A., Yurkov M. V., The Physics of Free Electron Lasers. Springer, 1999.

## Предметный указатель

активная среда, 107

ближняя зона, 6

векторная диаграмма, 12

визуальный режим, 69

волновая зона, 6, 8

время излучения, 47

встроенные излучатели, 62

гиротроны, 130

детекторы переходного излучения, 99

дипольное приближение, 8

дифракционные потери лазера, 118

дифракционный предел, 59

угловой расходимости, 68

длина формирования

излучения, 46

СИ, 47

длительность вспышки черенковского

излучения, 83

закон сохранения энергии-импульса, 19

излучение

дипольное, 13

квадрупольное, 14

линейно-поляризованное, 39

магнитодипольное, 14, 45,

магниторезонансное, 130

магнитотормозное, 45

некогерентное, 57

спонтанное, 122

тормозное, 40

характеристическое, 42

электротормозное, 41, 42

интенсивность дипольного излучения, 10

инфракрасная катастрофа, 31

источники СИ

второго поколения, 74

третьего поколения, 74

четвертого поколения, 75

квантовые флуктуации СИ, 54

когерентность

излучения, 46

СИ, 56

ларморовский радиус, 44

лоренц-фактор, 16, 18,

мазеры на циклотронном резонансе, 130

мгновенно-сопутствующая система, 21

многополюсные визгеры, 70

монохроматичность ондуляторного

излучения, 67

мощность потерь, 18, 19

нестационарная система, 7

одиночная частица (или излучение одиночной частицы), 46

ондуляторный режим, 66, 67

ондуляторы плоского типа, 72

отстройка энергии, 119

параметр ондуляторности, 64

покоящаяся частица, 19

поле системы зарядов в дипольном

приближении, 8, 10

полная мощность излучения, 31

поляризация

излучения, 28, 39, 72

линейная, 72

СИ, 56

черенковского излучения, 89

электротормозного излучения, 42

пороговый ток, 119

потери энергии, 73

частицы за оборот, 54

частицы на дипольное излучение, 18

электрона, 114

пучок электронов, 115

режим

большого усиления, 123

малого усиления, 117

насыщения, 123

резонансная энергия, 111

резонатор гиротрона, 131

сверхсветовое движение частиц в вакууме,  
92

сгусток частиц, короткий, 125

синхротронное излучение (СИ), 45

система частиц, 123

спектр

излучения, 29, 40,

черенковского излучения, 87

электротормозного излучения, 41, 42

спиральные ондуляторы, 72

стандартная единица яркости, 58

угловая амплитуда, 64

угловой раствор конического слоя, 82

уравнение фазовых колебаний, 112

условие

резонанса, 110

формирования черенковского

излучения, 82

условия

Вульфа-Брэгга, 103, 104

когерентности излучения сгустка

частиц в накопителе, 59

установившийся режим, 118

флимароны, 133

флуктуации СИ квантовые, 54

циркулярно поляризованное излучение, 72

черенковское ускорение, 86

ширина спектра ондуляторного излучения, 67

шифтеры, 70, 71

энергии излучения нарастание в SASE FEL,  
126

эффект Доплера, 30, 47, 65, 106, 131

яркость источника СИ, 57