Учебно-методические пособия Учебно-научного центра ОИЯИ
Дубна

УНЦ-2004-25

В. В. Папоян

ВВЕДЕНИЕ В ВЕКТОРНЫЙ И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

2004

Учебно-научный центр ОИЯИ

В. В. Папоян

ВВЕДЕНИЕ В ВЕКТОРНЫЙ И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

Учебно-методическое пособие

Дубна 2004

П17

Папоян В. В.

П17 Введение в векторный и тензорный анализ: Учеб.-метод. пособие. — Дубна: ОИЯИ, 2004. — 94 с.

Настоящее пособие посвящено изложению курса лекций «Векторный и тензорный анализ», который в течение ряда лет читается студентам второго курса физического факультета Ереванского государственного университета. Программа курса вполне соответствует его вспомогательной роли — он служит введением, способствующим лучшему усвоению математических методов классической механики, электродинамики, гидродинамики и т. п. Изложение ведется на доступном для студентов второго курса уровне; в тех случаях, когда это не приводит к дополнительным трудностям, используется современный математический язык. Основное внимание уделяется выработке вычислительных навыков, поэтому некоторые утверждения приводятся без доказательств.

Papoyan V. V.

Introduction to Vector and Tensor Analysis: Textbook. — Dubna: JINR, 2004. — 94 p.

The present manual is the reproduction of the course of lectures «Vector ans Tensor Analysis», which has been delivered at the Physics Faculty of Yerevan State University over a period of years. The programme of the course totally conforms to its subsidiary role — it serves as an introduction contributing to the better assimilation of mathematical methods of classical mechanics, electrodynamics, hydrodynamics, etc. The presentation is simple for the second-year students; present-day mathematical terms are used in case this does not lead to supplementary difficulties. The main attention is paid to the practice of computational skills; therefore, some statements are given without proofs.

Предисловие

Настоящие лекции - последний труд Владимира Владимировича Папояна, талантливого ученого, педагога, благородного и принципиального человека. Коварная болезнь не сломила его дух и волю – он продолжал свою творческую и педагогическую деятельность до последних дней своей жизни. Редакция этих лекций была завершена им буквально за неделю до ухода из жизни 6 мая 2004 года.

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Ереванского государственного университета, член Ученого совета Объединенного института ядерных исследований Владимир Владимирович Папоян многое сделал для развития сотрудничества между научными центрами Армении и России, постоянно способствовал воспитанию молодых научных кадров.

Владимир Владимирович являлся крупным специалистом по теории гравитации, космологии и физике нейтронных звезд, широкое признание получили найденные им новые точные решения уравнений Эйнштейна. В. В. Папоян - автор более 130 научных трудов, а итогом его многолетней педагогической деятельности стали 6 учебных пособий, а также эти лекции по основам векторного и тензорного анализа. В качестве эпиграфа к одному из учебников Владимир Владимирович взял выразительное высказывание Альберта Эйнштейна: "Целью всей деятельности интеллекта является превращение некоторого чуда в нечто постигаемое". И сам он в своей педагогической и научной работе неизменно следовал этому принципу. Книга и человек схожи - трудам Владимира Владимировича присущи высокий научный уровень, преподавательская культура, доступность изложения и лаконичность...

Профессор А. Н. Сисакян,
вице-директор ОИЯИ,
директор Лаборатории теоретической
физики им. Н. Н. Боголюбова

Введение

Геометрия возникла как экспериментальная наука в связи с практической деятельностью древних (постройка пирамид, землемерие и т.п.). Евклид дал геометрии аксиоматику, превратив ее в объект чистого мышления, что в будущем позволило Канту приписать понятиям и постулатам евклидовой геометрии априорный смысл. Античные и средневековые натурфилософы (Птолемей, Коперник, Галилей, Кеплер) предпочитали использовать геометрические методы. Однако со времен Декарта, который ввел понятие координат, геометрия стала рассматриваться как приложение алгебры. С того времени в подготовке математиков-прикладников и особенно физиков геометрии отводилась второстепенная роль. Причины такого подхода, возможно, кроются в глубокой убежденности физиков XIX и начала XX века в том, что законы природы должны быть сформулированы в форме, которая позволяет представить их в виде дифференциальных уравнений, поэтому усилия в основном были направлены на изучение огромного разнообразия аналитических методов решения этих уравнений.

Два достижения науки XX столетия вынудили изменить скептический взгляд на соотношение "анализ – геометрия". Это эйнштейновские специальная и общая теории относительности, которые наглядно демонстрируют, что адекватная ньютоновским воззрениям евклидова геометрия является лишь приближением к правильному описанию физической картины мира, и работы Картана, которые позволили осознать, что соотношение "геометрия – анализ" двустороннее: с одной стороны, анализ может служить основанием при изучении геометрии, а с другой стороны, геометрия естественным образом приводит к развитию аналитических методов и понятий (векторы как дифференцирование, многообразия, дифференциальные формы, расслоения и т.п.). В настоящее время геометрические методы играют все более и более существенную роль в теоретической физике как в смысле упрощения математического формализма, так и в смысле углубления восприятия физических явлений. Это возрождение геометрии сказывается не только на геометризованной по своей сути теории гравитации, но и на других разделах физики (термодинамика, гамильтонов формализм, супергравитация и т. п.), которые используют геометрию абстрактных пространств, а не геометрию физического пространства-времени.

Геометрия, с которой мы привыкли иметь дело, – это так называемая "внутренняя" геометрия, иначе говоря, это геометрия, содержание которой не зависит от выбора тех или иных координат. В частности, внутренняя геометрия плоскости не зависит от того, каким образом в ней проведены координатные линии, совершенно несущественно, являются ли они криволинейными или декартовыми. Вообще говоря, внутреннюю геометрию пространства с соответствующими геометрическими объектами можно сформулировать, не пользуясь понятием координат. Такой подход априори ковариантен (см. ниже), однако практически неудобен, поэтому вводят координаты, сопоставляя каждой точке пространства некоторое число. При этом интуитивно ясно, что координатная система – это вспомогательное средство, выбор которого в лучшем случае упрощает вычисления, но результаты вычислений не должны зависеть от того, в каких координатах они выполнены.

Ф. Клейн, а вслед за ним и А. Эйнштейн исходили из доминирующего сейчас убеждения, что каждой физической величине должен быть сопоставлен соответствующий геометрический объект, а законы физики должны быть представлены в виде уравнений, содержание которых составляют определенные геометрические утверждения относительно этих объектов. Физические явления не зависят от способа описания, поэтому выбор координат не может влиять на содержание физического закона, и, следовательно, *уравнения, отражающие содержание физической закономерности, записанные в виде соотношений между геометрическими объектами, при преобразованиях координат не должны менять свой вид, иначе говоря, во всех допустимых системах координат форма этих уравнений должна быть одной и той же.* Выделенное курсивом составляет содержание **принципа ковариантности**, который используется в дальнейшем в качестве одного из основных допущений.

В настоящем пособии изложены основы векторного и тензорного анализа в необходимом студентам-физикам объеме. По мере возможности материал преподносится в доступной форме, что в некоторых случаях приводит к пренебрежению математической строгостью.

I Основные понятия и определения

1. **Координаты. Допустимые системы координат.** Каждому физическому событию в математической модели реального мира, в рассматриваемом классической физикой приближении, сопоставляется точка *арифметического пространства* R^n (обычно $n = 3$ или 4).

   - Множество всех упорядоченных наборов из n действительных чисел

$$\{x^i\} = \{x^1, x^2, ..., x^n\}$$

назовем **арифметическим пространством** n измерений R^n. Говорят, что множество точек S пространства R^n открыто, если каждая точка этого множества имеет окрестность, целиком содержащуюся в S. Простой пример открытого множества в пространстве $R = R^1$ – множество всех x, для которых $a < x < b$. Таким образом, любой "кусок" пространства R^n будет открытым, если в этот "кусок" не включена его граница.

Взаимно-однозначное соответствие подмножества физических событий с неким открытым множеством из R^n вполне оправдано в границах применимости классической физики, и установить его – значит задать *систему координат* (СК). Подчеркнем, что нет необходимости и оснований требовать наличия глобальной СК для всего физического мира, так же как и требовать физической значимости всех точек арифметического n-пространства. Достаточно говорить о соответствии подмножеств.

Вопрос о том, как задать СК, никак не математический, а, несомненно, физический. Если каким-либо способом задана одна СК $[x^i]$, то, определяя n функций $F^k(x^i)$, можно перейти к другой нумерации точек, т.е. к другой СК $\acute{x}^k = F^k(x^i) = \acute{x}^k(x^i)$. Однако из всех возможных СК, которые получаются таким преобразованием, в физике используются только *допустимые* СК. *Совокупность СК, которые получены из физически заданной СК посредством всевозможных* **взаимно-однозначных** *преобразований*

$$\acute{x}^i = \acute{x}^i(x^k)$$

с отличным от нуля якобианом, *назовем множеством* **допустимых СК.** Преобразования с якобианом, равным нулю, называют *вырожденными* или *сингулярными*.

- **Справка.** Матрица

$$X^i_k = \begin{pmatrix} \partial\acute{x}^1/\partial x^1 & \partial\acute{x}^1/\partial x^2 & ... & \partial\acute{x}^1/\partial x^n \\ \partial\acute{x}^2/\partial x^1 & \partial\acute{x}^2/\partial x^2 & ... & \partial\acute{x}^2/\partial x^n \\ ... & ... & ... & ... \\ \partial\acute{x}^n/\partial x^1 & \partial\acute{x}^n/\partial x^2 & ... & \partial\acute{x}^n/\partial x^n \end{pmatrix} \qquad (1)$$

называется **якобиевой матрицей** преобразования

$$\acute{x}^i = \acute{x}^i(x^k), \qquad i, k = 1, 2, ...n,$$

а ее определитель $\det X^i_k$ – **якобианом** этого преобразования.

Поясним понятие "допустимые СК" на простом примере. Преобразуем исходную СК к новой с координатами $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y, \quad \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y. \qquad (2)$$

Предположим, что преобразование задано и имеет вид $u = x$, $v = 1$, тогда точкам $x = 1$, $y = 2$ и $x = 1$, $y = 3$ в новой СК соответствует одна и та же точка $u = 1$, $v = 1$, т.е. в результате преобразования пара точек (x, y) вырождается в одну. Такое преобразование не является допустимым. Согласно определению преобразование будет допустимым, если каждой точке x, y соответствует только одна точка u, v в новой СК, а это означает, что $\Delta u = \Delta v = 0$, только если $\Delta x = \Delta y = 0$, что, как видно из (2), возможно при условии

$$\begin{Vmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{Vmatrix} \neq 0.$$

Итак, каждой точке некоторого пространства сопоставляется упорядоченный набор чисел $x^k (k = 1...n)$ – **координат.** Разным точкам соответствуют разные наборы, совпадающие только в случае совпадения точек. Число координат n определяется **размерностью пространства.** Если с какой-либо точкой пространства, например P, связана совокупность чисел x^i, то с этой же точкой можно связать иную совокупность $\acute{x}^k$. Поскольку обе совокупности относятся к одной и той же точке, то между ними должно существовать функциональное соотношение

$$P \leftrightarrow (x^i); \quad P \leftrightarrow (\acute{x}^k) \Rightarrow x^i = x^i(\acute{x}^k),$$

которое называют **преобразованием координат** (или **отображением**).

Если координаты наделены специальными свойствами, то эти свойства определяют тип пространства. Например, если

(a) каждой точке соответствуют три координаты (x^1, x^2, x^3),

(b) расстояние между точками $P(x^1, x^2, x^3)$ и $Q(y^1, y^2, y^3)$ есть

$$l^2 = (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2,$$

то пространство называется трехмерным **декартовым,** а координаты – декартовыми.

2. **Отображение.** Операция (правило) f, которая всякому элементу одного множества ставит в соответствие *единственный* элемент того же или другого множества, называется **отображением** (см. рис. 1). Высказывание "элемент $f(a)$ множества B получается из элемента a множества A в результате отображения f" можно записать компактно:

$$f : A \to B;\ a \mapsto f(a),\ a \in A,\ f(a) \in B.$$

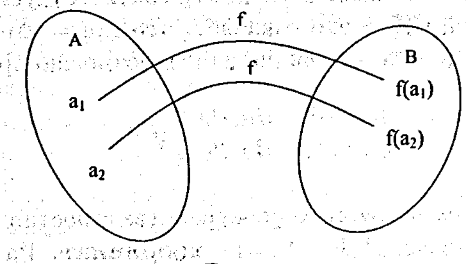

Рис. 1

Отображение дает единственное $f(x)$ для каждого x, но вовсе не обязательно, чтобы каждому $f(x)$ отвечало единственное x. Если f отображает A в B, то для любого подмножества $S \subset A$ элементы из B, в которые отображаются точки из S, образуют множество T, которое называют множеством образов, и наоборот, множество S, состоящее из всех элементов, отображающихся в T, называется множеством прообразов T и обозначается $f^{-1}(T)$. Если каждая точка из $f(S)$ имеет одноточечный прообраз в S, то говорят, что отображение взаимно-однозначно (или является $1-1$ отображением). Примеры:

(a) Отображение g, состоящее в удвоении чисел на оси x, $g : R \to R;\ x \mapsto 2x$.

(b) Обычная вещественнозначная функция $f : R \to R;\ x \mapsto f(x)$. Такая функция сопоставляет точке $x \in R$ точку $f(x)$ из того же R (это лишний раз подчеркивает, что множества A и B не обязательно разные). Такое отображение представлено на рис. 2, на котором каждому $x \in R$ соответствует единственный элемент $f(x)$, но x^1 и x^2 отображаются в одно и то же значение $f(x)$.

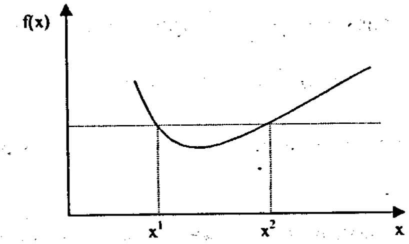

Рис. 2

(c) Поворот сферы вокруг оси, проходящей через ее центр: точка сферы отображается в другую точку на той же сфере, находящуюся от нее на фиксированном угловом расстоянии по отношению к оси вращения.

(d) Хорошим примером $1-1$ (взаимно-однозначного) отображения является географическая карта местности – точка поверхности Земли отображается в точку на листе бумаги.

Если имеется два отображения $f : A \to B$ и $g : B \to D$, то определено отображение, которое называют **композицией** $g \circ f$, отображающее A в D ($g \circ f : A \to D$). Построение такой композиции очевидно: отобразив точку x из A в B, находим $f(x)$, затем отображаем $f(x)$ по правилу g в D – $(g \circ f)x = g(f(x))$.

Замечание. В общем случае говорят об отображении из **А в В**. Если же каждая точка из B имеет прообраз в A, то говорят об отображении из **А на В** (на рис. 1 $a \in A$ является прообразом $f(a) \in B$).

3. **Группы преобразований. Примеры.** Преобразование некоего множества X – это взаимно-однозначное отображение $f : X \to X$ этого множества в себя, что подразумевает существование тождественного преобразования $e \cdot x = x$, обратного преобразования $f^{-1} : X \to X$, причем

$$f \cdot f^{-1} = f^{-1} \cdot f = e,$$

где $f \cdot g$ – последовательно выполненные отображения:

$$(f \cdot g)x = f \cdot (g \cdot x), \qquad x \in X.$$

Совокупность G преобразований множества X называют **группой преобразований**, если G содержит

- тождественное преобразование e,
- вместе с преобразованием $g \in G$ обратное $g^{-1} \in G$, причем

$$g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e,$$

- вместе с преобразованиями $g_1, g_2 \in G$ и их композицию $g_1 \circ g_2 \in G$.

Преобразования, сохраняющие расстояние $l(x_1, x_2)$ между двумя точками пространства $l(g(x_1), g(x_2)) = l(x_1, x_2)$, образуют **группу движений** этого пространства. Группу тех или иных преобразований, не изменяющих некий объект или какие-либо его свойства, обычно интерпретируют как совокупность симметрий этого объекта. Понятию "симметрия" можно приписать "измеримость", что легко продемонстрировать на простом примере: покажем, что равнобедренный треугольник "симметричнее" неравнобедренного, а равносторонний – "симметричнее" равнобедренного, оценив их симметрию числом перемещений, переводящих треугольник в себя. Такие перемещения состоят из

- *одного* тождественного преобразования для неравнобедренного треугольника;
- из *двух* преобразований – тождественного и отражения относительно оси симметрии для равнобедренного треугольника;
- из *шести* преобразований – тождественного, отражений относительно трех осей симметрии, поворотов на 120^o и 240^o для равностороннего треугольника.

Симметрию принято приписывать и аналитическим выражениям. В частности, говорят, что некоторый объект f, заданный на множестве X, симметричен относительно преобразований X, если это преобразование не меняет f. Группу таких преобразований называют **группой симметрий**. Для современной физики важнейшей характеристикой является симметрия физических законов, что означает наличие преобразований, образующих группу симметрий, относительно которых не изменяется математическая формулировка этих законов.

