С 133.2(07)
У-681

Учебно-методические пособия Учебно-научного центра ОИЯИ
Дубна

УНЦ-2004-27

Э. А. Кураев, С. М.-К. Бакмаев, А. А. Ракитянский*,
В. В. Красильников*, Е. С. Кокоулина

# УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

*Белгородский государственный университет, Белгород, Россия

2004

Учебно-научный центр ОИЯИ

С 133.2(07)
У-681

Э. А. Кураев, С. М.-К. Бакмаев, А. А. Ракитянский,
В. В. Красильников, Е. С. Кокоулина

1164492

# УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

*Учебное пособие*

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Дубна 2004

У68

**Уравнения** в частных производных и методы математической физи-
У68 ки / Э. А. Кураев, С. М.-К. Бакмаев, А. А. Ракитянский, В. В. Красильников, Е. С. Кокоулина; Учеб.-метод. пособие. — Дубна: ОИЯИ, 2004. — 113 с.

В пособии рассмотрены некоторые методы решения краевых задач и задачи Коши, формулируемых в терминах уравнений в частных производных. Рассмотрено несколько задач механики, приводящих к уравнениям такого типа. На конкретных примерах продемонстрированы методы решения краевых задач, основанные на приеме разделения переменных на отрезке, луче, плоскости и пространстве.

Пособие предназначено для студентов физических и технических специальностей.

**Partial** Derivatives Equations and Methods of Mathematical Physics / E. A. Kuraev, S. M.-K. Bakmaev, A. A. Rakityansky, V. V. Krasilnikov, E. S. Kokoulina; Textbook. — Dubna: JINR, 2004. — 113 p.

Some methods of solutions of Cauchy problems and the boundary problems are illustrated by explicit examples. Several problems of mechanics are investigated in this field. The variable separation methods are applied to the one-, two- and three-dimensional differential equations.

The textbook is addressed to the students specializing in engineering and physics.

© Объединенный институт ядерных исследований, 2004

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# Предисловие

Данное учебно-методическое пособие написано на основе курса лекций по уравнениям математической физики, читаемого студентам кафедры "Электроника физических установок" МИРЭА, организованной в г. Дубне при Учебно-научном центре Объединенного института ядерных исследований.

Изложение начинается с классификации уравнений второго порядка с двумя переменными и описания способов приведения их к каноническому виду.

В главе 1 рассмотрены некоторые задачи механики, приводящие к уравнениям гиперболического типа, и основные методы их решения в одномерном случае. Детально рассмотрен метод Фурье разделения переменных.

В главе 2 рассмотрены уравнения параболического типа для задач на отрезке и бесконечной прямой. Здесь же приведены методы интегральных преобразований Фурье и метод функций Грина для решения задач теплопроводности и диффузии.

В главе 3 рассмотрены уравнения эллиптического типа. Приводятся различные виды оператора Лапласа в криволинейных координатах. На примерах уравнений Шредингера и Гельмгольца исследована проблема разделения переменных в различных системах криволинейных координат. Даны основные свойства цилиндрических функций.

В главе 4 изложены элементы операционного исчисления и минимизации функционалов как альтернативного способа вывода уравнений движения.

В главе 5 рассмотрены нелинейные уравнения и их решения в виде бегущих волн.

В главе 6 изложены приближенные и численные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных и минимизации функционалов.

В главе 7 рассмотрены другие методы решения уравнений, в том числе метод конформных отображений, преобразование Лапласа, метод обратной задачи рассеяния.

В главе 8 рассмотрены линейные интегральные уравнения и некоторые методы их решений.

В главе 9 рассмотрены методы решения интегральных уравнений как альтернативный подход к решению дифференциальных уравнений в частных производных. Рассмотрены также системы уравнений первого порядка и метод характеристик их решения.

В главе 10 приведен набор вариантов зачетных заданий.

В конце пособия приведен список рекомендуемой литературы. Данное пособие будет полезно студентам вузов и втузов при изучении курса по уравнениям математической физики.



# Классификация и канонический вид уравнений второго порядка

Общий вид уравнений второго порядка с двумя переменными [5, 12]:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0. \tag{1}$$

Здесь и далее мы подразумеваем, что $u, f, a_{ij}, b_i, c$ – функции от вещественных переменных $x, y$, причем считаем функцию $u(x, y)$ неизвестной, а остальные функции известными: $u_x = du(x,y)/dx$, $u_y = du/dy$, $u_{xx} = d^2u/dx^2$; $u_{xy} = d^2u/(dxdy)$, $u_{yy} = d^2u/dy^2$.

Далее мы рассмотрим только случай, когда все величины, кроме $u, f$, постоянны, т. е. не зависят от $x, y$. Устранение производных первого порядка производится преобразованием к новой неизвестной функции

$$u(x, y) = v(x, y)e^{\lambda x + \mu y}. \tag{2}$$

Постоянные $\lambda, \mu$ подбираются таким образом, чтобы уравнение для функции $v(x, y)$ не содержало первых производных. Для примера рассмотрим

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} + 2u_x + u_y + u = 0; \\ &u = ve^{\lambda x + \mu y}. \end{aligned} \tag{3}$$

Уравнение для $v(x, y)$ будет иметь вид

$$v_{xx} + v_{yy} + v_x(2\lambda + 2) + v_y(2\mu + 1) + v(1 + \lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda + \mu) = 0. \tag{4}$$

Выбор $\lambda = -1; \mu = -1/2$ приводит к цели. В результате

$$v_{xx} + v_{yy} - v/2 = 0. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь приведение уравнений, не содержащих первых производных, к каноническому виду. Уравнения гиперболического типа приводятся к виду (первая каноническая форма)

$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \tag{6}$$

либо к виду (вторая каноническая форма)

$$u_{xy} = 0, \tag{7}$$

здесь мы опустили также слагаемые, содержащие неизвестную функцию без производных, что несущественно для задачи приведения к канонической форме. Уравнения эллиптического типа приводятся к форме

$$u_{xx} + u_{yy} = 0; \tag{8}$$

и, наконец, уравнения параболического типа имеют каноническую форму

$$u_x - u_{yy} = 0. \tag{9}$$

Опишем процедуру приведения уравнения общего вида

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} = 0 \tag{10}$$

к канонической форме. Сначала вычисляется дискриминант уравнения $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$. Если дискриминант положителен, то уравнение будет гиперболического типа; если он отрицателен, то уравнение будет эллиптического типа, и наконец, если дискриминант равен нулю, то уравнение будет параболического типа. На втором шаге составляем уравнения характеристик

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{a_{12} + \sqrt{D}}{a_{11}} = \lambda_1; \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{a_{12} - \sqrt{D}}{a_{11}} = \lambda_2. \end{aligned} \tag{11}$$

Решения этих уравнений

$$\xi = \text{const}; \quad \eta = \text{const}; \quad \xi = y - \lambda_1 x; \quad \eta = y - \lambda_2 x \tag{12}$$

используются в качестве новых переменных для приведения к канонической форме. Продемонстрируем это на примерах:

$$\begin{gathered} u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_y = 0; \\ a_{11} = 1, \quad a_{12} = -1, \quad a_{22} = -3, \quad D = 4 > 0; \\ \frac{dy}{dx} = 1, \quad \frac{dy}{dx} = -3; \quad \xi = x - y, \quad \eta = y + 3x. \end{gathered} \tag{13}$$

Переход к новым переменным:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} = d_x &= \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta} = d_\xi + 3d_\eta; \\ d_y = -d_\xi + d_\eta, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= d_{xx}^2 = d_{\xi\xi}^2 + 6d_{\xi\eta}^2 + 9d_{\eta\eta}^2; \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= d_{yy}^2 = d_{\xi\xi}^2 - 2d_{\xi\eta}^2 + d_{\eta\eta}^2; \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} &= d_{xy}^2 = -d_{\xi\xi}^2 - 2d_{\xi\eta}^2 + 3d_{\eta\eta}^2. \end{aligned} \tag{14}$$

Подставляя все, получим

$$16u_{\xi\eta} + u_\eta - u_\xi = 0. \tag{15}$$

Здесь имеет место вторая форма гиперболического типа.



Рассмотрим пример уравнений параболического типа:

$$\begin{gathered} 4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} - 2u_y = 0; \\ a_{11} = 4; \quad a_{12} = 2; \quad a_{22} = 1; \quad d = 0; \\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}; \quad \xi = x - 2y; \quad \eta = x; \\ d_x = d_\xi + d_\eta; \quad d_y = -2d_\xi, \quad u_{\eta\eta} + u_\xi = 0. \end{gathered} \tag{16}$$

Рассмотрим уравнения эллиптического типа:

$$\begin{aligned} u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0; \quad D = -1 < 0; \\ \frac{dy}{dx} = 1 - i; \quad \psi(x,y) = y - x(1-i); \\ \xi = \mathbf{Re}\psi(x,y) = y - x; \quad \eta = \mathbf{Im}\psi(x,y) = x; \\ u_x = -u_\xi + u_\eta; \quad u_y = u_\xi; \\ u_{xx} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}; \\ u_{yy} = u_{\xi\xi}; \\ u_{xx} = -u_{\xi\eta} - u_{\xi\xi}. \end{aligned} \tag{17}$$

Получаем

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0. \tag{18}$$

# ГЛАВА 1

# Уравнения гиперболического типа

## 1.1 Некоторые задачи механики, приводящие к уравнениям гиперболического типа

### 1.1.1 Уравнение малых колебаний нити в поле тяжести

Предполагая движение нити плоским, выведем уравнение малых колебаний нити в поле тяжести, следуя [2, 5].

Расстояние $x$ до точек висящей тяжелой нити будем отсчитывать от ее конца. Точке подвеса отвечает $x = l$. Отклонение точки нити от положения равновесия обозначим неизвестной функцией $u(x,t)$, конец висящей нити полагаем свободным. Элемент длины нити между точками с координатами $M(x,u)$, $M_1(x+dx, u+du)$ будет равен $ds = \sqrt{1+{u_x}^2}dx$. Далее мы будем предполагать отклонение малым и вследствие этого $u_x^2 \ll 1$, $ds = dx$. Натяжение, создаваемое весом нити в точке M, будет равно $\rho g x$, где $\rho, g$ - плотность вещества нити и ускорение силы тяжести. Проекция силы натяжения на ось $u$ будет $u_x \rho g x$. Разность проекций силы натяжения в соседних точках $M, M_1$ составит

$$\left(g\rho x\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M - \left(g\rho\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_1} = g\rho dx\frac{\partial}{\partial x}(xu_x). \tag{1.1}$$

Результирующая компонента сил натяжения компенсируется силами инерции.



Условие баланса этих сил дает уравнение поперечных колебаний тяжелой нити

$$\frac{\partial}{\partial x}(xu_x) = \frac{1}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{1.2}$$

В качестве граничного условия примем $u(x=l,t) = 0$ - условие жесткого закрепления в точке подвеса. Разделяя переменные с помощью замены $u(x,t) = U(x)T(t)$ и переходя к переменной $z = \sqrt{x}$, решение уравнения можно выразить в терминах функций Бесселя.

### 1.1.2 Поперечные колебания вращающейся нити

Предполагаем, что нить вращается с угловой скоростью $\omega$ вокруг вертикальной оси, и не учитываем сил тяжести [2, 5]. В точке $M$, находящейся на расстоянии $x$ от оси вращения, центробежные силы создают натяжение

$$T = \int_x^l (x\omega)^2 \rho(dx/x) = \omega^2\rho(l^2 - x^2)/2. \tag{1.3}$$

Здесь мы считаем, что плотность материала нити одинакова во всех ее сечениях, считаем также полную длину ее равной $l$, а ее дальний конец свободным. Эта сила направлена по касательной к нити в точке $x$. Проекция этой силы на направление, параллельное оси вращения, получится умножением на $u_x$, где $u(x,t)$ - отклонение нити от плоскости вращения. Приравнивая разность таких проекций в соседних точках $M(x), M_1(x+dx)$ проекции сил инерции:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx, \tag{1.4}$$

получим

$$\rho dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{2}[\omega^2\rho(l^2 - x^2)u_x]_{x+dx} - [\omega^2\rho(l^2 - x^2)u_x]_x, \tag{1.5}$$

переходя к пределу $dx \to 0$, получим дифференциальное уравнение поперечных колебаний

$$u_{tt} = \frac{\omega^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}[(l^2 - x^2)u_x] \tag{1.6}$$

с граничными и начальными условиями

$$u(t, x=l) < \infty; \quad u(t,0) = 0; \quad u(t=0,x) = f(x); \quad u_t(t=0,x) = F(x). \tag{1.7}$$

Это уравнение решается стандартным способом разделения переменных.

### 1.1.3 Малые колебания струны около положения равновесия

Рассмотрим упругую струну, натянутую вдоль оси $x$ между точками с координатами $(0, l)$. Для описания процесса колебания струны в плоскости $x, y$ надо задать отклонения ее точек $u(x,t)$ от положения равновесия $u = 0$. Натяжение, возникающее в струне, направлено по касательной к ее мгновенному профилю и не меняется в силу закона Гука от точки к точке. Для вывода уравнений колебания точек струны воспользуемся вторым законом Ньютона.

Составляющая импульса участка струны $(x_1, x_2)$ по оси $u$ равна ($\rho(s)$ - линейная плотность струны)

$$\int_{x_1}^{x_2} ds\rho(s)u_t(s,t). \tag{1.8}$$

Приравняем изменение импульса за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ к импульсу сил натяжения

$$T_0(u_x\,|_{x=x_2} - u_x\,|_{x=x_1}) \tag{1.9}$$

и внешней силы с непрерывно распределенной нагрузкой $F(x,t)$:

$$\int_{x_1}^{x_2}[u_t(s,t_2) - u_t(s,t_1)]\rho(s)ds = \tag{1.10}$$
$$\int_{t_1}^{t_2}[u_x(x_2,\tau) - u_x(x_1,\tau)]d\tau + \int_{x_1}^{x_2} ds \int_{t_1}^{t_2} \tau F(s,\tau).$$

В пределе $\Delta x$, $\Delta t$ получаем искомое уравнение (в случае постоянной плотности)

$$(u_{tt}(x,t)\rho(x,t) - T_0 u_{xx}(x,t) - F(x,t))\Delta x\Delta t = 0; \quad u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \tag{1.11}$$
$$a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}; \quad f(x,t) = \frac{1}{\rho}F(x,t). \tag{1.12}$$

Другой вывод этого уравнения, основанный на минимизации функционала действия, будет дан в ниже, в главе 4.

### 1.1.4 Продольные колебания стержня

Направим ось $x$ вдоль стержня с началом отсчета в некоторой точке $x = 0$ [2]. Рассмотрим две соседние точки $M, M_1$ с координатами $x, x + dx$. В результате возмущения сечение стержня с координатой $x$ перейдет в точку $u$, а соседняя



точка - в $u + du = u + u_x dx$. Возникающее при этом натяжение выражается по закону Гука через относительное удлинение стержня $u_x$: $T = Eu_x$, где $E$ - модуль упругости стержня. Приравнивая разность сил натяжения в соседних точках силам инерции, действующим на этот участок, получаем уравнения движения для возмущения $u(x,t)$:

$$u_{tt} = \frac{E}{\rho}u_{xx}. \tag{1.13}$$

Граничные условия зависят от характера закрепления стержня. Для случая, когда один его конец $x = 0$ жестко закреплен, а другой свободен, граничные условия будут следующими:

$$u(x = 0, t) = 0; \quad u_x(x = l, t) = 0. \tag{1.14}$$

Начальные условия задаются деформацией и скоростью в начальный момент времени:

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad 0 < x < l. \tag{1.15}$$

Эти уравнения могут быть выведены также из принципа Гамильтона. Действительно, плотность потенциальной энергии, с учетом работы внешних сил, можно представить в виде $U = (E/2)u_x^2 + F(x,t)u$. Плотность кинетической энергии будет равна $\rho u_t^2/2$, где $\rho$ - плотность вещества стержня. Предполагаем, что площадь сечения стержня одинакова во всех точках. Уравнения Эйлера имеют вид

$$u_{tt} = \frac{E}{\rho}u_{xx} + F(x,t). \tag{1.16}$$

Рассмотрим случай, когда поперечная площадь стержня меняется от точки к точке. Для стержня конической формы площадь сечения, расположенного на расстоянии $x$ от более широкого конца с площадью поперечного сечения $S_0$, будет равна $S_x/S_0 = (1 - (x/h))^2$, где $h$ есть высота конуса. Приравнивая разность натяжений на концах элемента $M(x), M_1(x + dx)$ инерционным силам, действующим на этот участок, и переходя к пределу $dx \to 0$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\rho}{E}\left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{1.17}$$

Заменой переменной $v = (h-x)u$ это уравнение приводится к виду $v_{tt} - (E/\rho)v_{xx} = 0$. Дальнейшие шаги стандартны.

## 1.2 Формула Даламбера

Рассмотрим неограниченную струну, расположенную по оси $x$ [4, 12]. Считаем, что она может отклоняться в перпендикулярном направлении вдоль оси $y$, все время находясь в плоскости $xy$. Величину отклонения обозначим $u(x,t)$. Начальное отклонение струны от положения равновесия и распределение начальных скоростей будем считать заданными. Условие равновесия сил, действующих на элемент струны в точке $x$ (силы инерции, силы натяжения и внешние силы), приводит к уравнению движения, определяющему величину отклонения для любого значения переменной $x$, определяющего положение элемента струны в момент времени $t$. Таким образом, мы приходим к краевой задаче (считаем, что внешние силы отсутствуют)

$$u_{tt} - a^2u_{xx} = 0; \quad u(x,0) = \phi(x); \quad u_t(x,0) = \psi(x). \tag{1.18}$$

Уравнения характеристик и уравнения движения имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = \pm a; \quad \xi = x - at; \quad \eta = x + at; \quad u_{\xi\eta} = 0. \tag{1.19}$$

Решением уравнений движения является выражение

$$u(x,t) = f_1(x - at) + f_2(x + at) \tag{1.20}$$

с произвольными функциями $f_1, f_2$. Подберем их так, чтобы они удовлетворяли начальным условиям:

$$u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \phi(x); \quad u_t(x) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x). \tag{1.21}$$

Интегрируя второе уравнение и решая простую систему двух алгебраических уравнений, получим

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(y)dy + c; \\ f_2(x) &= \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(y)dy - c. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Заменяя аргументы у функций в соответствии с

$$f_1(x) \to f_1(x - at), \quad f_2(x) \to f_2(x + at), \tag{1.23}$$

получим решение (формула Даламбера)

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\phi(x - at) + \phi(x + at)] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz. \tag{1.24}$$



В качестве примера рассмотрим задачу нахождения напряжения в линии без искажений [3, *2-58*]. Найти силу и напряжение тока, текущего по проводу без искажения, начальные их распределения таковы:

$$v(x,0) = f(x), \quad i(x,0) = \sqrt{\frac{C}{L}}F(x). \tag{1.25}$$

Решение. Телеграфные уравнения имеют вид

$$v_x + Li_t + Ri = 0; \quad i_x + Cv_t + Gv = 0, \tag{1.26}$$

где $i, v$ - ток и напряжение в линии; $C, L, R, G$ соответственно емкость, индуктивность, сопротивление и утечка, приходящиеся на единицу длины провода. Выражая ток из одного телеграфного уравнения и подставляя его в другое, получим

$$v_{xx} = CLv_{tt} + (CR + GL)v_t + GRv; \tag{1.27}$$

условие отсутствия искажения имеет вид $GL = CR$. Исключая производную первого порядка с помощью замены $v = ue^{\lambda t}$, получим $\lambda = -R/L$, а для функции $u(x,t)$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= a^2u_{tt}, \quad a^2 = CL; \\ u(x,t) &= \phi(x - a^{-1}t) + \psi(x + a^{-1}t); \quad 0 < t < \infty, \quad -\infty < x < \infty. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Используя телеграфные уравнения, получим окончательно

$$\begin{aligned} v(x,t) &= e^{-Rt/L}[\phi(x - a^{-1}t) + \psi(x + a^{-1}t)]; \\ \phi(z) &= \frac{1}{2}[f(z) + F(z)], \quad \psi(z) = \frac{1}{2}[f(z) - F(z)]. \end{aligned} \tag{1.29}$$

## 1.3 Решение одномерного волнового уравнения. Метод Фурье разделения переменных

Рассмотрим неоднородное уравнение гиперболического типа с начальными и граничными условиями [6, 12]:

$$\begin{aligned} &u_{tt} - a^2u_{xx} = f(x,t), \quad u(x,0) = \phi(x); \\ &u_t(x,0) = \psi(x), \quad u(0,t) = u(l,t) = 0; \\ &0 \le x \le l, \quad 0 \le t < \infty. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Рассмотрим сначала однородное уравнение. Решение будем искать в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{1.31}$$

Для функций $X(x), T(t)$ получим

$$\frac{X''}{X} = -\lambda; \quad \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda. \tag{1.32}$$

Уравнение для $X$ (разделяющий параметр $\lambda$ не зависит от переменных $x, y$) – обыкновенное дифференциальное уравнение с начальными условиями, роль которых играют граничные условия основного уравнения. Его решение: $X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$. Из граничных условий $X(0) = 0; X(l) = 0$ получим $A = 0; \sqrt{\lambda}l = n\pi$. Таким образом, имеем систему ортогональных на отрезке $0 < x < l$ функций:

$$X_n = c_n \sin(\pi n x/l), \quad n = 1, 2, 3, ...,$$
$$\int_0^l dx \sin(n\pi x/l)\sin(m\pi x/l) = (l/2)\delta_{mn},$$
$$\delta_{mn} = 0, \quad m \neq n; \quad \delta_{mn} = 1, \quad m = n. \tag{1.33}$$

Функция $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{\pi n x}{l}$ удовлетворяет граничным условиям. Значения $T_n(0)$, $T_n'(0)$ находятся из разложения начальных условий в ряд Фурье:

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\frac{\pi n x}{l};$$
$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0)\sin\frac{\pi n x}{l}, \quad T_n(0) = \frac{2}{l}\int_0^l dx\phi(x)\sin\frac{\pi n x}{l};$$
$$T_n'(0) = \frac{2}{l}\int_0^l dx\psi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}. \tag{1.34}$$

Разложим в ряд Фурье правую часть уравнения:

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin\frac{\pi n x}{l}; \quad b_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l dx f(x,t)\sin\frac{\pi n x}{l}. \tag{1.35}$$

Подставляя все в основное уравнение, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t) + \left(\frac{a n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) - b_n(t)\right]\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = 0. \tag{1.36}$$

В силу полноты системы функций $X_n(x)$ выражение в квадратных скобках обращается в нуль. Таким образом, мы имеем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для $T_n(t)$ вместе с начальными условиями. Решение задачи приведено выше.



Рассмотрим конкретный пример. Решим краевую задачу

$$u_{tt} - u_{xx} = 1; \quad u(x,0) = 0; \quad u_t(x,0) = 1;$$
$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le t < \infty, \quad u(0,t) = u(1,t) = 0. \tag{1.37}$$

Проводя указанную процедуру, получим $T_{2k}(t) = 0$, а для $T_{2k+1}(t)$ имеем уравнение

$$T''_{2k-1}(t) + (\pi(2k-1))^2 T_{2k-1}(t) = \frac{4}{\pi(2k-1)};$$
$$T_{2k-1}(0) = 0; \quad T'(0)_{2k-1} = \frac{4}{\pi(2k-1)}. \tag{1.38}$$

Решение его:

$$T_{2k-1}(t) = c_1\cos((2k-1)\pi t) + c_2\sin((2k-1)\pi t) + c_3,$$
$$c_1 = -\frac{4}{(\pi(2k-1))^3}; \quad c_2 = -\frac{4}{(\pi(2k-1))^2}; \quad c_3 = \frac{4}{(\pi(2k-1))^3};$$
$$u(x,y) = \frac{4}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}[1 - \cos a_n + \pi(2n-1)\sin a_n]\sin b_n; \tag{1.39}$$
$$a_n = \pi(2n-1)t, \quad b_n = \pi(2n-1)x. \tag{1.40}$$

146492

## 1.4 Задачи на отрезке на разделение переменных (метод Фурье)

Струна с жестко закрепленными концами возбуждена ударом жесткого молотка, сообщающего начальное распределение скоростей [3, *2-100*],

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < x_0 - \delta, \\ v_0, & x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \\ 0, & x_0 + \delta < x < l. \end{cases} \tag{1.41}$$

Найти отклонение струны во все последующие моменты времени, если начальное отклонение отсутствовало: $u(x,0) = 0$.

Решение. Так же, как в предыдущей задаче, для описания колебаний струны используем уравнение $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$. Из условий жесткого закрепления следует представление $u(x,t)$ в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{\pi n a t}{l}\sin\frac{\pi n x}{l}. \tag{1.42}$$

Разложим в ряд Фурье распределение начальных скоростей:

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\pi n a}{l} \sin\frac{\pi n x}{l},$$

$$\mathrm{B}_n = \frac{2}{l}\int_0^l dx\psi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{2}{\pi n a}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} v_0 \sin\frac{\pi x n}{l} = \tag{1.43}$$

$$= 4\frac{l v_0}{a(\pi n)^2}\sin\frac{\pi n x_0}{l}\sin\frac{\pi n \delta}{l}.$$

В результате

$$u(x,t) = \frac{4 v_0 l}{\pi^2 a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n x_0}{l}\sin\frac{\pi n \delta}{l}\sin\frac{\pi n x}{l}\sin\frac{\pi n a t}{l}. \tag{1.44}$$

Задача [6, *78*]. Решить краевую задачу

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < y < \infty;$$
$$u(0,y) = 0, \quad u(l,y) = 0;$$
$$u(x,0) = A\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right), \quad u(x,\infty) = 0. \tag{1.45}$$

Решаем методом разделения переменных:

$$u(x,y) = X(x)Y(y), \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda, \quad X = a\cos(\sqrt{\lambda}x) + b\sin(\sqrt{\lambda}x). \tag{1.46}$$

Граничные условия налагают ограничения

$$a = 0, \quad \sqrt{\lambda}l = n\pi. \tag{1.47}$$

Решение для функции $Y$ имеет вид

$$Y_n = A_n e^{-\frac{n\pi}{l}y} + B_n e^{\frac{n\pi}{l}y}. \tag{1.48}$$

Требование конечности решения при большом значении ординат приводит к условию $B_n = 0$, таким образом, общий вид решения будет следующим:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n\pi y}{l}}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{1.49}$$

Найдем коэффициенты $A_n$ из граничных условий:

$$A\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right) = \sum_n A_n \sin\frac{n\pi x}{l}; \tag{1.50}$$

$$A_n = A\frac{2}{l}\int_0^l dx\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right);$$



$$A_n = 2A\int_0^1 dx x(1-x)\sin(\pi n x) = 2A\frac{4}{(n\pi)^3}, \quad n = 2k+1;$$

$$A_n = 2A\int_0^1 dx x(1-x)\sin(\pi n x) = 0, \quad n = 2k.$$

Решение имеет вид

$$u(x,y) = \frac{8A}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}e^{-\frac{n\pi y}{l}}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{1.51}$$

Задача [6, *94*]. Решить краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le l; \quad u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \quad u(x,0) = Ax. \tag{1.52}$$

Применяя метод Фурье, ищем решение в виде $u(x,t) = T(t)X(x)$, далее имеем

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda; \quad T_n = A_n e^{-a^2\lambda_n t}; \quad X_n = \sin(\sqrt{\lambda_n}x). \tag{1.53}$$

Налагая условие $X'(l) = 0$, получим $\cos(\sqrt{\lambda}l) = 0$, $\lambda_n = (\frac{n\pi}{2l})^2$. Коэффициенты $A_n$ находятся разложением в ряд Фурье начального условия:

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l dx x\sin\frac{\pi n x}{l}. \tag{1.54}$$

В результате получим

$$u(x,t) = \frac{8Al}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}e^{-(\frac{a\pi(2n+1)}{2l})^2 t}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}. \tag{1.55}$$

# ГЛАВА 2

# Уравнения параболического типа

## 2.1 Комментарий к применению метода разделения переменных

1. Метод разделения переменных невозможно непосредственно применить к случаю неоднородных граничных условий. Ниже изложим способ, позволяющий тем не менее использовать его в этом случае. Краевую задачу с неоднородными граничными условиями (ГУ)

$$\begin{aligned} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,y), \quad 0 < x < l; \\ \alpha_1 u_x(0,t) + \beta_1 u(0,t) = g_1(t); \\ \alpha_2 u_x(l,t) + \beta_2 u(l,t) = g_2(t); \\ u(x,o) = \phi(x) \end{aligned} \tag{2.1}$$

с помощью подстановки

$$u(x,t) = S(x,t) + w(x,t), \quad S(x,t) = a(t)x + b(t) \tag{2.2}$$

можно привести к задаче с однородными ГУ для функции $w$

$$\begin{aligned} \alpha_1 w_x(0,t) + \beta_1 w(0,t) = 0, \quad w_t = a^2 w_{xx} - S_t(x,t) + f(x,t); \\ \alpha_2 w_x(l,t) + \beta_2 w(l,t) = 0, \quad w(x,0) = \phi(x) - S(x,0). \end{aligned} \tag{2.3}$$



Пример:

$$\begin{aligned} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty; \\ u(0,t) = k_1; \\ u(l,t) = k_2; \\ u(x,0) = \phi(x). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Ищем решение в виде $u(x,t) = k_1 + \frac{x}{l}(k_2 - k_1) + w(x,t)$. Для $w(x,t)$ имеем

$$\begin{aligned} w_t = a^2 w_{xx}; \\ w(0,t) = 0; \\ w(l,t) = 0; \\ w(x,0) = \phi(x) - k_1 - \frac{x}{l}(k_2 - k_2)\,. \end{aligned} \tag{2.5}$$

2. Преобразование уравнений, содержащих искомую функцию и ее первую производную, к виду $w_t = \alpha^2 w_{xx}$. Для уравнения

$$u_t = \alpha^2 u_x x - \beta u \tag{2.6}$$

используем замену $u(x,t) = e^{-\beta t} w(x,t)$. При этом $w_t = \alpha^2 w_{xx}$. Для уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} + v u_{xx} \tag{2.7}$$

используем замену $u(x,t) = e^{\alpha x + \gamma t} w(x,t)$. При выборе

$$\alpha = -\frac{v}{2a^2}, \quad \beta = \frac{v^2}{4a^2}$$

получим $w_t = \alpha^2 w_{xx}$.

3. Краевые задачи с однородными ГУ могут иметь нетривиальные спектры собственных значений. Рассмотрим, например, задачу

$$\begin{aligned} u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty; \\ u_x(0,t) = 0; \\ u_x(l,t) + hu(l,t) = 0; \\ u(x,0) = \phi(x). \end{aligned} \tag{2.8}$$

$U(x,t) = X(x)T(t)$. Применяем метод разделения переменных $u(x,t) = X(x)T(t)$:

$$\frac{X''}{x} = \frac{T'}{T} = -\lambda^2, \quad X = A\cos(\lambda x), \quad u(x,t) = \sum_n a_n e^{-\lambda_n^2 t} \cos(\lambda_n x). \tag{2.9}$$

Для спектра собственных значений $\lambda_n$ имеем трансцендентное уравнение

$$\operatorname{tg}(\lambda_n) = \frac{h}{\lambda_n}. \tag{2.10}$$

Коэффициенты $a_n$ могут быть найдены из соотношения

$$a_n = \int_0^1 dx\phi(x)\cos(\lambda_n x)\left(\int_0^1 dx\cos^2(\lambda_n x)\right)^{-1}. \tag{2.11}$$

Это соотношение следует из ортогональности системы функций $\cos(\lambda_n x)$ на отрезке (0,1) с единым весом:

$$\int_0^1 dx\cos(\lambda_n x)\cos(\lambda_m x) = 0; \quad n \neq m. \tag{2.12}$$

Последнее утверждение есть следствие общей теоремы Штурма – Лиувилля для дифференциальных уравнений 2-го порядка.

## 2.2 Теорема Штурма – Лиувилля

Для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка с однородными граничными условиями

$$\begin{aligned}(p(x)y')' - q(x)y = \lambda r(x)y, \quad 0 < x < 1;\\ \alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = 0;\\ \alpha_2 y(1) + \beta_2 y'(1) = 0.\end{aligned} \tag{2.13}$$

1. Существует бесконечная последовательность собственных значений, удовлетворяющих условию

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_n < \ldots$$

2.Каждому собственному значению $\lambda_n$ соответствует единственная собственная функция $y_n(x)$.
3. Собственные функции, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны с весом $r(x)$ на отрезке [0,1]:

$$\int_0^1 r(x)y_m(x)y_n(x)dx = 0, \quad m \neq n. \tag{2.14}$$

Для доказательства пункта 3 выпишем уравнения для каких–либо собственных значений:

$$\begin{aligned}(p(x)y_1'(x))' - q(x)y_1(x) = \lambda_1 r(x)y_1(x);\\ (p(x)y_2'(x))' - q(x)y_2(x) = \lambda_2 r(x)y_2(x).\end{aligned} \tag{2.15}$$



Умножая первое из них на $y_2(x)$, а второе на $y_1(x)$, интегрируя области по $x$ и вычитая одно из другого, получим

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^1 dx r(x)y_1(x)y_2(x) = p(x)[y_2y_1' - y_1y_2']\,|_0^1. \tag{2.16}$$

Правая часть этого уравнения есть нуль в силу однородности граничных условий.

## 2.3 Вывод уравнения теплопроводности (диффузии)

Эти два явления имеют много общего и описываются одинаковыми уравнениями.

Рассмотрим явление распространения тепла.
Рассмотрим однородный стержень длиной $l$ с достаточной площадью поперечного сечения с теплоизолированной боковой поверхностью. (Тепло распространяется вдоль оси $x$). В силу закона сохранения энергии (тепла) изменение количества тепла компенсируется разностью потоков тепла через боковые сечения и его расходом (приходом) за счет внутренних источников:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_x^{x+\delta x} c\rho A u(s,t)ds = c\rho A\int_x^{x+\Delta x} u_t(s,t)ds =\\ = ks[u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)] + A\int_x^{x+\Delta x} L(s,t)ds,\end{aligned} \tag{2.17}$$

где $k$ – коэффициент теплопроводности материала, $A$ – площадь сечения, $\rho, c$ – плотность и удельная теплоемкость материала стержня, $L(s,t)$ - объемная мощность внешнего источника тепла. Здесь мы воспользовались законом Фурье: поток тепла через сечение пропорционален производной температуры и $x(x,t)$ по нормали к плоскости сечения. В пределе $\Delta x \to 0$, пользуясь $(u_x(x+\Delta x,t) - u(x,t))/\Delta x \to u_{xx}(x,t)$, получим

$$u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t) + F(x,t), \quad \alpha^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad F(x,t) = \frac{1}{c\rho}f(x,t). \tag{2.18}$$

При построении уравнения надо принимать во внимание кроме упомянутого закона Фурье еще закон Ньютона: теплообмен через боковую поверхность пропорционален разности температур:

$$u_t(x,t) = \alpha^2 n_x x - \beta(u - u_o), \tag{2.19}$$

$u_0$ - температура окружающей среды.

Если конец стержня $x = 0$ теплоизолирован, то ГУ имеет вид $u_x(x = 0, t) = 0$.

Если он поддерживается при температуре $u_0$, то $u(0, t) = u_0$.

Если поток тепла задан, то $u_x(x = 0, t) = L(t)$.

Для задач диффузии величина $u(x, t)$ есть концентрация вещества.

Если примесь некоторого вещества распространяется вдоль потока, движущегося со скоростью $v$, то скорость изменения концентрации описывается уравнением коллективной диффузии $u_t = \alpha^2 u_{xx} - v u_x$.

## 2.4 Уравнение теплопроводности. Метод интегральных преобразований Фурье

Задачи на бесконечной или полубесконечной прямой, неоднородные уравнения параболического типа решаются с применением интегрального преобразования Фурье [4, 12]. Мы покажем эффективность его применения на примере нескольких задач.

Прямое и обратное интегральные преобразования Фурье определены следующим образом. Величина

$$\bar{F}(\vec{\lambda}) = (2\pi)^{-3/2} \int F(\vec{x}) e^{i\vec{x}\vec{\lambda}} d^3x \tag{2.20}$$

называется фурье-образом функции $F(\vec{x})$. По известному фурье-образу сама функция находится с помощью обратного преобразования Фурье:

$$F(\vec{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3\lambda \bar{F}(\vec{\lambda}) e^{-i\vec{x}\vec{\lambda}}. \tag{2.21}$$

В непротиворечивости преобразований можно убедиться, подставив левую часть одного уравнения в подынтегральное выражение другого, воспользовавшись представлением $\delta$-функции

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\lambda e^{i(\vec{x}-\vec{x}')\vec{\lambda}} \tag{2.22}$$

и ее свойством

$$F(\vec{x}) = \int d^3x' \delta(\vec{x} - \vec{x}') F(\vec{x}'). \tag{2.23}$$

Описать изменение в пространстве и времени изначально заданного распределения тепла [3, *III-60*]. Краевая задача ставится так:

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad -\infty < x, y, z < +\infty, \quad 0 < t < +\infty; \tag{2.24}$$

$$u|_{t=0} = f(x, y, z), \quad -\infty < x, y, z < +\infty; \tag{2.25}$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}. \tag{2.26}$$



Решение. Запишем основное уравнение в терминах фурье-образов:

$$(2\pi)^{-3/2} \int d^3\lambda e^{-i\vec{\lambda}\vec{x}} [\bar{u}_t(\lambda, t) + a^2 \vec{\lambda}^2 \bar{u}(\lambda, t)] = 0. \tag{2.27}$$

Поскольку это равенство удовлетворяется для всех моментов времени, оно требует обращения в нуль подынтегрального выражения. Таким образом, мы получаем для фурье-образа обыкновенное дифференциальное уравнение с начальным условием

$$\frac{d}{dt} \bar{u}(\vec{\lambda}, t) = -a^2 \vec{\lambda}^2 \bar{u}(\vec{\lambda}, t), \quad \bar{u}(\vec{\lambda}, 0) = \bar{f}(\vec{\lambda}), \tag{2.28}$$

решением которого является

$$\bar{u}(\vec{\lambda}, t) = \bar{f}(\vec{\lambda}) e^{-a^2 \vec{\lambda}^2 t}. \tag{2.29}$$

Обратное преобразование Фурье позволяет найти искомое распределение тепла:

$$u(x, y, z, t) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3\lambda \bar{f}(\vec{\lambda}) e^{-a^2 \vec{\lambda}^2 t - i\vec{\lambda}\vec{x}}. \tag{2.30}$$

Подставляя явное выражение для фурье-образа правой части уравнения, выделяя в показателе экспоненты квадратичную форму по $\lambda$:

$$-a^2 \vec{\lambda}^2 t - i\vec{\lambda}(\vec{x} - \vec{x}') = -a^2 t \left( \vec{\lambda} - i\frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{2a^2 t} \right)^2 - \frac{(\vec{x} - \vec{x}')^2}{4a^2 t} \tag{2.31}$$

и проводя интегрирование по $\lambda$ с использованием интеграла Гаусса

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\pi/a}, \tag{2.32}$$

получим окончательно

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int d^3x' f(\vec{x}') e^{-[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]/(4a^2 t)}. \tag{2.33}$$

Решить краевую задачу [3, *III-55*]:

$$\begin{aligned} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty; \\ u(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Решение. Для фурье-образа имеем неоднородное уравнение

$$\frac{d}{dt} \bar{u} + \lambda^2 a^2 \bar{u} = \bar{f}, \quad \bar{u}(\lambda, 0) = 0, \tag{2.35}$$

которое решаем методом вариации постоянной:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= C(t) e^{-\lambda^2 a^2 t}; \\ \frac{d}{dt} C(t) &= \bar{f}(\lambda, t) e^{\lambda^2 a^2 t}; \\ C(t) &= \int_0^t d\tau \bar{f}(\lambda, \tau) e^{a^2 \lambda^2 \tau}. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Применяя обратное преобразование Фурье и проводя интегрирование по $\lambda$ с помощью приведенной выше формулы, получим окончательно

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz f(z,\tau) e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2(t-\tau)}}. \quad (2.37)$$

Для задач на полуоси бывает полезно использовать синус- или косинус-преобразования Фурье:

$$\bar{f}^{(c)}(\lambda) = \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty d\xi f(\xi) \cos(\xi\lambda);$$
$$f(x) = \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty d\lambda \bar{f}^{(c)}(\lambda) \cos(x\lambda);$$
$$\bar{f}^{(s)}(\lambda) = \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty d\xi f(\xi) \sin(\xi\lambda);$$
$$f(x) = \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty d\lambda \bar{f}^{(s)}(\lambda) \sin(x\lambda). \quad (2.38)$$

Решить краевую задачу [3, *III-56*]:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, t < \infty; \quad u(x,0) = f(x); \quad u(0,t) = 0, \quad 0 < x, t < \infty. \quad (2.39)$$

Использование синус-преобразования Фурье

$$\sqrt{2/\pi} \int\limits_0^\infty d\xi \sin(\xi, t) \left[ \frac{d}{dt} u(\xi, t) - a^2 \frac{d^2 u(\xi, t)}{d\xi^2} \right] = 0 \quad (2.40)$$

приводит к обыкновенному уравнению для синус-образа:

$$\frac{d}{dt}\bar{u}^{(s)} + a^2\lambda^2 \bar{u}^{(s)} = 0;$$
$$\bar{u}^{(s)}(\lambda, 0) = \bar{f}^{(s)}(\lambda),$$
$$\bar{u}^{(s)}(\lambda, t) = \bar{f}^{(s)}(\lambda) e^{-a^2\lambda^2 t}. \quad (2.41)$$

Применяем обратное синус-преобразование:

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dz f(z) \int_0^\infty d\lambda e^{-a^2\lambda^2 t} \sin(\lambda\xi) \sin(\lambda x) =$$
$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty dz f(z) [e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+z)^2}{4a^2 t}}]. \quad (2.42)$$

## 2.5 Свойства и представления дельта-функции

В задачах математической физики используется обобщенная функция, называемая дельта-функцией (уже упомянутая выше). Определим ее как предельное



значение произвольной неотрицательной функции $\delta_\epsilon(x - x_0)$, равной нулю везде, кроме отрезка $x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon$ при стремлении $\epsilon$ к нулю, но такой, чтобы интеграл от нее был равен единице:

$$\delta(x - x_0) = \delta_\epsilon(x), \quad \epsilon \to 0; \quad (2.43)$$
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta_\epsilon(x) dx = 1, \quad \delta_\epsilon(x) \geq 0. \quad (2.44)$$

Из определения следует основное свойство дельта-функции:

$$\int\limits_a^b f(x)\delta(x - x_0) = f(x_0), \quad a \leq x_0 \leq b; \quad (2.45)$$
$$\int\limits_a^b f(x)\delta(x - x_0) = 0, \quad x_0 < a; \quad x_0 > b.$$

Приведем некоторые представления дельта-функции:

$$\delta(x) = \frac{\epsilon}{\pi(\epsilon^2 + x^2)}, \quad \epsilon \to 0;$$
$$\delta(x - x_0) = \sum_{n=1}^\infty \frac{2}{l} \sin\frac{\pi n x}{l} \sin\frac{\pi n x_0}{l};$$
$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \cos(\lambda(x - x_0)). \quad (2.46)$$

В качестве примера применения дельта-функции рассмотрим следующую задачу Коши гиперболического типа [5]. Рассмотрим трехмерное волновое уравнение с начальными условиями:

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} u_{tt} = 0, \quad u(\vec{x}, 0) = g_1(\vec{x}), \quad \frac{d}{dt} u(\vec{x}, 0) = g_2(\vec{x}) \quad (2.47)$$

в случае, когда $u$ зависит только от расстояния $r$ между точками $x, y, z; x_0, y_0, z_0$. Переписав радиальную часть лапласиана следующим образом:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{du}{dr}) = \frac{1}{r} \frac{d^2(ru)}{dr^2}, \quad (2.48)$$

запишем уравнение в виде

$$\frac{d^2(ru)}{dr^2} - \frac{1}{a^2} \frac{d^2(ru)}{dt^2} = 0. \quad (2.49)$$

Его решением будет суперпозиция двух встречных бегущих волн, затухающих на бесконечности:

$$u = \frac{1}{r} [\Phi_1(r - at) + \Phi_2(r + at)]. \quad (2.50)$$

Решением уравнения будет

$$u(\vec{x};t) = \int d^3x' g(x') \frac{\Phi(r-at)}{r} + \frac{d}{dt}\int d^3x' q(x') \frac{\Phi(r-at)}{r}. \qquad (2.51)$$

Выберем

$$\Phi(r-at) = \frac{1}{4\pi a}\delta(r-at). \qquad (2.52)$$

Параметризуя пространственные переменные в соответствии с

$$\begin{aligned} x'-x &= r\sin\theta\cos\phi; \\ y'-y &= r\sin\theta\sin\phi; \\ z'-z &= r\cos\theta \end{aligned} \qquad (2.53)$$

и выполняя интегрирование по радиусу с помощью дельта-функции, получим общее решение в виде (формула Пуассона)

$$\begin{aligned} u(x,y,z;t) &= \frac{t}{4\pi}\int_0^\pi d\theta \sin\theta \times \\ &\int_0^{2\pi} d\phi g_2(x+at\sin\theta\cos\phi, y+at\sin\theta\sin\phi, z+at\cos\theta) + \\ &+\frac{d}{dt}\frac{t}{4\pi}\int_0^\pi d\theta\sin\theta \times \\ &\int_0^{2\pi} d\phi g_1(x+at\sin\theta\cos\phi, y+at\sin\theta\sin\phi, z+at\cos\theta). \end{aligned} \qquad (2.54)$$

## 2.6 Задача теплопроводности без начальных условий. Законы Фурье

Одним из приложений решений уравнения теплопроводности являются задачи мерзлотоведения, где удается получить полезную информацию общего характера [12].

Поскольку рассматриваемый момент достаточно удален от начального, задача ставится так:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(0,t) = Ae^{i\omega t}. \qquad (2.55)$$

Решение ищем в виде $u(x,t) = Ae^{\alpha x+\beta t}$. Подставляя это выражение в основное уравнение, получим

$$\beta = i\omega, \quad \alpha = \pm(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}, \quad u(x,t) = Ae^{\pm x\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}}e^{\pm ix\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}+i\omega t}. \qquad (2.56)$$

Чтобы иметь ограниченное решение при $x \to +\infty$, надо выбрать знак минус в показателе экспоненты. Реальная часть и представляет собой решение:

$$u(x,t) = Ae^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}}\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{\sqrt{2a^2\omega}}\right)\right). \qquad (2.57)$$



Здесь $x$ можно отождествить, например, с расстоянием от поверхности в глубь однородной невлажной почвы в задаче о ее промерзании в результате температурных колебаний на поверхности $x = 0$. Отношение амплитуд колебаний температуры на глубине $x$ к амплитуде колебаний на поверхности выражает первый закон Фурье:

$$\frac{A(x)}{A(0)} = e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}}. \qquad (2.58)$$

Если глубины растут в арифметической прогрессии, то амплитуды убывают в геометрической. Принимая во внимание связь частоты колебаний с периодом $\omega = 2\pi/T$, получим второй закон Фурье, связывающий отношение глубин промерзания почвы с отношением их периодов:

$$\frac{x_1}{x_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}. \qquad (2.59)$$

Так, отношение глубин годичных колебаний к суточным для Земли составляет $x_y/x_d = \sqrt{365} \approx 20$. Наконец, время запаздывания максимальной температуры на глубине $x$

$$\Delta T = \frac{x}{\sqrt{2a^2\omega}}. \qquad (2.60)$$

Это третий закон Фурье. Так, для $a^2 = 4\times 10^{-3}$ см$^2$/с, $x = 400$ см время запаздывания составляет $10^7$ с, или же 4 месяца.

## 2.7 Метод функций Грина

Для линейных дифференциальных операторов $L, B$, действующих в пространстве $R^n$, поставим краевую задачу [5, 12]:

$$\begin{aligned} &1) \quad Lu_D = f; \\ &2) \quad Bu_S = 0, \end{aligned} \qquad (2.61)$$

т.е. наша задача состоит в нахождении функции $u(x)$, удовлетворяющей неоднородному уравнению 1) с известной правой частью, заданной внутри некоего тела $D$, и удовлетворяющей условию 2) на границе этого тела $S$.

Решение дается формулой Дюамеля

$$u(x) = \int_D dx' G(x,x') f(x'), \qquad (2.62)$$

где $G(x,x')$ – функция Грина, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} L_x G(x,x') &= \delta(x-x'); \\ BG(x,x')_S &= 0. \end{aligned} \qquad (2.63)$$

Продемонстрируем приложение метода к решению неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим задачу нахождения решения дифференциального уравнения второго порядка с произвольной правой частью:

$$\begin{aligned} y'' = f(x), \quad 0 \le x \le 1; \\ y(0) = y(1) = 0. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Везде, кроме точки $x = x'$, функция Грина удовлетворяет уравнению $G'' = G_{xx} = 0$, т.е. она линейна по $x$. Кроме того, она должна удовлетворять краевым условиям $G(x,x')_{x=0} = 0; G(x,x')_{x=1} = 0$. Поэтому ищем ее в виде

$$G(x,x') = Ax, \quad x < x'; \quad G(x,x') = B(x-1), \quad x > x'. \tag{2.65}$$

Интегрируя уравнение $G_{xx}(x,x') = \delta(x-x')$ по x в окрестности точки $x = x'$, получим уравнение для коэффициентов $A, B$:

$$\int\limits_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} G''(x,x')dx = G'(x'+\epsilon,x') - G'(x'-\epsilon,x') = 1,$$

$$B - A = 1. \tag{2.66}$$

Второе уравнение $Ax' = B(x'-1)$ следует из непрерывности функции Грина в точке $x = x'$. Решая простую алгебраическую систему, получим для функции Грина

$$\begin{aligned} G(x,x') = (x'-1)x, \quad x < x'; \\ G(x,x') = x'(x-1), \quad x' < x. \end{aligned} \tag{2.67}$$

Решение нашей задачи таково:

$$y(x) = (x-1)\int\limits_0^x dx'x'f(x') + x\int\limits_x^1 dx'(x'-1)f(x'). \tag{2.68}$$

Рассмотрим другую задачу:

$$L_x y = -y'' = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad y'(0) = y(0), \quad y(1) + y'(1) = 0. \tag{2.69}$$

Решение однородного уравнения, которому удовлетворяет функция Грина вне точки $x = z$, имеет вид $y = Ax + B$. Налагая граничные условия, получаем

$$\begin{aligned} G(x,z) = A(x+1), \quad x < z; \\ G(x,z) = B(x-2), \quad x > z. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Чтобы найти постоянные $A, B$, воспользуемся непрерывностью функции Грина в точке $x = z$ и тем, что разность ее производных слева и справа от точки



$x = z$ равна единице. Последнее следует из уравнения для функции Грина, проинтегрированного в окрестности этой точки:

$$A(z+1) = B(z-2); \quad A - B = 1. \tag{2.71}$$

Решая эту систему, получаем

$$\begin{aligned} G(x,z) = \frac{1}{3}(2-z)(x+1), \quad x < z; \\ G(x,z) = \frac{1}{3}(2-x)(z+1), \quad x > z. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Решение неоднородной задачи имеет вид

$$y(x) = \frac{1}{3}(x+1)\int\limits_x^1 f(z)(2-z)dz + \frac{1}{3}(2-x)\int\limits_0^x f(z)(1+z)dz. \tag{2.73}$$

**Задачи по теме "Неоднородные обыкновенные дифференциальные уравнения"**

$$\begin{array}{ll} 1) & Ly = -y'', \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = y(1) = 0; \\ 2) & Ly = -y'', \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = hy'(0); \quad h > 0; \quad y(1) = 0; \\ 3) & Ly = -y'' - y, \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = y(1) = 0; \\ 4) & Ly = -y'', \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = y'(0); \quad y(1) = y'(1); \\ 5) & Ly = -y'' + y, \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = y(1) = 0; \\ 6) & Ly = -y'' + y, \quad 0 < x < 1, \quad y'(0) = y'(1) = 0; \\ 7) & Ly = -x^2y'' - 2xy', \quad 1 < x < 2, \quad y'(1) = 0; \quad y(2) = 0; \\ 8) & Ly = -xy'' - y', \quad 1 < x < 2, \quad y'(1) = 0; \quad y(2) = 0. \end{array} \tag{2.74}$$

Решим задачу для трехмерного случая.

Найти функцию Грина трехмерного уравнения Гельмгольца [6, 206]

$$\Delta u + k_0^2 u = f(r), \tag{2.75}$$

удовлетворяющую условию излучения Зоммерфельда (отсутствие сходящейся волны, приходящей из бесконечности), т.е. условию

$$u\,|_{r\to\infty} = \frac{e^{ik_0 r}}{r}. \tag{2.76}$$

Решение. Уравнение для функции Грина имеет вид

$$\begin{aligned} (\Delta + k_0^2)G(\vec{r},\vec{r}') = \delta(\vec{r}-\vec{r}'); \\ G(\vec{r},\vec{r}') = G(\vec{r}-\vec{r}',0) = G(\vec{r}-\vec{r}'). \end{aligned} \tag{2.77}$$

Перейдем к фурье-образу

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3re^{i\vec{k}\vec{r}}; G(\vec{r}) = \int d^3kG_ke^{i\vec{k}\vec{r}}. \qquad (2.78)$$

Подставляя это выражение в уравнение для ее фурье-образа функции Грина, получим алгебраическое уравнение, решением которого является

$$G_k = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{k_0^2 - \vec{k}^2 + i0}. \qquad (2.79)$$

Сама функция Грина находится с помощью обратного преобразования Фурье

$$G(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{k_0^2 - \vec{k}^2 + i0} = \frac{1}{ir}\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ke^{ikr}}{k_0^2 - k^2 + i0}dk, \qquad (2.80)$$

где мы провели интегрирование по угловым переменным.

Здесь мы даем малую мнимую добавку $i0$ в знаменателе подынтегрального выражения, чтобы придать определенный смысл интегралу, поскольку особенности лежат на пути интегрирования. Проанализируем положение полюсов:

$$k_0^2 - \vec{k}^2 - i0 = (k_0 - z)(k_0 + z), \quad z = |\vec{k}| - i0 = k - i0. \qquad (2.81)$$

Контур интегрирования в плоскости $k$ мы должны выбрать таким образом, чтобы обеспечить отсутствие сходящейся волны. Сходящаяся волна описывается бегущей волной с аргументом $\omega t - k_0r, k_0 > 0$, а расходящаяся отвечает экспоненте с аргументом $\omega t + k_0r, k_0 > 0$. Поэтому мы должны взять лишь вклад вычета при $k = k_0 + i0$.

Контур интегрирования замыкаем в верхней полуплоскости, при этом выбор знака мнимой добавки обеспечивает сходимость интеграла по дуге большого радиуса и возможность воспользоваться теоремами о вычетах. Соответствующий вычет есть

$$Res\frac{ke^{ikr}}{k_0^2 - k^2 + i0} = \frac{1}{2}e^{i|k_0|r}. \qquad (2.82)$$

Окончательное выражение для функции Грина таково:

$$G^+(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{i|k_0|R}}{4\pi R}, \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'|. \qquad (2.83)$$

## 2.8 Построение функции влияния (функции Грина) для уравнения теплопроводности на отрезке

Рассмотрим краевую задачу на отрезке $0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t < \infty$ [5]:

$$u_t = a^2u_{xx}; \quad u(0,t) = u(l,t) = 0; \quad u(x,0) = \phi(x). \qquad (2.84)$$



Решение ищем в виде (разделение переменных) $u(x,t) = X(x)T(t)$. Для функций $X(x), T(t)$ имеем уравнения

$$X'' + \lambda X = 0; \quad X(0) = 0; \quad X(l) = 0; \quad T' + a^2\lambda T = 0. \qquad (2.85)$$

Первое уравнение нам известно, и его решения, удовлетворяющие начальным условиям, имеют вид

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad \lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2. \qquad (2.86)$$

Подставив этот спектр значений разделяющего параметра во второе уравнение, решая его, получим для решения уравнения теплопроводности

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_ne^{-(\frac{n\pi}{l})^2a^2t}\sin\frac{n\pi x}{l}. \qquad (2.87)$$

Разлагая начальное значение в ряд Фурье, получим для коэффициентов $C_n$

$$\phi(x) = u(x,0) = \sum_n C_n\sin\frac{n\pi x}{l}; \quad C_n = \frac{2}{l}\int_0^l\phi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}. \qquad (2.88)$$

Подставляя это значение в решение уравнения и переставляя операции суммирования и интегрирования, запишем его в виде

$$u(x,t) = \int_0^l d\xi\phi(\xi)G(x,\xi,t), \qquad (2.89)$$

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\frac{n\pi a}{l})^2t}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}.$$

Функция $G(x,\xi,t)$ называется функцией мгновенного точечного источника или функцией температурного влияния мгновенного точечного источника тепла.