4. **Соглашение о суммировании.** В дальнейшем будет использовано удобное соглашение, которое известно как *эйнштейновское соглашение о суммировании: если какое-либо выражение содержит один верхний и одноименный нижний индекс, то по этим индексам предполагается суммирование*:

$$A^iB_i \equiv \sum_i A^iB_i, \quad T^{mn}E_{mn} \equiv \sum_{m,n} T^{mn}E_{mn}.$$

Индекс суммирования можно переименовывать, т.е. вместо буквы, обозначающей индексы суммирования, использовать любую другую:

$$A^iB_i = A^kB_k = A^lB_l,$$

такие индексы называют немыми. Надо заметить, что

$$A^i_kB^k \neq A^i_\alpha B^\alpha,$$

если α пробегает меньше значений, чем i, например, если $i = 1, 2, 3$, $\alpha = 2, 3$, то ясно, что

$$A^i_kB^k = A^i_1B^1 + A^i_\alpha B^\alpha.$$

Уравнение типа $A^i = B^i_kD^k$ в действительности представляет три (в трехмерном пространстве или n в n-мерном пространстве) разных уравнения для каждого значения индекса i. Индекс i называют свободным индексом. Понятно, что обозначить его можно любой буквой, пробегающей столько же значений, но важно заметить, что переобозначать его надо во всех частях равенства:

$$A^i = B^i_kD^k \iff A^n = B^n_kD^k.$$

5. **Классификация преобразований.** В физических приложениях чаще всего встречаются *линейные преобразования*

$$x^i = A^i_k\acute{x}^k, \quad \text{где} \quad A^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^k} = const.$$

Разумеется, рассматриваются допустимые преобразования, т.е. преобразования с $\det A^i_k \neq 0$, а это означает существование матрицы $\hat{B} = \hat{A}^{-1}$ обратного преобразования

$$\acute{x}^i = B^i_kx^k, \quad \text{причем} \quad A^i_kB^k_l = \delta^i_l.$$

Линейные преобразования наиобщего вида

$$x^i = A^i_k\acute{x}^k + A^i, \qquad \acute{x}^i = B^i_kx^k + B^i,$$

где, помимо A^i_k и B^i_k, постоянны также A^i и B^i, называются **аффинными.** Они взаимообратны при условиях

$$A^i_k B^k_l = \delta^i_l, \quad A^i = -A^i_k B^k, \quad B^i = -B^i_k A^k.$$

Принята следующая классификация аффинных преобразований.

(a) **Центроаффинные преобразования**

$$A^i = 0, \qquad B^i = 0.$$

(b) **Эквиаффинные преобразования**

$$\det(A^i_k) = \pm 1.$$

(c) **Унимодулярные преобразования**

$$\det(A^i_k) = 1.$$

(d) **Преобразования трансляций**

$$A^i_k = \delta^i_k, \qquad B^i_k = \delta^i_k.$$

(e) **Ортогональные преобразования.** Аффинные преобразования

$$x^i = A^i_k \acute{x}^k, \qquad \acute{x}^i = B^i_k x^k,$$

сохраняющие расстояние между двумя точками. Условие ортогональности преобразования следует из определения:

$$x^i x_i = A^i_l \acute{x}^l A^m_i \acute{x}_m = \acute{x}^m \acute{x}_m, \quad \text{если} \quad A^i_l A^m_i = \delta^m_l \Longrightarrow \hat{A}^T \cdot \hat{A} = \hat{I}.$$

Последнее соотношение и есть условие ортогональности, помножив его слева на A^{-1}, получим эквивалентное условие

$$\hat{A}^T = \hat{A}^{-1}, \text{ где } \hat{A}^T \text{ – транспонированная матрица.}$$

Ортогональные преобразования образуют группу симметрий заданной в трехмерном пространстве функции $f(x^2 + y^2 + z^2)$, что непосредственно следует из их определения. Отметим, что иногда матрицу ортогонального преобразования называют просто **ортогональной матрицей.**

Примеры:

- Матрицы

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

описывают преобразование

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \hat{x}' = \hat{I}\hat{x}, \qquad \hat{x}' = \hat{C}\hat{x},$$

которое называют **преобразованием инверсии.** Легко проверить, что матрицы $\hat{I}$ и $\hat{C}$ образуют группу, причем

$$\det \hat{C} = -1, \qquad \hat{C}^{-1} = \hat{C}.$$

- Набор матриц

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \phi \le 2\pi,$$

образует группу, параметризуемую углом ϕ, причем единичному элементу соответствует $\phi = 0$, $\det \hat{A} = 1$ и

$$\hat{A} = \hat{A}^{-1}, \quad \text{т.е.} \quad \hat{A} \cdot \hat{A}^T = \hat{I},$$

а это означает, что матрицы $\hat{A}$ представляют частный случай ортогональных преобразований. Легко убедиться, что преобразование

$$\hat{x}' = \hat{A}\hat{x}$$

описывает поворот исходной системы координат на угол ϕ вокруг оси z.

- Рассмотренные в предыдущем примере преобразования образуют подгруппу общей группы преобразований

$$\hat{x}' = \hat{A}_{\phi_1} \hat{A}_\theta \hat{A}_{\phi_2} \hat{x},$$

которая называется собственной группой ортогональных преобразований или **группой вращений.** Матрицы $\hat{A}_{\phi_1}$ и $\hat{A}_{\phi_2}$

имеют такой же вид, что и матрица $\hat{A}$ предыдущего примера, с заменой ϕ на ϕ_1 и ϕ_2 соответственно, а

$$\hat{A}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \theta \le \pi.$$

Найдите самостоятельно элементы матрицы $\hat{A} = \hat{A}_{\phi_1}\hat{A}_\theta\hat{A}_{\phi_2}$, ее детерминант и след. Докажите, что эта матрица – матрица ортогональных преобразований.

- **Справка.** Подгруппой N группы M назовем подмножество элементов группы M, которые образуют группу относительно групповой операции, установленной в M.

6. **Группы.** Данное выше определение группы преобразований поддается обобщению на произвольные множества: *множество элементов M образует группу, если в M определена групповая операция, которая каждой паре элементов $a, b \in M$ ставит в соответствие элемент $c \in M$:*

$$M \to M; \; (a, b) \mapsto c = a * b$$

так, чтобы были выполнены следующие аксиомы:

(a) ассоциативность:

$$(a * b) * c = a * (b * c);$$

(b) существование единичного элемента: для $\forall a \in M \exists e$ – левая единица, такая, что

$$e * a = a;$$

(c) существование обратного элемента: для $\forall a \in M \exists a^{-1}$ – левый обратный элемент, такой, что

$$a^{-1} * a = e.$$

Значок " $*$ " символизирует групповую операцию, которая может быть сложением, умножением или любой другой бинарной операцией. Некоторое множество может быть группой относительно одной групповой операции и не может быть таковой относительно другой групповой операции, иными словами, групповая операция определяет признак группы.

Если групповая операция обладает свойством

$$a * b = b * a,$$

то группа называется **коммутативной или абелевой.**

Примеры:

(a) Множество действительных чисел образует абелеву группу относительно сложения с единичным элементом 0 и обратным к n элементом " $-n$".

(b) Квадратные невырожденные (с определителем, не равным нулю) матрицы образуют неабелеву группу. Групповая операция - умножение матриц, единичный элемент – единичная матрица, обратный элемент – обратная матрица.

7. **Линейное пространство.** Линейным (векторным) пространством V над полем H действительных (или комплексных) чисел называется множество, снабженное внутренней бинарной операцией

$$(a, b) \mapsto a + b,$$

относительно которой это множество образует абелеву группу с единичным элементом 0, обратным к a элементом " $-a$" и внешней бинарной операцией

$$(k, a) \mapsto ka, \quad a, b \in V, \quad k \in H,$$

если удовлетворены следующие аксиомы:

(a) умножение $a \in V$ на элементы поля H **унитарно:**

$$1 * a = a$$

и ассоциативно:

$$n(ma) = (nm)a; \quad \forall n, m \in H;$$

(b) сложение и умножение связаны законом **дистрибутивности:**

$$n(a_1 + a_2) = na_1 + na_2; \quad (n_1 + n_2)a = n_1 a + n_2 a.$$

Примеры:

(a) Множество всех векторов на плоскости или в 3-мерном пространстве.

(b) Множество всех вещественных непрерывных функций $f(x)$, определенных на интервале $a \leq x \leq b$.

(c) Множество всех квадратных матриц, причем внутренняя операция – это покомпонентное сложение, а внешняя – покомпонентное умножение на число.

(d) **Нуль-мерное пространство:** множество, состоящее из одного элемента $V = [0]$.

8. **Линейные операторы.** Пусть A и B – линейные пространства. Говорят, что на множестве $\Re \subset A$ задан **оператор** $\hat{f}$, действующий из $\Re$ в B (со значениями в B), если $\forall a \in \Re$ поставлен в соответствие элемент $b = \hat{f}(a) \in B$.

Множество $\Re$ называется **областью определения** $\hat{f}$, а совокупность всех элементов b называется **областью значений** $\hat{f}$ и обозначается $\Re_1(\Re) \subseteq B$.

Если $\Re$ – линейное пространство и для любых $a_1, a_2 \in \Re$ и для действительных (или комплексных) чисел $\alpha_1, \alpha_2 \in H$

$$\hat{f}(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) = \alpha_1 \hat{f}(a_1) + \alpha_2 \hat{f}(a_2),$$

то оператор называется **линейным**, причем

$$\hat{f}(a) = \hat{f} \cdot a.$$

Если область значений оператора $\hat{f}$ – числовая ось, то $\hat{f}$ – **функционал**, а если при этом числовым множеством является также и область его определения, то оператор $\hat{f}$ – **функция**, в частности, если A – множество всевозможных наборов из n чисел $(\alpha_1, ...\alpha_n\ )$ из множества R^n, то $\hat{f}$ есть **функция** n **переменных**.

9. **Векторы. Ознакомительный экскурс.** Знакомство с понятием "вектор" начнем, не выходя за рамки привычных декартовых координат евклидова пространства. Типичным вектором является перемещение от одной точки к другой с компонентами, равными разности координат этих точек:

$$\Delta\vec{x} \longrightarrow \{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}. \tag{3}$$

Стрелка над буквой обозначает вектор, подчеркивая отличие $\vec{x}$ от координаты x. Стрелка после $\Delta\vec{x}$ означает "имеет компоненты". В дальнейшем будет использовано соответствие

$$x^i = \{x^1, x^2, x^3\} = \{x, y, z\}$$

(для пространства размерностью $n > 3, i = 1, ..., n$.) Отметим разницу между вектором и его компонентами: компоненты вектора координатно-зависимы, в то время как вектор – стрелка, соединяющая две точки, – при трансляциях или поворотах системы координат не меняется.

В трактовке (3) вектор – билокальный объект, стрелка, направленная от точки A к точке B:

$$\vec{a}_{AB} = B - A.$$

Существует альтернативный способ задания вектора: представим стрелку в виде параметризованной линии $P(\lambda) = A + \lambda(B - A)$, причем $\lambda = 0$ соответствует основанию стрелки, а $\lambda = 1$ – ее острию. Производная от этого выражения

$$\frac{d}{d\lambda}[A + \lambda(B - A)] = B - A = P(1) - P(0) = \vec{a}_{AB}.$$

В такой трактовке вектор

$$\vec{a} = \frac{dP}{d\lambda}$$

– локальный объект и является касательной к линии $P(\lambda)$.

- **Пример.** Пусть $P(t)$ – линия, по которой движется свободная частица, t – время, параметризующее траекторию движения. Перемещение за 1 секунду дает стрелку $\vec{v} = P(1) - P(0)$, которая в точности совпадает со скоростью частицы при равномерном движении. Если же записать $\vec{v}$ как производную $\vec{v} = dP/dt$, то и это выражение определяет скорость с той существенной разницей, что оно применимо также для ускоренного движения.

Поскольку скорость частицы не зависит от выбора координат, то, обобщая, можно утверждать, что вектор – геометрический объект, не зависящий от выбора координат. Координаты вводят для определения компонент вектора, когда возникает необходимость конкретных расчетов.

Если в какой-либо координатной системе $\Delta\vec{x} \longrightarrow \{\Delta x^i\}$, то в другой СК $\Delta\vec{x} \longrightarrow \{\Delta \acute{x}^i\}$ – вектор остается неизменным, но меняются его компоненты. Считая перемещение малым, легко получить закон преобразования компонент вектора перемещения:

$$d\acute{x}^i = \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^k}dx^k = L^{\bar{i}}_k dx^k, \tag{4}$$

где

$$L^{\bar{i}}_k = \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^k} \text{ – матрица преобразования } \acute{x}^i = \acute{x}^i(x^k). \tag{5}$$

Ясно, что по такому же правилу преобразуются компоненты любого вектора, поэтому *совокупность n чисел* A^i*, определенных в каждой точке пространства, которые при замене координат (5) преобразуются согласно*

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^k}\acute{A}^k, \tag{6}$$

образует вектор $\vec{A} \to \{\mathrm{A}^i\}$*, а сами* A^i *называются его контравариантными компонентами.* Подчеркнем, что все компоненты вектора должны быть безразмерными или иметь одинаковую размерность.

Как известно, в евклидовых пространствах векторы складываются по правилу параллелограмма: сумма двух векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ определяется согласно

$$\vec{A} + \vec{B} \to \{A^1 + B^1, A^2 + B^2, ..., A^N + B^N\}.$$

Известно также, что результат умножения вектора на число – это новый вектор:

$$\mu\vec{A} \to \{\mu A^1, \mu A^2, ..., \mu A^N\}.$$

Нетрудно проверить, что эти правила превращают вектор в элемент определенного выше линейного (векторного) пространства, иначе говоря, совокупность векторов евклидова пространства образует линейное пространство.

Точку $P(x, y, z)$ в декартовых координатах можно задать, сопоставив ей вектор, направленный от начала координат к P. Такой вектор называют **радиусом-вектором** точки P. Компоненты этого вектора совпадают с координатами $P(x, y, z)$. Вектор $\vec{a}$ можно разложить по базисным векторам (ортам) $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ координатных осей на составляющие (см. рис. 3) так, чтобы

$$\vec{a} = a^i\vec{k}_i,$$

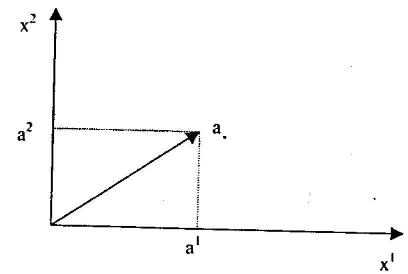

Рис. 3

где $\vec{k}_i \to \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

$$\vec{k}_1 = \vec{i} = (1,0,0), \quad \vec{k}_2 = \vec{j} = (0,1,0), \quad \vec{k}_3 = \vec{k} = (0,0,1) \quad \text{или} \quad (k_i)^l = \delta^l_i,$$

здесь i – номер базисного вектора, l – номер компоненты i-го вектора,

$$\delta^l_i = \begin{cases} 1 & i = l \\ 0 & i \neq l \end{cases} \quad \text{– символ Кронекера.}$$

В косоугольных координатах такое разложение можно провести двояко (см. рис. 4): соединяя отрезками конец вектора с осями в одном случае параллельно осям, а в другом – ортогонально им. В первом случае

$$\vec{a} = a^i\vec{e}_i,$$

где $\vec{e}_i$ – базисные векторы косоугольной системы (i – номер вектора, но не его компонента). Во втором случае мы сталкиваемся с объектом нового типа с нижним расположением индекса

$$a_i = \vec{a}\vec{e}_i,$$

суть которого нам еще предстоит осмыслить.

Рассмотрим далее криволинейные координаты z^1, z^2, z^3. Радиус-вектор точки $\vec{r} = \vec{r}(z^1, z^2, z^3)$ в таких системах – дифференцируемая функция, производная которой $\partial\vec{r}/\partial z^i$ в какой-либо точке – вектор, касательный к координатной линии z^i в этой точке (см. рис. 5). В каждой точке пространства введем тройку (или n в n-мерном пространстве) некомпланарных векторов $\vec{e}_i = \partial\vec{r}/\partial z^i$ и назовем их базисными векторами криволинейной системы. Заметим, что если в декартовых координатах базисные векторы $\vec{k}_i$ имеют глобальный (для всего пространства) характер, то в криволинейных

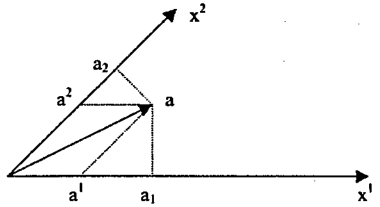

Рис. 4

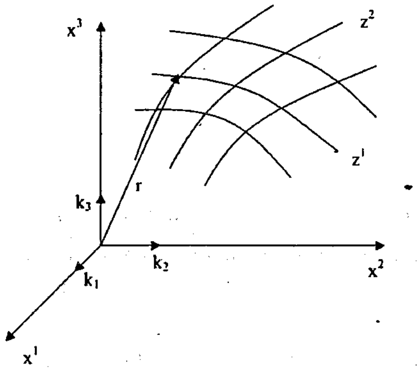

Рис. 5

СК базис локальный, т.е. свой для каждой точки. Условие некомпланарности $\vec{e}_i = \partial\vec{r}/\partial z^i$ имеет вид $\det X_i^l \neq 0$, где по-прежнему

$$X_i^l = \begin{pmatrix} \partial x^1/\partial z^1 & \partial x^1/\partial z^2 & \partial x^1/\partial z^3 \\ \partial x^2/\partial z^1 & \partial x^2/\partial z^2 & \partial x^2/\partial z^3 \\ \partial x^3/\partial z^1 & \partial x^3/\partial z^2 & \partial x^3/\partial z^3 \end{pmatrix}$$

– якобиева матрица преобразования $x^l = x^l(z^i)$. Если $\det X_i^l \neq 0$, то существует также обратное преобразование

$$z^i = z^i(x^k)$$

с якобиевой матрицей $Z_k^i = \left(\partial z^i/\partial x^k\right)$, якобиан которой отличен от нуля.