Действительно, полагая $\phi(\xi) = Q/(c\rho)\delta(\xi - \xi_0)$, что соответствует источнику, помещенному в точке $\xi_0$ отрезка, получим

$$u(x,t) = \frac{Q}{c\rho}\int_0^l d\xi G(x,\xi,t)\delta(\xi - \xi_0) = \frac{Q}{c\rho}G(x,\xi_0,t). \qquad (2.90)$$

## 2.9 Построение функции Грина уравнения теплопроводности для бесконечной прямой

Рассмотрим краевую задачу [12]

$$u_t = a^2u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0; \quad u(x,0) = \phi(x). \qquad (2.91)$$

Представляя решение в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$ и вводя разделяющий параметр $\lambda^2$, получим

$$X'' + \lambda^2 X = 0; \quad T' + a^2\lambda^2 T = 0. \tag{2.92}$$

Решая эти уравнения, получим

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda A(\lambda) e^{-\lambda^2 a^2 t + i\lambda x}. \tag{2.93}$$

Функция $A(\lambda)$ находится из начального условия с помощью обратного преобразования Фурье:

$$A(\lambda) = (1/(2\pi)) \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \phi(\xi) e^{-i\lambda\xi}. \tag{2.94}$$

Подставляя это значение, решение представим в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\phi(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda(x-\xi)}. \tag{2.95}$$

Интегрирование по $\lambda$ проводится диагонализацией показателя экспоненты:

$$-\lambda^2 a^2 t + i\lambda(x-\xi) = -ta^2\left(\lambda - i\frac{x-\xi}{2a^2t}\right)^2 - \frac{(x-\xi)^2}{4a^2t} \tag{2.96}$$

и использованием интеграла Гаусса:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-a^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{a}, \quad a > 0. \tag{2.97}$$

В результате

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t)\phi(\xi)d\xi; \tag{2.98}$$

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}.$$

Пример:

$$\begin{aligned} u(x,0) = \phi(x) = T_1, &\quad x > 0, \\ \phi(x) = T_2, &\quad x < 0. \end{aligned} \tag{2.99}$$

Решение:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{T_2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0} \frac{d\xi}{\sqrt{4a^2t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{4a^2t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} = \\ &= \frac{T_1+T_2}{2} + \frac{T_1-T_2}{2}\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{4a^2t}}\right), \end{aligned} \tag{2.100}$$



где $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z dx e^{-x^2}$ - функция ошибок.

Решим задачу для случая $\phi(z) = \exp(-b(z-c)^2)$, $b > 0$. Пользуясь алгебраическим соотношением

$$a(z-x_1)^2 + b(z-x_2)^2 = (a+b)\left(z - \frac{x_1a + x_2b}{a+b}\right)^2 + \frac{ab}{a+b}(x_1-x_2)^2, \tag{2.101}$$

получим решение

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+4a^2bt}} e^{-\frac{b(x-c)^2}{1+4a^2bt}}, \tag{2.102}$$

т.е. решение представляет собой оседающий со временем колокол с вершиной, расположенной в точке $x = c$.

Построим функцию Грина для стержня, контактирующего со средой при температуре $T = 0$ [3, *III-67*]. Соответствующая краевая задача ставится так:

$$u_t = a^2u_{xx} - hu, \quad u(x,0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty. \tag{2.103}$$

Уравнение для фурье-образа будет иметь вид

$$\begin{gathered} \bar{u}_t + a^2\lambda^2\bar{u}(\lambda,t) + h\bar{u}(\lambda,t) = 0; \\ \bar{u}(\lambda,0) = \bar{f}(\lambda); \quad \bar{u}(\lambda,t) = \bar{f}(\lambda)\exp(-ht - a^2\lambda^2 t). \end{gathered} \tag{2.104}$$

В результате функция Грина будет $e^{-ht}G(z,x;t)$, где $G(x,z,t)$ приведено в (2.98).

Отметим некоторые свойства функции Грина:

$$\begin{aligned} &1) \quad G > 0; \\ &2) \quad G(x,\xi,t) = G(\xi,x,t); \\ &3) \quad G_t = a^2G_{xx}; \\ &4) \quad G(x,\xi,0) = \delta(x-\xi). \end{aligned} \tag{2.105}$$

# ГЛАВА 3

# Уравнения эллиптического типа

Уравнениями эллиптического типа являются, например, стационарное уравнение Шредингера, стационарное уравнение теплопроводности, уравнения для гравитационного и электростатического потенциалов, описание потенциального течения жидкости и другие задачи.

**Классификация уравнений (терминология)**

Уравнение $\Delta u = 0$ называется уравнением Лапласа, уравнение $\Delta u = f$ - уравнением Пуассона.

Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются гармоническими.

Задача отыскания функции, удовлетворяющей уравнению Пуассона при условии, что на поверхности тела эта функция принимает заданное значение, называется 1-й краевой задачей или задачей Дирихле. Если же на поверхности задана производная по нормали неизвестной функции, то это – постановка 2-й краевой задачи, или же задачи Неймана. Различают внешнюю и внутреннюю краевые задачи в зависимости от того, вне или внутри тела с данной поверхностью надо найти функцию.

**Фундаментальные решения уравнения Лапласа**

Решение уравнения Лапласа для трехмерного пространства в сферически-симметричном случае имеет вид [3, 6]

$$\Delta u(r) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du(r)}{dr}\right) = 0, \quad r^2\frac{du}{dr} = C_1; \quad u(r) = \frac{C_1}{r} + C_2. \tag{3.1}$$

Фундаментальное решение для плоскости в случае азимутальной симметрии или для цилиндра в случае независимости от координат $z, \phi$:

$$\Delta u(\rho) = 0, \quad \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{du(\rho)}{d\rho}\right) = 0, \quad \rho\frac{du}{d\rho} = C_1, \quad u(\rho) = C_1 \ln\frac{\rho_0}{\rho} + C_2. \tag{3.2}$$



Здесь необходимо отметить, что точка $r = 0$ или $\rho = 0$ должна быть исключена, т.е. эти фундаментальные решения справедливы во всей области вне некоторой сферы или вне некоторого цилиндра (окружности), где решение конечно.

## 3.1 Формулы Грина

Рассмотрим некоторое тело $T$ с поверхностью $S$ [12]. Применим формулу Остроградского

$$\int\int\int_T \mathrm{div}\vec{A}d\tau = \int\int_S A_n d\sigma, \tag{3.3}$$

где $d\tau, d\sigma$ - элементы объема и поверхности, $A_n$ – проекция вектора $\vec{A}$ на внешнюю нормаль к поверхности.

Применим эту формулу к $\vec{A} = u\nabla v$ и воспользуемся известным соотношением $\mathrm{div}\vec{A} = \nabla u \nabla v + u\Delta v$.

Подставляя в формулу Остроградского, получим первую формулу Грина

$$\int_T u\Delta v = \int_S u\frac{dv}{dn}d\sigma - \int_T \nabla u\nabla v d\tau. \tag{3.4}$$

Вторая формула Грина получится из первой вычитанием из нее аналогичной формулы, полученной перестановкой функций $u, v$. Она имеет вид

$$\int_T (u\Delta v - v\Delta u)d\tau = \int_S \left(u\frac{dv}{dn} - v\frac{du}{dn}\right)d\sigma. \tag{3.5}$$

Дадим аналог этой формулы для двумерного пространства. Здесь вместо тела $T$ и поверхности его $S$ будут фигурировать плоская фигура $S$ и ее контур $C$ – простая замкнутая кривая:

$$\int_S (u\Delta_2 v - v\Delta_2 u)ds = \int_C \left(u\frac{dv}{dn} - v\frac{du}{dn}\right)dl. \tag{3.6}$$

## 3.2 Решение краевых задач Дирихле и Неймана

Выберем внутри тела $T$ точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, окружим ее сферой малого радиуса $\epsilon$. Применим вторую формулу Грина к новому телу, полученному из $T$ вырезанием шара $K_\epsilon$ малого радиуса с центром в $M_0$ [3, 5].

В качестве функций $u, v$ выберем гармонические функции $u$, $v = 1/R$, $R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$, где $x, y, z$ пробегают пространство между сферой и поверхностью тела $S$. В этой области функция $1/R$ является фундаментальным решением уравнения Лапласа. В результате получим

$$\int_{T-K_\epsilon}\left(u\Delta\frac{1}{R}-\frac{1}{R}\Delta u\right)d\tau = \\ = \int_S\left(u\frac{d}{dn}\frac{1}{R}-\frac{1}{R}\frac{du}{dn}\right)d\sigma + \int_{S_\epsilon} u\frac{d}{dn}\frac{1}{R}d\sigma - \int_{S_\epsilon}\frac{1}{R}\frac{du}{dn}\frac{1}{R}d\sigma. \tag{3.7}$$

В пределе $\epsilon \to 0$ последнее слагаемое в правой части исчезает, второе же дает конечный вклад, так как

$$\frac{d}{dn}\frac{1}{R} = -\frac{d}{dr}\frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{\epsilon^2};\\ d\sigma = \epsilon^2 dO;\\ \int_{S_\epsilon} u\frac{d}{dn}\frac{1}{R}d\sigma = 4\pi u(M_0). \tag{3.8}$$

Интеграл в левой части равенства есть нуль, поскольку функции $u, 1/R$ гармонические. Таким образом, мы вывели важную формулу

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\int\int_S\left[\frac{1}{R_{M_0P}}\frac{du}{dn} - u\frac{d}{dn}\frac{1}{R_{M_0P}}\right]d\sigma, \tag{3.9}$$

позволяющую найти значение гармонической функции в любой точке внутри тела, если известно ее значение и значение ее производной по нормали на поверхности тела $S$. В этой формуле $P$ – точка на поверхности тела, $R_{M_0P}$ – расстояние между точками $M_0, P$. Приведем также аналог этой формулы для плоского тела, ограниченного контуром $C$:

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi}\int_C\left[\ln\frac{1}{R_{M_0P}}\frac{du}{dn} - u\frac{d}{dn}\ln\frac{1}{R_{M_0P}}\right]ds, \tag{3.10}$$

здесь $ds$ – элемент длины контура.

Комбинируя полученное уравнение для трехмерного случая с уравнением (вторая формула Грина для гармонических функций $u, v$)

$$0 = \int_S\left(v\frac{du}{dn} - u\frac{dv}{dn}\right)d\sigma, \tag{3.11}$$

получим

$$u(M_0) = \int_S\left[G\frac{du}{dn} - u\frac{dG}{dn}\right]d\sigma,\\ G = \frac{1}{4\pi R_{M_0P}} + v. \tag{3.12}$$



Функция $G$ называется функцией Грина. Полученную формулу можно использовать для решения 1-й и 2-й краевых задач. Для 1-й задачи выбирают гармоническую функцию $v$ так, чтобы обеспечить $G_S = 0$, и получают решение в виде

$$u(M_0) = -\int d\sigma u\frac{dG}{dn}. \tag{3.13}$$

Для 2-й задачи функция $v$ подбирается так, чтобы выполнялось условие $(dG/dn)_S = 0$, и решение имеет вид

$$u(M_0) = \int G\frac{du}{dn}d\sigma + \text{const}. \tag{3.14}$$

К решению 2-й краевой задачи мы сделаем два замечания. Первое: решение определено с точностью до произвольной постоянной. Второе: предполагаемое известным значение производной по нормали функции на поверхности тела не является произвольным, а должно удовлетворять условию

$$\int\frac{du}{dn}d\sigma = 0. \tag{3.15}$$

Это условие следует из второй формулы Грина, приведенной выше для случая $v = 1$.

Рассмотрим 1-ю краевую задачу для плоскости, круга и сферы.

Пусть в качестве поверхности $S$ будет плоскость, задаваемая в декартовых координатах уравнением $z = 0$. Считаем, что задано распределение зарядов на плоскости функцией $f(x, y)$. Ставим задачу об определении потенциала, создаваемого этими зарядами в некоторой точке $M(x_0, y_0, z_0)$ вне плоскости. Мы должны построить функцию Грина – гармоническую функцию, обращающуюся в нуль на плоскости. Эта функция имеет вид

$$G(M,P) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{MP}} + v,\\ R_{MP} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}. \tag{3.16}$$

Условию $G_{z=0} = 0$ можно удовлетворить, выбрав $v = -(1/(4\pi R_1))$, $R_1 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}$. $R_1$ является расстоянием от точки $P$ плоскости до точки, являющейся зеркально отраженной относительно плоскости по отношению к точке $M$. Если в эту точку поместить заряд противоположного знака, то потенциал на плоскости, создаваемый этими двумя точками, будет равен нулю, как если бы эта плоскость была проводящей и заземленной.

По этой причине метод построения функции Грина называется методом отражений. Итак, функция Грина для плоскости имеет вид

$$G = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{R_{MP}} - \frac{1}{R_1}\right]. \tag{3.17}$$

Вычисляя ее производную по нормали (по $z$) при $z = 0$, получим для потенциала выражение

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{z_0 f(x,y)}{\sqrt{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2]^3}}. \tag{3.18}$$

Для примера решим задачу [3, *IV-35*].

Найти потенциал, вычислить плотность зарядов, индуцированных на проводящей плоскости зарядом, расположенным над плоскостью на расстоянии $z$.

Решение. Потенциал, создаваемый зарядом и индуцированными на плоскости зарядами (противоположного знака), должен быть равен нулю на проводящей плоскости. Поэтому он равен

$$u = e\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right), \quad r_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (z-\lambda)^2};$$
$$r_1 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (z+\lambda)^2}. \tag{3.19}$$

Поверхностная плотность зарядов и полный индуцированный заряд таковы:

$$\sigma(\xi,\eta) = -\frac{1}{4\pi}\frac{du}{d\lambda}|_{\lambda=0} = -\frac{ez}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{[\xi^2 + \eta^2 + z^2]^3}};$$
$$e' = \int d\xi d\eta \sigma(\xi,\eta) = -e. \tag{3.20}$$

Здесь мы положение точки на плоскости параметризовали величинами $\xi, \eta$.

**Построение функции Грина для сферы**

Применим аналог метода отражений для нахождения гармонической функции $v$, обеспечивающей обращение в нуль функции Грина на поверхности сферы:

$$G(M_0, P) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{M_0P}} + v. \tag{3.21}$$

Пусть $M_0$ – точка внутри сферы с центром $O$. На продолжении луча $OM_0$ выберем точку $M_1$, такую, что произведение расстояний от центра сферы до этих точек равно квадрату радиуса сферы:

$$\rho_0\rho_1 = R^2, \quad \rho_0 < R. \tag{3.22}$$

Для любой точки $P$ на поверхности сферы треугольники $OPM_I$, $OPM_0$ подобны по построению. Из подобия находим связь расстояний между точками $r_0 = PM_0, r_1 = PM_1 : r_0 = \frac{\rho_0}{R} r_1$. Это построение позволяет найти функцию Грина для сферы:

$$G(M_0, P) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r_0} - \frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_1}\right]. \tag{3.23}$$



Для точки $P$, лежащей на сфере, функция Грина обращается в нуль, кроме того, она удовлетворяет уравнению Лапласа. Вычислим ее производную по нормали. Пользуясь

$$\frac{d}{dn}\frac{1}{r_0} = -\frac{1}{r_0^2}\frac{R^2 + r_0^2 - \rho_0^2}{2Rr_0};$$
$$\frac{d}{dn}\frac{1}{r_1} = -\frac{1}{r_1^2}\frac{R^2 + r_1^2 - \rho_1^2}{2Rr_1} = -\frac{1}{r_1^2}\frac{\rho_0^2 + r_0^2 - R^2}{2\rho_0 r_0}, \tag{3.24}$$

получим $(dG/dn)_S = -(R^2 - \rho_0^2)/(4\pi R r_0^3)$ и решение внутренней задачи Дирихле для сферы

$$\Delta u = 0; \quad u(r,\theta,\phi)_{r=R} = f(\theta,\phi) \tag{3.25}$$

в виде

$$u(\rho_0,\theta_0,\phi_0) = \frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta f(\theta,\phi)\frac{R^2 - \rho_0^2}{\sqrt{[R^2 - 2R\rho_0\cos\gamma + \rho_0^2]^3}},$$
$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\phi - \phi_0). \tag{3.26}$$

Аналогично можно получить решение внешней задачи (значение функции $u$ вне сферы):

$$u(\rho_I,\theta_0,\phi_0) = \frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta f(\theta,\phi)\frac{-R^2 + \rho_1^2}{\sqrt{[R^2 - 2R\rho_1\cos\gamma + \rho_1^2]^3}}. \tag{3.27}$$

Аналогичное вычисление для функции Грина для круга радиуса $R$ (все обозначения для сферы здесь остаются теми же самыми) и решения внутренней задачи Дирихле дает

$$\Delta_2 u = 0, \quad u(\rho,\theta)_{\rho=r} = f(\theta), \quad G(M_0,P) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\rho_0 r_1}{Rr_0};$$
$$u(\rho_0,\theta_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta\frac{R^2 - \rho_0^2}{R^2 - 2R\rho_0\cos(\theta - \theta_0)}. \tag{3.28}$$

Пример [3, *IV-52*].

Найти плотность поверхностных зарядов, индуцируемых точечным зарядом, находящимся внутри заряженной сферы. Ответ:

$$\sigma = \frac{e}{4\pi}\left(\frac{dG}{dn}\right)_S = -\frac{e}{4\pi}\frac{R^2 - \rho^2}{Rr_o^3}, \tag{3.29}$$

где $r_0, \rho_0, R$ – расстояния от точки на сфере до точки, где находится заряд $e$, от центра сферы до заряда, радиус сферы соответственно.

**Простейшие примеры с 1-й и 2-й краевыми задачами**
Решение 1-й внутренней краевой задачи для круга

$$\Delta_2 u = 0, \quad u(\rho, \phi)_{\rho=R} = f(\phi) \tag{3.30}$$

имеет вид

$$u(\rho,\phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi);$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\phi f(\phi)\cos n\phi, \quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\phi f(\phi)\sin n\phi. \tag{3.31}$$

Решение 1-й внешней краевой задачи для круга:

$$u(\rho,\phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^n (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi). \tag{3.32}$$

Решение 2-й краевой задачи

$$\Delta_2 u = 0, \quad \frac{du}{dn}_{\rho=r} = f(\phi), \tag{3.33}$$

для круга внутри (а), вне (б) имеет вид

$$\text{а)} \quad u(\rho,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{nR^{n-1}}(A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi) + C;$$

$$\text{б)} \quad u(\rho,\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{n+1}}{n\rho^n}(A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi) + C. \tag{3.34}$$

Для второй задачи необходимо убедиться в выполнении условия

$$\int_0^{2\pi} d\phi f(\phi) = 0, \tag{3.35}$$

в противном случае задача не имеет решения.

## 3.3 Криволинейные координаты. Вид лапласиана

**Разделение переменных в уравнениях Шредингера и Гельмгольца.** Квадрат расстояния между двумя близкими точками в системе криволинейных координат $q_1, q_2, q_3$ записывается в виде [12, 17]

$$ds^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2. \tag{3.36}$$



Коэффициенты Ламе $h_i$ могут быть вычислены, если задана связь криволинейных координат с декартовыми по формуле

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{dx}{dq_i}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq_i}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq_i}\right)^2}. \tag{3.37}$$

Лапласиан (оператор дифференцирования второго порядка)

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \tag{3.38}$$

в криволинейных координатах имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{d}{dq_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{d}{dq_1}\right) + \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{d}{dq_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{d}{dq_2}\right) + \\ + \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{d}{dq_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{d}{dq_3}\right). \tag{3.39}$$

Вычислим коэффициенты Ламе для сферических координат. Связь координат точки в сферических $(r, \theta, \phi)$ и декартовых $(x, y, z)$ координатах такова:

$$x = r\sin\theta\cos\phi; \quad y = r\sin\theta\sin\phi; \quad x = r\cos\theta. \tag{3.40}$$

Коэффициенты Ламе и лапласиан имеют вид

$$h_r^2 = 1; \quad h_\theta^2 = r^2; \quad h_\phi^2 = r^2\sin^2\theta,$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{d^2}{d\phi^2}.$$

Связь координат точки в цилиндрических и декартовых координатах такова:

$$x = \rho\cos\phi; \quad y = \rho\sin\phi; \quad z = z. \tag{3.41}$$

Коэффициенты Ламе и лапласиан имеют вид

$$h_\rho^2 = 1; \quad h_\phi^2 = \rho^2; \quad h_z^2 = 1;$$

$$\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2}{d\phi^2} + \frac{d^2}{dz^2}. \tag{3.42}$$

Уравнение Шредингера имеет вид

$$\left(-\frac{1}{2}\Delta + V(x,y,z)\right)\Psi(x,y,z) = E\Psi(x,y,z). \tag{3.43}$$

Метод разделения переменных позволяет свести решение уравнения в частных производных к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям. Продемонстрируем это на примере задачи.

Разделить переменные в уравнении Шредингера для потенциала вида [6, 61]:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad V = f(\rho) + \frac{1}{\rho^2} g(\phi) + h(z);\\
&2)\quad V = f(r) + \frac{1}{r^2} g(\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} h(\phi);\\
&3)\quad V = f(x) + g(y) + h(z).
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

Решение для случая 1: уравнение записываем в цилиндрических координатах; решение ищем в виде (анзац)

$$
\Psi = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z). \tag{3.45}
$$

Подставляя этот анзац в основное уравнение и деля обе части уравнения на $R\Phi Z$, получим

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\frac{1}{Z}Z'' + h(z) = \lambda_1;\\
&-\frac{1}{2}\frac{\Phi''}{\Phi} + g(\phi) = \lambda_2;\\
&-\frac{1}{2}\frac{1}{R}\frac{d}{d\rho}(\rho R') + f(\rho) + \frac{\lambda_2}{\rho^2} = E - \lambda_1.
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

Величины $\lambda_i$ являются постоянными. В случае 2 решение ищем в виде $\Psi = R(r)P(\theta)\Phi(\phi)$. Используя выражение лапласиана в сферических координатах, аналогично получим

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\frac{\Phi''}{\Phi} + h(\phi) = \lambda_1;\\
&-\frac{1}{2}\frac{(\sin\theta P')'}{2P\sin\theta} + g(\theta) + \frac{\lambda_1}{\sin^2\theta} = \lambda_2;\\
&-\frac{1}{2r^2 R}(r^2 R')' + \frac{\lambda_2}{r^2} + f(r) = E.
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

Для случая 3 решение ищем в виде $\Psi = X(x)Y(y)Z(z)$. Дальнейшую процедуру читатель легко проделает сам.

Наряду с упомянутыми выше декартовой, цилиндрической и сферической системами координат имеется еще 8 специальных координатных систем, допускающих разделение переменных.

Мы рассмотрим некоторые из них на примере уравнения Гельмгольца [17]

$$
\Delta\psi + k^2\psi = 0. \tag{3.48}
$$

1. Параболические цилиндрические координаты следующим образом связаны с декартовыми:

$$
x = \frac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2), \quad y = u_1 u_2, \quad z = u_3. \tag{3.49}
$$



Соответствующие коэффициенты Ламе имеют вид $h_1 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = h_2$, $h_3 = 1$. Уравнение Гельмгольца имеет вид

$$
\frac{1}{u_1^2 + u_2^2}\left[\frac{d^2}{du_1^2} + \frac{d^2}{du_2^2} + (u_1^2 + u_2^2)\frac{d^2}{du_3^2}\right]\psi + k^2\psi = 0. \tag{3.50}
$$

Подставляя в это уравнение $\psi = V_1(u_1)V_2(u_2)V_3(u_3)$ и деля его на $\psi$, получим

$$
\frac{V_1''}{V_1} + \frac{V_2''}{V_2} + (u_1^2 - u_2^2)\frac{V_3''}{V_3} + k^2(u_1^2 + u_2^2) = 0. \tag{3.51}
$$

Разделяя слагаемые, зависящие от разных аргументов, получим 3 уравнения

$$
\begin{aligned}
&V_3'' = -m^2 V_3, \quad V_1'' + (k^2 - m^2)u_1^2 V_1 = -c_1 V_1;\\
&V_2'' + (k^2 + m^2)u_2^2 V_2 = c_1 V_2.
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

2. Параболические координаты

$$
\begin{aligned}
&x = u_1 u_2 \cos u_3, \quad y = u_1 u_2 \sin u_3, \quad z = \frac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2);\\
&h_1 = h_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}, \quad h_3 = u_1 u_2.
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

Процедура разделения приводит к системе уравнений

$$
\begin{aligned}
&V_3'' = -m^2 V_3, \quad u_1(u_1 V_1')' + (k^2 u_1^4 - m^2)V_1 = c u_1^2 V_1;\\
&u_2(u_2 V_2')' + (k^2 u_2^4 - m^2)V_2 = -c u_2^2 V_2.
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

Для полноты приведем еще следующие системы координат.

3. Эллиптические цилиндрические координаты

$$
\begin{aligned}
&x = a\cosh u_1 \cos u_2, \quad y = a\sinh u_1 \sin u - 2, \quad z = u_3;\\
&h_1 = h_2 = a\sqrt{\sinh^2 u_1 + \sin^2 u_2}, \quad h_3 = 1.
\end{aligned}
\tag{3.55}
$$

4. Вытянутые сферические координаты (prolate spherical coordinates)

$$
\begin{aligned}
&x = a\sinh u_1 \sin u_2 \cos u_3, \quad y = a\sinh u_1 \sin u_2 \sin u_3, \quad z = a\cosh u_1 \cosh u_2;\\
&h_1 = a\sqrt{\cosh^2 u_1 - \cos^2 u_2} = h_2; \quad h_3 = a\sinh u_1 \sin u_2.
\end{aligned}
\tag{3.56}
$$

5. Сплюснутые сферические координаты (oblate spherical coordinates)

$$
\begin{aligned}
&x = a\cosh u_1 \cos u_2 \cos u_3; \quad y = a\cosh u_1 \cos u_2 \sin u_3; \quad z = a\sinh u_1 \sin u_2;\\
&h_1 = h_2 = a\sqrt{\sinh^2 u_1 + \sin^2 u_2}, \quad h_3 = a\cosh u_1 \cos u_2.
\end{aligned}
\tag{3.57}
$$

6. Тороидальные координаты

$$
\begin{aligned}
&x = \frac{a\sinh u_1 \cos u_3}{\rho}; \quad y = \frac{a\sinh u_1 \sin u_3}{\rho}; \quad z = \frac{a}{\rho}\sin u_2; \quad \rho = \cosh u_1 - \cos u_2;\\
&h_1 = \frac{a}{\rho} = h_2, \quad h_3 = \frac{a\sinh u_1}{\rho}.
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

В качестве упражнения предлагается выписать соответствующие уравнения, получаемые в процедуре разделения переменных в уравнении Гельмгольца.

## 3.4 Цилиндрические и сферические функции: функции Бесселя и полиномы Лежандра

При нахождении нетривиального (тождественно не равного нулю) решения задач

$$v_{xx} + \lambda v = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} + \lambda v = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} + v_{zz} + \lambda v = 0 \tag{3.59}$$

внутри некоторого тела $T$ возникают различные типы функций. Если тело $T$ – отрезок, прямоугольник или параллелепипед, то функции $v$ выражаются в терминах тригонометрических функций. Если $T$ – круг, цилиндр, шар, то появляются цилиндрические и сферические функции.

Для круга радиуса $r_0$, переходя к цилиндрическим координатам, имеем

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}v\right) + \frac{1}{r^2}\frac{d^2v}{d\phi^2} + \lambda v = 0, \quad v_{r=r_0} = 0. \tag{3.60}$$

Уравнение допускает разделение переменных. Подставляя $v(r,\phi) = R(r)\Phi(\phi)$, получим

$$\frac{1}{Rr}(rR')' + \frac{\Phi''}{r\Phi} + \lambda = 0, \quad \frac{\Phi''}{\Phi} = -\mu; \quad \frac{r(rR')' + \lambda Rr^2}{R} = \mu. \tag{3.61}$$

Из условия, чтобы функция $\Phi(\phi)$ была периодической: $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$, получаем условие $\mu = n^2$ при целом $n$. Для функции $R$, выраженной в терминах переменной $x = \sqrt{\lambda}r$, получается уравнение Бесселя

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0; \quad y(x) = R(r), \tag{3.62}$$

решением которого являются цилиндрические функции. Если в задаче имеется граничное условие $v(r = r_0, \phi) = 0$, то возникает целый спектр собственных значений $\lambda$, удовлетворяющих уравнению $y(x_n) = 0, \quad x_n = \sqrt{\lambda_n}r_0$.

Для шара радиуса $r_0$ ищем решение уравнения $\Delta_3 v + \lambda v = 0, \quad v(r_0) = 0$ в виде $v(r,\theta,\phi) = R(r)W(\theta,\phi)$ [3]. Разделяя переменные, получим

$$\begin{gathered}\Delta_{\theta\phi}W + \mu W = 0;\\ \frac{1}{r^2}(r^2R')' + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right)R = 0, \quad R(r_0) = 0;\\ \Delta_{\theta\phi}W = \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dW}{d\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2W}{d\phi^2}.\end{gathered} \tag{3.63}$$

Уравнение для угловой части лапласиана тоже допускает разделение переменных: $W(\theta,\phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$ со следующими обыкновенными уравнениями для



функций $\Theta, \Phi$:

$$\begin{gathered}\Phi'' + m^2\Phi = 0;\\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left(\mu - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0.\end{gathered} \tag{3.64}$$

В первом уравнении выбор разделяющей постоянной в виде квадрата целого числа $m$ обосновывается однозначностью функции $\Phi(\phi)$, т. е. условием $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$. Уравнение для $\Theta$ имеет ограниченные решения только при следующем выборе постоянной разделения $\mu$:

$$\mu = n(n+1) \tag{3.65}$$

с целым $n$. Общее решение углового уравнения имеет вид

$$W(\theta,\phi) = Y_n(\theta,\phi) = \sum_{m=0}^{n}(A_{mn}\cos m\phi + B_{mn}\sin m\phi)P_n^{(m)}(\cos\theta). \tag{3.66}$$

Функции $P_n^{(m)}(\cos\theta)$ называются присоединенными полиномами Лежандра. При $m = 0$, т.е. при отсутствии зависимости от азимутального угла $\phi$, решением являются полиномы Лежандра. Мы приведем несколько конкретных выражений $P_n^{(m)}(z)$:

$$\begin{gathered}P_0^{(0)} = 1, \quad P_1^{(0)}(z) = z, \quad P_2^{(0)}(z) = 1 - 3z^2, \quad P_3^{(0)}(z) = z(5z^2 - 3);\\ P_1^{(1)} = \sqrt{1-z^2}, \quad P_2^{(1)} = z\sqrt{1-z^2}.\end{gathered} \tag{3.67}$$

Исследуем некоторые свойства функций Бесселя. Записывая функцию $y(x)$ – решение уравнения $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$ вместе с производными в виде формального разложения

$$\begin{aligned}y(x) &= x^\sigma(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...),\\ y'(x) &= x^\sigma(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ...) + \sigma x^{\sigma-1}(a_0 + a_1x + ...);\\ y''(x) &= x^\sigma(2a_2 + 6a_3x + ...) + 2\sigma x^{\sigma-1}(a_1 + 2a_2x + ...) +\\ &\quad +\sigma(\sigma-1)(a_0 + a_1x + ...),\end{aligned} \tag{3.68}$$

подставляя их в основное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получим систему уравнений для коэффициентов:

$$\begin{aligned}a_0(\sigma^2 - \nu^2) &= 0;\\ a_1((\sigma+1)^2 - \nu^2) &= 0;\\ a_2((\sigma+2)^2 - \nu^2) + a_0 &= 0;\\ a_k((\sigma+k)^2 - \nu^2) + a_{k-2} &= 0.\end{aligned} \tag{3.69}$$

Решением рекуррентного соотношения является

$$a_{2k+1} = 0, \quad \sigma = \nu, \quad a_{2k} = (-1)^k\frac{a_0}{2^kk!(\nu+1)(\nu+2)...(\nu+k)}. \tag{3.70}$$

Выбирая $a_0 = 1/(2^\nu \Gamma(\nu+1))$, получим разложение функции Бесселя, справедливое при малых $x$:

$$y(x) = J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(x/2)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)}, \qquad (3.71)$$

где $\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1)$ – гамма-функция Эйлера. Конкретно для $\nu = 0; 1$ имеем

$$J_0(x) = 1 - (x/2)^2 + \frac{1}{(2!)^2}(x/2)^4 - \frac{1}{(3!)^2}(x/2)^6 + \dots \quad ;$$

$$J_1(x) = (x/2) - \frac{1}{2!}(x/2)^3 + \frac{1}{2!3!}(x/2)^5 - \dots \qquad (3.72)$$

Для полуцелых значений индекса функция Бесселя выражается через элементарные функции:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x, \quad J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}[\frac{\sin x}{x} - \cos x], \dots \qquad (3.73)$$

При больших значениях аргумента функция Бесселя имеет представление

$$J_\nu(x)_{x\to\infty} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x+\delta_\nu) + O(x^{-\frac{3}{2}}). \qquad (3.74)$$

Приведем пример задачи, решаемой с помощью цилиндрических функций,– рассмотрим краевую задачу на нахождение собственных колебаний круглой мембраны, закрепленной по краю.

## 3.5 Колебания круглой мембраны, закрепленной на контуре

Обозначим через $u(r,\theta,t)$ отклонение элемента мембраны с координатами $r,\theta$ от положения равновесия $u = 0$.

Колебания мембраны описываются следующей краевой задачей [4, 17]:

$$\begin{gathered} u_{tt} = c^2\Delta u, \quad 0 < r < 1, \quad 0 < t < \infty; \\ u = 0, \quad r = 1, \quad 0 < t < \infty; \\ u(r,0) = f(r), \quad u_t(r,0) = g(r), \quad 0 < r < 1. \end{gathered} \qquad (3.75)$$

Ищем решение в виде (разделяем переменные) $u(r,\theta,t) = U(r,\theta)T(t)$. Подставляя в уравнение, получим

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{\Delta U}{U} = -\lambda^2; \qquad (3.76)$$

$$T'' + \lambda^2 c^2 T = 0, \quad \Delta U + \lambda^2 U = 0.$$



Временная зависимость определяется решением одного из этих уравнений:

$$T(t) = A\sin(\lambda ct) + B\cos(\lambda ct). \qquad (3.77)$$

Записывая лапласиан в полярных координатах:

$$\Delta U = U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta} \qquad (3.78)$$

и применяя вновь процедуру разделения переменных: $U(r,\theta) = R(r)\Phi(\theta)$, получаем

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -\frac{1}{R}[r^2R'' + rR' + \lambda^2 r^2 R] = -n^2. \qquad (3.79)$$

Причем мы должны выбрать целое число в качестве $n = 0, 1, 2, 3, \dots$:

$$\Phi(\theta) = A\sin(n\theta) + B\cos(n\theta), \qquad (3.80)$$

при другом выборе решение будет неоднозначной функцией $\theta$. Вводя новую переменную $x = \lambda r$, уравнение для радиальной части запишем в виде

$$\begin{gathered} x^2\frac{d^2}{dx^2}R(x) + x\frac{d}{dx}R(x) + (x^2 - n^2)R(x) = 0, \\ R(0) \neq \infty; \quad R(\lambda) = 0, \end{gathered} \qquad (3.81)$$

где мы наложили физическое требование ограниченности отклонения мембраны от состояния равновесия и условие закрепления ее на границе. Последнее уравнение есть уравнение Бесселя. Для каждого целого $n$ оно имеет два решения $J_n(x)$, $Y_n(x)$ - соответственно ограниченное и неограниченное при $x = 0$. Это пример неэлементарной функции. Ограниченная функция при малых значениях аргумента допускает разложение в ряд:

$$J_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{n+2p}}{p!(n+p)!}. \qquad (3.82)$$

При больших значениях аргумента

$$J_n(x) \approx \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \qquad (3.83)$$

Приведем значения нескольких первых корней функции Бесселя с номером $n = 0$:

$$J_0(k_{0i}) = 0, \qquad (3.84)$$

$$k_{01} = 2,4; \quad k_{02} = 5,52; \quad k_{03} = 8,65; \quad k_{04} = 11,79; \quad k_{05} = 14,93, \dots$$

С точностью до выбора начала отсчета азимутального угла общее решение имеет вид

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}J_n(k_{nm}r)\cos(n\theta)[A_n\sin(k_{nm}ct)+B_n\cos(k_{nm}ct)]. \qquad (3.85)$$

Рассмотрим краевую задачу о колебаниях закрепленной по краям мембраны единичного радиуса с нулевой начальной скоростью и начальным отклонением от положения равновесия, заданным функцией

$$u(r,\theta,0)=A_1J_0(2,4r)+A_3J_0(8,65r),\quad 0<r<1. \qquad (3.86)$$

Решением краевой задачи будет

$$u(r,\theta,t)=A_1J_0(2,4r)\cos(2,4ct)+A_3J_0(8,65r)\cos(8,65ct). \qquad (3.87)$$

Частоты колебаний соответственно равны $2\pi\nu_1=2,4c$, $2\pi\nu_2=8,65c$.

Для начальных условий, не зависящих от азимутального угла,

$$u(r,\theta,0)=f(r),\quad u_t(r,\theta,0)=0,\quad 0<r<1, \qquad (3.88)$$

решение имеет вид $u(r,t)=\sum_m A_mJ_0(k_{0m}r)\cos(k_{0m}ct)$, где коэффициенты находятся по формуле

$$A_m=\frac{2}{J_1^2(k_{0m})}\int\limits_0^1 rf(r)J_0(k_{0m}r)dr; \qquad (3.89)$$

мы воспользовались соотношением ортогональности

$$\int\limits_0^1 rJ_0(k_{0m}r)J_0(k_{0n}r)dr=\frac{1}{2}J_1^2(k_{0n})\delta_{mn}. \qquad (3.90)$$

## 3.6 Разделение переменных для уравнений Лапласа и Пуассона

Рассмотрим краевую задачу Дирихле для круга [6]. Функция $u(r,\phi)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа $\Delta u=0$ внутри (вне) круга и принимающая заданное значение на его границе $u|_{r=R}=f(\phi)$, задается рядом

$$u(r,\phi)=C+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}(A_n\cos(n\phi)+B_n\sin(n\phi)),\quad r<R, \qquad (3.91)$$



для внутренней задачи Дирихле и рядом

$$u(r,\phi)=C+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^n}{r^n}(A_n\cos n\phi+B_n\sin n\phi),\quad r>R, \qquad (3.92)$$

для внешней задачи Дирихле, где

$$C=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dxf(x),\quad A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dxf(x)\cos nx;$$
$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dxf(x)\sin nx. \qquad (3.93)$$

Решение задачи Дирихле для области в виде кольца $R_1<r<R_2$ с граничными условиями $u(R_1,\phi)=f_1(\phi),u(R_2,\phi)=f_2(\phi)$ имеет вид

$$u(r,\phi)=C+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n\frac{r^n}{R_2^n}+B_n\frac{R_1^n}{r^n}\right)\cos n\phi+\left(C_n\frac{r^n}{R_2^n}+D_n\frac{R_1^n}{r^n}\right)\sin n\phi\right]+ \qquad (3.94)$$
$$+a\ln(r/R_1)+b.$$

Задача Неймана состоит в нахождении гармонической функции (удовлетворяющей уравнению Лапласа) вне или внутри некоторой области с заданием на границе нормальной производной (в случае круга это $\partial u/\partial r|_{r=R}=f(\phi)$). Решение задачи Неймана определено с точностью до постоянной, причем функция, заданная на границе, должна удовлетворять условию $\int_0^{2\pi}f(x)dx=0$.

**Задачи для круга**

1. Найти функцию, гармоническую внутри единичного круга, принимающую на границе значение $u(r=1,\phi)=f(\phi)$, где

$$\text{а)}\quad f(\phi)=\sin^3\phi; \qquad (3.95)$$
$$\text{б)}\quad f(\phi)=\cos^4\phi.$$

2. Найти функцию, гармоническую вне единичного круга, нормальная производная которой принимает на границе значение $u(r=1,\phi)=f(\phi)$, где

$$\text{а)}\quad f(\phi)=\sin^2\phi; \qquad (3.96)$$
$$\text{б)}\quad f(\phi)=\cos^5\phi.$$

Решение задач Дирихле для сферы и шарового слоя $R_1<r<R_2$ в случае, когда краевые условия не зависят от азимутального угла, имеет вид

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}[A_n(r/R_1)^n+B_n(R_2/r)^{n+1}]P_n(\cos\theta), \qquad (3.97)$$

где $P_n(z)$ - полиномы Лежандра:

$$P_0(z)=1;\quad P_1(z)=z; \qquad (3.98)$$
$$P_2(z)=(3z^2-1)/2;\quad P_3(z)=(5z^3-3z)/2...,$$

а коэффициенты находятся из граничных условий $u(r = R_1, \theta) = f_1(\theta)$, $u(r = R_2, \theta) = f_2(\theta)$ по формулам

$$A_n(B_n) = \frac{2}{2n+1} \int_{-1}^{1} dz P_n(z) f_{1(2)}(z). \tag{3.99}$$

**Задачи для шара**

1. Найти функцию, гармоническую внутри шара радиуса $R$, такую, что $u(r = R, \theta) = f(\theta)$:

$$\begin{gathered} \text{а) } f(\theta) = \cos\theta, \quad \text{б) } f(\theta) = \sin\theta; \\ \text{в) } f(\theta) = \cos(2\theta), \quad \text{г) } f(\theta) = \cos^2\theta. \end{gathered} \tag{3.100}$$

2. Разрешима ли внутренняя задача Неймана для граничных условий

$$\text{а) } u_r|_{r=R} = A\cos\theta, \quad \text{б) } u_r|_{r=R} = A\sin\theta. \tag{3.101}$$

3. Найти такую гармоническую внутри шарового слоя $1 < r < 2$ функцию, что $u_{r=1} = f_1(\theta)$; $u_{r=2} = f_2(\theta)$:

$$\begin{aligned} &\text{а)} \quad f_1 = \cos^2\theta, \quad f_2 = \frac{1}{8}(1 + \cos^2\theta); \\ &\text{б)} \quad f_1 = \cos^2\theta, \quad f_2 = 4\cos^2\theta - \frac{4}{3}; \\ &\text{в)} \quad f_1 = 1 - \cos(2\theta), \quad f_2 = 2\cos\theta; \\ &\text{г)} \quad f_1 = \frac{1}{2}\cos\theta, \quad f_2 = 1 + \cos(2\theta); \\ &\text{д)} \quad f_1 = 9\cos(2\theta), \quad f_2 = 3(1 - 7\cos^2\theta). \end{aligned} \tag{3.102}$$

**Задачи на обтекание тел потоком жидкости**

Рассмотрим две задачи на нахождение потенциала скоростей при обтекании тел потоком несжимаемой жидкости [3, *IV*, *73,75*].

1. Бесконечно длинный цилиндр радиуса $a$ обтекается перпендикулярно своей оси неограниченным потоком жидкости со скоростью $v$. Найти потенциал скоростей жидкости.

Решение. Потенциал представим суммой потенциала невозмущенного движения жидкости (направление ее движения выберем за ось $x$): $u = vx + u_1$. Для второго слагаемого, вводя цилиндрическую систему координат с осью $z$, направленной вдоль оси цилиндра, имеем краевую задачу

$$\begin{aligned} &\Delta u_1(\rho, \phi, z) = 0, \quad \rho > a; \\ &\frac{\partial u_1}{\partial \rho} = v\cos\phi, \quad \rho = a. \end{aligned} \tag{3.103}$$



Второе условие означает невозможность втекания жидкости внутрь цилиндра. Мы имеем внешнюю задачу Неймана. Решение имеет вид

$$u(\rho, \phi) = -v\left(\rho + \frac{a^2}{\rho}\cos\phi\right). \tag{3.104}$$

2. Твердый шар радиуса $a$ движется со скоростью $v$ в несжимаемой жидкости. Найти потенциал скоростей жидкости.

Решение. В системе покоя шара имеем краевую задачу

$$\Delta u = 0; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=a} = v\cos\theta. \tag{3.105}$$

Здесь мы выбрали ось $z$ вдоль направления движения шара, $n$ обозначает направление нормали к поверхности шара. Пользуясь общим видом решения для случая трехмерного пространства, приведенным выше, получим

$$u(r, \theta) = \frac{a^3}{2r^2}\cos\theta, \quad r > a. \tag{3.106}$$

Поле скоростей жидкости можно получить, вычислив градиент потенциала $\vec{v} = -\nabla u(r, \theta)$.

# ГЛАВА 4

# Минимизация функционалов. Элементы вариационного исчисления

Одним из способов получения дифференциальных уравнений в частных производных является метод минимизации функционалов с помощью уравнений Эйлера [7, 18]. Типичным функционалом является интеграл

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx. \tag{4.1}$$

Рассмотрим задачу нахождения функции $y(x)$, которая минимизирует $J[y]$ в классе гладких функций, удовлетворяющих граничным условиям

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \tag{4.2}$$

Задача состоит в нахождении такой функции $\bar{y}(x)$, для которой числовое значение интеграла $J[\bar{y}]$ примет минимальное значение среди всех возможных функций $y(x)$ при заданных граничных условиях. Рассмотрим значение функционала для функции $y(x)$, отличающейся от $\bar{y}(x)$ на небольшую вариацию $\delta(x)$ - произвольную, численно малую функцию, удовлетворяющую условию $\delta(x_{a,b}) = 0$, т.е. мы рассматриваем вариацию функции $y$, фиксируя ее значения на концах интервала интегрирования:

$$\delta J[y] = \int_a^b dx[F(x, y+\delta, y'+\delta') - F(x, y, y')] = \int_a^b dx[F_y(x, y, y')\delta + F_{y'}\delta']. \tag{4.3}$$



Пользуясь перестановочным свойством взятия вариации и взятия производной:

$$\delta' = \frac{d}{dx}\delta \tag{4.4}$$

и проводя интегрирование по частям во втором слагаемом в квадратных скобках, получим

$$\int_a^b dx F_{y'}\delta'(x) = F_{y'}\delta(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b dx\delta(x)\frac{d}{dx}F_{y'}. \tag{4.5}$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства обращается в нуль в силу нашего предположения о вариации. В результате для вариации функционала получим

$$\delta J[y] = \int_a^b dx\delta(x)\left[F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right]. \tag{4.6}$$

Минимизация состоит в приравнивании этой вариации нулю при произвольных $\delta(x)$, что приводит к уравнениям Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}, \quad y = \bar{y}(x), \quad \bar{y}_{x=a} = A, \quad \bar{y}_{x=b} = B. \tag{4.7}$$

В качестве примера рассмотрим две классические задачи.

**Задачи**

1. Найти плоскую кривую $y(x)$, $a < x < b$, площадь фигуры вращения которой вокруг оси абсцисс минимальна.

Эта площадь выражается интегралом

$$J[y] = 2\pi\int_a^b ds y(x), \tag{4.8}$$

где $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1+(y')^2}$ - элемент длины дуги кривой. Задача, таким образом, сводится к минимизации функционала $J[y]$ с подынтегральной функцией $F(x, y, y') = y\sqrt{1+(y')^2}$. Соответствующее уравнение Эйлера

$$\sqrt{1+(y')^2} = \frac{d}{dx}\frac{yy'}{\sqrt{1+(y')^2}} \tag{4.9}$$

может быть преобразовано к виду

$$1 + (y')^2 = yy'', \quad \frac{d}{dx}\ln(1+(y')^2) = 2\frac{d}{dx}\ln y. \tag{4.10}$$

Решением этого уравнения является цепная линия (катеноид)

$$y = \bar{y}(x) = c_1 \cosh\left(\frac{x - c_2}{c_1}\right),$$

постоянные интегрирования находятся из начальных условий.

2. Задача о брахистохроне. Найти такую форму кривой $y(x)$, чтобы время скатывания без трения по желобу в форме кривой было минимальным.

Предполагаем, что сила тяжести направлена вдоль оси $y$. Задача сводится к минимизации функционала

$$J[y] = \int \frac{ds}{\sqrt{y}} = \int_a^b dx \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{y}}, \tag{4.11}$$

поскольку время прохождения участка длины $ds$, отвечающего ординате $y$, есть $ds/v = ds/\sqrt{2gy}$. Соответствующее уравнение Эйлера имеет вид

$$-(1 + (y')^2) = 2yy''. \tag{4.12}$$

Его решением $x/c_1 + c_2 = \arcsin z - z\sqrt{1 - z}$, $z = \sqrt{y/c_1}$ является уравнение циклоиды - кривой, описывающей траекторию точки на ободе, катящейся по горизонтальной прямой окружности.

Минимизация функционала действия $S = \int L dx$, $L = U - T$, где $U$, $T$ - потенциальная и кинетическая энергии, дает независимый способ вывода дифференциальных уравнений в частных производных.

Для примера рассмотрим колебания струны, находящейся в положении равновесия вдоль оси $X$. Две ее соседние точки $M, M_1$ с координатами $x, x + dx$ в процессе колебания перейдут в точки $M$, $M_1$ с (трехмерными) координатами $M(x + u, v, w)$; $M_1(x + dx + u + du, v + dv, w + dw)$. Расстояние между точками станет (в пренебрежении малыми второго порядка) $ds = dx(1 + u_x)$. Потенциальная энергия есть сумма энергий продольных и поперечных деформаций, а также работы внешних сил:

$$U = \int_0^l dx \left[\frac{T_0}{2}(w_x^2 + v_x^2) + \frac{E}{2}u_x^2 + uF_u + vF_v + wF_w\right], \tag{4.13}$$

где $T_0, E$ - натяжение струны и ее модуль упругости. Кинетическая энергия пропорциональна квадратам компонент скоростей:

$$T = \frac{1}{2}\rho \int_0^l dx(u_t^2 + v_t^2 + w_t^2). \tag{4.14}$$

Соответствующие уравнения Эйлера $(\partial L/\partial v) = (\partial/\partial t)(\partial L/\partial v_t) + (\partial/\partial x)(\partial L/\partial v_x)$ примут вид

$$\begin{aligned} -\rho u_{tt} + E u_{xx} &= F_u; \\ -\rho v_{tt} + T_0 v_{xx} &= F_v; \\ -\rho w_{tt} + T_0 w_{xx} &= F_w. \end{aligned} \tag{4.15}$$



Заметим, что первое уравнение описывает продольные, а другие два - поперечные колебания струны.

## 4.1 Простейшие случаи уравнения Эйлера

Возможны следующие случаи [7]:

1. Подынтегральная функция не зависит от производной искомой функции $y'$. При этом уравнение Эйлера $F_y(x, y) = 0$ не является дифференциальным. Если граничные условия не удовлетворяются, то экстремаль как функция, доставляющая минимум функционалу, не существует.

2. В случае линейной зависимости от производной $F(x, y, y') = N(x, y) + y'M(x, y)$ вариационная задача теряет смысл. Действительно, в этом случае уравнение Эйлера имеет вид $\partial N/\partial y = \partial M/\partial x$ и подынтегральное выражение становится полным дифференциалом $Ndx + Mdy = d\Phi$, а интеграл есть разность функций от начальных и конечных значений, которые по условию постановки задачи не варьируются.

3. Если подынтегральная функция не зависит явно от $x$, $F = F(y, y')$, то уравнение Эйлера принимает вид

$$F_y - y'F_{yy'} - y''F_{y'y'} = 0. \tag{4.16}$$

После домножения левой части на $y'$ это уравнение может быть записано в виде

$$\frac{d}{dx}[F - y'F_{y'}] = 0, F - y'F_{y'} = \text{const}. \tag{4.17}$$

4. В случае отсутствия явной зависимости от $y$ порядок уравнения снова может быть понижен: $F = F(x, y')$; $F_{y'} = \text{const}$.

## 4.2 Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления

1. Функционалы, зависящие от производных высшего порядка:

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y', y", ..., y^{(n)})dx, \tag{4.18}$$

где функция $F$ предполагается дифференцируемой $n + 2$ раза по своим аргументам, а граничные условия имеют вид [5]

$$\begin{aligned} &y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad ..., \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}; \\ &y(x_1) = y_1, \quad y'(x_1) = y_1', \quad ..., \quad y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Экстремалями являются решения уравнений Эйлера - Пуассона

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} - ... + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0 \qquad (4.20)$$

с граничными условиями, приведенными выше.

2. Функционалы, зависящие от нескольких функций:

$$J[y_1, y_2, ..., y_n] = \int_{x_0}^{x_1} dx F(x, y_1(x), ..., y_n(x); y_1'(x), ..., y_n'(x)) \qquad (4.21)$$

при граничных условиях

$$y_k(x_0) = y_k^0, \quad y_k(x_1) = y_k^{(1)}, \quad k = 1, 2, ..., n. \qquad (4.22)$$

Экстремали находятся решением системы уравнений Эйлера:

$$F_{y_k} = \frac{d}{dx}F_{y_k'}, \quad k = 1, 2, 3, ..., n. \qquad (4.23)$$

3. Функционал, зависящий от функций нескольких переменных:

$$J[z(x_1, x_2, ...x_n)] = \int ... \int_D F(x_1, x_2, ...x_n; z; p_1, ...p_n) dx_1 ... dx_n, \qquad (4.24)$$

где $p_k = \partial z / \partial x_k$. Необходимое условие экстремума выражается уравнением Эйлера - Остроградского

$$F_z = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_{p_i}. \qquad (4.25)$$

Решение этого уравнения - функция $z = z(x_1, x_2, ..., x_n)$ на границе области $D$ – должно удовлетворять заданным граничным условиям.

## 4.3 Условный экстремум. Изопериметрическая задача

Рассмотрим задачу об отыскании экстремали функционала [7]

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, ..., y_n; y_1', ..., y_n') dx \qquad (4.26)$$

при наличии изопериметрических условий

$$\int_{x_0}^{x_1} G_i(x, y_1, ..., y_n; y_1', ..., y_n') dx = l_i, \quad i = 1, 2, ..., m, \qquad (4.27)$$



где $l_i$ - постоянные. Эта задача называется изопериметрической. Для ее решения составляют вспомогательный функционал

$$\Phi[y] = \int_{x_0}^{x_1} \left( F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i G_i \right) dx. \qquad (4.28)$$

Его решают с помощью уравнения Эйлера, а произвольные постоянные и параметры $\lambda_i$ находят из граничных и изопериметрических условий.

**Задачи по теме "Вариационное исчисление"**

1. Существуют ли экстремали для функционалов

$$\text{а)} \quad J[y] = \int_0^1 [3x - y] y dx, \quad y(0) = 0; \quad y(1) = 1, \qquad (4.29)$$

$$\text{б)} \quad J[y] = \int_0^{2\pi} [(y')^2 - y^2] dx, \quad y(0) = 1, \quad y(2\pi) = 1. \qquad (4.30)$$

2. Найти экстремали функционалов [7]

$$\text{а)}\ J[y] = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{y} dx \qquad (4.31)$$

(модель Пуанкаре геометрии Лобачевского на плоскости: семейства полуокружностей с центрами на оси $x$). Решение имеет вид $y\sqrt{1 + (y')^2} = c, \quad y^2 + (x - c_1)^2 = c^2$;

$$\text{б)}\ J[y] = \int_0^a \frac{y(y')^3}{1 + (y')^2} dx, \quad y(0) = 0; \quad y(a) = R \qquad (4.32)$$

(задача Ньютона о форме поверхности минимального сопротивления потоку). Решение имеет вид $y/R = (x/a)^{3/4}$.

3. Найти экстремали функционалов

$$\text{а)}\ J[y] = \int_{-1}^{1} ((y')^2 - 2xy) dx, \quad y(-1) = -1, \quad y(1) = 1; \qquad (4.33)$$

$$\text{б)}\ J[y] = \int_1^e (x(y')^2 + yy') dx, \quad y(1) = 0, \quad y(e) = 1;$$

$$\text{в)}\ J[y] = \int_0^1 (y^2 + 2(y')^2 + (y'')^2) dx,$$

$$y(0) = y(1) = 0; \quad y'(0) = 1; \quad y'(1) = -\sinh 1;$$

$$\text{г)}\ J[y] = \int_{-1}^{0} (240 - (y''')^2) dx, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0;$$

$$(-1) = 1, \quad y'(-1) = -9/2, \quad y''(-1) = 16.$$

4. Задачи на условный экстремум [7]:

а) найти линию $y(x)$, $y(-a) = y(a) = 0$, которая при заданной длине $l > 2a$ ограничивает наибольшую площадь:

$$J[y] = \int_{-a}^{a} y(x)dx, \tag{4.34}$$

$$K[y] = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + (y')^2}dx = l;$$

б) найти экстремали $J[y]$ при условии $K[y]$:

$$J[y] = \int_{0}^{1} (y')^2 dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1/4; \tag{4.35}$$

$$K[y] = \int_{0}^{1} (y - (y')^2))dx = 1/12;$$

в) найти минимум функционала [7]

$$I[\vec{v}] = \int_G [v_x^2 + v_y^2 + \frac{4v}{\sqrt{x^2 + y^2}}]dxdy; \tag{4.36}$$

$$v(x^2 + y^2 = 1) = v(x^2 + y^2 = 9) = 0.$$

Указание.