Итак, если выполнено условие $\det X_k^i \neq 0$, то в каждой точке пространства можно ввести **локальный базис** криволинейной системы координат

$$\vec{e}_i = \partial\vec{r}/\partial x^i,$$

причем

$$\vec{e}_i = X_i^j \vec{k}_j, \qquad \vec{k}_i = Z_i^j \vec{e}_j.$$

Докажем это в частном случае плоскости (для n-мерного пространства доказательство аналогично):

$$d\vec{r} = \vec{e}_1 dz^1 + \vec{e}_2 dz^2 = \vec{k}_1 dx^1 + \vec{k}_2 dx^2 =$$

$$= \vec{k}_1\left(\frac{\partial x^1}{\partial z^1}dz^1 + \frac{\partial x^1}{\partial z^2}dz^2\right) + \vec{k}_2\left(\frac{\partial x^2}{\partial z^1}dz^1 + \frac{\partial x^2}{\partial z^2}dz^2\right) =$$

$$= \left(\vec{k}_1\frac{\partial x^1}{\partial z^1} + \vec{k}_2\frac{\partial x^2}{\partial z^1}\right)dz^1 + \left(\vec{k}_1\frac{\partial x^1}{\partial z^2} + \vec{k}_2\frac{\partial x^2}{\partial z^2}\right)dz^2.$$

Нетрудно показать, что якобиевы матрицы X_i^j и Z_i^j взаимообратны:

$$X_k^i Z_j^k = \delta_j^i, \qquad \delta_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Действительно, $\vec{e}_i = X_i^j \vec{k}_j = X_i^j Z_j^k \vec{e}_k$, откуда видно, что произведение $X_i^j Z_j^k$ равно символу Кронекера δ_i^k, который из суммы по k отбирает лишь те слагаемые, у которых $k = i$.

В качестве примеров рассмотрим несколько общеизвестных типов координат.

(a) **Декартовы координаты** $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Базисные векторы $\vec{k}_x$, $\vec{k}_y$ $\vec{k}_z$.

(b) **Цилиндрические координаты** $z^1 = \rho$, $z^2 = \phi$, $z^3 = z$. Базисные векторы $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\phi$, $\vec{e}_z$.

$$x = \rho\cos\phi, \qquad y = \rho\sin\phi, \qquad z = z,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \phi = \arctan\frac{y}{x}.$$

Угловая координата ϕ многозначна, так как $\{\rho, \phi, z\}$ и $\{\rho, \phi + 2\pi k, z\}$ изображают одну и ту же точку, поэтому полагают $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Якобиева матрица

$$X_j^i = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \rho\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

имеет якобиан $Y = \rho$. В области $\rho > 0$ матрица X^i_j невырожденна ($\det X^i_j \neq 0$), а при $\rho = 0$ особенной становится вся ось z. Матрица обратного преобразования

$$Z^i_j = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi/\rho & \cos\phi/\rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) **Сферические координаты** $z^1 = r, \quad z^2 = \theta, \quad z^3 = \phi$. Базисные векторы $\vec{e}_r, \quad \vec{e}_\theta, \quad \vec{e}_\phi$.

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \qquad y = r\sin\theta\sin\phi, \qquad z = r\cos\theta,$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad \phi = \arctan\frac{y}{x}.$$

Многозначность угловых координат устраняют условия $0 \le \theta \le \pi$ и $0 \le \phi \le 2\pi$. Якобиева матрица

$$X^i_j = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi 0 \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

имеет якобиан $Y = r^2\sin\theta$. В области $r > 0$ и для $\theta \neq 0, \quad \theta \neq \pi$ якобиан $Y \neq 0$ и сферическая система координат не имеет особых точек. Точки $r = 0, \quad \theta = 0, \quad \theta = \pi$ – особые точки, т.е. r, θ, ϕ нельзя выразить через x, y, z так, чтобы в результате получились дифференцируемые в этих точках функции.

Правило преобразования базисных векторов при преобразованиях $x^i = x^i(\acute{x}^k)$ криволинейных координат можно получить, обобщив найденное выше правило преобразования базисов декартовых координат к криволинейным. Однако целесообразнее вывести это правило в качестве еще одного упражнения. Произвольный вектор $\vec{A} \to \{A^i\}$ можно представить в виде разложения по базисам $\vec{e}_i$ и $\vec{e}_{k'}$ разных координатных систем:

$$\vec{A} = A^i\vec{e}_i = A^{k'}\vec{e}_{k'}.$$

(Подчеркнем, что индексы i и k' относятся к разным СК.) Используя закон преобразования компонент A^i, получаем

$$A'^k\vec{e}_{k'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^l}A^l\vec{e}_{k'},$$

поэтому после переименования немых индексов имеем

$$A^i\vec{e}_i = A^i\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\vec{e}_{k'} \implies A^i\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\vec{e}_{k'} - \vec{e}_i\right) = 0,$$

откуда ввиду произвольности A^i получаем

$$\vec{e}_i = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\vec{e}_{k'}. \tag{7}$$

Отметим, что это правило преобразования базисных векторов, но не их компонент. Оно выражает базис $\vec{e}_i$ одной системы криволинейных координат через сумму базисов $\vec{e}_{k'}$ другой СК. Сравнивая (7) с (6), замечаем, что компоненты вектора и базисные векторы преобразуются по-разному.

Рассмотрим кривую $x^i = x^i(\lambda)$, проходящую через точку P некоего многообразия M. Если на этом же многообразии задана дифференцируемая функция $f(x^1, x^2, ..., x^n)$, то в каждой точке кривой $x^i = x^i(\lambda)$ определено значение функции f. Таким образом, на рассматриваемой кривой возникает дифференцируемая функция $g(\lambda)$, которая дает значения f в точке, отвечающей параметру λ:

$$g(\lambda) = f\left(x^1(\lambda), x^2(\lambda), ..., x^n(\lambda)\right) = f\left(x^i(\lambda)\right).$$

Ясно, что

$$\frac{dg}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{dx^i}{d\lambda},$$

и поскольку это равенство справедливо для любой функции g, то его можно переписать в виде

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^i}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{8}$$

В евклидовом пространстве векторы определяются аналогично перемещению Δx^i, однако на многообразии понятие "расстояние между точками" не обязательно должно быть определено, поэтому необходимо дать такое определение вектора, которое основано на рассмотрении инфинитезимальных окрестностей точек многообразия. Таким определением служит соотношение (8). Действительно, набор чисел $dx^i/d\lambda$ можно сопоставить с компонентами некоторого вектора, касательного к кривой $x(\lambda)$, и поскольку кривая $x(\lambda)$ берется вместе с определенным параметром λ, то для каждой из этих кривых компоненты касательного вектора (набор $dx^i/d\lambda$) определены однозначно. Пусть теперь $x^i = x^i(\mu)$ – другая кривая, проходящая через точку P многообразия M. Понятно, что

$$\frac{d}{d\mu} = \frac{dx^i}{d\mu}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

и для двух произвольных чисел a и b

$$a\frac{d}{d\lambda} + b\frac{d}{d\mu} = \left(a\frac{dx^i}{d\lambda} + b\frac{dx^i}{d\mu}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\ .$$

Ясно, что совокупность

$$a\frac{dx^i}{d\lambda} + b\frac{dx^i}{d\mu}$$

– это компоненты нового вектора, касательного к некоторой другой кривой, проходящей через точку P. Если эта кривая параметризуется ν, то в точке P

$$\frac{d}{d\nu} = \left(a\frac{dx^i}{d\lambda} + b\frac{dx^i}{d\mu}\right)\frac{\partial}{\partial x^i} \implies a\frac{d}{d\lambda} + b\frac{d}{d\mu} = \frac{d}{d\nu}\ .$$

Выполнимость остальных аксиом векторного пространства проверяется столь же элементарно, поэтому операторы дифференцирования типа $d/d\lambda$ вдоль кривых, проходящих через точку P, образуют векторное пространство в этой точке. Соотношение (8) показывает, что каждый оператор типа $d/d\lambda$ может быть представлен в виде линейной комбинации компонент этого вектора $dx^i/d\lambda$ и частных производных $\partial/\partial x^i$. Следовательно, совокупность $\partial/\partial x^i$ образует базис рассматриваемого векторного пространства в точке P. Итак, *пространство всех касательных векторов в точке P и пространство всех дифференцирований вдоль кривых, проходящих через P, находятся во взаимно-однозначном соответствии.* По этой причине математики говорят, что $d/d\lambda$ *и есть касательный вектор к кривой* $x(\lambda)$. *Касательные векторы лежат не в M, а в касательном в точке P к многообразию M пространстве, которое обозначается через T_P.* Для любой точки P касательное пространство T_P является векторным пространством той же размерности n, что и само многообразие. Любая совокупность n линейно независимых векторов образует базис T_P. Выбирая тот или иной базис в каждом T_P, для всех точек P из M получим базисные векторные поля (термин "векторное поле" обозначает правило, задающее вектор в

каждой точке M). Если в окрестности U точки P задана система координат $\{x^i\}$, то в каждой точке из U определен координатный базис $\{\partial/\partial x^i\}$. Работать в координатном базисе вовсе не обязательно – векторы можно задать и по отношению к произвольному базису $\{\vec{e}_l\}$, причем

$$\vec{A} = A^i\frac{\partial}{\partial x^i} = A^l\vec{e}_l,$$

где A^i – компоненты вектора $\vec{A}$ в координатном, а A^l – в произвольном (иногда его называют общим) базисе.

10. **Скаляры, метрический тензор, 1-формы. Первое знакомство.** Существует ли правило, сопоставляющее паре векторов вещественное число? Ответ на этот вопрос хорошо известен: такое отображение осуществляет **скалярное произведение векторов**:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A^i\vec{e}_i)(B^k\vec{e}_k) = \vec{e}_i\vec{e}_k A^i B^k. \qquad (9)$$

Используя правила преобразования векторов (6) и базисов (7), легко показать, что $\vec{A}\cdot\vec{B}$ не меняет своего числового значения при преобразованиях координат, иными словами, скалярное произведение инвариантно относительно замены базиса. Действительно,

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^i}\vec{e}_{m'}\frac{\partial x^{n'}}{\partial x^k}\vec{e}_{n'}\frac{\partial x^i}{\partial x^{p'}}A^{p'}\frac{\partial x^k}{\partial x^{q'}}A^{q'} = \vec{e}_{i'}\vec{e}_{k'}A^{i'}A^{k'}.$$

Такие величины называют **инвариантами**, а функции $\varphi(x^k)$, которые при замене базиса сохраняют свое числовое значение:

$$\varphi(x) = \acute{\varphi}(\acute{x}),$$

называют **скалярами**. Инвариантами относительно координатных преобразований являются не только сами скаляры, но и их дифференциалы $d\varphi$:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}dx^i = \frac{\partial\varphi}{\partial\acute{x}^k}\frac{\partial\acute{x}^k}{\partial x^i}dx^i = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\acute{x}^k}\frac{\partial\acute{x}^k}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial x^i}{\partial\acute{x}^l}d\acute{x}^l\right) =$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial\acute{x}^k}\delta^k_l d\acute{x}^l = \frac{\partial\varphi}{\partial\acute{x}^k}d\acute{x}^k.$$

Заметим, что, помимо инвариантности $d\varphi$, попутно мы повторно установили трансформационные свойства дифференциалов координат

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial\acute{x}^l}d\acute{x}^l, \qquad (10)$$

а также нашли, что правило преобразования частной производной скаляра, которая является геометрическим объектом с нижним индексом типа A_i,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}=\frac{\partial\varphi}{\partial\acute{x}^k}\frac{\partial\acute{x}^k}{\partial x^i},\tag{11}$$

отличается от правила преобразования векторов (6).

Итак, скалярное произведение сопоставляет паре векторов число. Попробуем выяснить, как осуществляется это отображение. Определим элементы фундаментальной матрицы $\hat{g}$ как прямое произведение векторов локального базиса:

$$\hat{g}\rightarrow g_{ik}=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_k.\tag{12}$$

По определению это симметричная матрица

$$g_{ik}=g_{ki}$$

размером $n\times n$. Учитывая (12), перепишем (9) в виде

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=g_{ik}A^iB^k.\tag{13}$$

Представим это символически: $\hat{g}(\vec{A},\vec{B})\rightarrow g_{ik}A^iB^k$, что позволяет интерпретировать матрицу $\hat{g}$ как машину с двумя входными каналами, которая, после введения в каждый из этих каналов по вектору, на выходе выдает вещественное число. Другими словами, $\hat{g}(\vec{A},\vec{B})$ – это линейный оператор на векторах, который паре элементов векторного пространства сопоставляет число. Линейность по первому аргументу означает

$$(\alpha\vec{A})\cdot\vec{B}=\alpha(\vec{A}\cdot\vec{B}),\quad(\vec{A}+\vec{B})\cdot\vec{C}=\vec{A}\cdot\vec{C}+\vec{B}\cdot\vec{C};$$

а по второму –

$$\vec{A}(\beta\cdot\vec{B})=\beta(\vec{A}\cdot\vec{B}),\quad\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}.$$

Исходя из (12) и (7), установим правило, по которому преобразуются компоненты $\hat{g}$ при замене базиса ($x^i=x^i(\acute{x}^k)$):

$$g_{ik}=\vec{e}_i\vec{e}_l=\vec{e}_{m'}\frac{\partial x^{m'}}{\partial x^i}\vec{e}_{n'}\frac{\partial x^{n'}}{\partial x^k}=\frac{\partial x^{m'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{n'}}{\partial x^k}g'_{m'n'}.$$

Как будет показано ниже, по такому закону преобразуются тензоры, поэтому назовем $\hat{g}\rightarrow g_{ik}$ **фундаментальным** или **метрическим** тензором.

В декартовых координатах $x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$ базисные векторы $\vec{k}_i$ $(i=1,2,3)$ – константы для всех точек каждой из координатных осей (величину, которая имеет одно и то же значение на всем множестве, называют *глобальной*, в отличие от меняющейся от точки к точке *локальной* величины) со значениями

$$(k_i)^l=\delta_i^l\implies{}^{(0)}g_{ik}=\delta_{ik}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.\tag{14}$$

(Здесь и далее значок ${}^{(0)}(...)$ означает принадлежность к декартовым координатам.) Найдем компоненты g_{ik} в сферических координатах $z^1=r,\quad z^2=\theta,\quad z^3=\phi$, учитывая, что

$$x=r\sin\theta\cos\phi,\qquad y=r\sin\theta\sin\phi,\qquad z=r\cos\theta.$$

Согласно (7)

$$\vec{e}_r=\frac{\partial x}{\partial r}\vec{k}_x+\frac{\partial y}{\partial r}\vec{k}_y+\frac{\partial z}{\partial r}\vec{k}_z=\vec{k}_x\sin\theta\cos\phi+\vec{k}_y\sin\theta\sin\phi+\vec{k}_z\cos\theta;$$

$$\vec{e}_\theta=\frac{\partial x}{\partial\theta}\vec{k}_x+\frac{\partial y}{\partial\theta}\vec{k}_y+\frac{\partial z}{\partial\theta}\vec{k}_z=\vec{k}_xr\cos\theta\cos\phi+\vec{k}_yr\cos\theta\sin\phi-\vec{k}_zr\sin\theta;$$

$$\vec{e}_\phi=\frac{\partial x}{\partial\phi}\vec{k}_x+\frac{\partial y}{\partial\phi}\vec{k}_y=-\vec{k}_xr\sin\theta\sin\phi+\vec{k}_yr\sin\theta\cos\phi.$$

Декартовы координаты ортогональны ($\vec{k}_i\vec{k}_l=\delta_{il}$), поэтому для неисчезающих компонент фундаментального тензора найдем

$$g_{11}=g_{rr}=1,\qquad g_{22}=g_{\theta\theta}=r^2,\qquad g_{33}=g_{\phi\phi}=r^2\sin^2\theta,$$

$$g_{ik}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&r^2&0\\0&0&r^2\sin^2\theta\end{pmatrix}.\tag{15}$$

Аналогично вычисляются компоненты g_{ik} в цилиндрических координатах $z^1=\rho,\quad z^2=\phi,\quad z^3=z$:

$$x=\rho\cos\phi,\qquad y=\rho\sin\phi,\qquad z=z.$$

Для компонент вектора локального базиса имеем

$$\vec{e}_\rho=\frac{\partial x}{\partial\rho}\vec{k}_x+\frac{\partial y}{\partial\rho}\vec{k}_y+\frac{\partial z}{\partial\rho}\vec{k}_z=\vec{k}_x\cos\phi+\vec{k}_y\sin\phi,$$

$$\vec{e}_\phi = \frac{\partial x}{\partial \phi}\vec{k}_x + \frac{\partial y}{\partial \phi}\vec{k}_y + \frac{\partial z}{\partial \phi}\vec{k}_z = -\vec{k}_x \rho \sin\phi + \vec{k}_y \rho \cos\phi,$$

$$\vec{e}_z = \vec{k}_z,$$

а для неисчезающих компонент метрического тензора

$$g_{11} = g_{\rho\rho} = 1, \qquad g_{22} = g_{\phi\phi} = \rho^2, \qquad g_{33} = g_{zz} = 1,$$

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Из определения (12) легко заключить, что $\det g_{ik} \neq 0$, поскольку $\vec{e}_i = X_i^j \vec{k}_j$ – локальный базис *допустимой* системы координат с якобианом $\det X_i^j \neq 0$:

$$\det g_{il} = \det e_i e_l = \det X_i^m X_l^n k_m k_n = \det X_i^m \det X_l^m \neq 0.$$

Это означает существование матрицы $\hat{g}^{-1} \to g^{ik}$, обратной к $\hat{g} \to g_{ik}$, элементы которой определяются как решения системы алгебраических уравнений:

$$g^{ik} g_{kl} = \delta_l^i \quad \Longrightarrow \quad g^{i1} g_{1l} + g^{i2} g_{2l} + g^{i3} g_{3l} = \delta_l^i.$$

Во всех тех случаях, когда, как в рассмотренных выше координатах, матрица $\hat{g}$ диагональна, обратная матрица имеет компоненты

$$g^{kk} = 1/g_{kk}$$

(здесь нет суммирования по k). Действительно, пусть

$$l = 1, \qquad g^{i1} g_{11} = \delta_1^i \quad \Longrightarrow \quad g^{11} = 1/g_{11}, \quad g^{i1}(i \neq 1) = 0$$

(точно так же и для $l = 2, 3$).