Переход к полярным координатам и минимизация функционала приводят к краевой задаче

$$\Delta u = \frac{2}{r}, \quad u(r = 1) = u(r = 3) = 0. \tag{4.37}$$

Решением является экстремаль $u = 2(r-1) - \frac{4}{\ln 3}\ln r$. Вычисляя квадрат градиента $|\nabla u|^2 = (2 - \frac{4}{r \ln 3})^2$, подставляем эти величины в выражение для функционала и получаем

$$I[u] = -32\pi \left(1 - \frac{1}{\ln 3}\right). \tag{4.38}$$



# ГЛАВА 5

# Нелинейные уравнения

Типичные краевые задачи, приводящие к нелинейным уравнениям первого порядка для двух переменных, имеют вид [4]

$$u_t + g(u)u_x = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty; \tag{5.1}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Прямой подстановкой можно убедиться, что решением является

$$u(x, t) = f(x - tu(x, t)). \tag{5.2}$$

Решение, таким образом, задано в неявной форме. Некоторую информацию можно получить, вычисляя частную производную по $x$:

$$u_x = f'(z)[1 - tu_x], \quad u_x = \frac{f'(z)}{1 + tf'(z)}, \quad z = x - u(x, t)t. \tag{5.3}$$

По сравнению с линейными уравнениями здесь появились предельные значения времени и координат, при которых частные производные обращаются в бесконечность, когда

$$1 + t_c f'(z_c) = 0. \tag{5.4}$$

Для примера рассмотрим уравнение Хопфа, описывающее изменение скорости $u(x, t)$ скопления невзаимодействующих частиц, движущихся в направлении оси $x$ [10, 11]:

$$u_t + uu_x = 0 \tag{5.5}$$

с начальным распределением $u(x, 0) = u_0(1 - \tanh x)$. Решение в неявной форме имеет вид

$$u(x, t) = u_0(1 - \tanh(x - tu(x, t))). \tag{5.6}$$

Для производной получим

$$u_x = \frac{u_0}{u_0 t - \cosh^2(x - tu(x,t))}. \qquad (5.7)$$

Момент опрокидывания волны отвечает обращению в нуль знаменателя. Физически он описывает укручение гребня волны, происходящее за счет отстающих частиц скопления, догоняющих более медленно движущиеся.

## 5.1 Нелинейные уравнения. Общий случай

Общих методов для решения нелинейных уравнений не существует [9, 11].

Иногда можно построить лагранжиан, минимизацией которого можно получить заданное интегральное уравнение. В качестве примера приведем модель Жибера - Шабата - Михайлова

$$L(x,t) = \frac{U_x^2 + U_t^2}{2} - \frac{m}{\gamma}(\exp[\gamma U] + 1/2\exp[-2\gamma U] - 3/2). \qquad (5.8)$$

Этому лагранжиану можно поставить в соответствие следующее уравнение Эйлера:

$$U_{tt} - U_{xx} + m^2(\exp[U\gamma] - \exp[-2U\gamma]) = 0. \qquad (5.9)$$

Другой пример - уравнение синус–Гордона

$$U_{tt} - U_{xx} + m^2\sin(\alpha U) = 0, \qquad (5.10)$$

получающееся минимизацией лагранжиана

$$L(x,t) = \frac{U_t^2 - U_x^2}{2} - \frac{m}{\alpha}(1 - \cos(\alpha U)). \qquad (5.11)$$

Найти же лагранжиан, уравнения Эйлера для которого приводили бы к уравнениям

$$U_t = U_{xx} + 2UU_x + U_{xxxx} \qquad (5.12)$$

(уравнение Кортевега – де Фриза) или

$$U_t = U_{xx} + 2UU_x \qquad (5.13)$$

(уравнение Бюргерса), не удается. Напомним, что добавление к лагранжиану слагаемых, представляющих собой полные производные вида $(f(U,U_x,U_t))_x$, $(f(U,U_x,U_t))_t$, не меняет вида уравнений Эйлера. Мы рассмотрим здесь два



метода, которые позволяют в некоторых случаях свести нелинейные уравнения к обычным дифференциальным уравнениям.

Опишем, следуя [8], метод подстановки Коула–Хопфа, которым нелинейное уравнение, описывающее распространение слабых ударных волн, может быть сведено к линейному дифференциальному уравнению в частных производных. Уравнение имеет вид

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x. \qquad (5.14)$$

Будем искать решение в виде

$$u = \frac{Z_x}{Z}, \quad u_x = \frac{Z_{xx}}{Z} - \left(\frac{Z_x}{Z}\right)^2. \qquad (5.15)$$

Записывая уравнение в виде (следуем методу В.Н. Робука):

$$(\ln Z)_{xt} = \left[\frac{Z_{xx}}{Z} - \left(\frac{Z_x}{Z}\right)^2\right]_x + \left[\left(\frac{Z_x}{Z}\right)^2\right]_x \qquad (5.16)$$

и проводя интегрирование по $x$, получаем линейное уравнение для $Z(x,t)$

$$Z_t = Z_{xx} + f(t). \qquad (5.17)$$

## 5.2 Нелинейные уравнения. Решения вида бегущей волны

В рассмотренных ниже примерах мы дадим некоторое представление о нелинейных уравнениях.

Найти решение типа бегущей волны уравнения Кортевега - де Фриза (KdV), описывающего отклонение поверхности воды в канале от положения равновесия $u(x,t) = 0$ [6, *103*]:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \qquad (5.18)$$

убывающее вместе со своими производными на бесконечности.

Ищем решение в виде

$$u(x,t) = f(x - vt) = f(z). \qquad (5.19)$$

Находя производные $u_x = f', u_{xxx} = f''', \quad u_t = -vf'$ и подставляя их в основное уравнение, получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-vf' + 6ff' + f''' = 0, \qquad (5.20)$$

которое можно проинтегрировать:

$$-vf + 3f^2 + f'' + c_1 = 0. \tag{5.21}$$

Умножая это уравнение на $f'$, его можно проинтегрировать еще раз:

$$f'[c_1 + f'' + 3f^2 - vf] = 0 \to c_1 f + \frac{1}{2}(f')^2 + f^3 - \frac{1}{2}vf^2 + c_2 = 0. \tag{5.22}$$

Требование убывания функции и ее производных на бесконечности налагает условие $c_1 = c_2 = 0$. Получающееся уравнение допускает разделение переменных:

$$f' = \pm\sqrt{vf^2 - 2f^3}, \quad \pm dz = \frac{df}{f\sqrt{v-2f}}; \quad l^2 = v - 2f. \tag{5.23}$$

Уравнение разрешается: $\ln\frac{\sqrt{v}+l}{\sqrt{v}-l} = \pm\sqrt{v}z$. После несложных преобразований получаем ответ:

$$u(x,t) = \frac{v}{2}\frac{1}{\cosh^2(\frac{\sqrt{v}}{2}(x-vt))}, \tag{5.24}$$

имеющий вид движущегося колокола.

Кроме решений типа бегущей волны нелинейные уравнения могут содержать решения автомодельного типа [19].

Так, для уравнений [19] KdV и модифицированного KdV имеем соответственно

$$\begin{aligned} &\text{а)} \quad u_t + 3uu_x + u_{xxx} = 0, \\ &\text{б)} \quad u_t + \frac{3}{2}u^2u_x + u_{xxx} = 0. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Замены $u(x,t) = F(\Theta) - \lambda t$, $\quad \Theta = x + \frac{3}{2}\lambda t^2$ для а) и $u(x,t)^{-\frac{1}{3}}f(\xi), \xi = x(3t)^{-\frac{1}{3}}$ для б) приводят их после интегрирования соответственно к обыкновенным дифференциальным уравнениям (первое и второе уравнения Пенлеве)

$$\begin{aligned} &F_{\theta\theta} + \frac{3}{2}F^2 - \lambda\Theta + k_1 = 0; \\ &f_{\xi\xi} - \frac{1}{3}f^3 - 3f + k_2 = 0 \end{aligned} \tag{5.26}$$

с $\lambda, k_{1,2}$ постоянными.

Уравнение Бюргерса [6, *102*]

$$u_t + uu_x = \mu u_{xx} \tag{5.27}$$

описывает распространение слабых ударных волн в среде с дисперсией энергии.

Найти решение типа ударной волны, удовлетворяющее условиям

$$\lim_{x\to-\infty} u(x,t) = u_1, \quad \lim_{x\to+\infty} u(x,t) = u_2, \quad u_1 > u_2. \tag{5.28}$$



Решение ищем в виде $u(x,t) = f(x - vt)$. Уравнение принимает вид

$$(-v + f)f' = \mu f''. \tag{5.29}$$

Интегрирование этого уравнения по $x$ в пределах от минус до плюс бесконечности дает, с учетом условий,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[-vf' + ff' - \mu f'']dz = 0, \quad \frac{1}{2}[u_2^2 - u_1^2] - v(u_2 - u_1) = 0, \tag{5.30}$$

откуда мы находим $v = (u_1 + u_2)/2$. Здесь мы использовали тот факт, что производная на бесконечности обращается в нуль. С учетом этого перепишем уравнение в виде

$$\mu f' = \frac{1}{2}(f - u_1)(f - u_2). \tag{5.31}$$

Его решение

$$\ln\frac{u_1 - f(z)}{f(z) - u_2} = z\frac{u_1 - u_2}{2\mu} \tag{5.32}$$

может быть переписано следующим образом:

$$u(x,t) = v - \frac{u_1 - u_2}{2}\text{th}\frac{(u_1 - u_2)(x - vt)}{4\mu}. \tag{5.33}$$

Решение имеет вид движущейся "стенки".

Найти решение типа уединенной бегущей волны уравнения нелинейной струны [6, *104*]:

$$u_{tt} - u_{xx} + (u^2)_{xx} + u_{xxxx} = 0. \tag{5.34}$$

Ищем решение в виде $u(x,t) = f(x - vt) = f(z)$. Подставляя это выражение в уравнение в частных производных, получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-f''(1 - v^2) + (f^2)'' + f^{(IV)} = 0. \tag{5.35}$$

После двукратного интегрирования получим

$$f'' + f^2 - f(1 - v^2) + C_1 z + C_2 = 0. \tag{5.36}$$

Поскольку функция $f(z)$ вместе со своими производными обращается в нуль на бесконечности (физическое условие), имеем $C_1 = C_2 = 0$. Умножая это уравнение на $f'$ и еще раз интегрируя, получаем

$$\frac{1}{2}(f')^2 + \frac{1}{3}f^3 - \frac{1}{2}(1 - V^2)f^2 = C_3. \tag{5.37}$$

По тем же причинам полагаем $C_3 = 0$. Решение полученного уравнения имеет физический смысл только для $V^2 < 1$ (что соответствует тому, что скорость распространения возмущения не превышает скорости звука):

$$f(z) = \frac{3}{2}\frac{1 - v^2}{\cosh^2(\frac{\sqrt{1-v^2}(z-z_0)}{2})}. \tag{5.38}$$

# ГЛАВА 6

# Приближенные методы

## 6.1 Численные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных

### 6.1.1 Основные понятия метода сеток

В большинстве случаев получить решение дифференциальных уравнений в частных производных с помощью элементарных или специальных функций невозможно. В связи с этим важное значение приобретают приближенные методы их решения. Ограничимся рассмотрением краевых задач для уравнений математической физики с двумя независимыми переменными в области $D$ с границей $\gamma$, т.е.

$$Lu \equiv a(x,y)u''_{xx} + 2b(x,y)u''_{xy} + c(x,y)u''_{yy} + d(x,y)u'_x +$$

$$+e(x,y)u'_y + g(x,y)u = f(x,y), \qquad (x,y) \in D, \tag{6.1}$$

$$\Gamma u = \phi(x,y), \qquad (x,y) \in \gamma, \tag{6.2}$$

где $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$, $d(x,y)$, $e(x,y)$, $g(x,y)$, $f(x,y)$ - известные функции переменных $x$ и $y$, определенные в области $D$, $\Gamma$ - некоторый линейный (в общем случае дифференциальный) оператор граничных условий и $\phi(x,y)$ - известная функция, заданная на границе $\gamma$.

Наиболее часто используемым методом численного решения краевой задачи (6.1),(6.2) является **метод сеток (метод конечных разностей)** [4, 13, 14].



В методе сеток замкнутая область $\overline{D} = D \bigcup \gamma$ заменяется конечным множеством точек - **сеткой** $\overline{D}_h = D_h \bigcup \gamma_h$. Точки этого множества называются **узлами** сетки. Параметр $\mathbf{h}=(h,\tau)$, шаг сетки, характеризует ее плотность в области $D$. Обычно при $|\mathbf{h}| = \sqrt{h^2+\tau^2} \to 0$ последовательность сеток $\overline{D}_h$ стремится заполнить всю область $\overline{D}$. Производные, входящие в левые части соотношений (6.1) и (6.2), заменяются на сетке $\overline{D}_h$ соответствующими разностными отношениями. В результате получается система линейных алгебраических уравнений

$$L_h u_h = f_h(x_m, y_n), \qquad (x_m, y_n) \in D_h,$$

$$\Gamma_h u_h = \phi_h(x_m, y_n), \qquad (x_m, y_n) \in \gamma'_h, \tag{6.3}$$

где $u_h(x_m,y_n)$, $(x_m,y_n) \in \overline{D}_h$ - искомая **сеточная функция**, $f_h(x_m,y_n)$, $\phi_h(x_m,y_n)$ - сеточные функции, заданные на множествах $D_h$ и $\gamma_h$ соответственно, и $L_h, \Gamma_h$ - разностные операторы. Сеточная функция $\tilde{u}_h$, являющаяся решением системы уравнений (6.3), называется приближенным решением краевой задачи (6.1), (6.2) на сетке $\overline{D}_h$. Ее значения $\tilde{u}_{m,n} = \tilde{u}_h(x_m,y_n)$ приближенно заменяют в узлах сетки $\overline{D}_h$ соответствующие значения точного решения $\tilde{u}(x_m,y_n)$ исходной краевой задачи с некоторой погрешностью $\delta_{m,n} = \tilde{u}_{m,n} - \tilde{u}(x_m,y_n)$.

Семейство систем уравнений (6.3), зависящее от параметра $\mathbf{h}=(h,\tau)$, называется **разностной схемой**. Разностную схему (6.3) удобно записывать в виде

$$\overline{L}_h u_h = \overline{f}_h(x_m,y_n), \quad (x_m,y_n) \in \overline{D}_h, \tag{6.4}$$

где

$$\overline{L}_h = \begin{cases} L_h, (x_m,y_n) \in D_h, \\ \Gamma_h, (x_m,y_n) \in \gamma_h; \end{cases}$$

$$\overline{f}_h = \begin{cases} f_h, (x_m,y_n) \in D_h, \\ \phi_h, (x_m,y_n) \in \gamma_h. \end{cases}$$

Построение разностной схемы (6.3) или (6.4) для краевой задачи (6.1) начинается с выбора сетки, т. е. указывается правило замены области $D$ и границы $\gamma$ сеточной областью $\overline{D}_h$. Чаще всего сетка выбирается прямоугольной и равномерной. Для этого проводятся два семейства параллельных прямых: $x = x_0 + mh$ и $y = y_0 + n\tau$ и рассматриваются всевозможные точки пересечения прямых из этих семейств, т. е. точки вида $(x_m,y_n) = (x_0+mh, y_0+n\tau)$. Точки $(x_m,y_n)$, которые принадлежат замкнутой области $\overline{D}$, образуют сетку $\overline{D}_h$, являясь ее узлами. У каждого узла $(x_m,y_n)$ имеются четыре соседних точки: $(x_{m-1},y_n)$, $(x_{m+1},y_n)$, $(x_m,y_{n-1})$, $(x_m,y_{n+1})$. Если все эти соседние точки также принадлежат сетке $\overline{D}_h$, то узел $(x_m,y_n)$ называется **внутренним**, в противном случае узел $(x_m,y_n)$ называется **граничным**. Совокупность внутренних узлов образует множество $D_h$, а граничных - множество $\gamma_h$ (так что $\overline{D}_h = D_h \bigcup \gamma_h$). Следует отметить, что множество граничных узлов $\gamma_h$ не обязательно является подмножеством точек границы $\gamma$, что приводит к погрешностям при построении сеточной функции $\phi_h$ из (6.3).

После выбора сетки $\overline{D}_h$ проводится построение сеточной функции $\overline{f}_h = (f_h, \phi_h)$ и разностного оператора $\overline{L}_h = (L_h, \Gamma_h)$ из (6.4). Для определения $\overline{f}_h$ в узлах сетки $\overline{D}_h$ полагают $\overline{f}_h(x_m, y_n) = f(x_m, y_n)$, если $(x_m, y_n) \in D_h$, $\overline{f}_h(x_m, y_n) = \phi(x_m, y_n)$, если $(x_m, y_n) \in \gamma_h$ и $(x_m, y_n) \in \gamma$, если же граничный узел $(x_m, y_n) \notin \gamma$, то в качестве $\overline{f}(x_m, y_n)$ выбирается значение функции $\phi(x, y)$ в произвольной точке $(x, y) \in \gamma$, отстоящей от узла $(x_m, y_n)$ на величину, меньшую $|h|$. Для построения разностного оператора $\overline{L}_h$ все известные функции, участвующие в явной записи операторов $L$ и $\Gamma$ (например, $a(x, y)$, $b(x, y)$ и т.д.), заменяются своими значениями в узлах сетки $\overline{D}_h$ и обозначаются соответственно через $a_{m,n}$, $b_{m,n}$ и т. д., а частные производные 1-го и 2-го порядков неизвестной функции $u(x, y)$ приближенно заменяются соответствующими разностными отношениями. В результате получаем разностную схему (6.4), соответствующую краевой задаче (6.1), (6.2).

**Пример 1.** Построить разностную схему для краевой задачи распространения тепла в конечном стержне $(0 \le x \le l)$

$$u'_t - a^2 u''_{xx} = f(x, t), \quad u(x, 0) = \phi(x);$$

$$u(0, t) = \psi_1(t), \quad u(l, t) = \psi_2(t).$$

Решение. Отметим, что область определения $\{(x, t) | 0 \le x \le l, 0 \le t \le +\infty\}$ данной краевой задачи является неограниченной. Поэтому для построения равномерной прямоугольной сетки $\overline{D}_h$ (которая всегда является конечным множеством точек) поступим следующим образом. Проведем два семейства прямых $x = mh$ и $t = n\tau$ для некоторых заданных $h$ и $\tau$. Очевидно, что точка $(x_m, t_n)$ принадлежит области определения исходной задачи, если $m = 0, 1, \dots, r$, где $r = [l/h]$, и $n = 0, 1, \dots$ Положим

$$\overline{D}_h = \{(x_m, t_n) | m = 0, 1 \dots, r, \quad n = 0, 1, \dots, s\}, \tag{6.5}$$

где целое $s$ выбирается так, чтобы интервал $0 \le t \le \tau s$ перекрывал тот временной диапазон, в котором изучается распространение тепла в стержне. Множество внутренних узлов имеет вид $D_h = \{(x_m, t_n) | m = 1, 2 \dots, r-1; n = 1, 2, \dots, s\}$. В это множество входят и узлы вида $(x_m, t_s), m = 1, 2 \dots, r-1$, которые мы считаем внутренними. Соответственно, $\gamma_h = \overline{D}_h \setminus D_h$, или в явном виде $\gamma_h = \{(x_m, 0) | m = 0, 1, \dots, r\} \bigcup \{(0, t_n) | n = 1, 2, \dots, s\} \bigcup \{(x_r, t_n) | n = 1, 2, \dots, s\}$.

Далее полагаем $u_h = \{u_{m,n}\}$,

$$\overline{f}_h(x_m, t_n) = \begin{cases} \qquad f(x_m, t_n), & (x_m, t_n) \in D_h, \\ \phi(x_m), \quad n = 0; & m = 0, 1, \dots, r, \\ \psi_1(t_n), \quad m = 0; & n = 1, 2, \dots, s, \\ \psi_2(t_n), \quad m = r; & n = 1, 2, \dots, s. \end{cases} \tag{6.6}$$

Отметим, что в случае, когда $l/h$ не является целым числом, т. е. $r = [l/h] < l/h$, узлы $(x_r, t_n), n = 1, 2, \dots, s$, не принадлежат граничной полупрямой



$x = l, y \ge 0$. Вместе с тем эти узлы являются граничными, поэтому значения сеточной функции $\overline{f}_h$ в них перенесены с границы.

Для получения разностного уравнения заменим производные разностными отношениями

$$u'_t(x_m, t_n) \approx \frac{1}{\tau}(u_{m,n+1} - u_{m,n}),$$

$$u''_{xx}(x_m, t_n) \approx \frac{1}{h^2}(u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}),$$

где $(x_m, t_n) \in D_h$. Следовательно,

$$\overline{L}_h u_h = \begin{cases} \frac{1}{\tau}(u_{m,n+1} - u_{m,n}) - \frac{a^2}{h^2}(u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}), \\ m = 1, \dots, r-1; \quad n = 0, 1, \dots, s-1, \\ u_{m,0}, \quad m = 0, \dots, r, \\ u_{0,n}, \quad n = 1, \dots, s, \\ u_{r,n}, \quad n = 1, \dots, s. \end{cases} \tag{6.7}$$

Подставляя выражения (6.6) и (6.7) в (6.4), получаем искомую разностную схему, которая представляет собой следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{1}{\tau}(u_{m,n+1} - u_{m,n}) - \frac{a^2}{h^2}(u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}) = f(x_m, t_n);$$
$$m = 1, \dots, r-1; \quad n = 0, \dots, s-1;$$
$$u_{m,0} = \phi(x_m), \quad m = 0, \dots, r;$$
$$u_{0,n} = \psi_1(t_n), \quad n = 1, \dots, s;$$
$$u_{r,n} = \psi_2(t_n), \quad n = 1, \dots, s.$$

Эта система состоит из $(s+1)(r+1)$ уравнений. Решив ее относительно неизвестных $u_{m,n}$, $m = 0, \dots, r$; $n = 0, \dots, s$, найдем сеточную функцию $\tilde{u}_h = \{\tilde{u}_{m,n}\}$, значения которой в узлах сетки приближенно заменяют значения искомого решения исходной краевой задачи для уравнения теплопроводности.

**Пример 2.** Определить порядок приближения дифференциального оператора $Lu = u'_t - a^2 u''_{xx}$ разностным оператором из примера 1.

Решение. В примере 1 был построен разностный оператор

$$(L_h u_h)_{m,n} = \frac{1}{\tau}(u_{m,n+1} - u_{m,n}) - \frac{a^2}{h^2}(u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}).$$

Используя формулу Тейлора, находим

$$\frac{1}{\tau}(u_{m,n+1} - u_{m,n}) = \frac{1}{\tau}(u(x_m, t_n + \tau) - u(x_m, t_n) =$$

$$= u'_t(x_m, t_n) + \frac{\tau}{2} u''_{tt}(x_m, t'),$$

где $t_m < t' < t_m + \tau$ и

$$\frac{1}{h^2}(u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}) =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{1}{h}(u(x_m+h,t_n) - u(x_m,t_n)) + \frac{1}{h}(u(x_m-h,t_n) - u(x_m,t_n))\right) =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\left(u'_x(x_m,t_n) + \frac{h}{2}u''_{xx}(x_m,t_n) + \frac{h^2}{6}u'''_{xxx}(x_m,t_n) + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{h^3}{24}u''''_{xxxx}(x',t_n)\right) + \left(-u'_x(x_m,t_n) + \frac{h}{2}u''_{xx}(x_m,t_n) - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{h^2}{6}u'''_{xxx}(x_m,t_n) + \frac{h^3}{24}u''''_{xxxx}(x'',t_n)\right)\right),$$

где $x_m - h < x'' < x_m < x' < x_m + h$. Приводя подобные члены в правой части последнего выражения, получаем

$$\frac{1}{h^2}(u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}) = u''_{xx}(x_m,t_n) +$$

$$+ \frac{h^2}{24}(u''''_{xxxx}(x',t_n) + u''''_{xxxx}(x'',t_n)).$$

Следовательно,

$$(L_h u_h)_{m,n} = u'_t(x_m,t_n) - a^2u''_{xx}(x_m,t_n) + \frac{\tau}{2}u''_{tt}(x_m,t') -$$

$$- \frac{a^2h^2}{24}(u''''_{xxxx}(x',t_n) + u''''_{xxxx}(x'',t_n)). \tag{6.8}$$

Используя выражение (6.8), разность между исходным дифференциальным оператором $L$ и заменяющим его разностным $L_h$ в узлах сетки можем представить в виде

$$(Lu)_{m,n} - (L_h u_h)_{m,n} = \frac{\tau}{2}u''_{tt}(x_m,t') - \frac{a^2h^2}{24}(u''''_{xxxx}(x',t_n) + u''''_{xxxx}(x'',t_n))$$

для некоторых $t'(t_n < t' < t_n + \tau)$ и $x'$, $x''(x_m - h < x'' < x_m < x' < x_m + h)$. Если теперь $|u''_{tt}(x,t)| < M_1$ и $|u''''_{xxxx}(x,t)| < M_2$, то выполняется неравенство

$$\| (Lu)_h - L_h u_h \| = \max_{m,n}|(Lu)_{m,n} - (L_h u_h)_{m,n}| \leq$$

$$\leq \frac{M_1}{2}|\tau| + \frac{a^2h^2}{12}|h|^2 \leq C(|h|^2 + |\tau|^2).$$

Следовательно, использованный в примере 1 разностный оператор приближает исходный дифференциальный и порядок приближения по переменной $x$ равен двум, а по $t$ - единице.

Отсюда следует, что для того, чтобы порядок приближения был равен двум, необходимо шаги $h$ и $\tau$ связать соотношением $\tau = h^2$.



### 6.1.2 Численное решение краевых задач методом сеток

Все разностные схемы, применяемые при решении краевых [13] задач математической физики, делятся на два больших класса - явных и неявных схем.

Под **слоем** разностной схемы понимается совокупность точек сетки $\overline{D}$, лежащих на некоторой горизонтальной (или вертикальной) прямой. Если значения сеточной функции $u_{m,n+1}$, заданные на $(n+1)$-м слое, выражаются в явном виде через значения этой же функции на слоях с меньшими номерами, то такая схема называется **явной**. В противном случае схема называется **неявной**.

Например, разностная схема, построенная в примере 1, является явной, так как может быть записана следующим образом (см. (6.7)):

$$u_{m,n+1} = \tau u_{m,n} + \frac{a^2\tau}{h^2}(u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}) + f_{m,n};$$

$$n = 0,1,\ldots,s-1; \quad m = 1,\ldots,r-1;$$

$$u_{m,0} = \phi_m; \quad m = 0,1,\ldots,r;$$

$$u_{0,n} = \psi_1(t_n), \quad n = 1,2,\ldots,s;$$

$$u_{r,n} = \psi_2(t_n), \quad n = 1,2,\ldots,s.$$

Решение получающейся системы линейных алгебраических уравнений осуществляется последовательно, переходом от слоя к слою.

Сложнее обстоит дело с неявными схемами. Для решения соответствующих им систем уравнений удобно применять метод прогонки, т. е. модифицированный метод исключения для решения системы линейных уравнений. Суть этого метода разберем на основе неявной разностной схемы для уравнения теплопроводности, используя оператор правосторонней разности

$$(L_h u_h)_{m,n} = \frac{1}{h^2}(u_{m+1,n+1} - 2u_{m+1,n} + u_{m+1,n-1}).$$

Введем обозначения

$$a_{m,n+1} = -\frac{a^2\tau}{h^2}, \quad b_{m,n+1} = 1 + \frac{2a^2\tau}{h^2}, \quad g_{m,n+1} = u_{m,n} + \tau f_{m,n+1}. \tag{6.9}$$

Разностную схему задачи перепишем в виде

$$u_{0,n} = \psi_{1,n};$$

$$a_{m,n+1}u_{m-1,n+1} + b_{m,n}u_{m,n+1} + a_{m,n+1}u_{m+1,n+1} = g_{m,n+1}; \tag{6.10}$$

$$u_{k,n} = \psi_{2,n}, \quad n = 0,\ldots,s-1;$$

$$u_{m,0} = \phi_m, \quad m = 1,\ldots,k-1.$$

Система уравнений (6.10) при каждом фиксированном значении $n$ совпадает с системой

$$u_0 = \phi,$$

$$a_n u_{n-1} + b_n u_n + c_n u_{n+1} = g_n, \quad n = 1, \dots, N-1; \tag{6.11}$$
$$u_N = \psi;$$

для которой справедлива следующая

**Лемма.** Система уравнений (6.11), коэффициенты которой удовлетворяют неравенствам $|b_n| \geq 1 + |a_n| + |c_n|$, разрешима при любых правых частях, и для ее решения справедлива оценка

$$|u| \leq \max\{|\phi|, |g_1|, \dots, |g_{n-1}|, |\psi|\}.$$

Для системы (6.10) условия леммы выполнены. Систему уравнений (6.10) удобно решать **методом прогонки**. Будем искать решение системы (6.10) при каждом фиксированном $n$ в виде

$$u_{m-1,n+1} = Q_{m,n+1} u_{m,n+1} + H_{m,n+1}, \quad m = k, \dots, 2. \tag{6.12}$$

Исключая $u_{m-1,n+1}$ из системы (6.10), получим

$$u_{m,n+1} = -\frac{a_{m,n+1}}{a_{m,n+1}Q_{m,n+1} + b_{m,n+1}} u_{m+1,n+1} +$$
$$+ \frac{g_{m,n+1} - a_{m,n+1}H_{m,n+1}}{a_{m,n+1}Q_{m,n+1} + b_{m,n+1}}. \tag{6.13}$$

Соотношение (6.13) связывает значения функций $u_{m,n+1}, u_{m+1,n+1}$, поэтому можно записать

$$u_{m,n+1} = Q_{m+1,n+1} u_{m+1,n+1} H_{m+1,n+1}. \tag{6.14}$$

Сравнивая соотношения (6.13) и (6.14), имеем

$$Q_{m+1,n+1} = -\frac{a_{m,n+1}}{a_{m,n+1}Q_{m,n+1} + b_{m,n+1}};$$

$$H_{m+1,n+1} = \frac{g_{m,n+1} - a_{m,n+1}H_{m,n+1}}{a_{m,n+1}Q_{m,n+1} + b_{m,n+1}}. \tag{6.15}$$

Соотношения (6.15) определяют значения всех прогоночных коэффициентов $Q_{m,n}$, $H_{m,n}$. С помощью этих соотношений сетка проходится вверх по $m$ от значения 1 до значения $k-1$ при фиксированном значении $n$. При этом определяются все значения $Q_{m,n}, H_{m,n}$ на сетке (**прямая прогонка**). Определив все прогоночные коэффициенты $Q_{m,n}, H_{m,n}$, проходят сетку вниз от значения $k$ до 2, последовательно определяя значения $u_{m,n}$ из уравнения (6.13) (**обратная прогонка**). Граничное условие при $m = 0$ определяет начальные значения $Q_{1,n+1}, H_{1,n+1}$, а граничное условие при $m = k$ в общем случае определяет первое значение $u_k$. Метод прогонки обладает тем свойством, что ошибки округления, получаемые на каждом шаге, не нарастают. Это свойство служит основанием для его широкого применения.