Таким образом,

$$^{(0)}g^{ik} = \delta^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^{(0)}g_{ik}, \tag{17}$$

$$g^{ik}(\rho, \phi, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$g^{ik}(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Выше мы обнаружили (см. рис. 4), что с одним и тем же вектором можно связать как совокупность a^i:

$$\vec{a} = a^i \vec{e}_i,$$

так и совокупность

$$a_i = \vec{a}\vec{e}_i.$$

Ясно, что между такими объектами, с разным расположением индексов, должна существовать связь. Попробуем установить ее, используя известные соотношения:

$$a_i = \vec{a}\vec{e}_i = a^k \vec{e}_k \vec{e}_i = g_{ik} a^k,$$

помножив обе части последнего равенства на g^{il} и суммируя по l, получим

$$g^{il} a_i = g^{li} g_{ik} a^k = \delta_k^l a^k = a^l.$$

Итак, метрический тензор сопоставляет друг другу объекты с верхними и нижними индексами, т.е. служит инструментом для поднятия и опускания индексов. Важно отметить, что если метрический тензор или скалярное произведение двух векторов не определены, такое сопоставление становится невозможным. Заметим, что в декартовых координатах нет разницы между объектами с верхними и нижними индексами (верхние индексы принято называть **контравариантными**, а нижние – **ковариантными**):

$$^{(0)}\mathrm{A}^i = {}^{(0)}\mathrm{A}_i,$$

поскольку $^{(0)}g^{ik} = {}^{(0)}g_{ik}$.

Если обратиться к аналогии с машиной, то и в этом случае метрический тензор – это машина с одним входным каналом, причем если в этот канал матрицы $\hat{g}$ ввести объект с контравариантным индексом, то на выходе получим объект с ковариантным индексом; такую же операцию, но по перемещению ковариантного индекса осуществляет $\hat{g}^{-1}$:

$$\hat{g}(A^k) \to \mathrm{A}_i = g_{ik}\mathrm{A}^k, \quad \hat{g}^{-1}(A_k) \to \mathrm{A}^i = g^{ik}\mathrm{A}_k. \tag{20}$$

Вернемся к скалярному произведению (9), переписав его с учетом (20) в виде

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (g_{ik}A^i)B^k = A_kB^k = \tilde{A}\vec{B} = \tilde{A}(\vec{B}),$$

где введено новое обозначение

$$\tilde{A} \to A_i.$$

Символическая запись скалярного произведения $\vec{A}\cdot\vec{B} = \tilde{A}(\vec{B})$ позволяет дать определение геометрическому объекту $\tilde{A}$: *линейный оператор на пространстве векторов V^n, который любому вектору $\vec{B}$ из V^n ставит в соответствие вещественное число:*

$$\tilde{A}\vec{B} = A_iB^i \text{ или } \tilde{A}(\vec{B}) : V^n \to R^n;\ \vec{B} \mapsto A_iB^i \in R^n,$$

назовем **1-формой** $\tilde{A} \to A_i$. В литературе можно встретить и другие названия – **ковариантный вектор** или **ковектор** для 1-формы $\tilde{A}$ и **контравариантный вектор** для векторов $\vec{A} \to A^i$. 1-форма $\tilde{A}$ – это линейная вещественнозначная функция на векторах, которая в точке P многообразия M сопоставляет вектору $\vec{A}$ некоторое вещественное число в той же точке. Линейность 1-форм означает

$$\tilde{A}(\alpha\vec{B} + \beta\vec{C}) = \alpha\tilde{A}(\vec{B}) + \beta\tilde{A}(\vec{C}),$$

где α, β – вещественные числа. Сложение 1-форм и их умножение на вещественное число дает 1-форму, причем

$$(\alpha\tilde{A})(\vec{B}) = \alpha[\tilde{A}(\vec{B})],\quad (\tilde{A} + \tilde{B})\vec{C} = \tilde{A}(\vec{C}) + \tilde{B}(\vec{C}),$$

иначе говоря, совокупность 1-форм в данной точке образует линейное (векторное) пространство, которое сопряжено (дуально) T_P и обозначается T_P^*. Нетрудно понять причину "сопряженности" T_P и T_P^*. Дело в том, что векторы, как и 1-формы, можно рассматривать как линейные вещественнозначные функции, но на 1-формах, а именно значение любого вектора $\vec{A}$ на 1-форме $\tilde{B}$ есть $\tilde{B}(\vec{A})$. Действительно, учитывая правило (20), обратимся к формуле (9), тогда

$$g_{ik}A^kB^i = A^kB_k = \vec{A}(\tilde{B}) = A_iB^i = \tilde{B}(\vec{A}).$$

Линейность $\vec{A}(\tilde{B})$ очевидна, поэтому каждый из геометрических объектов $\vec{A}$ и $\tilde{B}$ можно рассматривать как вещественнозначную функцию, аргументом которой служит другой ("сопряженный") объект.

Именно в этом смысле говорят, что векторы и 1-формы **дуальны** (или **сопряжены**) друг другу:

$$\tilde{A}(\vec{A}) \equiv \vec{A}(\tilde{A}).$$

Это первый пример свертки геометрических объектов, определение которой будет дано ниже.

Воспользовавшись инвариантностью скалярного произведения векторов, легко выяснить, как преобразуются компоненты 1-форм:

$$A_iB^i = A_{i'}B^{i'} = A_{i'}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l}B^l = A_{k'}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}B^i \ \Rightarrow\ B^i\left(A_i - A_{k'}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\right) = 0.$$

Ввиду произвольности B^i

$$A_i = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}A_{k'}. \tag{21}$$

Сравнивая с (7), замечаем, что компоненты 1-форм преобразуются как базисные векторы $\vec{e_i}$. Если сравнить (21) с правилом преобразования компонент вектора (6), то видно, что якобиевы матрицы преобразования компонент вектора и 1-форм взаимообратны, что лишний раз подчеркивает дуальность этих объектов. Таким образом,

- *совокупность n чисел A_i, определенных в каждой точке пространства, которые при преобразованиях координат*

  $$x^i = x^i(\acute{x}^j),\qquad i, j, = 1, 2, ...n,$$

  преобразуются согласно

  $$A_i = \frac{\partial \acute{x}^j}{\partial x^i}\acute{A}_j,$$

  образует **1-форму** *(или* **ковариантный вектор**, *или* **ковектор** *).*

Каков базис векторного пространства, в котором "живут" 1-формы? Дуальность векторов и 1-форм и правило, переводящее компоненты вектора в компоненты 1-форм (20), позволяют заключить, что базис 1-форм

$$\tilde{\omega}^i = g^{ik}\vec{e}_k. \tag{22}$$

Из определения (22) сразу следует

$$\tilde{\omega}^i \vec{e}_l = g^{ik} \vec{e}_k \vec{e}_l = g^{ik} g_{kl} = \delta^i_l, \quad \tilde{\omega}^i \tilde{\omega}^l = g^{ik} \vec{e}_k \tilde{\omega}^l = g^{ik} \delta^l_k = g^{il}, \qquad (23)$$

т.е. $\tilde{\omega}^1$ ортогонален $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$, а его произведение с $\vec{e}_1$ дает 1. Базис 1-форм, образованный совокупностью $\tilde{\omega}^i$, **дуален**, или **сопряжен**, локальному базису $\vec{e}_i$. Любой вектор можно представить в виде разложения по векторам локального $\vec{e}_i$ или сопряженного $\tilde{\omega}^i$ базиса:

$$\vec{A} = A^i \vec{e}_i = A^i g_{ik} \tilde{\omega}^k = A_k \tilde{\omega}^k, \quad A^i = \vec{A} \tilde{\omega}^i, \quad A_i = \vec{A} \vec{e}_i.$$

Базисы $\vec{e}_i$ и $\tilde{\omega}^i$ – это базисы различных, но дуальных векторных пространств, и если векторы локального базиса $\vec{e}_i$ – это меняющиеся от точки к точке касательные к координатным линиям, то $\tilde{\omega}^i$ такого непосредственного отношения к координатным линиям не имеют.

Определим квадрат длины (норму) вектора $\vec{A}$ как скалярное произведение его компонент:

$$|(\vec{A})^2| \equiv A^i A_i.$$

Отметим, что верхнее и нижнее положение индекса суммирования взаимозаменяемы, т.е., подняв один из немых индексов, мы должны опустить парный, и наоборот, опустив один из индексов немой пары, мы должны поднять другой:

$$a^i b_k c^k d_i \equiv a_i b^k c_k d^i.$$

Квадрат длины вектора, как скалярное произведение, является инвариантом преобразования координат. В декартовых координатах квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками есть

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Легко видеть, имея в виду (14), что это выражение можно переписать как

$$dl^2 = g_{ik} dx^i \cdot dx^k.$$

Подставив сюда полученные ранее формулы преобразования для g_{ik} и dx^i, нетрудно убедиться в том, что dl^2 – скаляр, причем в произвольной системе координат сохраняется не только его числовое значение, но и форма записи:

$$d\acute{l}^2 = \acute{g}_{ik} d\acute{x}^i \cdot d\acute{x}^k.$$

Подобные величины называют **форминвариантными**.

Метрический тензор g_{ik}, определяя квадрат элемента длины в произвольной системе координат, по существу, определяет геометрические свойства пространства, например, если матрица $\hat{g}$ оказывается единичной: $\hat{g} \to g_{ik} = diag 1, 1, ..., 1$, то соответствующее пространство называется евклидовым. Вычисленные выше компоненты метрического тензора позволяют записать квадрат элемента длины

- в цилиндрических координатах:

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2, \qquad (24)$$

- в сферических координатах:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\phi^2. \qquad (25)$$

11. **Символы Кристоффеля. Ковариантная производная.** Найдем производную произвольного вектора по координатам – $\partial\vec{A}/\partial x^i$. Вообще говоря, $\vec{A} = A^i \vec{e}_i$, а в декартовых координатах базисные векторы $\vec{k}_i$ – константы, поэтому

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^k} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} \vec{k}_i.$$

В произвольных координатах

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^k} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} \vec{e}_i + \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k} A^i.$$

В частном случае декартовых координат это выражение должно совпадать с предыдущим, поэтому оно должно иметь вид произведения некоего сомножителя с вектором локального базиса, а это возможно, если производная вектора локального базиса разложена по этому же вектору:

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k} = \Gamma^l_{ik} \vec{e}_l. \qquad (26)$$

Трехиндексные величины Γ^l_{ik} этого разложения называют **коэффициентами аффинной связности**. Учитывая (26), получаем

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^k} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} \vec{e}_i + \Gamma^l_{ik} \vec{e}_l A^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{lk} A^l \right) \vec{e}_i \equiv (\nabla_k A^i) \vec{e}_i.$$

Здесь
$$\nabla_k A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{lk} A^l \tag{27}$$
– **ковариантная производная вектора.**

Исходя из соотношения $\tilde{\omega}^i \vec{e}_k = \delta^i_k$, нетрудно показать, что
$$\frac{\partial \tilde{\omega}^i}{\partial x^k} = -\Gamma^i_{kl} \tilde{\omega}^l.$$

Действительно,
$$\frac{\partial}{\partial x^l}(\tilde{\omega}^i \vec{e}_k) = \vec{e}_k \frac{\partial \tilde{\omega}^i}{\partial x^l} + \tilde{\omega}^i \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^l} = 0,$$
следовательно,
$$\vec{e}_k \frac{\partial \tilde{\omega}^i}{\partial x^l} = -\tilde{\omega}^i \Gamma^m_{kl} \vec{e}_m = -\delta^i_m \Gamma^m_{kl} = -\Gamma^i_{kl}.$$

Помножим обе части равенства на $\tilde{\omega}^l$ и просуммируем по l, что с учетом $\tilde{\omega}^l \vec{e}_k = \delta^l_k$ завершает доказательство. Теперь, исходя из выписанного выше разложения производной вектора сопряженного базиса и представления $\vec{A} = A_i \tilde{\omega}^i$, получим выражение ковариантной производной ковектора:
$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}(A_i \tilde{\omega}^i) = \tilde{\omega}^i \frac{\partial A_i}{\partial x^k} + A_i \frac{\partial \tilde{\omega}^i}{\partial x^k} = \tilde{\omega}^i \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - A_l \Gamma^l_{ki} \tilde{\omega}^i =$$
$$= \tilde{\omega}^i (\nabla_k A_i).$$

Итак, **ковариантная производная ковектора**
$$\nabla_k A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - A_l \Gamma^l_{ki}. \tag{28}$$

Найдем закон преобразования коэффициентов аффинной связности
$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^k} = \Gamma^l_{ik} \vec{e}_l \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial \acute{x}^n}\left(\frac{\partial \acute{x}^m}{\partial x^i} \acute{\vec{e}}_m\right) \frac{\partial \acute{x}^n}{\partial x^k} = \acute{\vec{e}}_m \left(\frac{\partial^2 \acute{x}^m}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{\partial \acute{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial \acute{x}^n}{\partial x^k} \acute{\Gamma}^m_{pn}\right) = \acute{\vec{e}}_m \Gamma^l_{ik} \frac{\partial \acute{x}^m}{\partial x^l},$$
откуда
$$\Gamma^l_{ik} = \frac{\partial x^l}{\partial \acute{x}^m}\left(\frac{\partial \acute{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial \acute{x}^n}{\partial x^k} \acute{\Gamma}^m_{pn} + \frac{\partial^2 \acute{x}^m}{\partial x^i \partial x^k}\right).$$

Уместно отметить, что, поскольку в нашем изложении векторы локального базиса определены как $\vec{e}_i = \partial \vec{r}/\partial x^i$, то из (26) следует симметричность коэффициентов аффинной связности по нижним индексам:
$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}. \tag{29}$$

Используя (29), найдем связь Γ^i_{kl} с компонентами метрического тензора:
$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial x^l} \vec{e}_k + \vec{e}_i \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^l} = g_{mi} \Gamma^m_{kl} + g_{mk} \Gamma^m_{il}.$$

Точно так же
$$\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} = g_{mi} \Gamma^m_{lk} + g_{ml} \Gamma^m_{ik}, \qquad \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = g_{ml} \Gamma^m_{ki} + g_{mk} \Gamma^m_{li}.$$

Сложим последние два равенства и вычтем из суммы первое, умножив далее результат на $g^{nl}/2$ с последующим суммированием по l, получим
$$\Gamma^l_{ik} = \frac{1}{2} g^{lm} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right). \tag{30}$$

Таким образом, если заданы компоненты метрического тензора, то (30) определяет Γ^l_{ik} и, тем самым, ковариантные производные векторов. Заметим, что коэффициенты аффинной связности, выраженные через компоненты метрического тензора согласно (26), называют **символами Кристоффеля.**

Подсчитаем символы Кристоффеля, предполагая g_{ik} зависящими лишь от x^1 и x^2 и считая $\hat{g}$ диагональной.