**Пример 3.** Решить дифференциальное уравнение в частных производных, используя явную схему:

$$\frac{\partial u}{\partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x = 0, \quad D = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1\};$$

$$u|_{y=0} = 1 - x/2, \quad u|_{x=0} = \cos y, \quad u|_{x=2} = \sin y.$$

Решение. Разностный оператор

$$\frac{1}{\tau}(u_{m,n+1} - u_{m,n}) - \frac{2}{h^2}(u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n})$$

приближает исходный дифференциальный оператор $u_y - 2u_{xx}$, и порядок приближения по переменной $x$ равен двум, а по переменной $y$ - единице. Чтобы порядок приближения был равен двум, свяжем шаги $h$ и $\tau$ соотношением $\tau = h^2$. Выберем $h = 0,5$; тогда $\tau = 0,25$. Число разбиений отрезка $0 \leq x \leq l$ будет $r = [l/h] = 2/0,5 = 4$, а отрезка $0 \leq y \leq T - s = [T/\tau] = 1/0,25 = 4$. Проведем два семейства линий: $x = mh$ и $y = n\tau$, $m = 1,2,3$ и $n = 1,2,3$. Эти линии при пересечении дадут внутренние узлы. Используя прямую схему, найдем значения функции в этих точках. Для нахождения функции в первом горизонтальном слое ($n = 1, m = 1,2,3$) определим из граничного условия $u|_{y=0} = 1 - x/2$ значения функции при $y = 0$ (нулевом слое):

$$u_{0,0} = 1, \quad u_{1,0} = 0,75, \quad u_{2,0} = 0,5, \quad u_{3,0} = 0,25, \quad u_{4,0} = 0.$$

Значения функции на левой ($x = 0$) и правой ($x = 2$) границах определяются из условий $u|_{x=0} = \cos y$ и $u|_{x=2} = \sin y$ соответственно. Для первого слоя при $y = 0,25$ $u_{0,1} = \cos 0,25 = 0,9689$ и $u_{4,1} = \sin 0,25 = 0,2474$. С помощью разностного оператора

$$u_{m,1} = u_{m,0} + 2\tau/h^2(u_{m+1,0} - 2u_{m,0} + u_{m-1,0}) + x_m =$$
$$= 2(u_{m+1,0} + u_{m-1,0}) - 3u_{m,0} + x_m$$

находим значения $u_{m,1}(m = 1,2,3)$: $u_{1,1} = 1,25$, $u_{2,1} = 1,5$, $u_{3,1} = 1,75$.

Для второго горизонтального слоя при $y = 0,5$ ($n = 2$) из граничных условий определяем $u_{0,2} = \cos 0,5 = 0,8776$ и $u_{4,2} = \sin 0,5 = 0,4794$. Для внутренних узлов ($m = 1,2,3$) этого слоя используем выражение для разностного оператора

$$u_{m,2} = 2(u_{m+1,1} + u_{m-1,1}) - 3u_{m,1} + x_m$$

и получаем $u_{1,2} = 1,6878$, $u_{2,2} = 2,5$ и $u_{3,2} = -0,2552$.

Продолжим эту процедуру определения значений функции для третьего и четвертого слоев аналогично на границе и для внутренней области. На границе $u_{0,3} = \cos 0,75 = 0,7317$, $u_{0,4} = \cos 1 = 0,5403$ и $u_{4,3} = \sin 0,75 = 0,6816$, $u_{4,4} = \cos 1 = 0,8415$. Для внутренних узлов $u_{1,3} = -1,1858$, $u_{2,3} = -3,6348$, $u_{3,3} = 8,2244$ и $u_{1,4} = -1,7488$, $u_{2,4} = 25,9816$, $u_{3,4} = -29,0796$.

Полученные значения функции в узловых точках представлены в табл. 1.

| $y$ | $n$ | $x=0$ $(m=0)$ | $x=0,5$ $(m=1)$ | $x=1$ $(m=2)$ | $x=1,5$ $(m=3)$ | $x=2$ $(m=4)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $u_{0,0}=1,00$ | $u_{1,0}=0,75$ | $u_{2,0}=0,50$ | $u_{3,0}=0,25$ | $u_{4,0}=0,00$ |
| 0,25 | 1 | $u_{0,1}=0,96$ | $u_{1,1}=1,25$ | $u_{2,1}=1,50$ | $u_{3,1}=1,75$ | $u_{4,1}=0,25$ |
| 0,50 | 2 | $u_{0,2}=0,88$ | $u_{1,2}=1,69$ | $u_{2,2}=2,50$ | $u_{3,2}=-0,26$ | $u_{4,2}=0,48$ |
| 0,75 | 3 | $u_{0,3}=0,73$ | $u_{1,3}=-1,17$ | $u_{2,3}=-3,63$ | $u_{3,3}=8,25$ | $u_{4,3}=0,68$ |
| 1,0 | 4 | $u_{0,4}=0,54$ | $u_{1,4}=-1,75$ | $u_{2,4}=25,98$ | $u_{3,4}=-29,09$ | $u_{4,4}=0,84$ |

Таблица 1

## 6.2 Методы Ритца, Канторовича и Галеркина приближенного решения вариационных задач и дифференциальных уравнений

### 6.2.1 Минимизация функционала методом Ритца

Для минимизации функционала $J[y]=\int\limits_a^b dxF(x,y,y'),\quad y(a)=y_1, y(b)=y_2$, будем искать функцию в виде $y(x)=f_0(x)+\sum_1^n c_if_i(x)$ при условии

$$f_0(a)=y_1;\quad f_0(b)=y_2;\quad f_i(a)=f_i(b)=0,\quad i=1,2,...,n. \tag{6.16}$$

На функции $f_i(x)$, кроме условий гладкости и линейной независимости, не накладывается никаких дополнительных условий [13, 18]. Проводя интегрирование по $x$, получим $J[y]=\Phi(c_i)$. Далее находим минимум функции $\Phi$ из условий

$$\frac{\partial\Phi}{\partial c_i}=0,\quad i=1,2,...,n. \tag{6.17}$$

Минимизирующую функцию строим с помощью решения этой системы уравнений $c_1^*,c_2^*,...,c_n^*$:

$$y^*(x)=f_0(x)+\sum_1^n c_i^*f_i(x). \tag{6.18}$$

Точность метода можно увеличить, увеличивая $n$ и добиваясь заданной: $|y_n^*-y_{n+1}^*|<\epsilon$.



Для примера рассмотрим

$$J[y]=\int\limits_0^1((y')^2+y^2+2xy)dx,\quad y(0)=0,\quad y(1)=1. \tag{6.19}$$

В качестве пробных возьмем функции

$$f_0=x,\quad f_1=x(1-x),\quad f_2=x^2(1-x). \tag{6.20}$$

Вычисляя для этого выбора функционал, получим

$$\Phi(c_1,c_2)=\frac{11}{30}(c_1^2+c_1c_2)+\frac{1}{7}c_2^2-\frac{1}{6}c_1-\frac{1}{10}c_2. \tag{6.21}$$

Минимизация приводит к уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{11}{15}\left(c_1+\frac{1}{2}c_2\right)+\frac{1}{3}=0;\\ \frac{1}{30}c_1+\frac{2}{7}c_2+\frac{1}{5}=0.\end{aligned} \tag{6.22}$$

Пользуясь решением этой системы, получим для первого и второго приближений

$$y_1^*=x-\frac{5}{11}x(1-x), \tag{6.23}$$

$$y_2^*=x-\frac{138}{473}x(1-x)-\frac{14}{43}x^2(1-x). \tag{6.24}$$

Степень приближения к точному решению $y_{ex}(x)=2\frac{e}{e^2-1}(e^x-e^{-x})-x$ иллюстрируется в табл. 2:

| $x$ | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 |
|---|---|---|---|---|
| $\lvert y_1^*-y_{ex}\rvert$ | 0,0074 | 0,0260 | 0,0415 | 0,0386 |
| $\lvert y_2^*-y_{ex}\rvert$ | 0,0003 | 0,0003 | 0,0004 | 0,0002 |
| $y_{ex}$ | 0,143 | 0,299 | 0,484 | 0,711 |

Таблица 2. Численная иллюстрация к методу Ритца

### 6.2.2 Метод Канторовича

Этот метод удобен для применения к функционалам, зависящим от нескольких переменных.

Рассмотрим функционал

$$\begin{aligned}J[u(x,y)]=\int\int_D F(x,y,u_x,u_y,u)dxdy,\quad D: a\le x\le b;\\ u|_\Gamma=0,\quad \alpha_1(x)<y<\alpha_2(x),\end{aligned} \tag{6.25}$$

где $D(x,y)$ – некоторая область в плоскости $x,y$, $\Gamma$ – ее граница. Представим искомую функцию в виде $u(x,y)=\sum_1^n u_k(x)\phi_k(x,y)$, где $\phi_k(x,y)$ – набор (известных) линейно независимых функций, удовлетворяющих граничным условиям. Проводя интегрирование по $y$, приведем исходный функционал к виду

$$J[u]=\int\limits_a^b dx\Phi(x,u_1,...,u_n,u_1',...,u_n'). \tag{6.26}$$

Дальнейшая процедура состоит в решении уравнений Эйлера

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial u_k'}=\frac{\partial\Phi}{\partial u_k},\quad u_k(a,b)=0,\quad k=1,2,...,n, \tag{6.27}$$

и вычислении функционала для решения этой системы.

В качестве примера найдем этим способом минимум функционала

$$J[u(x,y)]=\int\int_D(u_x^2+u_y^2-2u)dxdy,\quad -a\le x\le a;$$
$$-b\le y\le b,\quad u_\Gamma=0. \tag{6.28}$$

Здесь $\Gamma$ означает границу области $D$. Пробную функцию выберем в виде

$$u(x,y)=u_1(x)(b^2-y^2). \tag{6.29}$$

Для исходного функционала имеем после выполнения интегрирования по $y$

$$J[u_1(x)]=\frac{8b^3}{3}\int\limits_{-a}^{a}\left[\frac{2}{5}b^2(u_1')^2+u_1^2-u_1\right]dx, \tag{6.30}$$

$$u_1(\pm a)=0. \tag{6.31}$$

Решение уравнения Эйлера для $u_1$ приводит к

$$u_1(x)=1/2+c_1\mathrm{ch}(\omega x)+c_2\mathrm{sh}(\omega x) \tag{6.32}$$

с $\omega=\sqrt{5/(2b^2)}$. С учетом начальных условий имеем $c_1=-1/(2\mathrm{ch}(\omega a)$, $c_2=0$. Окончательно первое приближение экстремали имеет вид

$$u(x,y)=\frac{1}{2}(b^2-y^2)\left(1-\frac{\mathrm{ch}(\sqrt{5/(2b^2)}x)}{\mathrm{ch}(\sqrt{5/(2b^2)}a)}\right). \tag{6.33}$$

### 6.2.3 Метод Галеркина

Данный метод решения краевой задачи

$$L(u(x))=f(x),\quad x\in G,\quad u(x)|_\Gamma=0, \tag{6.34}$$



где $\Gamma$ – граница области $D$, в которой действует оператор $L$, состоит в построении серии приближенных функций $u_n(x)=\sum_{k=1}^{k=n}c_k\phi_k(x)$, где $\phi_k(x)$ – система линейно независимых непрерывных дифференцируемых функций, удовлетворяющих граничным условиям. Следующим шагом строится невязка

$$\delta f_n=L(u_n(x))-f(x). \tag{6.35}$$

Неопределенные коэффициенты $c_k$ находятся из условия ортогональности невязки к системе выбранных линейно независимых функций $\phi_k(x)$

$$\int_G[L(u_n(x))-f_n(x)]\phi_k(x)dx=0,\quad k=1,2,...,n. \tag{6.36}$$

Методом Галеркина найдем приближенную экстремаль функционала

$$J[y]=\int\limits_0^1 dx[y^2+(y')^2+2ye^x],\quad y(0)=y(1)=0, \tag{6.37}$$

которому соответствует дифференциальное уравнение $L(y(x))=y''-y=e^x$ с приведенными выше граничными условиями. Выбираем в качестве пробной функции второго приближения ($n=2$), удовлетворяющей начальным условиям, такую:

$$u_2(x)=c_1x(1-x)+c_2x^2(1-x). \tag{6.38}$$

Из условия ортогональности невязки

$$\delta_2(x)=u_2''-u_2-e^x=-2c_1+c_2(2-6x)-$$
$$-c_1x(1-x)-c_2x^2(1-x)-e^x \tag{6.39}$$

к системе линейно независимых функций $x(1-x)$, $x^2(1-x)$ получим

$$2c_1+c_2=-\frac{60}{11}(3-e),$$
$$77c_1+60c_2=-420(3e-8); \tag{6.40}$$

для экстремали получим $u_2(x)=(0,7-3x)x(1-x)$. Сравнивая это выражение на отрезке $0<x<1$ с точным решением $y(x)=(1/2)xe^x+(e^2/(1-e^2))\mathrm{sh}x$ и увеличивая порядок приближения, можно добиться желаемой точности.

Изложенные выше методы применяются также в качестве приближенных при решении дифференциальных уравнений, которые представляют собой уравнения Эйлера для соответствующих функционалов.

# ГЛАВА 7

# Другие методы

## 7.1 Метод конформных отображений

Отображение $w = f(z)$ комплексной плоскости $z$ на комплексную плоскость $w$ называется конформным в точке $z_0$ плоскости $z$, если производная $f'(z_0) \neq 0$. Если отображение $w = f(z)$ является конформным в области, где задано уравнение $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0$, то новое уравнение также будет уравнением Лапласа в координатах $u$ и $v$: $\Phi_{uu} + \Phi_{vv} = 0$. Так мы приходим к идее найти такое конформное отображение, которое переводит область со сложной границей в область с простой границей. Следуя [4], продемонстрируем сказанное на примере решения задачи Дирихле в верхней полуплоскости:

$$\begin{aligned} &\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < \infty; \\ &\phi(x,0) = a, \quad |x| < 1, \quad \phi(x,0) = b, \quad |x| > 1. \end{aligned} \tag{7.1}$$

К этой задаче сводится, в частности, задача об отыскании эквипотенциальных кривых для случая, когда часть границы - участок $y = 0; |x| < 1$ имеет потенциал $a$, а остальная ее часть - потенциал $b$.

Для этой цели проведем конформное преобразование, отображающее верхнюю полуплоскость на полосу:

$$w = \ln\frac{z-1}{z+1} = u + iv, \quad z = x + iy. \tag{7.2}$$

Переписывая преобразование в виде $e^{u+iv} = \frac{z-1}{z+1}$, можно убедиться, что участку $y = 0$, $x > 1$ в плоскости $u, v$ соответствует часть границы полосы $v = 0$, $u < 0$, участку $y = 0$, $x < -1$ соответствует $v = 0$, $u > 0$ и, наконец, участку $y = 0$, $-1 < x < 1$ соответствует $v = \pi$, $-\infty < u < \infty$. Для полосы мы имеем задачу Дирихле

$$\phi_{uu} + \phi_{vv} = 0, \quad -\infty < u < \infty, \quad 0 < v < \pi; \tag{7.3}$$



$$\phi(u,0) = a, \quad \phi(u,\pi) = b.$$

Решение этой задачи в классе ограниченных функций: $\phi(u,v) = a + v(b-a)/\pi$. Теперь надо его выразить в переменных $x, y$. Имеем

$$\begin{aligned} u + iv &= \ln\frac{z-1}{z+1} = \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + i\arg\frac{z-1}{z+1}; \\ v = \arg\frac{x+iy-1}{x+iy+1} &= \arg\frac{x^2+y^2-1+2iy}{(x+1)^2+y^2} = \arctan\frac{2y}{x^2+y^2-1}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

В качестве другого примера рассмотрим задачу Дирихле в области $D$ между двумя неконцентрическими окружностями

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \tag{7.5}$$

внутри области $D$ с граничными условиями

$$\phi(x,y) = A \tag{7.6}$$

на кривой $x^2 + y^2 = 1$;

$$\phi(x,y) = B \tag{7.7}$$

на кривой $(x-1)^2 + y^2 = 9$. Пользуясь справочником конформных отображений [1], находим, что преобразование

$$w = 2t\frac{z-s}{z-t}, \quad s = -0,146, \quad t = -6,85; \tag{7.8}$$

переводит область $D$ во внутренность двух концентрических окружностей

$$u^2 + v^2 = 1, \quad u^2 + v^2 = 6,86\,. \tag{7.9}$$

Решение задачи Дирихле для этой области имеет вид $\phi(u,v) = a\ln(u^2+v^2) + b$. Постоянные $a, b$ находятся из граничных условий, а переменные $u, v$ выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} u + iv &= 2t\frac{x+iy-s}{x+iy-t}; \\ u = 2t\frac{(x-s)(x-t)+y^2}{(x-t)^2+y^2}, &\quad v = \frac{2ty}{(x-t)^2+y^2}. \end{aligned} \tag{7.10}$$

## 7.2 Метод обратной задачи рассеяния

Одним из способов анализа нелинейных уравнений является их представление в виде коммутатора двух операторов и применение метода обратной задачи рассеяния. Продемонстрируем это на примере уравнения Кортевега - де Фриза, описывающего распространение волн на поверхности в мелкой воде [9, 10]:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad u(x,0) = \phi(x), \tag{7.11}$$

где $u(x,t)$ - отклонение поверхности воды от равновесного состояния, $x, t$ - координата вдоль оси канала и время. Рассмотрим два линейных дифференциальных оператора $L, A$, определенных на комплекснозначных функциях $\Psi(x)$, $-\infty < x < \infty$:

$$\begin{aligned} L &= -\frac{d^2}{dx^2} + u(x,t); \\ A &= -4i\frac{d^3}{dx^3} + 3i\left(u\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}u\right). \end{aligned} \tag{7.12}$$

Можно убедиться, что справедливо соотношение

$$[L, A] = LA - AL = -i(6uu_x - u_{xxx}), \tag{7.13}$$

так что уравнение KdV в операторном виде запишется следующим образом:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = i[L, A]. \tag{7.14}$$

Рассмотрим задачу на собственные значения для оператора $L$:

$$L\Psi = -\frac{d^2\Psi}{dx^2} + u(x,t)\Psi = \lambda\Psi, \tag{7.15}$$

здесь время мы рассматриваем как параметр. Если $|u(x,t)| < \frac{c}{|x|^{2+a}}$, $a > 0$, $|x| \to \infty$, т.е. $u(x,t)$ достаточно быстро убывает на бесконечности, тогда оператор $L$ имеет конечное число дискретных состояний $\lambda_n = -\kappa_n^2$ и непрерывный спектр. Поведение волновой функции на бесконечности

$$\begin{aligned} \Psi_n(x) &\to e^{-\kappa_n x}, \quad x \to +\infty; \\ \Psi_n(x) &\to c_n e^{\kappa_n x}, \quad x \to -\infty; \\ \Psi(x,k) &\to e^{ikx}, \quad x \to +\infty; \\ \Psi(x,k) &\to a(k)e^{ikx} + b(k)e^{-ikx}, \quad x \to -\infty; \end{aligned} \tag{7.16}$$

определяется данными рассеяния

$$\lambda_n, \quad c_n, \quad a(k), \quad b(k). \tag{7.17}$$



Существует некоторый общий формализм, позволяющий найти решение нелинейного уравнения, если удается найти его представление в терминах $LA$-пары. Продемонстрируем его для уравнения KdV. Продифференцируем по времени уравнение на собственные значения $L\Psi_n = \lambda_n\Psi_n$:

$$\frac{\partial L}{\partial t}\Psi_n + L\frac{\partial\Psi_n}{\partial t} = \frac{\partial\lambda_n}{\partial t}\Psi_n + \lambda_n\frac{\partial\Psi_n}{\partial t}, \tag{7.18}$$

пользуясь операторным уравнением и уравнением на собственные значения, результат можно переписать в виде

$$(L - \lambda_n)\left(\frac{\partial\Psi_n}{\partial t} + iA\Psi_n\right) = \frac{\partial\lambda_n}{\partial t}\Psi_n. \tag{7.19}$$

Покажем, что правая часть этого уравнения есть нуль, т.е. $\partial\lambda_n/\partial t = 0$. Для этого умножим обе части этого уравнения на $\Psi^*(x,t)$ и проинтегрируем по $x$. Утверждение следует из эрмитовости оператора $L$, поскольку $\Psi_n^*(L-\lambda_n)\phi = 0$. Таким образом, мы убедились в том, что $\lambda_n$ - интегралы движения, и, кроме того, в том, что комбинация $\frac{\partial\Psi_n'}{\partial t} + iA\Psi_n$ является собственной функцией оператора $L$:

$$\frac{\partial\Psi_n}{\partial t} + 4\Psi_n''' - 6u\Psi_n' - 3u'\Psi_n = r(t)\Psi_n \tag{7.20}$$

для любого $r(t)$.

Рассмотрим сначала дискретный спектр $\lambda_n = -\kappa_n^2 < 0$. Выберем $r(t)$ так, чтобы удовлетворялась асимптотика при $x \to +\infty$: $\Psi_n = \exp(-\kappa_n x)$. Принимая во внимание

$$\frac{\partial\Psi_n(x,t)}{\partial t} = 0; \quad u(x) = 0, \quad x \to +\infty, \tag{7.21}$$

находим $r(t) = -4\kappa^3$. Предел $x \to -\infty, \Psi(x,t) = c_n(t)\exp(x\kappa_n)$ дает уравнение для $c_n(t)$:

$$\frac{dc_n(t)}{dt} + 8c_n(t)\kappa_n^3 = 0, \quad c_n(t) = c_n(0)e^{-8\kappa_n^3 t}. \tag{7.22}$$

Для непрерывного спектра полагаем $\lambda = k^2 > 0$, $\Psi(x,k) = \exp(ikx)$, $x \to +\infty$, получаем $r(t) = -ik^3$. Для асимптотики $x \to -\infty$ имеем прошедшую и отраженную волны: $\Psi(x,k) = a(k,t)\exp(ikx) + b(k,t)\exp(-ikx)$. Подстановка в уравнение для собственной функции дает

$$a(k,t) = a(k,0) = a(k); \quad b(k,t) = b(k)\exp(-8ik^3t). \tag{7.23}$$

Схема решения уравнения KdV такова.

1. Сначала решается уравнение $L\Psi = \lambda\Psi$ для потенциала $u(x,0) = \phi(x)$. Находятся данные рассеяния $\lambda_n$, $c_n(0)$, $a(k)$, $b(k,0) = b(k)$.

2. С помощью подбора $LA$-пары находятся данные рассеяния для любого момента времени $t$: $\lambda_n$, $c_n(t)$, $a(k)$, $b(k,t)$.

3. По этим данным рассеяния строится с помощью метода обратной задачи Марченко потенциал $u(x,t)$.

Мы приведем без доказательства рецепт нахождения потенциала в уравнении Шредингера в терминах данных рассеяния.

Рассмотрим уравнение Шредингера

$$-\frac{d^2}{dx^2}\Psi + u(x)\Psi = \lambda\Psi. \tag{7.24}$$

Предполагаем спектр состоящим из конечного числа дискретных уровней и непрерывного спектра:

$$\begin{aligned} \lambda = -\kappa^2, \quad \Psi_n(x) &= e^{-\kappa_n x}, \quad x \to +\infty; \\ \Psi_n(x) &= c_n e^{\kappa_n x}, \quad x \to -\infty; \\ \lambda = k^2, \quad \Psi(k,x) &= e^{ikx}, \quad x \to +\infty; \\ \Psi(k,x) &= a(k)e^{ikx} + b(k)e^{-ikx}, \quad x \to -\infty. \end{aligned} \tag{7.25}$$

Потенциал $u(x)$ находится из решения уравнения Марченко:

$$u(x) = -2\frac{d}{dx}K(x,x), \tag{7.26}$$

$$K(x,y) = F(x+y) + \int_x^\infty K(x,s)F(s+x)ds,$$

где функция $F(z)$ строится по данным рассеяния:

$$F(z,t) = -\sum_n M_n^2(t)e^{-\kappa_n z} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b^*(k,t)}{a(k)}e^{ikz}dk; \tag{7.27}$$

$$M_n^{-2} = 2\kappa_n \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^2(x,t)dx.$$

Для уравнения KdV функция $F(z,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial t} + 8\frac{\partial^3 F}{\partial z^3} = 0. \tag{7.28}$$

Для случая $b(k) = 0$ (отсутствия отраженной волны при рассеянии плоской волны в потенциале $u(x)$) существуют солитонные решения уравнения KdV. Рассмотрим случай, когда в дискретном спектре имеется один уровень. В этом случае $F(z,t) = -M_n^2(0)e^{(-\kappa z + 8\kappa^3 t)}$. Решение уравнения Марченко ищем в виде

$$K(x,y,t) = \phi(x,t)e^{-\kappa y}, \tag{7.29}$$

$$\phi(x,t) = -M_n^2(0)e^{8\kappa^3 t}[e^{-\kappa x} + \phi(x,t)\int_x^\infty e^{-2\kappa y}dy].$$



Уравнение легко решается, и для потенциала $u(x,t) = -2dK(x,x,t)/dx$ получим солитонное решение (движущийся "перевернутый колокол"):

$$u(x,t) = -\frac{2\kappa^2}{\cosh^2 \kappa(x - vt - x_0)}; \tag{7.30}$$

$$v = 4\kappa^2, \quad e^{-x_0} = \frac{2\kappa}{M_n^2(0)}.$$

Рассмотрение случая отсутствия отраженной волны при наличии нескольких дискретных уровней позволяет проанализировать динамику и характер взаимодействия солитонов. Несмотря на большой прогресс последних лет в области нелинейных уравнений, здесь имеется большой простор для дальнейших исследований.

## 7.3 Преобразование Лапласа

Преобразованием **Лапласа** функции $f(t)$, $t \in R$, называется функция $F(p)$, определяемая следующим равенством:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt. \tag{7.31}$$

**Оригиналом** называется всякая функция $f(t)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $f(t) = 0$ при $t < 0$, причем принимается, что $f(0) = f(+0)$;

2) существуют такие постоянные $\sigma$ и $M$, что

$$|f(t)| < Me^{\sigma t}, \quad t > 0$$

(величина $\sigma$ называется показателем роста функции $f(t)$);

3) на любом конечном отрезке $[0,T]$ функция $f(t)$ может иметь лишь конечное число точек разрыва (первого рода).

Если $f(t)$ - оригинал, то стоящий в правой части (7.31) интеграл Лапласа сходится абсолютно и равномерно в полуплоскости $\mathrm{Re}p \geq \sigma > \sigma_0$. При этом функция $F(p)$ является аналитической в полуплоскости $\mathrm{Re}p > \sigma_0$ и называется **изображением** функции $f(t)$.

Соответствие между оригиналом $f(t)$ и его изображением $F(p)$ символически записывается в виде $F(p) \doteq f(t)$.

### 7.3.1 Основные свойства преобразования Лапласа

1. **Свойство линейности:**

$$c_1f_1(t) + c_2f_2(t) \doteq c_1F_1(p) + c_2F_2(p).$$

2. **Теорема подобия:**

$$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha}F(\frac{p}{\alpha}).$$

3. **Теорема смещения:**

$$e^{\alpha t} \doteq F(p-\alpha).$$

4. **Теорема запаздывания:**

$$\eta(t-\tau)f(t-\tau) \doteq e^{-p\tau}F(p).$$

5. **Дифференцирование оригинала:**

$$f^{(k)}(t) \doteq p^kF(p) - (p^{k-1}f(0) + p^{k-2}f'(0) + \ldots + f^{(k-1)}(0)).$$

В частности,

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0).$$

6. **Интегрирование оригинала:**

$$\int_0^t f(t)d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}.$$

7. **Дифференцирование изображения:**

$$t^n f(t) \doteq (-1)^n F^{(n)}(p), \quad n = 1, 2, \ldots$$

8. **Интегрирование изображения:**

$$\frac{1}{t}f(t) \doteq \int_p^\infty F(q)dq.$$

9. **Дифференцирование и интегрирование по параметру:**

$$\frac{\partial f(t,\alpha)}{\partial\alpha} \doteq \frac{\partial F(p,\alpha)}{\partial\alpha}$$

и

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t,\alpha)d\alpha \doteq \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(p,\alpha)d\alpha.$$

10. **Теорема Бореля об изображении свертки.** Свертке оригиналов

$$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$$

соответствует произведение изображений, т. е.

$$f_1 * f_2 \doteq F_1(p)F_2(p).$$

11. **Интеграл Дюамеля.** Если $f(t) \doteq F(p)$ и $g(t) \doteq G(p)$, то

$$pF(p)G(p) \doteq f(0)g(t) + (f' * g)(t) = g(0)f(t) + (g' * f)(t).$$

Изображение функции Хевисайда $\eta(t)$: $\eta(t) \doteq 1/p$, где

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Приведем таблицу изображений основных функций.



| № | $f(t)$ | $F(p)$ | № | $f(t)$ | $F(p)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\eta(t)$ | $1/p$ | 6 | $\sin\beta t$ | $\beta/(p^2+\beta^2)$ |
| 2 | $t^n/n!$ | $1/p^{n+1}$ | 7 | $\cosh\beta t$ | $p/(p^2-\beta^2)$ |
| 3 | $e^{\alpha t}$ | $1/(p-a)$ | 8 | $\sinh\beta t$ | $\beta/(p^2-\beta^2)$ |
| 4 | $(t^n/n!)e^{\alpha t}$ | $1/(p-\alpha)^{n-1}$ | 9 | $e^{\alpha t}\cos\beta t$ | $(p-\alpha)/((p-\alpha)^2+\beta^2)$ |
| 5 | $\cos\beta t$ | $p/(p^2+\beta^2)$ | 10 | $e^{\alpha t}\sin\beta t$ | $\beta/((p-\alpha)^2+\beta^2)$ |

Таблица 3

С помощью свойств преобразований Лапласа и таблицы основных изображений можно найти изображения большинства функций.

Восстановление оригинала по изображению во многих случаях можно произвести непосредственно с помощью свойств преобразования Лапласа и таблицы изображений, а также с использованием первой и второй теорем разложения.

## 7.4 Решение краевых задач с помощью преобразования Лапласа

Интегрирование линейных дифференциальных уравнений в частных производных можно осуществлять операционным методом.

**Пример 1.** Для иллюстрации преобразования Лапласа рассмотрим задачу о распределении температуры в стержне длиной $l$, если начальная температура стержня $u(x,0) = 0$, граничные условия: $u(0,t) = u_0$, $\quad u(l,t) = 0$ [14].

Это смешанная задача для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{7.32}$$

при краевых условиях

$$u(x,0) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad u(0,t) = u_0. \tag{7.33}$$

Обозначим преобразование Лапласа по переменной $t$ функции $u(x,t)$ через $u_L(x,p)$, т.е.

$$u(x,t) \doteq u_L(x,p).$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} \doteq pu_L(x,p) - u(x,0) = pu_L(x,p),$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \doteq \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\int_0^\infty u(x,t)e^{-pt}dt\right) = \frac{d^2u_L(x,p)}{dx^2}.$$

Изображением уравнения (7.32) будет

$$a^2u''_L(x,p) = pu_L(x,p). \tag{7.34}$$

Изображение граничных условий:

$$u(0,t) \doteq u_L(0,p) = \int\limits_0^\infty u_0 e^{-pt}dt = \frac{u_0}{p},$$

$$u(l,t) \doteq u_L(l,p) = 0. \tag{7.35}$$

Получаем краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (7.34) с граничными условиями (7.35).

Найдем решение для $u_L(x,p)$. Составим характеристическое уравнение для (7.34):

$$a^2k^2 - p = 0. \tag{7.36}$$

Корни этого уравнения $k_1 = \frac{\sqrt{p}}{a}$, $k_2 = -\frac{\sqrt{p}}{a}$, поэтому

$$u_L(x,p) = c_1 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}. \tag{7.37}$$

Из граничных условий (7.35) получаем

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = u_0/p, \\ c_1 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}l} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}l} = 0. \end{cases} \tag{7.38}$$

Из (7.38) находим постоянные $c_1$ и $c_2$:

$$c_1 = -\frac{u_0}{p}\frac{1}{e^{2\frac{\sqrt{p}}{a}l} - 1};$$

$$c_2 = \frac{u_0}{p}\frac{1}{1 - e^{-2\frac{\sqrt{p}}{a}l}}.$$

Решение краевой задачи (7.34), (7.35) будет следующим:

$$u_L(x,p) = -\frac{u_0}{p}\frac{e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}}{e^{2\frac{\sqrt{p}}{a}l} - 1} + \frac{u_0}{p}\frac{e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}}{1 - e^{-2\frac{\sqrt{p}}{a}l}} = \frac{u_0}{p}\frac{\sinh\frac{\sqrt{p}}{a}(l-x)}{\sinh\frac{\sqrt{p}}{a}l}. \tag{7.39}$$

Найдем оригинал $u(x,t)$ по изображению $u_L(x,p)$. Для этого воспользуемся теоремой разложения

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} res\{u_L(x,p_k)e^{p_k t}, p_k\}.$$

Решение (7.39) аналитично везде, за исключением точек, где $p\sinh\frac{\sqrt{p}}{a}l = 0$, т. е. точек $p_k = -\frac{\pi^2a^2k^2}{l^2}$, $k$ - целое.



Получаем искомое решение

$$u(x,t) = u_0\left(\frac{l-x}{l} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi x}{l}\exp\left(-\frac{\pi^2a^2k^2}{l^2}t\right)\right). \tag{7.40}$$

Схема решения с помощью преобразования Лапласа аналогична схеме нахождения частного решения обыкновенного дифференциального уравнения. Рассмотрим еще один пример на применение операционного исчисления.

**Пример 2.** Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + z = \sin x\cos y,$$

удовлетворяющее условиям

$$z(0,y) = \sin y, \quad z(x,0) = 0, \quad (x \in [0,+\infty), y \in [0,\infty)).$$

Решение. Переходим к операторному уравнению относительно аргумента $y$, полагая $z(x,y) \doteq Z(x,p)$. Отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial y} \doteq pZ(x,p) - z(x,0) = pZ(x,p),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} \doteq \frac{\partial}{\partial x}(pZ(x,p)) = pZ'_x(x,p)$$

(по теореме о дифференцировании операторных соотношений по параметру). Получаем операторное уравнение

$$pZ'_x(x,p) + Z(x,p)) = \frac{p\sin x}{p^2+1}$$

(так как $\cos y \doteq \frac{p}{p^2+1}$). Интегрируя полученное дифференциальное уравнение по аргументу $x$, находим

$$Z(x,p) = C_1(p)e^{-x/p} + \frac{p}{(p^2+1)^2}\sin x - \frac{p^2}{(p^2+1)^2}\cos x.$$

В силу начального условия $Z(x,0) = 0$ и теоремы о связи начального значения оригинала и конечного значения изображения мы должны иметь $\lim_{p\to\infty} pZ(x,p) = Z(x,0) = 0$, откуда находим $\lim_{p\to\infty} pC_1(p) = 0$, причем если $C_1(p) \doteq \phi(y)$, то $\phi(0) = 0$ (в силу той же теоремы). Запишем теперь $Z(x,p)$ в следующем виде:

$$Z(x,p) = pC_1(p)\frac{1}{p}e^{-\frac{x}{p}} + \frac{p}{(p^2+1)^2}\sin x - \frac{1}{2}\frac{(p^2+1)+(p^2-1)}{(p^2+1)^2}\cos x.$$

Но так как

$$pC_1(p) \doteq \phi'(y), \quad \frac{1}{p}e^{-\frac{x}{p}} \doteq I_0(2\sqrt{xy})$$

($I_0$ - функция Бесселя первого рода с нулевым индексом),

$$\frac{p}{(p^2+1)^2} \doteq \frac{1}{2} y \sin y, \quad \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2} \doteq y \cos y,$$

то находим

$$z(x,y) = \int_0^y \phi'(t) I_0(2)\sqrt{x(y-t)}dt + \frac{1}{2} y \sin y \sin x -$$

$$-\frac{1}{2}(\sin y + y \cos y)\cos x) = \int_0^y \phi'(t) I_0(2)\sqrt{x(y-t)}dt -$$

$$-\frac{1}{2} \sin y \cos x - \frac{1}{2} y \cos(x+y)$$

(первое слагаемое получено по теореме свертывания оригиналов). Так как $I_0(0) = 1$, то, полагая $x = 0$, находим

$$z(0,y) = \int_0^y \phi'(t)dt - \frac{1}{2}\sin y - \frac{1}{2} y \cos y =$$

$$= \phi(y) - \frac{1}{2}\sin y - \frac{1}{2} y \cos y = \sin y$$

(по начальным условиям); поэтому $\phi(y) = \frac{3}{2}\sin y + \frac{1}{2} y \cos y, \phi'(y) = 2\cos y - \frac{1}{2} y \sin y$, и окончательно находим

$$z(x,y) = \int_0^y \left(2\cos t - \frac{1}{2} t \sin t\right) I_0(2)\sqrt{x(y-t)}dt -$$

$$-\frac{1}{2} \sin y \cos x - \frac{1}{2} y \cos(x+y).$$



# ГЛАВА 8

# Интегральные уравнения. Классификация, некоторые методы решения

Уравнения, содержащие неизвестную функцию под интегралом, называются интегральными уравнениями (ИУ) [5, 7, 18, 20]. Ниже мы будем рассматривать линейные ИУ, содержащие неизвестную функцию не более чем в первой степени.

ИУ вида

$$\phi(x) = \lambda \int_G K(x,y)\phi(y)dy + f(x) \tag{8.1}$$

называется линейным ИУ. При нулевом свободном члене $f(x) = 0$ ИУ называется однородным. $K(x,y), \lambda$ – ядро и собственное или характеристическое число ИУ.

Линейное интегральное уравнение

$$\phi(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)\phi(t)dt + f(x), \tag{8.2}$$

где $\phi(x)$ - искомая функция, а $f(x)$ и $K(x,t)$ - заданные функции, $\lambda$ – произвольная постоянная, называется интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода. Это же уравнение, но уже с постоянными пределами:

$$\phi(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt + f(x)$$

называется интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода. Если искомая функция входит только под знак интеграла, то мы получим соответственно интегральные уравнения Вольтерра и Фредгольма 1-го рода:

$$\int_a^x K(x,t)\phi(t)dt = f(x); \quad \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt = f(x). \tag{8.3}$$

Связь задачи Коши и ИУ. Покажем на примерах, что отыскание решения линейного дифференциального уравнения с начальными условиями может быть сведено к решению интегрального уравнения.

**Пример 1.** Составить интегральное уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению с заданными начальными условиями

$$y'' - y'\sin(x) + e^x y = x; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1. \tag{8.4}$$

Положим

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \phi(x).$$

Тогда, интегрируя это определение и пользуясь начальными условиями, получим

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \phi(t)dt + y'(0) = \int_0^x \phi(t)dt - 1, \tag{8.5}$$

$$y = \int_0^x (x-t)\phi(t)dt + y'(0) + y(0)x = \int_0^x (x-t)\phi(t)dt + x - 1. \tag{8.6}$$

Здесь при сведении двукратного интеграла (с переменой порядка интегрирования) использована формула

$$\underbrace{\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \cdots \int_{x_0}^x f(x)dx}_{n} = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^x (x-z)^{n-1} f(z)dz.$$

Подставляя (8.5) и (8.6) в данное дифференциальное уравнение, получим

$$\phi(x) - \sin(x)\left[\int_0^x \phi(t)dt - i\right] + e^x\left[\int_0^x (x-t)\phi(t)dt + x - 1\right] = x \tag{8.7}$$

или

$$\phi(x) = \int_o^x (\sin(x) - e^x(x-t))dt - \sin(x) + e^x(x-1) + x. \tag{8.8}$$

**Пример 2.** Рассмотрим задачу Коши

$$y''' - 2xy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 3. \tag{8.9}$$

Соответствующее ИУ имеет вид

$$\phi + \int_0^x K(x,t)\phi(t)dt = f(x), K(x,t) = -x(x-t)^2;$$
$$f(x) = 3x^3 + 4x^2 + 2x. \tag{8.10}$$



Одним из методов решения ИУ является метод дифференцирования.

При его применении полезно правило дифференцирования определенного интеграла:

$$F(x) = \int_{\phi(x)}^{g(x)} dy G(x,y), \quad F'(x) = g'(x)G(x, g(x)) -$$
$$\phi'(x)G(x,\phi(x)) + \int_{\phi(x)}^{g(x)} dy G_x(x,y). \tag{8.11}$$

Рассмотрим несколько примеров из сборника [5]. Рассмотрим ИУ

$$\phi(x) = x + \int_0^x dy(y-x)\phi(y)dy. \tag{8.12}$$

Дифференцируя это ИУ с помощью приведенной выше формулы и полагая $x = 0$, убедимся в эквивалентности его задаче Коши

$$\phi'' + \phi = 0; \quad \phi(0) = 0; \quad \phi'(0) = 1, \tag{8.13}$$

решением которой будет $\phi(x) = \sin x$.
Рассмотрим ИУ

$$\phi(x) = x^2 + \lambda\int_0^x dy(x-y)\phi(y)dy. \tag{8.14}$$

Аналогичным образом убедимся в эквивалентности его задаче Коши

$$\phi'' - \lambda\phi = 2, \quad \phi(0) = 0, \quad \phi'(0) = 0, \tag{8.15}$$

решением которой является

$$\phi(x) = \frac{2}{\lambda}(-1 + \cosh(\sqrt{\lambda}x)). \tag{8.16}$$

Для ИУ $\phi(x) = 1 + \lambda\int_0^x (x-y)\phi(y)dy$ получим $\phi'' - \lambda\phi = 0, \quad \phi(0) = 1, \quad \phi'(0) = 0$ с решением $\phi(x) = \cosh(\sqrt{\lambda}x)$.

ИУ с постоянными пределами интегрирования в случае, если ядро представляет собой сумму факторизованных выражений:

$$K(x,y)=\sum_{m=1}^{n} f_m(x)g_m(y), \tag{8.17}$$

может быть решено с помощью алгебраической системы.

Действительно, решением линейного ИУ

$$\phi(x)=\lambda\int_G K(x,y)\phi(y)dy+f(x) \tag{8.18}$$

будет

$$\phi(x)=f(x)+\lambda\sum_{m=1}^{n} c_m f_m(x),$$
$$c_m=\int_G dy\phi(y)g_m(y). \tag{8.19}$$

Коэффициенты $c_m$ находятся при решении системы линейных уравнений, получаемых домножением исходного ИУ на $g_m(x)$ с последующим интегрированием.

Продемонстрируем это на примерах из [5]. Рассмотрим ИУ

$$\phi(x)=\lambda\int_0^1 dy\phi(y)K(x,y)+f(x)$$

для случая $K(x,y)=x+y-2xy; f(x)=x+x^2$. Имеем $f_1=x,\quad g_1=1;\quad f_2=1-2x,\quad g_2=y$. Обозначая постоянные $c_1=\int_0^1\phi(x)dx;\quad c_2=\int_0^1 x\phi(x)dx$, получим алгебраическую систему уравнений для $c_{1,2}$

$$c_1=\lambda c_1/2+5/6;\quad c_2=\lambda(c_1/3-c_2/6)+7/12. \tag{8.20}$$

Решение имеет вид

$\phi=x^2+(Ax+B)/D, A=6(\lambda^2-8\lambda+12); B=\lambda(42-\lambda); D=6(6+\lambda)(2-\lambda)$. При $\lambda=-6$ и $\lambda=2$ решение не существует.

Задача [5, *18.1*]. Найти все характеристические числа и собственные функции ИУ

$$\phi(x)=\lambda\int_0^{2\pi}\phi(y)\left[\sin(x+y)+\frac{1}{2}\right]dy. \tag{8.21}$$

Обозначая $c_0=\int_0^{2\pi}dx\phi(x),\quad c_1=\int_0^{2\pi}dx\sin x\phi(x),\quad c_2=\int_0^{2\pi}dx\cos x\phi(x)$, имеем систему уравнений

$$c_0=\lambda\pi c_0;\quad c_1=\lambda\pi c_2,\quad c_2=\lambda\pi c_1. \tag{8.22}$$



Решение имеет вид

$$1)\quad \lambda=\frac{1}{\pi},\quad \phi_1(x)=1;\quad \phi_2(x)=\cos x+\sin x,$$
$$2)\lambda=-\frac{1}{\pi},\quad \phi_3(x)=\sin x-\cos x. \tag{8.23}$$

Задача [5, *18.3*]

То же для $\phi(x)=\lambda\int_0^1 dy\phi(y)(x^2y^2-\frac{2}{45})$.

Обозначая $c_1=\int_0^1 dy\phi(y), c_2=\int_0^1 dyy^2\phi(y)$, имеем для решения $\phi(x)=\lambda[x^2c_2-\frac{2}{45}c_1]$.

Домножая это уравнение на $x;x^2$ и интегрируя в пределах от нуля до единицы, получим

$$c_1\left(1+\frac{2}{45}\lambda\right)=\frac{1}{3}\lambda c_2,\quad c_2\left(1-\frac{1}{5}\lambda\right)=-\frac{2}{135}\lambda c_1. \tag{8.24}$$

Решение имеет вид

$$1)\lambda_1=-45,\quad \phi_1(x)=3x^2-2,\quad 2)\lambda_2=\frac{45}{8},\quad \phi_2(x)=15x^2-1. \tag{8.25}$$

Задача[5, *36.1*]

То же для $\phi(x)=\lambda\int_0^1 dyK(x,y)\phi(y)$, где ядро имеет вид

$$K(x,y)=x, x<y;$$
$$K(x,y)=y, y<x. \tag{8.26}$$

ИУ можно записать в форме

$$\phi(x)=\lambda[\int_0^x y\phi(y)dy+x\int_x^1\phi(y)dy],\quad \phi(0)=0;$$

$$\phi'(x)=\lambda\int_x^1 dy\phi(y),\quad \phi'(1)=0. \tag{8.27}$$

Эта задача эквивалентна задаче Коши

$$\phi''+\lambda\phi=0;\quad \phi(0)=0,\quad \phi'(1)=0, \tag{8.28}$$

которая имеет решение $\phi_n(x)=\sin(\sqrt{\lambda_n}x)$, $\lambda_n=\pi^2(n+\frac{1}{2})^2$.

# ГЛАВА 9

# Системы уравнений в частных производных

Уравнения второго и более высоких порядков могут быть приведены к системе уравнений первого порядка.

Рассмотрим краевую задачу $u_{tt} - 16u_{xx} = 0$, $\quad -\infty < x < \infty$, $0 < t < \infty$, с начальными условиями $u(x,0) = g(x)$; $\quad u_t(x,0) = -f'(x)$ [4]. Она эквивалентна задаче с системой дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + 8\frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \quad 0 < t < \infty; \qquad (9.1)$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + 2\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \quad -\infty < x < \infty;$$

с начальными условиями

$$u_1(x,0) = f(x), \quad u_2(x,0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty. \qquad (9.2)$$

Эту систему можно записать в матричной форме, вводя вектор-столбец $U = (u_1, u_2)$ и квадратную двумерную матрицу $A$ с элементами первой и второй строк $(0,8), (2,0)$ соответственно:

$$U_t + AU_x = 0. \qquad (9.3)$$

Собственные значения матрицы находятся из условия $\det||A - \lambda E|| = 0$, они равны $-4$; $\;4$. Собственные векторы, им соответствующие: $(4,1)$, $\;(4,-1)$. Вводя новый вектор-столбец $U = PV$, где матрица $P$ составлена из вектор-столбцов собственных векторов, можно убедиться, что матричное уравнение

$$V_t + P^{-1}APv_x = 0 \qquad (9.4)$$



есть два несвязанных уравнения

$$v_{1t} - 4v_{1x} = 0, \quad v_{2t} + 4v_{2x} = 0, \quad v_1(x,t) = \phi(x+4t), \quad v_2(x,t) = \psi(x-4t). \qquad (9.5)$$

Начальные условия позволяют найти функциональный вид произвольных функций $\phi, \psi$:

$$u_1 = \frac{1}{2}[f(z_+) - 4g(z_+)] + \frac{1}{2}[f(z_-) + 4g(z_-)]; \qquad (9.6)$$
$$u_2 = -\frac{1}{8}[f(z_+) - 4g(z_+)] + \frac{1}{8}[f(z_-) + 4g(z_-)], \quad z_\pm = x \pm 4t.$$

Этот результат можно было бы получить и с помощью формулы Даламбера.

Общего вида матричное уравнение первого порядка $U_t + AU_x = 0$ эквивалентно системе уравнений второго порядка $U_{tt} - A^2U_{xx} = 0$. Находя собственные значения матрицы $A$, $\lambda_{1,2}$ и ее собственные векторы, строим из них матрицу $P$ и убеждаемся, что матрица $P^{-1}A^2P$ диагональна с диагональными матричными элементами $\lambda_1^2, \lambda_2^2$. Для нового вектор-столбца $v = P^{-1}u$ система уравнений распадается на два несвязанных уравнения $v_{itt} - \lambda_i^2 v_{ixx} = 0$, $i = 1,2$.

Продемонстрируем сказанное на примере матрицы $A$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}. \qquad (9.7)$$

Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$. Собственные векторы находятся из уравнений

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}. \qquad (9.8)$$

Матрица $P$, построенная из собственных векторов, имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}. \qquad (9.9)$$

Строим обратную матрицу по рецепту

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \qquad (9.10)$$

следуя ему, получим

$$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad (9.11)$$
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

# Уравнения первого порядка. Метод характеристик

Общий вид однородного уравнения первой степени в частных производных имеет вид

$$a_0(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + a_1(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_n} + a_{n+1}(x,t)u(x,t) = 0;$$
$$u(x,0) = F(x), \quad x = x_1, x_2, \ldots, x_n; \tag{9.12}$$

где $a_i(x,t), i = 0,1,\ldots n$, $F(x)$ считаются известными функциями. Для нахождения неизвестной функции $u(x,t)$ воспользуемся методом характеристик. Введем новый параметр $s$ и составим уравнения характеристик [4]

$$\frac{d}{ds}t = a_0(x,t), \quad \frac{d}{ds}x_i = a_i(x,t), \quad i = 1,2,\ldots,n;$$
$$t(0) = 0; \quad x_i(0) = \tau_i. \tag{9.13}$$

Решив эти уравнения, мы получим значения $x_i(s), t(s)$. Исходное уравнение примет вид

$$\frac{du(s)}{ds} + a_{n+1}(x_i(s), \quad t(s))u(s) = 0;$$
$$u(0) = F(\tau), \quad \tau = \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n. \tag{9.14}$$

Окончательный ответ получится, когда постоянные интегрирования $\tau_i$ выразим через исходные переменные $x_i, t$.

Для иллюстрации рассмотрим несколько примеров.

1. Решим краевую задачу

$$xu_x + u_t + tu = 0;$$
$$u(x,0) = F(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty. \tag{9.15}$$

Уравнения характеристик

$$x' = x, \quad x(0) = \tau, \quad t' = 1, \quad t(0) = 0 \tag{9.16}$$

имеют решения

$$x = \tau e^s, \quad t = s, \quad \tau = xe^{-t}. \tag{9.17}$$

Исходное уравнение $u' + su = 0$ с начальным условием $u(s=0) = F(\tau)$ имеет решение $u = F(\tau)\exp(-s^2/2)$. Переходя к исходным переменным, получим

$$u(x,t) = F(xe^{-t})e^{-t^2/2}. \tag{9.18}$$



Необходимо убедиться подстановкой в исходное уравнение, что это решение ему удовлетворяет.

2. Рассмотрим краевую задачу

$$u_x + 2u_y + 2u = 0, \quad -\infty < x,y < \infty, \quad u|_{x=y} = F(x). \tag{9.19}$$

Решениями уравнений характеристик $x' = 1$, $y' = 2$, $x(0) = \tau$, $y(0) = 0$ являются

$$x = s + \tau, \quad y = 2s, \quad \tau = x - \frac{y}{2}. \tag{9.20}$$

Решение основного уравнения $u' + 2u = 0$ имеет вид $u(s,\tau) = R(\tau)\exp(-2s)$. Начальное условие имеет вид функционального уравнения:

$$u(x,x) = F(x) = R\left(\frac{x}{2}\right)e^{-x}, \tag{9.21}$$

его решение $R(z) = F(2z)e^{2z}$. Переходя к исходным переменным, получим

$$u(x,y) = e^{2(x-\frac{y}{2})}F(2x-y)e^{-y} = e^{2(x-y)}F(2x-y). \tag{9.22}$$

3. Рассмотрим краевую задачу

$$3u_x + 2yu_y + xu = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 1 < y < \infty;$$
$$u(x,1) = x^2. \tag{9.23}$$

Решения уравнений для характеристик $x' = 3$, $x(0) = \tau$, $y' = 2y$, $y(0) = 1$ имеют вид $x(s) = 3s + \tau$, $y(s) = e^{2s}$, $\tau = x - \frac{3}{2}\ln y$. Решение основного уравнения $u' + (3s+\tau)u = 0$ есть $u(s,\tau) = R(\tau)\exp(-\frac{3}{2}s^2 - \tau s)$. Из начального условия находим $R(z) = z^2$. Окончательно имеем

$$u(x,y) = \left(x - \frac{3}{2}\ln y\right)^2 \exp\left(\frac{3}{8}\ln^2 y - \frac{1}{2}x\ln y\right). \tag{9.24}$$

**Задачи на тему уравнений первого порядка**

Решить системы уравнений

$$u_{1t} + au_{1x} + bu_{2x} = 0, \tag{9.25}$$
$$u_{2t} + cu_{1x} + du_{2x} = 0,$$
$$u_1(x,0) = f_1(x), \quad u_2(x,0) = f_2(x),$$
$$-\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty,$$

для следующих наборов $a, b, c, d$:

$$\text{а)}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{б)}\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{в)}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \tag{9.26}$$

$$\text{г)}\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{д)}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}, \quad \text{е)}\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \tag{9.27}$$

$$\text{ж)}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}, \quad \text{з)}\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{и)}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.28}$$

Найти характеристики однородных уравнений и решить задачу Коши:

$$1)\quad 2\frac{\partial u}{\partial x} - y^2\frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad u(x,\infty) = \cos x; \tag{9.29}$$

$$2)\quad 3\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad u(x,1) = x^2;$$

$$3)\quad 3x\frac{\partial u}{\partial x} - 4y\frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad u(1,y) = y^2;$$

$$4)\quad 2y\frac{\partial u}{\partial x} - 3x\frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad u(0,y) = \cos y;$$

$$5)\quad \frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad u(0,y) = \cos y.$$

Решения:

$$u(x,y) = \tag{9.30}$$

$$1)\ \cos\left(x - \frac{2}{y}\right);$$

$$2)\ \left(x - \frac{3}{2}\ln y\right)^2;$$

$$3)\ y^2x^{8/3};$$

$$4)\ \cos\left(\sqrt{y^2 + \frac{3}{2}x^2}\right);$$

$$5)\ \cos(ye^x).$$



# ГЛАВА 10

# Варианты зачетных задач

## 10.1 Минимизация функционалов

1. Найти экстремаль функционала и вычислить его минимальное значение:

$$1)\quad J[y] = \int_0^1 dx((y')^2 - 12yx), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1;$$

$$2)\quad J[y] = \int_0^1 dx((y')^2 + y^2 + 2ye^x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = \frac{1}{2e};$$

$$3)\quad J[y] = \int_{-1}^1 dx\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y'}, \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = 1;$$

$$4)\quad J[y] = \int_0^{3/2} dx((y')^3 + 2x), \quad y(0) = 0, \quad y(3/2) = 1;$$

$$5)\quad J[y] = \int_0^1 dx((y')^2 + yx), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0;$$

$$6)\quad J[y] = \int_0^\pi dx((y')^2 - y^2), \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = -1;$$

$$7)\quad J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx(2y + y^2 - (y')^2), \quad y(0) = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0;$$

$$8)\quad J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx((y')^2 - y^2), \quad y(0) = 1, \quad y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

9) $J[y] = \int\limits_0^1 dx\text{н}(y')^2, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 4^{\frac{1}{3}};$

10) $J[y] = \int\limits_0^1 dx((y')^2 - y^2 - y)e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = e.$

2. Найти условный экстремум:

1) $J[y] = \int\limits_0^1 dx(y')^2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad \int\limits_0^1 xydx = 0;$

2) $J[y] = \int\limits_0^\pi dx(y')^2, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 1, \quad \int\limits_0^1 y\sin x dx = 0;$

3) $J[y] = \int\limits_0^\pi dxy\sin x, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = \pi, \quad \int\limits_0^\pi (y')^2 dx = \frac{3\pi}{2};$

4) $J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 dxx(y_1 - y_2), \quad y_1(0) = 0, \quad y_1(1) = 2,$

$$y_2(0) = 0, \quad y_2(1) = 0,$$

$$\int\limits_0^1 y_1y_2dx = -\frac{4}{5};$$

5) $J[y] = \int\limits_0^1 dx(y')^2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = \frac{1}{4},$

$$\int\limits_0^1 (y - (y')^2)dx = \frac{1}{12};$$

6) $J[y] = \int\limits_0^1 dx(y')^2, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 6, \quad \int\limits_0^1 ydx = 3;$

7) $J[y] = \int\limits_0^1 dx((y')^2 + y^2), \quad y(0) = 0,$

$$y(1) = \frac{1}{e}, \quad \int\limits_0^1 ye^{-x}dx = \frac{1}{4}(1 - 3e^{-2});$$

8) $J[y] = \int\limits_{-a}^a dxy(x), \quad y(-a) = 0, \quad y(a) = 0, \quad \int\limits_{-a}^a \sqrt{1 + (y')^2}dx = l.$



3. Найти решение интегральных уравнений вида

$$\phi(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,y)\phi(y)dy + f(x):$$

1) $K = x - 1, \quad f = x, \quad (a,b) = (0,1);$

2) $K = 2e^{x+y}, \quad f = e^x, \quad (a,b) = (0,1);$

3) $K = x + y - 2xy, \quad f = x + x^2, \quad (a,b) = (0,1);$

4) $K = xy + x^2y^2, \quad f = x^2 + x^4, \quad (a,b) = (0,1);$

5) $K = x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}, \quad f = 1 - 6x^2, \quad (a,b) = (0,1);$

6) $K = \sin(2x + y), \quad f = \pi - 2x, \quad (a,b) = (0,\pi);$

7) $K = xy^2 + x^2y, \quad f = x^3 + x, \quad (a,b) = (-1,1);$

8) $K = \cos x \cos y + \cos(2x)\cos(2y), \quad f = \cos(3x), \quad (a,b) = (0,2\pi);$

9) $K = xy + x^2 + y^2 - 3x^2y^2, \quad f = cx + d, \quad (a,b) = (-1,1).$

4. Найти характеристические числа и собственные функции однородных уравнений:

$$\phi(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,y)\phi(y)dy:$$

1) $K = \sin(x + y) + \frac{1}{2}, \quad (a,b) = (0,2\pi);$

2) $K = x^2y^2 - \frac{2}{45}, \quad (a,b) = (0,1);$

3) $K(x,y) = x, \quad 0 < x < y;$

4) $K(x,y) = y, \quad y < x < 1, \quad (a,b) = (0,1);$

5) $K(x,y) = \frac{2-y}{2}, \quad 0 < x < y;$

6)$K(x,y) = \frac{2-x}{2}, \quad y < x < 1(a,b) = (0,1);$

7) $K(x,y) = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{2}{5}} + \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{5}}, \quad (a,b) = (0,1).$

5. Свести дифференциальное уравнение к интегральному.