- Пусть $l = 1$:

$$\Gamma^1_{ik} = \frac{1}{2} g^{1m} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right) = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{i1}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k1}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^1}\right).$$

$l = 1, i = 1$:
$$\Gamma^1_{1k} = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k1}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{1k}}{\partial x^1}\right) = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^k};$$

$l = 1, i = 2$:
$$\Gamma^1_{2k} = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k1}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{2k}}{\partial x^1}\right);$$

$l=1, i=2, k=1:$

$$\Gamma^1_{21}=\frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}-\frac{\partial g_{21}}{\partial x^1}\right)=\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2};$$

$l=1, i=2, k=2:$

$$\Gamma^1_{22}=-\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1};$$

$l=1, i=2, k=3:$

$$\Gamma^1_{23}=0;$$

$l=1, i=3:$

$$\Gamma^1_{3k}=\frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{1k}}{\partial x^3}-\frac{\partial g_{3k}}{\partial x^1}\right).$$

Неисчезающие компоненты

$$\Gamma^1_{1k}=\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^k};$$

$$\Gamma^1_{22}=-\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1};$$

$$\Gamma^1_{33}=-\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}.$$

- Пусть $l=2:$

$$\Gamma^2_{ik}=\frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{i2}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{k2}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^2}\right).$$

$l=2, i=1:$

$$\Gamma^2_{1k}=\frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{k2}}{\partial x^1}-\frac{\partial g_{1k}}{\partial x^2}\right);$$

$l=2, i=1, k=1:$

$$\Gamma^2_{11}=-\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2};$$

$l=2, i=1, k=2:$

$$\Gamma^2_{12}=\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1};$$

$$\Gamma^2_{13}=0;$$

$l=2, i=2:$

$$\Gamma^2_{2k}=\frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{k2}}{\partial x^2}-\frac{\partial g_{2k}}{\partial x^2}\right)=\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^k};$$

$l=2, i=3:$

$$\Gamma^2_{3k}=\frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{23}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{k2}}{\partial x^3}-\frac{\partial g_{3k}}{\partial x^2}\right)=-\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{3k}}{\partial x^2}.$$

Отличны от нуля

$$\Gamma^2_{11}=-\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2};$$

$$\Gamma^2_{2k}=\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^k};$$

$$\Gamma^2_{33}=-\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}.$$

- Пусть $l=3:$

$$\Gamma^3_{ik}=\frac{1}{2}g^{33}\left(\frac{\partial g_{i3}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{k3}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^3}\right).$$

$l=3, i=1:$

$$\Gamma^3_{1k}=\frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1};$$

$l=3, i=2:$

$$\Gamma^3_{2k}=\frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2};$$

$l=3, i=3:$

$$\Gamma^3_{3k}=\frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^k}.$$

Неравны нулю

$$\Gamma^3_{3k}=\frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^k}.$$

- **Декартовы координаты.** В декартовых координатах компоненты метрического тензора постоянны, поэтому символы Кристоффеля равны нулю:

$$\Gamma^l_{ik}=0.$$

- **Цилиндрические координаты:**

$$g_{ik}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\rho^2&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad g^{ik}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/\rho^2&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\Gamma^1_{22}=-\rho,\qquad \Gamma^2_{12}=\frac{1}{\rho}.$$

- **Сферические координаты:**

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix},$$

$$\Gamma^1_{22} = -r, \quad \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta,$$

$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^3_{23} = ctg\theta.$$

- **Замечание.** Язык матриц заметно упрощает как использование, так и запись соотношений между геометрическими объектами хотя бы потому, что можно обойтись без индексов:

$$b_i = A^k_i \cdot a_k \Longleftrightarrow \hat{b} = \hat{A} \cdot \hat{a},$$

лишний раз подчеркивая независимость этих соотношений от выбора координат. Одноиндексным объектам ставятся в соответствие одностолбцовые матрицы

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \hat{\omega} = \begin{pmatrix} \tilde{\omega}^1 \\ \tilde{\omega}^2 \\ \tilde{\omega}^3 \end{pmatrix}$$

– для компонент 1-форм и их базиса;

$$\hat{a}^* = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}, \quad \hat{e} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

– для компонент векторов и вектора локального базиса.

Для того чтобы записать фундаментальную матрицу, скалярное произведение и т.п. в матричных обозначениях, введем также однострочные матрицы как транспонированные к $\hat{a}$, $\hat{a}^*$, $\hat{e}$, $\hat{\omega}$:

$$\hat{a}^T = (a_1\ a_2\ a_3), \quad (\hat{a}^*)^T = (a^1\ a^2\ a^3) \text{ и т.д.}$$

Тогда, определив фундаментальную матрицу как

$$\hat{g} = \hat{e}\hat{e}^T,$$

получим

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & 0 & 0 \\ \vec{e}_2 & 0 & 0 \\ \vec{e}_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{e}_1\vec{e}_1 & \vec{e}_1\vec{e}_2 & \vec{e}_1\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2\vec{e}_1 & \vec{e}_2\vec{e}_2 & \vec{e}_2\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3\vec{e}_1 & \vec{e}_3\vec{e}_2 & \vec{e}_3\vec{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}.$$

Точно так же

$$\hat{g}^{-1} = \hat{\omega} \cdot (\hat{\omega})^T = \begin{pmatrix} \tilde{\omega}^1 \\ \tilde{\omega}^2 \\ \tilde{\omega}^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\omega}^1 & \tilde{\omega}^2 & \tilde{\omega}^3 \end{pmatrix}.$$

Для скалярного произведения имеем

$$\vec{a}\vec{b} = \hat{a}^T\hat{b}^* = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} = a_1b^1 + a_2b^2 + a_3b^3.$$

Понятно, что

$$a_i = g_{ik}a^k \Longrightarrow \hat{a} = \hat{g}\hat{a}^*, \qquad a^i = g^{ik}a_k \Longrightarrow \hat{a}^* = \hat{g}^{-1}\hat{a};$$

$$\hat{e} = \hat{g}\hat{\omega}, \qquad \hat{\omega} = \hat{g}^{-1}\hat{e},$$

откуда для однострочных матриц, учитывая симметричность фундаментальной матрицы ($g_{ik} = g_{ki} \longrightarrow \hat{g} = \hat{g}^T$), получаем

$$\hat{a}^T = (\hat{a}^*)^T\hat{g} \Longrightarrow (\hat{a}^*)^T = \hat{a}^T\hat{g}^{-1}.$$

Легко проверить соотношения

$$\vec{a} = \hat{a}^T\hat{\omega} = a_1(\hat{\omega})^1 + a_2(\hat{\omega})^2 + a_3(\hat{\omega})^3, \quad \vec{a} = (\hat{a}^*)^T\hat{e} = a^1\vec{e}_1 + a^2\vec{e}_2 + a^3\vec{e}_3.$$

Допустим, что матрица $\hat{A}$ задает преобразование базисов двух координатных систем:

$$(\hat{e})' = \hat{A}\hat{e}.$$

Аналогично преобразуются одностолбцовые матрицы, соответствующие 1-формам:

$$(\hat{a})' = \hat{A}\hat{a}.$$

При таком изменении базиса фундаментальная матрица преобразуется согласно

$$\hat{g}' = \hat{e}' \cdot (\hat{e}')^T = \hat{A}\hat{e} \cdot \hat{e}^T \hat{A}^T = \hat{A}\hat{g}\hat{A}^T \Longrightarrow (\hat{g}^{-1})' = (\hat{A}^T)^{-1}\hat{g}^{-1}\hat{A}^{-1},$$

а два последних соотношения, с учетом $\hat{a}^* = \hat{g}^{-1}\hat{a}$, позволяют без труда получить формулу преобразования одностолбцовых матриц

$$(\hat{a}^*)' = (\hat{A}^T)^{-1}\hat{a}^*.$$

Пусть некая матрица $\hat{D}$ представляет оператор, который в рамках одной и той же координатной системы преобразует 1-форму $\hat{a}$ в $\hat{b}$ (с таким же успехом это может быть преобразованием между векторами или произвольными матрицами):

$$\hat{b} = \hat{D}\hat{a} \quad \text{или} \quad \hat{b}' = \hat{D}'\hat{a}'.$$

Допустим далее, что матрица $\hat{C}$ – якобиева матрица преобразования координат:

$$\hat{a}' = \hat{C}\hat{a}, \quad \hat{b}' = \hat{C}\hat{b},$$

поэтому $\hat{b} = \hat{C}^{-1}\hat{D}'\hat{C}\hat{a}$, следовательно,

$$\hat{D} = \hat{C}^{-1}\hat{D}'\hat{C} \Leftrightarrow \hat{D}' = \hat{C}\hat{D}\hat{C}^{-1}.$$

Преобразования такого типа называют **преобразованиями подобия**. Заметим, что если матрицы $\hat{C}$ и $\hat{D}$ коммутируют, то матрица $\hat{D}$ является инвариантом преобразования $\hat{C}$. В частности, единичная матрица $\hat{I}$ коммутирует с любой матрицей, и поэтому она – инвариант любого преобразования, и наоборот: всякая матрица - инвариант тождественного преобразования.

В теоретической физике часто используется понятие **след матрицы**, обозначаемое $Tr\hat{A}$ или $Sp\hat{A}$, – сумма диагональных элементов матрицы $\hat{A}$:

$$Sp\hat{A} = A_i^i.$$

По определению

$$Sp\hat{A}^T = Sp\hat{A}, \quad Sp(\hat{A}\hat{B}) = Sp(\hat{B}\hat{A}), \quad Sp(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) = Sp(\hat{C}\hat{A}\hat{B}).$$

Легко обнаружить, что след матрицы – инвариант преобразования подобия, т.е. $Sp\hat{A}' = Sp\hat{A}$, если $\hat{A}' = \hat{D}\hat{A}\hat{D}^{-1}$.

Как было отмечено, компоненты метрического тензора образуют симметричную матрицу. Если эта матрица единична, т.е. $g_{ik} = \delta_{ik}$, то такой метрический тензор определяет евклидову метрику, а соответствующее пространство будет евклидовым. Как быть, если метрика не имеет такого простого вида? В этом случае вводят новый базис

$$\tilde{e}' = \tilde{A}\tilde{e} \Longrightarrow \tilde{g}' = \tilde{A}\tilde{g}\tilde{A}^T.$$

Теперь если с умом выбрать матрицу $\tilde{A}$, то $\tilde{g}$ примет вид единичной матрицы. Возьмем $\tilde{A} = \tilde{D} \cdot \tilde{O}$, где $\tilde{O}$ – ортогональная ($\tilde{O}^T = \tilde{O}^{-1}$), а $\tilde{D}$ – диагональная ($\tilde{D}^T = \tilde{D}$) матрицы. Тогда

$$\tilde{g}' = \tilde{D}\tilde{O}\tilde{g}\tilde{O}^{-1}\tilde{D}.$$

Хорошо известно, что преобразование подобия, приводящее любую симметричную матрицу к диагональному виду, осуществляется ортогональной матрицей $\tilde{O}$:

$$\tilde{g}_d = \tilde{O}\tilde{g}\tilde{O}^{-1}, \quad \tilde{g}' = \tilde{D}\tilde{g}_d\tilde{D}, \quad \tilde{g}_d = diag(g_1, ..., g_n).$$

Матрица $\tilde{D} = (d_1, ..., d_n)$ пока еще остается произвольной.

$$\tilde{g}' = diag(g_1 d_1^2, g_2 d_2^2, ..., g_n d_n^2).$$

Выберем $d_i = (|g_i|)^{-1/2}$, тогда $\tilde{g}'$ станет диагональной матрицей с элементами $+1$ или -1 в зависимости от знаков $g_1, ..., g_n$. Обобщая, можно сформулировать утверждение: *любое векторное пространство с метрическим тензором обладает базисом, в котором этот тензор приводится к* **каноническому** *виду* $diag(1, ..., -1)$. Такой базис называется **ортонормированным**, а след матрицы $\tilde{g}$ в каноническом представлении называется **сигнатурой метрики**.

II. Геометрические объекты на многообразиях

Понятие "многообразие" по сути является точным математическим эквивалентом интуитивных представлений о пространстве. *Множество* M *назовем* **многообразием**, *если каждый элемент (обычно говорят о "точках") этого множества имеет открытую окрестность, допускающую непрерывное взаимно-однозначное отображение* на *открытое* *множество в* R^n. Проще говоря, M локально похоже на R^n. По определению каждой точке P многообразия M сопоставляется набор вещественных чисел $\{x^1(P), x^2(P), ..., x^n(P)\}$, которые и есть координаты P относительно данного отображения.

Большинство физических величин задают в виде числовых функций от точки в пространстве. Если у нас несколько таких величин – несколько функций точки (в трехмерном пространстве – 3, в n-мерном пространстве – n), то их можно использовать для задания вектор-функции точки. Физические, геометрические величины описываются набором функций точки лишь после того, как в пространстве задана какая-либо система координат, при этом надо помнить, что числовая запись этих величин существенно меняется, если будут заданы другие координаты. Большой класс объектов такого рода составляют **тензоры**, простейшим примером которых служат уже знакомые нам векторы и 1-формы. Тривиальный частный случай тензорных величин представляют скаляры, которые не меняются при замене координат. Тензоры – это естественное обобщение векторов и 1-форм. Тензор типа $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ в точке P многообразия M – это линейная функция, аргументами которой служат m 1-форм и n векторов, а значениями этой функции являются вещественные числа. Под линейностью будем понимать линейность по каждому из аргументов (такое свойство обычно называют полилинейностью). Например, если F – тензор типа $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, то его значения на 1-формах $\tilde{\omega}$, $\tilde{\sigma}$ и векторах $\vec{A}, \vec{B}$ записываются в виде $F(\tilde{\omega}, \tilde{\sigma};\ \vec{A}, \vec{B})$. Линейность по одному из аргументов $\tilde{\omega}$ означает, что

$$F(a\tilde{\omega} + b\tilde{\lambda}, \tilde{\sigma};\ \vec{A}, \vec{B}) = aF(\tilde{\omega}, \tilde{\sigma};\ \vec{A}, \vec{B}) + bF(\tilde{\lambda}, \tilde{\sigma};\ \vec{A}, \vec{B}).$$

Здесь a и b – произвольные вещественные числа, условия линейности по остальным аргументам выписываются аналогично. Подчеркнем, что порядок аргументов, вообще говоря, существенен, что легко почувствовать на примере функции $f(x, y) = 3x + 5y$, для которой $f(1, 2) \neq f(2, 1)$. Так же как для векторов и 1-форм, тензорное поле – это правило, сопоставляющее каждой точке многообразия тензор. Векторы – это линейные функции на 1-формах, и поэтому они являются тензорами типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 1-формы – это линейные функции на векторах, и поэтому они являются тензорами типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ясно, что скаляры – это тензоры типа

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Компонентами тензора называют его значения на базисных векторах и 1-формах. Скажем, компонентами тензора T типа $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ служат $T^{ijk}_{lm} = T(\tilde{\omega}^i, \tilde{\omega}^j, \tilde{\omega}^k; \vec{e}_l, \vec{e}_m)$.

1. **Алгебра геометрических объектов.** Пусть в каждой системе координат (x^1, x^2, x^3) и в каждой точке пространства задано 3^{n+m} чисел (в N-мерном пространстве – N^{n+m} чисел). В этом случае говорят, что в пространстве задано поле геометрического объекта ранга $n+m$ с n контравариантными и m ковариантными индексами (иначе говоря, поле тензора типа $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$). Законы преобразования компонент геометрического объекта при замене координат весьма разнообразны. Простейшими примерами геометрических объектов служат скаляры – объекты 0-го ранга, контравариантные векторы и 1-формы (или ковариантные векторы) – объекты 1-го ранга.

   Рассмотрим алгебру этих объектов.

   - *Сложение.* В сложении могут участвовать объекты одинакового строения (с одинаковым числом индексов, их расположением и чередованием):

     $$A^{i.lm}_{.k} + B^{i.lm}_{.k} = C^{i.lm}_{.k}.$$

     Ранг суммы равен рангу каждого из слагаемых.

   - *Умножение на число:*

     $$B^{i...k}_{r...s} = a \cdot A^{i...k}_{r...s}.$$

   - *Внешнее произведение.* Внешним произведением объектов произвольного строения (например, $A^{i.lm}_{.k}$ и $B^{p.s}_{.r}$) называют объект C с компонентами

     $$C^{i.lmp.s}_{.k...r} = A^{i.lm}_{.k} \otimes B^{p.s}_{.r}.$$

     Как следствие определения отметим некоммутативность произведения геометрических объектов. Ранг внешнего произведения равен сумме рангов сомножителей.

- **Перестановка индексов.** Если произвольно переставить один или несколько индексов объекта A, то полученное образует *новый* объект B того же ранга. Такая операция называется перестановкой индексов. Рассмотрим частные случаи этой операции:
  - **симметризация**

$$B^i_{kl} = \frac{1}{2}(A^i_{kl} + A^i_{lk}) \equiv A^i_{(kl)}$$

или по трем индексам:

$$A_{(ikl)} = \frac{1}{3!}(A_{ikl} + A_{lik} + A_{kli} + A_{kil} + A_{lki} + A_{ilk});$$

  - **антисимметризация** (иначе альтернирование)

$$B_{ik} = \frac{1}{2}(A_{ik} - A_{ki}) \equiv A_{[ik]}$$

или по трем индексам:

$$A_{[ikl]} = \frac{1}{3!}(A_{ikl} + A_{lik} + A_{kli} - A_{kil} - A_{lki} - A_{ilk}).$$

Геометрический объект называется **симметричным**, если его ко- или контравариантные компоненты не меняются от перестановки двух или нескольких индексов, например,

$$A_{...kl...} = A_{...lk...},$$

и **антисимметричным** по отношению к данным индексам, если его компоненты меняют свой знак на обратный при любой нечетной перестановке индексов и остаются неизменными при любой четной, например,

$$A_{...ikl...} = -A_{...ilk...} = A_{...lik...}.$$

- **Свертка.** Эта операция возможна только над объектами, которые имеют не менее чем по одному ко- и контравариантному индексу. Свертка состоит в замене одного контравариантного (ковариантного) индекса на такой же ковариантный (контравариантный) с последующим суммированием по этому индексу. Например, для объекта A^i_{kl} свертка состоит в том, что индекс k заменяется на i с последующим суммированием:

$$B_l = A^i_{il} = A^1_{1l} + A^2_{2l} + A^3_{3l} + ...$$

В частности, скалярное произведение векторов a^i и b_k содержит две операции – их произведение $a^i \cdot b_k$ и последующую свертку:

$$\vec{a}\vec{b} = a^i \cdot b_i = a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3 + ...$$

Скалярное произведение – пример *внутреннего произведения*. Внешнее произведение со сверткой между сомножителями превращается во *внутреннее произведение* геометрических объектов. Например,

$$C^i_{.km} = A^{il}_{..m} \otimes B_{lk}.$$

Ранг внутреннего произведения равен сумме рангов сомножителей минус удвоенное число индексов, по которым проводилась свертка; в последнем примере свертка проводилась по одному индексу и ранг внутреннего произведения равен $3 = (3+2) - 2 \cdot 1$.