1) $y'' - y'\sin x + ye^x = x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1;$

2) $y''' - 2xy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 3;$

3) $y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

4) $y'' - y = x, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1.$

6. Решить системы уравнений

$$u_{1t} + au_{1x} + bu_{2x} = 0;$$
$$u_{2t} + cu_{1x} + du_{2x} = 0;$$
$$u_1(x,0) = f_1(x); \quad u_2(x,0) = f_2(x),$$
$$-\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

для следующих наборов чисел $(a, b, c, d)$:

$1)(4,2,1,3)$; $2)(6,-1,3,2)$; $3)(1,-2,2,6)$; $4)(7,4,-2,1)$, $5)(3,1,12,7)$; $6)(7,2,3,6)$; $7)(2,2,7,11)$; $8)(0,8,2,0)$; $9)(2,3,1,4)$, $10)(0,4,4,0)$.

7. Найти характеристики однородных уравнений первого порядка и решить задачу Коши:

$$1) \quad 2u_x - y^2u_y = 0; \quad u(x,\infty) = \cos x; \quad -\infty < x, y < \infty;$$
$$2) \quad 3u_x + 2yu_y = 0; \quad u(x,1) = x^2; \quad -\infty < x, y < \infty;$$
$$3) \quad 3xu_x - 4yu_y = 0; \quad u(1.y) = y^2; \quad -\infty < x, y < \infty;$$
$$4) \quad 2yu_x - 3xu_y = 0; \quad u(0,y) = \cos y; \quad -\infty < x, y < \infty;$$
$$5) \quad u_x - yu_y = 0; \quad u(0,y) = \cos y; \quad -\infty < x, y < \infty;$$
$$6) \quad u_x + u_t = 0; \quad u(x,0) = \cos x, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0;$$
$$7) \quad xu_x + tu_t + 2u = 0; \quad u(x,1) = \sin x; \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 1;$$
$$8) \quad au_x + bu_y + cu_t + du = 0; \quad u(x,y,0) = e^{-x^2-y^2}; \quad -\infty < x, y < \infty, \quad t > 0.$$

## 10.2 Краевые задачи эллиптического типа

1. Решить краевую задачу в полупространстве $z > 0, \quad -\infty < x, y < \infty$:

$$\text{а)} \quad \Delta u(x,y,z) = ze^{-z}\sin x \sin y;$$
$$u(x,y,0) = 0, \quad u(x,y,\infty) = 0, \quad -\infty < x, y < \infty.$$

Указание. Искать решение в виде $u = \sin x \sin y f(z)$.
Ответ: $f(t) = e^{-t}(2-t) - 2e^{-\sqrt{2}t}$.

$$\text{б)} \quad \Delta u(x,y,z) = 0;$$
$$u(x,y,0) = \cos x \cos y, \quad u(x,y,\infty) = 0, \quad -\infty < x, y < \infty.$$

Указание. Искать решение в виде $u = \cos x \cos y f(z)$.
Ответ: $f(t) = e^{-\sqrt{2}t}$.

$$\text{в)} \quad \Delta u(x,y,z) = 0;$$
$$u(x,y,0) = \frac{x^2+y^2-8}{[4+x^2+y^2]^{-5/2}}, \quad -\infty < x, y < \infty.$$



Указание. Искать решение в виде $u = \frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{x^2+y^2+(z-2)^2}$.

2. Найти распределение потенциала внутри бесконечно длинного цилиндрического конденсатора, если внутренняя его обкладка (на расстоянии $a$ от оси) заряжена до потенциала $u_1$, а внешняя (расположенная на расстоянии $b$ от оси) – до потенциала $u_2$.

3. Найти распределение потенциала внутри сферического конденсатора, если внутренняя его обкладка (на расстоянии $a$ от оси) заряжена до потенциала $u_1$, а внешняя (расположенная на расстоянии $b$ от оси) - до потенциала $u_2$.

4. Одна грань прямоугольного параллелепипеда находится под потенциалом $V$, остальные грани заземлены. Найти распределение потенциала внутри параллелепипеда.

5. Найти распределение температуры в бесконечно длинном круглом цилиндре, если на его поверхности на единицу длины задан тепловой поток $Q = q(2\cos^2\phi - 1)$.

6. Найти распределение температуры в бесконечно длинном круглом цилиндре, если на его поверхности на единицу длины поддерживается температура $u = A\cos\phi + B\sin\phi$.

Указание. Общий вид решения уравнения Лапласа на плоскости имеет вид

$$\Delta u(r,\phi) = 0, \quad u(r,\phi) = a\ln(r/R) + b + \sum_{n=1}^{n=\infty}(A_n(r/R)^n + B_n(R/r)^n)\cos n\phi +$$
$$+(C_n(r/R)^n + D_n(R/r)^n)\sin n\phi.$$

7. Найти распределение потенциала внутри полого цилиндра радиусом $R$ и высотой $h$, оба основания которого заземлены, а боковая поверхность имеет потенциал $V$.

8. Найти стационарное распределение температуры внутри однородного шара, если на его поверхности поддерживается температура $u = A(\sin^2\theta + 2)$.

9. Найти распределение потенциала внутри сферического конденсатора $1 < r < 2$, если внутренняя и внешняя обкладки имеют потенциал соответственно $V_1 = \cos^2\theta, V_2 = (1+\cos^2\theta)/8$.

10. Решить задачу Неймана для уравнения Лапласа в шаровом слое $1 < r < 2$:

$$\Delta u = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{r=1} = P_2(\cos\theta);$$
$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{r=2} = P_3(\cos\theta),$$

$P_n(z)$ - полиномы Лежандра.

11. Решить краевую задачу в круге $0 < \rho < R, \quad 0 < \phi < 2\pi$:

$$\Delta u = x^2 + y^2, \quad u|_{\rho=R} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\rho=R} = 0.$$

Ответ: $u = \frac{1}{16}(x^4 - 1) - \frac{1}{4}\ln x, \quad x = \rho/R$.

12. Решить краевую задачу в круге $0 < \rho < R, \quad 0 < \phi < 2\pi$:

$$\Delta^2 u = x^2 + y^2, \quad u|_{\rho=R} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\rho=R} = 0.$$

Указание. Искать решение уравнения $[\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho\frac{d}{d\rho})]^2 u(\rho) = \rho^2$ в виде полинома шестой степени: $u = (x^6 - 6x + 5)/576$.

13. Решить краевую задачу в шаре $0 < \rho < R$:

$$\Delta^2 u = x^2 + y^2 + z^2, \quad u|_{\rho=R} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\rho=R} = 0.$$

Указание. Искать решение уравнения $[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2d}{dr}]^2 u(r) = r^2$ в виде полинома шестой степени.

14. Найти распределение температуры внутри шарового слоя $1 < r < 2$, если на внутренней поверхности поддерживается температура $u = A\sin(2\theta)\sin(2\phi)$, а на внешней поддерживается нулевая температура.

Указание. Решение представляется суммой слагаемых вида $(A_n r^n + B_n/r^{-n-1})Y_n(\theta,\phi)$; $Y_2 \sim \sin(2\theta)\sin(2\phi)$.

15. Решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = x^4 - y^4, \quad x^2 + y^2 < R^2; \quad u(x^2 + y^2 = R^2) = 0.$$

Указание. Перейти к полярным координатам. Решение искать в виде суммы частного и общего решения однородного уравнения. Угловая зависимость частного решения подбирается согласно граничному условию так же, как и у решения однородного уравнения.

16. Найти стационарное распределение концентрации неустойчивого газа внутри бесконечного кругового цилиндра, если на его поверхности концентрация поддерживается постоянной. Имеем краевую задачу

$$\Delta u - \chi^2 u = 0; \quad \chi^2 > 0; 0 < \rho < a; \quad 0 < \phi < 2\pi; u(a,\phi) = u_0.$$

17. Решить краевую задачу в нижней полуплоскости $y < 0$:

$$\Delta u = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y < 0.$$
$$u_{y=0} = \frac{2x}{x^2+1}.$$

Указание. Продифференцировать фундаментальное решение уравнения Лапласа для плоскости.

## 10.3 Задачи гиперболического типа

1. Описать поперечные колебания бесконечной струны, если начальное отклонение отсутствует, а начальная скорость $u_t(x,0) = xe^{-x^2}$.
Ответ: $u = (1/(2a))e^{-x^2-a^2t^2}\sinh(2xat)$.



2. Решить задачу Коши для бесконечной струны:

$$u_{tt} = u_{xx} + e^{-t}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = \cos x, \quad -\infty < x < \infty.$$

Указание. Решение представить как сумму решений однородного и частного, считая, что частное решение зависит только от времени.

3. Решить задачу для полубесконечной струны:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0;$$
$$u(0,t) = 0; \quad u(x,0) = f(x) = -xe^{-x^2}, \quad u_t(x,0) = g(x) = 0, \quad 0 < x < \infty.$$

Указание. Воспользоваться формулой Даламбера для полубесконечной оси

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(z)dz, \quad x > ct;$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) - f(-x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{-x+ct}^{x+ct} g(z)dz, \quad x < ct.$$

4. Описать колебания прямоугольной мембраны, закрепленной по контуру:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < p; \quad 0 < y < q, \quad t > 0,$$
$$u(x,y,0) = Axy(x - p(y-q), \quad u_t(x,y,0) = 0.$$

Указание. Применить метод разделения переменных, разложение в ряды Фурье.

5. Найти вид решений уравнения колебаний прямоугольной мембраны

$$u_{tt} = \Delta u, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0$$

для случая свободных границ, закрепленных и для смешанного случая. Найти спектр собственных частот. Определить случай вырождения.

Указание. Жесткому закреплению отвечает граничное условие вида $u|_\Gamma = 0$, где $\Gamma$ означает границу области. Случаю незакрепленной на границе мембраны соответствует $\frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = 0$, где $n$ - направление нормали к границе.

6. Исследовать форму линий узлов в случае вырождения по частоте колебаний для случая закрепленной по контуру мембраны, имеющей форму квадрата со стороной единичной длины, если в начальный момент отклонение от положения равновесия имело вид $u(x,y,t=0) = \sin(3\pi x)\sin(\pi y) + \sin(3\pi y)\sin(\pi x)$.

Указание - решить методом разделения переменных уравнение колебаний в декартовой системе координат. Исследовать уравнение $u(x,y,t=0) = 0$.

7. Решить систему телеграфных уравнений для участка электрической цепи $0 < x < l$ в случае отсутствия утечки $G = 0$:

$$-V_x = RI + LI_t; \quad -I_x = CV_t, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

при условиях

$$I(l,t)=0,\quad V(0,t)=E;\quad I(x,0)=0;\quad V(x,0)=0.$$

Указание. Применив дифференцирование, записать уравнение только для тока. Избавиться от первой производной. Применить метод разделения переменных.

8. Струна длиной $l$ расположена вдоль оси абсцисс и закреплена в начале координат. Другой ее конец свободен. Его отклонили на небольшое расстояние $h$, $h << l$, и отпустили без начальной скорости. Описать колебания струны в последующие моменты времени.

9. Методом подбора решить задачу Коши в трехмерном пространстве:

$$u_{tt}=8\Delta u+tx^2,\quad -\infty<x,y,z<\infty,\quad t>0,$$
$$u(x,y,z,0)=3y^2;\quad u_t(x,y,z)=2z^2.$$

Указание. Решение искать в виде $u(x,y,z,t)=3y^2+2tz^2+ct^3x^2+f(t)$.

10. Решить задачу о вынужденных колебаниях квадратной мембраны:

$$u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+3\sin t\sin x\cos y,\quad 0<x<\pi,\quad \pi/2<x<3\pi/2,\quad t>0.$$
$$u(x=0)=u(x=\pi)=u(y=\pi)=u(y=\pi)=0,$$
$$u(x,y,0)=0,\quad u_t(x,y,0)=0.$$

Указание. Искать решение в виде $u=A\sin x\cos y f(t)$ для $f(t)$, получить неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение, его решение искать в виде суммы частного решения и решения однородного уравнения.

11. Решить задачу для волнового уравнения в неограниченном цилиндре $-\infty<z<\infty$ радиуса $a$:

$$u_{tt}=\Delta u+J_0\left(\frac{\mu_1}{a}\rho\right),\quad 0<\rho<a,\quad t>0,$$
$$u(t=0,\rho)=0,\quad u_t(t=0,\rho)=0,\quad 0<\rho<a,\quad u(t,\rho=a)=0,$$

где $\mu_1, J_0(\mu_1)=0$ – первый корень функции Бесселя.

Указание. Решение искать как сумму решения уравнения без функции Бесселя в правой части и слагаемого, зависящего только от $\rho$-ой функции Бесселя.

12. Решить краевую задачу о вынужденных колебаниях мембраны:

$$u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+t\sin(4x)\cos(3y),\quad 0<x,\quad y<\pi,\quad t>0.$$
$$u_x(x=0)=u_x(x=\pi)=u_y(y=\pi)=u_y(y=\pi)=0,\quad t>0,$$
$$u(x,y,0)=0,\quad u_t(x,y,0)=0,\quad 0<x,\quad y<\pi.$$

Указание. Искать решение в виде $u(x,y,t)=f(t)\sin(4x)\cos(3y)$.



13. Решить краевую задачу о колебаниях балки, замурованной с обоих концов:

$$u_{tt}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0,\quad 0<x<l,\quad t>0,$$
$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0;\quad u_{xx}(0,t)=0,\quad u_{xx}(l,t)=0,\quad t>0$$
$$u(x,0)=0;\quad u_t(x,0)=\sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right).$$

Указание. Применить метод разделения переменных. Показать, что граничные условия запрещают решения с гиперболическими синусами и косинусами.

14. Описать затухающие колебания струны:

$$u_{tt}=a^2u_{xx}-bu_t,\quad 0<x<1,\quad t>0,$$
$$u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0,\quad t>0;\quad u(x,0)=x(1-x),\quad u_t(x,0)=0,\quad 0<x<1.$$

Для каких значений коэффициента $b$ задача имеет смысл?

15. Проверить, что если функции $f(x), u_0(x), u_1(x)$ гармонические, а функция $g(t)$ дифференцируемая, то решением задачи Коши

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x)g(t),\quad t>0,\quad x\in R,$$
$$u(t=0,x)=u_0(x),\quad u_t(t=0,x)=u_1(x),\quad x\in R,$$

является

$$u(t,x)=u_0(x)+tu_1(x)+f(x)\int_0^t(t-z)g(z)dz.$$

16. Решить методом разделения переменных краевую задачу:

$$u_{tt}=u_{xx}+2b,\quad 0<x<l,\quad t>0,$$
$$u(x=0,t)=u(x=l,t)=0,\quad t>0;\quad u(x,t=0)=0,\quad u_t(x,t=0)=0.$$

Указание. Искать решение в виде суммы двух слагаемых, одно из которых зависит только от $x$.

17. Решить задачу о вынужденных колебаниях струны, закрепленной на одном конце и подверженной на другом воздействию периодической вынуждающей силы $a\sin(\omega t)$. В начальном состоянии струна расположена по оси абсцисс и неподвижна (имеет нулевую начальную скорость):

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0<x<l,\quad t>0,$$
$$u(t=0,x)=u_t(t=0,x)=0;$$
$$u(x=0,t)=0,\quad u(x=l,t)=A\sin(\omega t).$$

Указание. Решение представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых представляем в виде $V(x,t) = f(x)\sin(\omega t)$, для другого - задача о свободных колебаниях с ненулевой начальной скоростью.

18. Решить краевую задачу

$$u_{tt} = \Delta u, \quad 0 < r < 1, \quad t > 0,$$
$$u(r=1,\phi,t) = 0, \quad t > 0; \quad u(r,\phi,0) = 0, \quad 5J_0(2,4r) - J_0(8,65r),$$
$$u_t(r,\phi,0) = 0, \quad 0 < r < 1,$$

найти наивысшую частоту колебаний. Указание: $J_0(2,4) = J_0(8,65) = 0$.

19. Решить краевую задачу:

$$u_{tt} = \Delta u, \quad 0 < r < 1, \quad t > 0,$$
$$u(r=1,\phi,t) = 0, \quad t > 0; \quad u(r,\phi,0) = J_0(2,4r), \quad u_t(r,\phi,0) = 0, \quad 0 < r < 1.$$

Построить график для функции $u(x,t)$ для фиксированного значения времени.

Указание. Первые три корня функции Бесселя с индексом ноль есть $2,40; 5,52; 8,65$.

## 10.4 Задачи параболического типа

1. Используя метод интегральных преобразований Фурье, найти решение задачи Коши

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$
$$u(x,0) = Ae^{-(x-1)^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

2. Методом подбора решить краевую задачу:

$$u_t = u_{xx} + u + 2\cos x, \quad 0 < x, \quad t < \infty;$$
$$u(0,t) = e^{-8t}; \quad u_x(0,t) = 0, \quad t > 0.$$

Указание. Решение искать в виде $u(x,t) = e^{-8t}g(x) + f(x)$.

3. Начальная температура в стержне единичной длины распределена по закону $u(x,0) = 2\sin(3\pi x) + 3\sin(8\pi x)$. Определить температуру $u(x,t)$ при $t > 0$, если концы стержня поддерживаются при нулевой температуре.

4. Начальное распределение температуры в стержне единичной длины имеет вид $u(x,0) = 2\cos(\pi x) + 5\cos(2\pi x)$. Определить температуру в последующие моменты времени, если поток тепла на концах стержня отсутствует.

5. Найти распределение температуры в квадратной пластинке со стороной единичной длины, если ее начальная температура была распределена следующим образом: $u(x,y,t=0) = \sin(\pi x)\sin(3\pi y)$, а ее граница поддерживается при нулевой температуре.



6. Найти распределение температуры в квадратной пластинке со стороной единичной длины, если ее начальная температура была распределена следующим образом: $u(x,y,t=0) = \cos(2\pi x)\cos(5\pi y)$, а ее граница теплоизолирована (тепловой поток равен нулю).

7. Решить задачу о распространении тепла в стержне с учетом утечки тепла через боковую поверхность на отрезке единичной длины:

$$u_t = u_{xx} - u, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0; \quad u(x,0) = \sin(3\pi x) + 5\sin(4\pi x), \quad 0 < x < 1.$$

Указание. Сначала освободиться от конвективного слагаемого в правой части с помощью замены $u = e^{-t}W$.

8. Решить задачу о конвективной диффузии на отрезке единичной длины:

$$u_t = u_{xx} - u_x, \quad 0 < x < 1; \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t > 0; \quad u(x,0) = e^{x/2}\sin(\pi x).$$

Указание. Свести задачу к однородной, используя замену $u = We^{ax+bt}$.

9. Найти распределение температуры в стержне единичной длины с теплоизолированной боковой поверхностью, если на его конце $x = 1$ поддерживается нулевая температура, а на другом конце - температура $u(0,t) = At$. Начальная температура стержня нулевая. Указание. Решение представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых $At(1-x)$ удовлетворяет граничным условиям, а другое - нулевым.

10. Найти распределение температуры внутри неограниченного кругового цилиндра радиуса $R$, если на поверхности поддерживается нулевая температура, а в начальный момент $u(\rho, t=0) = AJ_0(\mu_k\rho/R)$, $\mu_k$, $J_0(\mu_k) = 0$ - $k$-й корень функции Бесселя.

11. Решить краевую задачу методом разложения по собственным функциям:

$$u_t = a^2 u_{xx} + \sin(3\pi x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, t > 0; \quad u(x,0) = \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1.$$

Указание. Воспользоваться общим видом решения, удовлетворяющим граничным и начальным условиям, а также виду вынуждающей силы $u(x,t) = T_1(t)\sin(\pi x) + T_2(t)\sin(3\pi x)$. Решить обыкновенные уравнения для $T_{1,3}$.

12. Решить краевую задачу методом разложения по собственным функциям:

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 1, \quad t > 0; u(x,0) = x^2, \quad 0 < x < 1.$$

Указание. Представить решение в виде суммы известной функции $S(x,t) = x$, удовлетворяющей граничным условиям, и функции $W(x,t)$, удовлетворяющей нулевым граничным условиям. Для этой второй функции имеем краевую задачу

$$W_t = W_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0; \quad W(0,t) = W(1,t) = 0;$$
$$t > 0; \quad W(x,0) = x^2 - x.$$

13. Найти распределение температуры в тонком однородном стержне длиной $l$, если концы и боковая поверхность теплоизолированы, а начальное распределение температуры таково: $u(t=0,x) = u_0, \quad 0 < x < l/2; \quad u(t=0,x) = 0, \quad l/2 < x < l$. Исследовать распределение при больших временах $t \to \infty$.

Указание. Разделить переменные в краевой задаче $u_t = a^2 u_{xx}, \quad u_x(x=0) = u_x(x=l) = 0$. Из начальных условий найти коэффициенты $u = c_0 + \sum c_k \cos(\lambda_k x) e^{-t(a\lambda_k)^2}$.

14. Методом сведения неоднородных граничных условий к однородным решить краевую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$$
$$u(0,t) = k_1, \quad u(l,t) = k_2, \quad t > 0; \quad u(x,0) = \phi(x),$$

где $k_{1,2}, \quad \phi(x)$ - соответственно постоянные и известная функция.

15. Решить краевую задачу с граничными условиями третьего типа:

$$u_t = a^2 u_{xx} + x\cos t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$
$$u(0,t) = 1, \quad u_x(l,t) + hu(1,t) = 1, \quad t > 0; \quad u(x,0) = x^2.$$

Указание. Такое же, как к задаче 12. Свести граничные условия к однородным. Воспользоваться теоремой Штурма - Лиувилля.

16. Решить, пользуясь формулой Пуассона, краевую задачу для плоскости $u_t = \Delta u + e^t, \quad t > 0, \quad u(t=0) = \cos x \sin y$.

Указание. Использовать метод подбора или использовать формулу Пуассона для краевой задачи.

17. Решить, пользуясь формулой Пуассона, краевую задачу для плоскости $u_t = \Delta u + \sin t \sin x \sin y, \quad t > 0, \quad u(t=0) = 1$.

Указание то же, что и к задаче 16.

18. Решить, пользуясь формулой Пуассона, краевую задачу для пространства $u_t = 2\Delta u + t\cos x, \quad t > 0, \quad u(t=0) = \cos y \cos z$.

Указание то же, что и к задаче 16.

19. Решить, пользуясь формулой Пуассона, краевую задачу для пространства $u_t = 3\Delta u + e^t, \quad t > 0, \quad u(t=0) = \sin(x-y-z)$.

Указание. Использовать метод подбора либо воспользоваться формулой Пуассона для решения краевой задачи

$$u_t = a^2 \Delta u + f(x,t), \quad x \in R_n, \quad t > 0;$$
$$u(t=0) = u_0(x), \quad x \in R_n$$



в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{R_n} dz u_0(z) e^{-\frac{|x-z|^2}{4a^2 t}} + \int_0^t d\tau \int_{R_n} \frac{dz f(z,\tau)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n} e^{-\frac{|x-z|^2}{4a^2 t}}.$$

20. Методом подбора решить краевую задачу

$$u_{tt} = \Delta u + te^{5x}\sin(3x)\cos(4y), \quad x,y,z < 0, \quad t > 0;$$
$$u(0,x,y,z) = e^{12x+5y}\cos(13z); \quad u_t(0,x,y,z) = e^{12x+5y}\cos(13z).$$

Указание. Числа $3,4,5; 5,12,13$ – пифагоровы. Решение искать в виде суммы частного и общего решений.

При составлении этих вариантов задач мы пользовались источниками [4-7,16,21].

# ЛИТЕРАТУРА

1. Кноппельфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. М.: ИЛ, 1963.
2. Кошляков Н.С. Основные дифференциальные уравнения математической физики. Л.; М.: Гостехиздат, 1936.
3. Будак Б. М., Самарский Ф. Ф., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1980.
4. Фарлоу С. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1985.
5. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1982.
6. Колоколов И.В. и др. Задачи по математическим методам физики. Новосибирск, 2000.
7. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. М.: Наука, 1973.
8. Уизни Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
9. Кунин И. Теория упругих сред с микроструктурой. М., 1975. Гл. 5.
10. Додд Р. и др. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. Гл. 6.
11. Бхатнагар П. Нелинейные волны в дисперсионных системах. М.: Мир, 1983.
12. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
13. Сборник задач по математике для втузов /Под ред. А.В. Ефимова. т. 4. М.: Наука, 1990.
14. Сборник задач по математике для втузов /Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. Т.2.М.: Наука, 1986.



15. Волков Е.А. Численные методы. Л.: Наука, 1982.
16. Смирнов М.М. Задачник по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1968.
17. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. 2-е изд. Л.; М.: Гостехиздат, 1951. Т. 1,2.
18. Мышкис А.Д. Математика для технических вузов. 2-е изд. СПб.: Лань, 2002.
19. Ablowitz M.J. and Clarkson P.A. Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.
20. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М.: Наука, 1958 Т. 2; Т. 4.
21. Пикулин В.П., Похожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики. М.: МЦНМО, 2004.

80 р.

Учебное издание

**Кураев** Эдуард Алексеевич,
**Бакмаев** Сабир Магомед-Кадиевич,
**Ракитянский** Александр Александрович
и др.

**Уравнения в частных производных
и методы математической физики**

Редактор *А. Н. Шабашова*

Получено 27.12.2004. Подписано в печать 22.06.2005.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 7,25. Уч.-изд. л. 8,3. Тираж 200 экз.
Заказ № 54929.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@pds.jinr.ru
www.jinr.ru/publish/