2. **Тензоры.** Как было отмечено выше, тензор типа $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ в точке P многообразия M – это линейная функция, аргументами которой служат m 1-форм и n векторов, а значениями этой функции являются вещественные числа. Поэтому ясно, что *компоненты такого тензора при допустимых преобразованиях координат преобразуются согласно*

$$A^{i...k}_{l...m} = \frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^n} ... \frac{\partial x^k}{\partial \acute{x}^p} \frac{\partial \acute{x}^r}{\partial x^l} ... \frac{\partial \acute{x}^s}{\partial x^m} \acute{A}^{n...p}_{r...s}. \tag{31}$$

Тензорный закон преобразования (31) обладает групповыми свойствами, что видно из известного правила

$$\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} = \frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^l} \frac{\partial \acute{x}^l}{\partial \tilde{x}^k}.$$

Заметим также, что геометрический объект, проявляющий тензорные свойства относительно одной группы преобразований, может не быть тензором относительно какой-либо другой.

Из закона преобразования тензоров следует, что если все компоненты тензора равны нулю в одной системе координат, то они остаются равными нулю в любой другой координатной системе. Это, в свою очередь, означает, что если физический закон имеет форму равного нулю тензорного соотношения, то этот закон будет иметь такую же форму в любой из допустимых координатных систем. Исходя из закона преобразования тензоров, можно показать, что симметричность и антисимметричность тензора – свойства абсолютные, т.е. не зависящие от выбора координатной системы.

Существует так называемый **"обратный тензорный признак"** (иногда его называют *строгой теоремой частного*), который позволяет выяснить, является ли геометрический объект тензором. Суть его состоит в следующем: пусть в результате свертки испытываемого объекта T^i_k с некоторым вектором A^k получается другой вектор B^i, т.е.

$$T^i_k A^k = B^i,$$

тогда можно утверждать, что T^i_k – тензор. В самом деле, учитывая закон преобразования контравариантного вектора и то обстоятельство, что в штрихованной системе координат $\acute{T}^i_k \acute{A}^k = \acute{B}^i$, имеем

$$T^i_k \frac{\partial x^k}{\partial \acute{x}^l} \acute{A}^l = \frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^m} \acute{B}^m = \frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^m} \acute{T}^m_l \acute{A}^l.$$

Помножим обе части равенства на $\partial \acute{x}^p / \partial x^i$ и, просуммировав по i, получим

$$\left(T^i_k \frac{\partial \acute{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial \acute{x}^l} - \acute{T}^p_l \right) \acute{A}^l = 0.$$

Поскольку вектор $\acute{A}^l$ произволен, то ясно, что T^i_k преобразуется, как тензор.

Докажем также, что свертка двух тензоров по одному индексу является тензором:

$$S^k_{in} = A^{km}_i B_{mn} = \frac{\partial x^k}{\partial \acute{x}^l} \frac{\partial x^m}{\partial \acute{x}^p} \frac{\partial \acute{x}^q}{\partial x^i} \acute{A}^{lp}_q \frac{\partial \acute{x}^r}{\partial x^m} \frac{\partial \acute{x}^t}{\partial x^n} \acute{B}_{rt} = \frac{\partial x^k}{\partial \acute{x}^l} \frac{\partial \acute{x}^q}{\partial x^i} \frac{\partial \acute{x}^t}{\partial x^n} \delta^r_p \acute{A}^{lp}_q \acute{B}_{rt}$$

$$= \frac{\partial x^k}{\partial \acute{x}^l} \frac{\partial \acute{x}^q}{\partial x^i} \frac{\partial \acute{x}^t}{\partial x^n} \acute{S}^l_{qt}.$$

Аналогично можно убедиться, что в результате полной свертки тензора, имеющего одинаковое число ко- и контравариантных индексов, получается скаляр.

Ранее исходя из определения фундаментальной матрицы $g_{ik} = \vec{e}_i \vec{e}_k$ и закона преобразования векторов локального базиса $\vec{e}_i$ был найден закон преобразования

$$g_{ik} = \frac{\partial \acute{x}^m}{\partial x^i} \frac{\partial \acute{x}^n}{\partial x^k} \acute{g}_{mn},$$

сравнивая который с (31) заключаем, что g_{ik}, так же как и g^{ik}, – тензорные величины, поэтому в дальнейшем, как это принято в геометрии, будем называть g_{ik} **фундаментальным** (или **метрическим**) тензором. Задание метрического тензора определяет расстояние между двумя бесконечно близкими точками:

$$dl^2 = g_{ik} dx^i dx^k.$$

По определению, если учесть векторный характер dx^i, это расстояние – инвариант.

Метрический и обратный ему тензор помимо прочего служат для поднятия и опускания индексов у векторов. Вполне аналогично используем их для перемещения индексов у тензоров. Например, для тензора 2-го ранга

$$T^{ik} = g^{il} g^{km} T_{lm}, \qquad T_{ik} = g_{il} g_{km} T^{lm}, \qquad T^i_k = g^{il} g_{km} T^m_l.$$

Теперь покажем, что символ Кронекера δ^i_k, определяемый соотношением

$$\delta^i_k = g^{il} g_{lk},$$

является единичным тензором 2-го ранга. Действительно,

$$\delta^i_k = g^{il} g_{lk} = \frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^m} \frac{\partial x^l}{\partial \acute{x}^n} \frac{\partial \acute{x}^p}{\partial x^l} \frac{\partial \acute{x}^q}{\partial x^k} \acute{g}^{mn} \acute{g}_{pq} = \frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^m} \frac{\partial \acute{x}^q}{\partial x^k} \delta^p_n \acute{g}^{mn} \acute{g}_{pq} =$$

$$= \frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^m} \frac{\partial \acute{x}^q}{\partial x^k} \acute{g}^{mn} \acute{g}_{nq} = \frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^m} \frac{\partial \acute{x}^q}{\partial x^k} \delta^m_q,$$

а единичность этого символа видна из

$$A^i = \delta^i_k A^k.$$

3. **Символ и тензор Леви-Чивиты. Плотность псевдотензора, тензорная плотность, псевдотензоры.** Совокупность величин $\epsilon_{ik...l}$ или $\epsilon^{ik...l}$ с числом индексов, совпадающим с размерностью пространства, антисимметричных по всем своим индексам ("совершенно антисимметричных величин"), причем $\epsilon_{123...n} = 1$, назовем **символом Леви-Чивиты**. Из определения следует, что

- если среди индексов есть одинаковые, то $\epsilon_{ik...l} = \epsilon^{ik...l} = 0$,
- если последовательность индексов получена из $123...n$ четной перестановкой, то $\epsilon_{ik...l} = \epsilon^{ik...l} = +1$,

- если последовательность индексов получена из $123...n$ нечетной перестановкой, то $\epsilon_{ik...l} = \epsilon^{ik...l} = -1$.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением 3-мерного случая, поскольку обобщение на n-мерный труда не представляет. Итак,

$$\epsilon_{ikl} = \epsilon^{ikl} = \begin{cases} +1, & ikl \text{ получено из } 1,2,3 \text{ четн. перест.,} \\ -1, & ikl \text{ получено из } 1,2,3 \text{ нечет. перест.} \end{cases}$$

В оставшихся случаях, т.е. при совпадении индексов, символ Леви-Чивиты равен нулю.

Прямым вычислением нетрудно убедиться, что определитель произвольной матрицы $\hat{A}$ с матричными элементами A^i_k связан с символом Леви-Чивиты соотношением

$$\epsilon_{mnp} \det(A^i_k) = \epsilon_{ikl} A^i_m A^k_n A^l_p.$$

В частности, если $\hat{A}$ – якобиева матрица преобразования координат, то якобиан Y выражается через символы Леви-Чивиты согласно

$$Y \epsilon_{mnp} = \epsilon_{ikl} \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^m} \frac{\partial \acute{x}^k}{\partial x^n} \frac{\partial \acute{x}^l}{\partial x^p}.$$

Это соотношение определяет трансформационные свойства символа Леви-Чивиты. Если преобразования координат имеют якобиан $Y = 1$, то ясно, что ϵ_{ikl} преобразуется, как ковариантный тензор 3-го ранга. Возникает вопрос: можно ли в произвольной системе координат ввести тензорную величину, аналогичную по своим свойствам символу Леви-Чивиты? Преобразуем с этой целью ϵ_{ikl} от системы координат, в которой эта величина – тензор, к произвольной системе координат. В результате получим тензор

$$E_{ikl} = \epsilon_{mnp} \frac{\partial \acute{x}^m}{\partial x^i} \frac{\partial \acute{x}^n}{\partial x^k} \frac{\partial \acute{x}^p}{\partial x^l};$$

учитывая закон преобразования символа Леви-Чивиты, получим

$$E_{ikl} = Y \epsilon_{ikl}.$$

С другой стороны, компоненты метрического тензора преобразуются согласно

$$g_{ik} = \frac{\partial \acute{x}^m}{\partial x^i} \frac{\partial \acute{x}^n}{\partial x^k} \acute{g}_{mn},$$

откуда

$$\det(g_{ik}) = Y^2 \cdot \det(\acute{g}_{mn}).$$

Допустим, что $\acute{g}_{mn}$ – метрический тензор в той координатной системе, в которой ϵ_{ikl} обладает тензорными свойствами. Такой системой координат является, например, декартова, где $\det(\acute{g}_{mn}) = 1$, поэтому

$$Y = \sqrt{g}, \quad \text{где} \quad g = |\det g|,$$

и величина

$$E_{ikl} = \sqrt{g} \epsilon_{ikl}$$

есть совершенно антисимметричный тензор 3-го ранга, который назовем **тензором Леви-Чивиты**. Контравариантные компоненты этого тензора

$$E^{ikl} = g^{im} g^{kn} g^{lp} E_{mnp} = \sqrt{g} g^{im} g^{kn} g^{lp} \epsilon_{mnp},$$

а детерминант любой матрицы, в частности g^{ik}, выражается через символ Леви-Чивиты согласно

$$\epsilon^{ikl} \det(g^{ik}) = g^{im} g^{kn} g^{lp} \epsilon_{mnp}.$$

Тогда

$$E^{ikl} = \sqrt{g} \epsilon^{ikl} \det(g^{ik}).$$

Ввиду того, что $g^{il} g_{lk} = \delta^i_k$, для $\det(g^{ik})$ имеем $\det(g^{ik}) = 1/g$, поэтому контравариантные компоненты совершенно антисимметричного тензора определяются символом Леви-Чивиты согласно

$$E^{ikl} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ikl}.$$

Определение символа Леви-Чивиты позволяет просто получить

$$\epsilon^{ikl} \epsilon_{mnp} \equiv \delta^{ikl}_{mnp} = \begin{Vmatrix} \delta^i_m & \delta^i_n & \delta^i_p \\ \delta^k_m & \delta^k_n & \delta^k_p \\ \delta^l_m & \delta^l_n & \delta^l_p \end{Vmatrix};$$

$$\epsilon^{ikl} \epsilon_{mnl} \equiv \delta^{ik}_{mn} = \begin{Vmatrix} \delta^i_m & \delta^i_n \\ \delta^k_m & \delta^k_n \end{Vmatrix};$$

$$\epsilon^{ikl} \epsilon_{mkl} = 2\delta^i_m, \quad \epsilon^{ikl} \epsilon_{ikl} = 3!.$$

(В n-мерном пространстве $\epsilon^{ik\ldots l}\epsilon_{ik\ldots l} = n!$.) Учитывая эти равенства, для детерминанта $\hat{A}$ получим

$$\det(A^i_k) = \frac{1}{3!}\epsilon^{mnp}\epsilon_{ikl}A^i_m A^k_n A^l_p,$$

а для якобиана координатных преобразований

$$Y = \frac{1}{3!}\epsilon^{mnp}\epsilon_{ikl}\frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial \acute{x}^k}{\partial x^n}\frac{\partial \acute{x}^l}{\partial x^p}.$$

Наряду с совершенно антисимметричным тензором Леви-Чивиты введем тензор, который остается неизменным при четной перестановке индексов и меняет знак при их нечетной перестановке, назовем его **совершенно антисимметричным тензором ранга, равного размерности пространства**. Такой тензор определяется всего одним числом. Например, в трехмерном пространстве

$$T_{123} = T_{312} = T_{231} = -T_{213} = -T_{321} = -T_{132} = T.$$

Понятно, что тензоры такого типа

$$T_{ikl} = T\epsilon_{ikl} \quad \text{или} \quad T^{ikl} = T\epsilon^{ikl},$$

а при преобразованиях координат

$$T = Y\acute{T}.$$

Действительно,

$$T = T_{123} = \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^1}\frac{\partial \acute{x}^k}{\partial x^2}\frac{\partial \acute{x}^l}{\partial x^3}\acute{T}_{ikl} = \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^1}\frac{\partial \acute{x}^k}{\partial x^2}\frac{\partial \acute{x}^l}{\partial x^3}\acute{T}\epsilon_{ikl} = Y\acute{T}\epsilon_{123} = Y\acute{T}.$$

В заключение приведем общее определение, которое позволяет классифицировать геометрические объекты по трансформационным свойствам.

Геометрический объект, компоненты которого при преобразованиях координат преобразуются согласно

$$A^{i\ldots k}_{l\ldots m} = Y^p \cdot sgnY\frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^n}\cdots\frac{\partial x^k}{\partial \acute{x}^p}\frac{\partial \acute{x}^r}{\partial x^l}\cdots\frac{\partial \acute{x}^s}{\partial x^m}\acute{A}^{n\ldots p}_{r\ldots s},$$

назовем **плотностью псевдотензора ранга** $n+m$ **и веса** $p \geq 0$.

Итак,

- при $sgnY = 1$ и $p = 0$ объект A является истинным тензором;
- при $sgnY = 1$ и $p \neq 0$ объект A называется **тензорной плотностью** веса p. Например, $\det(g_{ik})$ – скалярная плотность веса 2, а ϵ_{ikl} – тензорная плотность веса 1;
- при $sgnY = -1$ и $p = 0$ объект A называется **псевдотензором.**

4. **Ковариантная производная тензора. Абсолютный дифференциал.** Преимущества тензорного исчисления состоят прежде всего в возможности записывать уравнения в ковариантной форме, не зависящей от выбора системы координат. Поэтому при изложении тензорного анализа следует с самого начала определить операцию, с одной стороны, обладающую всеми основными свойствами частной производной, а с другой – сохраняющую тензорный характер. В предыдущем изложении было показано, что частная производная скалярной функции – ковариантный вектор, т.е. величина, тензорный характер которой очевиден. С тем чтобы сохранить тензорные свойства, было введено понятие ковариантной производной вектора. Это понятие поддается разумному обобщению на случай тензоров. В самом деле, нетрудно видеть, что при замене координат преобразование, соответствующее каждому из ко- или контравариантных тензорных индексов, идентично преобразованию ко- или контравариантных векторов. Поэтому, развивая эту аналогию, весьма правдоподобно предположить, что ковариантная производная тензора составляется из слагаемых трех типов:

- 1-й тип – частная производная тензора по соответствующей координате:
$$\frac{\partial T^{\cdots}_{\cdots}}{\partial x^k};$$
- 2-й тип, со знаком плюс, составляется для каждого контравариантного тензорного индекса (например, i в $T^{i\cdots}_{\cdots}$) в виде произведения компоненты тензора и символа Кристоффеля, причем этот контравариантный индекс i присваивается символу Кристоффеля, а вместо него ставится немой индекс, который приписывается и символу Кристоффеля в качестве одного из нижних индексов; второй нижний индекс у символа Кристоффеля – индекс дифференцирования k:
$$+\Gamma^i_{lk}T^{l\cdots}_{\cdots};$$

- 3-й тип, со знаком минус, составляется для каждого ковариантного тензорного индекса (например, m в $T^{\cdots}_{m..}$) в виде произведения компоненты тензора на символ Кристоффеля, причем этот индекс m заменяется на немой индекс суммирования, который приписывается также и символу Кристоффеля в качестве верхнего индекса; один из нижних индексов у символа Кристоффеля – индекс дифференцирования k, а второй – m:

$$-\Gamma^n_{mk}T^{\cdots}_{n..}.$$

При всей своей правдоподобности это предположение нуждается в доказательстве, к которому мы приступим. Рассмотрим для этого некий скаляр φ, который есть результат полной свертки тензора A^i_k и векторов b_l, c^m:

$$\varphi = A^i_k b_i c^k.$$

Найдем ковариантную производную φ, учитывая, что частная производная скалярной функции преобразуется, как компонента ковариантного вектора, и поэтому, в смысле тензорных свойств, совпадает с ковариантной производной:

$$\nabla_l\varphi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x^l} = \frac{\partial A^i_k}{\partial x^l}b_ic^k + A^i_k\left(\frac{\partial b_i}{\partial x^l}c^k + b_i\frac{\partial c^k}{\partial x^l}\right) =$$

$$= \frac{\partial A^i_k}{\partial x^l}b_ic^k + A^i_k\left[\left(\nabla_l b_i + \Gamma^m_{li}b_m\right)c^k + b_i\left(\nabla_l c^k - \Gamma^k_{lm}c^m\right)\right] =$$

$$= A^i_k\nabla_l(b_ic^k) + \left[\frac{\partial A^i_k}{\partial x^l} + \Gamma^i_{lm}A^m_k - \Gamma^m_{lk}A^i_m\right]b_ic^k.$$

Заметим, что согласно обратному тензорному признаку содержимое квадратных скобок последней части равенства есть тензор 3-го ранга. Сравнивая с очевидным соотношением

$$\nabla_l\varphi = A^i_k\nabla_l(b_ic^k) + (\nabla_l A^i_k)b_ic^k,$$

получим выражение для *ковариантной производной тензора* A^i_k:

$$\nabla_l A^i_k = \frac{\partial A^i_k}{\partial x^l} + \Gamma^i_{lm}A^m_k - \Gamma^m_{lk}A^i_m.$$

Итак, предположение, обобщающее понятие ковариантной производной вектора, доказано. Одновременно удалось показать, что *ковариантная производная повышает на единицу ранг тензора.*

Уместно ввести связанное с ковариантной производной понятие абсолютного дифференциала. **Абсолютным (ковариантным) дифференциалом** тензора A (иногда мы будем пользоваться таким обозначением тензора, подразумевая, что ему может быть приписано какое угодно число индексов и их расположение) назовем произведение ковариантной производной A по x^l на dx^l с последующим суммированием по l:

$$DA \equiv \nabla_l A \cdot dx^l.$$

Нетрудно понять, что абсолютный дифференциал DA имеет ранг тензора A (докажите!).

Для того, чтобы еще раз обосновать необходимость введения понятий ковариантной производной и абсолютного дифференциала, покажем, что dA_i не вектор (а $\partial A_i/\partial x^k$ не тензор). Действительно, поскольку dA_i есть разность векторов, расположенных в разных (хотя и бесконечно близких) точках пространства, в которых эти векторы преобразуются с различными (зависящими от точки) коэффициентами преобразования, dA_i не может преобразовываться, как вектор. В сказанном легко убедиться непосредственно:

$$dA_i = d\left(\frac{\partial \acute{x}^k}{\partial x^i}\acute{A}_k\right) = \frac{\partial \acute{x}^k}{\partial x^i}d\acute{A}_k + \acute{A}_k\frac{\partial^2\acute{x}^k}{\partial x^i\partial x^l}dx^l.$$

Таким образом, dA_i (так же как и $\partial A_i/\partial x^k$), вообще говоря, преобразуется не как вектор (тензор). dA_i превращается в компоненты вектора, а $\partial A_i/\partial x^k$ – тензора только в случае линейных преобразований координат, т.е. если вторая производная в последнем выражении обращается в нуль (например, в декартовых координатах). (Кстати, это неплохой пример уже обсуждавшейся ситуации, когда одна и та же величина является вектором (тензором) относительно одной группы преобразований координат и не является таковым относительно другой.) С другой стороны, ковариантная производная имеет тензорный характер, а в произвольных координатах играет такую же роль, что и $\partial A_i/\partial x^k$ в декартовых координатах.

Докажем важное утверждение – *фундаментальный (метрический) тензор ковариантно постоянен*, что означает обращение в нуль его ковариантной производной. Как и для любого тензора 2-го ранга,

$$\nabla_l g^{ik} = \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{lm}g^{mk} + \Gamma^k_{ln}g^{in}.$$

Подставив сюда выраженные через метрический тензор символы Кристоффеля

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^i m \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right),$$

получим

$$\nabla_l g^{ik} = \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + g^{in} g^{km} \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^l}.$$

Тензор g^{ik} можно рассматривать как результат поднятия индексов у g_{mn}, т.е. g^{ik} можно представить в виде

$$g^{ik} = g^{im} g^{kn} g_{mn}.$$

Продифференцировав это соотношение по x^l, получим

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = \frac{\partial g^{in}}{\partial x^l} \delta^k_n + \frac{\partial g^{km}}{\partial x^l} \delta^i_m + g^{in} g^{km} \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^l} = 2 \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + g^{in} g^{km} \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^l}$$

или

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = -g^{in} g^{km} \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^l} \quad \Longrightarrow \quad \nabla_l g^{ik} = 0.$$

Точно так же можно убедиться, что

$$\nabla_l g_{ik} = 0.$$

Наряду с метрическим тензором ковариантно постоянны символы Кронекера и Леви-Чивиты, первый – вследствие известного соотношения $g^{il} g_{lk} = \delta^i_k$, а второй – ввиду того, что выражается через определитель матрицы, элементами которой являются символы Кронекера, т.е. через сумму произведений δ^i_k.

5. **Тензоры, порождаемые производными первого порядка. Ковариантные производные второго порядка.** Рассмотрим геометрические объекты, которые получаются в результате ковариантного дифференцирования ко- и контравариантных тензоров.

   (a) **Градиент скалярной функции** получается как результат ковариантного дифференцирования скаляра и просто равен частной производной скаляра:

   $$\nabla_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \equiv (\varphi)_{,i}$$

   и поэтому преобразуется, как 1-форма.

   (b) **Дивергенция** получается как результат свертки одного из контравариантных индексов тензора с индексом ковариантного дифференцирования:

   $$\nabla_i T^{(i\ldots)}_{(\ldots)}.$$

   В результате получается тензор, ранг которого на единицу меньше ранга исходного тензора. В частности, дивергенция вектора (контравариантного) – скаляр. Покажем, что если дивергенция берется от вектора или антисимметричного тензора, то она простым образом выражается через частную производную. Действительно, согласно общему правилу

   $$\nabla_l T^{ik\ldots l} = \frac{\partial T^{ik\ldots l}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ml} T^{mk\ldots l} + \Gamma^k_{ml} T^{im\ldots l} + \ldots + \Gamma^l_{ml} T^{ik\ldots m}.$$

   Символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам, поэтому все слагаемые, содержащие $\Gamma^{(\cdot)}_{ml}$, за исключением последнего, обращаются в нуль, так как оба нижних индекса сворачиваются с индексами антисимметричного тензора. Таким образом,

   $$\nabla_l T^{ik\ldots l} = \frac{\partial T^{ik\ldots l}}{\partial x^l} + \Gamma^l_{ml} T^{ik\ldots m}.$$

   Подсчитаем Γ^l_{ml}:

   $$\Gamma^l_{ml} = \frac{1}{2} g^{ln} \left(\frac{\partial g_{nm}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{nl}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^n} \right) = \frac{1}{2} g^{ln} \frac{\partial g_{nl}}{\partial x^m}.$$

   - Докажем, что для любой матрицы $\hat{a}$ с элементами a_{ik} и детерминантом $a_0 = \det \hat{a}$

     $$\frac{\partial a_0}{\partial a_{ik}} = A^{ik}, \qquad (*)$$

     где

     $$A^{ik} = \frac{1}{(3-1)!} \epsilon^{ivw} \epsilon^{knp} a_{vn} a_{wp}$$

     – алгебраическое дополнение. (Предположено, что пространство трехмерно, обобщение на большее число измерений не представляет трудностей.) Считая определитель

     $$a_0 = \frac{1}{3!} \epsilon^{uvw} \epsilon^{mnp} a_{um} a_{vn} a_{wp}$$

функцией своих элементов a_{ik}, дифференцируя по a_{ik} с учетом того, что $\partial a_{uv}/\partial a_{ik} = \delta^i_u \delta^k_v$, получим

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_{ik}} = \frac{1}{3!}(\epsilon^{ivw}\epsilon^{knp}a_{vn}a_{wp}+\epsilon^{uiw}\epsilon^{mkp}a_{um}a_{wp}+\epsilon^{uvi}\epsilon^{mnk}a_{um}a_{vn}) =$$

$$= \frac{1}{3}(A^{ik} + A^{ik} + A^{ik}) = A^{ik}.$$

Предположим далее, что существует объект a^{ik}, для которого

$$a_{ik}a^{kl} = \delta^l_i.$$

Покажем, что

$$a^{kl} = \frac{A^{kl}}{a_0},$$

для чего подсчитаем свертку:

$$a_{ik}\frac{A^{kl}}{a_0} = \frac{1}{(3-1)!a_0}\epsilon^{kvw}\epsilon^{lnp}a_{vn}a_{wp}. \qquad (**)$$

Согласно известному соотношению

$$\epsilon_{inp}a_0 = \epsilon^{kuw}a_{ik}a_{nu}a_{pw} \Longrightarrow \epsilon^{lnp}\epsilon_{inp}a_0 = \epsilon^{lnp}\epsilon^{kuw}a_{ik}a_{nu}a_{pw},$$

и ввиду того, что

$$\epsilon^{lnp}\epsilon_{inp}a_0 = 2!a_0\delta^l_i,$$

после сравнения с $(**)$ имеем

$$a_{ik}\frac{A^{kl}}{a_0} = \delta^l_i. \qquad ({}^*_*)$$

Используя $(*)$ и $({}^*_*)$, получаем

$$\frac{1}{a_0}\frac{\partial a_0}{\partial x^m} = a^{kl}\frac{\partial a_{kl}}{\partial x^m}$$

или в общем виде для любой невырожденной матрицы $A(x)$

$$Sp\Big(A^{-1}\frac{\partial A}{\partial x^i}\Big) = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\ln(\det A)\Big).$$

Этот результат позволяет завершить вычисление

$$\Gamma^l_{ml} = \frac{1}{2}g^{nl}\frac{\partial g_{ln}}{\partial x^m} \Longrightarrow \Gamma^l_{ml} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^m}, \quad \text{где} \quad g = \det g_{ik},$$

и выражения для дивергенции антисимметричного тензора

$$\nabla_l T^{ik\ldots l} = \frac{\partial T^{ik\ldots l}}{\partial x^l} + \Gamma^l_{ml}T^{ik\ldots m} = \frac{\partial T^{ik\ldots l}}{\partial x^l} + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^m}T^{ik\ldots m}$$

или окончательно

$$\nabla_l T^{ik\ldots l} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^l}\Big(\sqrt{g}T^{ik\ldots l}\Big).$$

В частности, для вектора A^i и антисимметричного тензора 2-го ранга $A^{ik} = -A^{ki}$ имеем

$$\nabla_i A^i = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^l}\Big(\sqrt{g}A^l\Big), \qquad \nabla_i A^{ik} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\sqrt{g}A^{ik}\Big).$$

Подсчитаем теперь ковариантную дивергенцию для смешанных компонент симметричного тензора $A^{ik} = A^{ki}$. Имеем

$$\nabla_k A^k_i = \frac{\partial A^k_i}{\partial x^k} + \Gamma^k_{lk}A^l_i - \Gamma^l_{ki}A^k_l = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\Big(\sqrt{g}A^k_i\Big) - \Gamma^l_{ki}A^k_l.$$

Последнее слагаемое здесь равно

$$-\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}A^{kl}\Big).$$

Из-за симметрии A^{kl} первый и третий члены сокращаются, и окончательно

$$\nabla_k A^k_i = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\Big(\sqrt{g}A^k_i\Big) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}A^{kl}.$$

(c) **Ротор**. Контравариантный вектор

$$R^m = \frac{1}{(n-2)!}\frac{\epsilon^{mli\ldots k}}{\sqrt{g}}\frac{\partial A_{i\ldots k}}{\partial x^l}$$

назовем ротором антисимметричного тензора $A_{i\ldots k}$ ранга $n-2$. В согласии с этим в трехмерном пространстве вектор ротора определяется следующим образом:

$$R^i = \frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{ikl}\frac{\partial A_l}{\partial x^k}.$$

Таким образом, в трехмерии вектор ротора сопоставляется вектору и только в пространствах размерности $n \geq 4$ он может быть сопоставлен антисимметричным тензорам (в четырехмерии – тензору 2-го ранга и т.д.). Антисимметричному тензору 2-го ранга можно сопоставить так называемый **тензор Стокса – Пуанкаре**, который в этом частном случае имеет вид

$$P_{ikl} = \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}, \quad F_{ik} = -F_{ki}.$$

Интересно отметить, что если

$$F_{ik} = \nabla_i A_k - \nabla_k A_i = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k},$$

то прямой подстановкой можно убедиться, что в этом случае тензор Стокса – Пуанкаре равен нулю. (В последнем соотношении разность ковариантных производных совпадает с разностью частных производных, так как слагаемые с символами Кристоффеля у выражений ковариантных производных из-за симметрии этих символов по нижним индексам сокращаются.)

Замечание. Операция *дуальности* позволяет построить новые тензоры из антисимметричных тензоров. В трехмерии для любого вектора V_i и любого антисимметричного тензора второго ранга $T_{ik} = T_{[ik]}$ новые тензоры определяются равенствами

$$*V^{kl} = \frac{\epsilon^{kli}}{\sqrt{g}} V_i, \qquad *T^l = \frac{\epsilon^{lik}}{\sqrt{g}} T_{[ik]}.$$

Тензоры со звездой называют дуальными тем тензорам, из которых они построены. В четырехмерном пространстве дуальные тензоры сопоставляются вектору, антисимметричному тензору 2-го ранга и антисимметричному тензору 3-го ранга по правилам

$$*F^m = \frac{1}{3!}\frac{\epsilon^{mikl}}{\sqrt{g}} F_{[ikl]}, \qquad *T^{lm} = \frac{1}{2}\frac{\epsilon^{lmik}}{\sqrt{g}} T_{[ik]},$$

$$*V^{klm} = \frac{\epsilon^{klmi}}{\sqrt{g}} V_i.$$

Теперь нетрудно убедиться в том, что ротор – это вектор, дуальный тензору Стокса – Пуанкаре. Действительно, в

четырехмерии

$$*F^m = \frac{1}{3!}\frac{\epsilon^{mikl}}{\sqrt{g}} P_{[ikl]} = \frac{1}{3!}\frac{\epsilon^{mikl}}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}\right) =$$

$$= \frac{1}{3!}\frac{\epsilon^{mikl}}{\sqrt{g}} 3\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} = \frac{1}{2!\sqrt{g}}\epsilon^{mlik}\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}$$

совпадает с определением ротора антисимметричного тензора F_{ik}.

(d) **Ковариантные производные второго порядка.** Каким будет результат свертки g^{ik} с дважды ковариантно продифференцированным скаляром φ? Обозначим такую конструкцию

$$\Delta\varphi \equiv g^{ik}\nabla_i\nabla_k\varphi$$

и назовем ее **оператором Лапласа**. Легко показать, что $\Delta\varphi$ достаточно просто выражается через обычные производные. В самом деле,

$$\Delta\varphi = g^{ik}\nabla_i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right) = g^{ik}\left(\frac{\partial\varphi_{,k}}{\partial x^i} - \Gamma^l_{ik}\varphi_{,l}\right).$$

Подсчитаем свертку:

$$g^{ik}\Gamma^l_{ik} = \frac{1}{2}g^{ik}g^{lm}\left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right).$$

Поскольку

$$g^{lm}g_{mi} = \delta^l_i \Longrightarrow g^{lm}\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} = -g_{mi}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^k} \Longrightarrow \frac{1}{2}g^{ik}g^{lm}\left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i}\right)$$

$$= -\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^m},$$

то

$$g^{ik}\Gamma^l_{ik} = -\frac{1}{2}g^{ik}g^{lm}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} - \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^m} = -\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^m} - \frac{g^{lm}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^m} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^m}(\sqrt{g}g^{lm}).$$

Подставив это в выражение для оператора Лапласа:

$$\Delta\varphi = g^{ik}\left(\frac{\partial\varphi_{,k}}{\partial x^i} - \Gamma^l_{ik}\varphi_{,l}\right) = g^{im}\frac{\partial\varphi_{,i}}{\partial x^m} + \frac{\varphi_{,i}}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^m}(\sqrt{g}g^{im}),$$

получим его ковариантное выражение

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right).$$

III. Векторный анализ в трехмерном евклидовом пространстве

1. **Системы ортогональных координат.** Систему криволинейных координат назовем ортогональной, если в каждой точке (x^1, x^2, x^3) векторы локального базиса, так же как и координатные линии, взаимно перпендикулярны, а из компонент метрического тензора $g_{ik}(x^1, x^2, x^3)$ только диагональные отличны от нуля. Простейшие примеры ортогональных криволинейных координат – это цилиндрические координаты (вместе со своим частным случаем – полярными координатами) и сферические координаты. В произвольных системах координат "расстояние между двумя близкими точками"

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k,$$

а в ортогональной системе координат

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2.$$

Введем "элемент длины" по каждой из координатных линий ортогональной системы:

$$dl_i = \sqrt{g_{ii}}dx^i \text{ (суммирования по } i \text{ нет)},$$

тогда

$$ds^2 = (dl^1)^2 + (dl^2) + (dl^3)^2,$$

а для элемента объема

$$dV = dl_1 dl_2 dl_3 = \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}dx^1dx^2dx^3 = \sqrt{g}dx^1dx^2dx^3.$$

В цилиндрических координатах

$$ds^2 = g_{\rho\rho}d\rho^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2 + g_{zz}dz^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2,$$

$$dl_\rho = d\rho, \quad dl_\phi = \rho d\phi, \quad dl_z = dz, \qquad dV = \rho d\rho d\phi dz.$$

В сферических координатах

$$ds^2 = g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2,$$

$$dl_r = dr, \quad dl_\theta = r d\theta, \quad dl_\phi = r\sin\theta d\phi, \qquad dV = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi.$$

Как в цилиндрических, так и в сферических координатах векторы локального базиса не единичны и не безразмерны. Возникает вопрос: можно ли ввести такую систему координат, в которой в каждой точке базисные векторы являются безразмерными и единичными? Этого можно достичь, если в качестве базисных векторов выбрать

$$\hat{e}_i = \frac{\vec{e}_i}{|\vec{e}_i|}.$$

В ортогональной системе координат $|\vec{e}_i|^2 = g_{ii}$ (суммирования по i нет), т.е.

$$\hat{e}_i = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\vec{e}_i.$$

Тогда в цилиндрической системе

$$\hat{e}_\rho = \vec{e}_\rho, \qquad \hat{e}_z = \vec{e}_z, \qquad \hat{e}_\phi = -\vec{i}\sin\phi + \vec{j}\cos\phi,$$

а в сферической системе

$$\hat{e}_r = \vec{e}_r, \qquad \hat{e}_\theta = \vec{i}\cos\theta\cos\phi + \vec{j}\cos\theta\sin\phi - \vec{k}\sin\theta,$$

$$\hat{e}_\phi = -\vec{i}\sin\phi + \vec{j}\cos\phi.$$

Любая векторная функция $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(x,y,z)$ может быть однозначно представлена в виде

$$\vec{A} = \hat{A}^i\hat{e}_i = A^i\vec{e}_i = A_i\tilde{\omega}^i,$$

где $\hat{A}^i$ – так называемые "физические" компоненты вектора $\vec{A}^i$. Легко видеть, что

$$\hat{A}^i\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\vec{e}_i = A^i\vec{e}_i \Longrightarrow \hat{A}^i = \sqrt{g_{ii}}A^i \quad \text{или} \quad \hat{A}^k = \sqrt{g^{kk}}A_k.$$

В каждой точке пространства как базисные векторы $\hat{e}_i$, так и "физические" компоненты вектора $\vec{A}^i$ касательны к координатным линиям. Из-за наличия множителей $\sqrt{g_{ii}}$ и $\sqrt{g^{ii}}$ "физические" компоненты не подчиняются законам преобразования компонент векторов и поэтому не являются ковариантными величинами.

Связь "физических" компонент векторов в цилиндрической или сферической системах координат с соответствующими компонентами в декартовой системе можно найти достаточно просто, имея компоненты метрического тензора. Например,

- в сферических координатах

$$\hat{A}^r = \sqrt{g_{rr}}A^r = A^r = g^{rr}A_r = A_r = \frac{\partial x^i}{\partial r}A_i = \frac{\partial x}{\partial r}A_x + \frac{\partial y}{\partial r}A_y + \frac{\partial z}{\partial r}A_z.$$

Следовательно,

$$\hat{A}^r = A^r = A_r = A_x \sin\theta\cos\phi + A_y \sin\theta\sin\phi + A_z\cos\theta.$$

Точно так же

$$\hat{A}^\theta = \sqrt{g^{\theta\theta}}A_\theta = \sqrt{g^{\theta\theta}}\frac{\partial x^i}{\partial\theta}A_i = \sqrt{g^{\theta\theta}}\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}A_x + \frac{\partial y}{\partial\theta}A_y + \frac{\partial z}{\partial\theta}A_z\right),$$

поэтому

$$\hat{A}^\theta = A_x\cos\theta\cos\phi + A_y\cos\theta\sin\phi - A_z\sin\theta, \quad A^\theta = r\hat{A}^\theta, \quad A_\theta = \frac{\hat{A}^\theta}{r}.$$

$$\hat{A}^\phi = -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi, \quad A^\phi = r\sin\theta\hat{A}^\phi, \quad A_\phi = \frac{\hat{A}^\phi}{r\sin\theta}.$$

В частности, "физические" компоненты градиента

$$(grad\psi)^{\hat{i}} = \sqrt{g^{ii}}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}, \quad (grad\psi)^{\hat{r}} = \frac{\partial\psi}{\partial r},$$

$$(grad\psi)^{\hat{\theta}} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad (grad\psi)^{\hat{\phi}} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}.$$

Аналогично этому

- в цилиндрических координатах

$$A^{\hat{\rho}} = A^\rho = A_\rho = A_x\cos\phi + A_y\sin\phi, \quad A^{\hat{z}} = A_{\hat{z}} = A^z = A_z,$$

$$A^{\hat{\phi}} = -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi, \quad A^\phi = \rho A^{\hat{\phi}}, \quad A_\phi = \frac{A^{\hat{\phi}}}{\rho}.$$

А "физические" компоненты градиента имеют следующий вид:

$$(grad\psi)^{\hat{\rho}} = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}, \quad (grad\psi)^{\hat{\phi}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}, \quad (grad\psi)^{\hat{z}} = \frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Далее в этом разделе, если это специально не оговорено, используются декартовы координаты, поэтому ко- и контравариантные индексы различаются только для того, чтобы сохранить принятое правило суммирования Эйнштейна.

2. **Векторное произведение, смешанное произведение, двойное векторное произведение.** Векторное произведение векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в трехмерном евклидовом пространстве по определению есть

$$\vec{a} = [\vec{b},\vec{c}] = \left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{matrix}\right\| = \vec{i}(b_yc_z - c_yb_z) + \vec{j}(b_zc_x - c_zb_x) + \vec{k}(b_xc_y - c_xb_y).$$

Нетрудно убедиться, что в компонентах это определение выглядит следующим образом:

$$a^i = \epsilon^{ikl}b_kc_l,$$

а в криволинейных координатах

$$a^i = \frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{ikl}b_kc_l.$$

Теперь без труда можно показать, что смешанное произведение допускает циклические перестановки:

$$\vec{a}[\vec{b},\vec{c}] = \vec{c}[\vec{a},\vec{b}] = \vec{b}[\vec{c},\vec{a}].$$

Действительно,

$$\vec{a}[\vec{b},\vec{c}] = a_i\epsilon^{ikl}b_kc_l = c_l\epsilon^{lik}a_ib_k = b_k\epsilon^{kli}c_la_i.$$

В тензорных обозначениях легко получить также формулу для двойного векторного произведения:

$$[\vec{a}[\vec{b},\vec{c}]]_i = \epsilon_{ikl}a^k\epsilon^{lmn}b_mc_n = (\delta_i^m\delta_k^n - \delta_k^m\delta_i^n)a^kb_mc_n =$$

$$= b_ia^nc_n - c_ia^kb_k = b_i(\vec{a}\vec{c}) - c_i(\vec{a}\vec{b}).$$

Два полезных тождества – так называемое **тождество Якоби**

$$[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]] + [\vec{c}[\vec{a}\vec{b}]] + [\vec{b}[\vec{c}\vec{a}]] = 0$$

и

$$[\vec{a},\vec{b}]^2 = a^2b^2 - (\vec{a}\vec{b})^2$$

доказаны в разделе "Упражнения".

3. **Векторный анализ в тензорных обозначениях.** Основная задача векторного анализа состоит в том, чтобы дифференцированием заданных скалярных или векторных функций получить новые величины, которые обладают ковариантными свойствами, т.е. преобразуются, как скаляры или векторы. Как было отмечено выше, такими свойствами в произвольной системе координат обладает оператор ковариантного дифференцирования, который в трехмерной декартовой системе координат можно представить в виде

$$\vec{\nabla} = \nabla_i \tilde{\omega}^i = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \pm \Gamma_{i.}\right)\tilde{\omega}^i = \vec{k}^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad \vec{k}^i = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}.$$

Итак, дифференциальный оператор, который обычно называют **оператором набла**

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

может служить генератором новых скалярных или векторных полей.

(a) **Скалярное поле, поверхности уровня и градиент.** Пусть в некоторой области пространства M задана однозначная и непрерывная вместе с непрерывными частными производными первого порядка функция $\varphi = \varphi(x, y, z)$. В таком случае говорят, что в M задано скалярное поле. Точки, в которых функция $\varphi(x, y, z)$ принимает одно и то же значение, принадлежат поверхности

$$\varphi(x, y, z) = C, \qquad C = const.$$

Семейство поверхностей одинаковых значений $\varphi(x, y, z)$, которое параметризуется константами $C_1, C_2, ...$, называется **поверхностями уровня** или **эквипотенциальными поверхностями** скалярного поля $\varphi(x, y, z)$. Например, температура воздуха (атмосферное давление) в разных точках пространства образует поле температур (поле давлений), а поверхности, образованные точками с одинаковыми значениями температуры $(T_1, T_2, ...)$ (давления $(P_1, P_2, ...)$), являются изотермическими (изобарическими) поверхностями уровня.

Другие примеры:

- Заряд e, расположенный в начале координат, создает поле, потенциал которого в произвольной точке A с координатами x, y, z есть

$$\varphi = \frac{e}{r}, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Скалярное поле определено везде, кроме начала координат $r = 0$.

- Скалярное поле

$$\varphi = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}$$

определено лишь в части пространства, ограниченной сферой $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ с центром в начале координат, так как φ принимает действительные значения только при условии $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$. Поверхностями уровня будет семейство концентрических сфер $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 - C^2$.

- Скалярное поле с потенциалом

$$\varphi = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

определено во всех точках вне и на поверхности кругового конуса, уравнение которого имеет вид $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Эквипотенциальные поверхности определяются уравнением $z^2 = (x^2 + y^2)\sin^2 C$.

Каждой точке скалярного поля можно сопоставить 1-форму как результат действия оператора набла на потенциал скалярного поля. Полученная в результате 1-форма

$$\vec{\nabla}\varphi \equiv grad\varphi = \vec{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \qquad (grad\varphi)_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$$

– это уже знакомый нам *градиент скалярной функции*

$$\varphi(x, y, z),$$

который образует поле 1-форм. Таким образом, оператор набла по заданному скалярному полю генерирует поле 1-форм. (Заметим, что если используются декартовы координаты, то поля вектора и 1-форм идентичны, поэтому во многих руководствах по векторному анализу поле градиента называют векторным полем, а сам градиент – вектором.) Рассмотрим точку $Q \in M$ из области задания скалярного поля $\varphi(x, y, z)$ и связанный с этой точкой вектор $\vec{s}$. Составим отношение

$$\frac{\varphi(P) - \varphi(Q)}{PQ},$$

где $\varphi(P)$ и $\varphi(Q)$ – значения потенциала в точках $P, Q \in M$. Допустим, что существует предел отношения при стремлении P к Q в направлении вектора $\vec{s}$. Величину

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{s}} = \lim_{P \to Q} \frac{\varphi(P) - \varphi(Q)}{PQ},$$

которая характеризует скорость изменения скалярного поля φ в направлении $\vec{s}$, назовем производной скалярной функции $\varphi(x, y, z)$ в точке Q по направлению $\vec{s}$. Кроме того, ясно, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{s}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \vec{s}} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \vec{s}} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \vec{s}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\cos\gamma,$$

где α, β, γ – углы между осями x, y, z и вектором $\vec{s}$ соответственно. Итак, производная по направлению – это проекция градиента на это направление, и если $\vec{\tau} = \vec{s}/s$ – единичный вектор в направлении $\vec{s}$, то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{s}} = \vec{\tau} \cdot grad\varphi = grad_{\vec{\tau}}\varphi = grad\varphi \cdot \cos\psi,$$

где ψ – угол между направлениями $\vec{\tau}$ и $grad\varphi$. Если $\vec{\tau}$ расположен в плоскости, касательной к эквипотенциальной поверхности, то $\partial\varphi/\partial\vec{s} = 0$, так как на эквипотенциальной поверхности $\varphi = const$. Таким образом, $grad\varphi$ направлен в сторону возрастания φ по нормали к эквипотенциальной поверхности (т.е. перпендикулярен плоскости, которая касательна к поверхности уровня в каждой точке) и численно равен скорости изменения функции $\varphi(x, y, z)$ по этому направлению. Рассмотрим два примера.

i. Найдем $gradf(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$$gradf(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k};$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \Longrightarrow gradf(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r}.$$

В частности,

$$f(r) = r \Longrightarrow grad(r) = \frac{\vec{r}}{r}, \qquad f(r) = \frac{1}{r} \Longrightarrow grad\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

ii. Найдем $grad(\vec{a} \cdot \vec{r})$, где $\vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z$ – постоянный вектор:

$$\vec{a} \cdot \vec{r} = xa_x + ya_y + za_z \Longrightarrow grad(\vec{a} \cdot \vec{r}) = \vec{a}.$$

Используя полученные ранее формулы, приведем для справок выражения градиента в декартовых, цилиндрических и сферических координатах:

$$\vec{\nabla}\varphi = \hat{e}_i \cdot (grad\varphi)^i =$$

$$= \vec{i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} =$$

$$= \hat{e}_\rho \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \hat{e}_\phi \cdot \frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial \phi} + \hat{e}_z \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} =$$

$$= \hat{e}_r \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \hat{e}_\theta \cdot \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \hat{e}_\phi \cdot \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \varphi}{\partial \phi}.$$

Полезно ввести также понятие *производной векторной функции $\vec{a}$ по направлению $\vec{c}$*. Составим для этого скалярное произведение $\vec{c}$ и $\vec{\nabla}$ и получившимся скалярным дифференциальным оператором подействуем на векторную функцию $\vec{a}$. В результате получим производную $\vec{a}$ по направлению $\vec{c}$:

$$(\vec{c} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} = \vec{i}\left(c_x\frac{\partial}{\partial x} + c_y\frac{\partial}{\partial y} + c_z\frac{\partial}{\partial z}\right)a_x +$$

$$+ \vec{j}\left(c_x\frac{\partial}{\partial x} + c_y\frac{\partial}{\partial y} + c_z\frac{\partial}{\partial z}\right)a_y + \vec{k}\left(c_x\frac{\partial}{\partial x} + c_y\frac{\partial}{\partial y} + c_z\frac{\partial}{\partial z}\right)a_z$$

или в компонентах

$$(\vec{c} \cdot \vec{\nabla})a_i = c_k\frac{\partial a_i}{\partial x^k}.$$

(b) **Векторное поле, векторные линии, поток векторного поля, дивергенция.** Если каждой точке некоторой области пространства M сопоставлена векторная функция $\vec{A}(x, y, z)$, то говорят, что в этой области определено *векторное поле* $\vec{A}$. Иначе говоря, задать векторное поле означает каждой точке $P \in M$ поставить в соответствие одну векторную $\vec{A}(P) = \vec{A}(\vec{r})$ или три скалярные $A_x(\vec{r}), A_y(\vec{r}), A_z(\vec{r})$ функции.

Для графического изображения векторного поля вводят понятие векторных, или силовых, линий, которые имеют также и определенный физический смысл. Кривую, в каждой точке которой касательная к ней совпадает с направлением векторного поля в точке касания, назовем *векторной (или силовой) линией.* Через каждую точку векторного поля, вообще говоря, проходит одна векторная линия, касательная к которой совпадает с вектором $\vec{A}$ в этой точке. В качестве наглядного примера векторного поля рассмотрим поток несжимаемой жидкости. Допустим, что в каждой точке жидкость движется со скоростью, которая зависит только от положения точки, но не зависит от времени – так называемое стационарное течение. Вектор скорости жидкости $\vec{v}(x, y, z)$ дает в каждой точке направление, по которому будет продвигаться частица, попавшая в эту точку, а векторные линии будут линиями тока жидкости.

Найдем систему дифференциальных уравнений, определяющую векторные линии поля. Поскольку элемент длины $d\vec{l}$ векторной линии направлен по касательной к ней, то в силу определения векторной линии образующий поле вектор $\vec{A}$ и $d\vec{l}$ коллинеарны, т.е. имеют пропорциональные проекции:

$$\frac{dl_1}{\hat{A}^1} = \frac{dl_2}{\hat{A}^2} = \frac{dl_3}{\hat{A}^3}.$$

Поэтому уравнения

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}, \qquad \frac{d\rho}{A^\rho} = \frac{\rho d\phi}{A^\phi} = \frac{dz}{A^z}, \qquad \frac{dr}{A^r} = \frac{rd\theta}{A^\theta} = \frac{r\sin\theta d\phi}{A^\phi}$$

являются дифференциальными уравнениями векторных (силовых) линий поля $\vec{A}$ в декартовых, цилиндрических и сферических координатах.

Введем теперь понятие **поток вектора**. Допустим, что попрежнему векторное поле определяется функцией $\vec{A}(x, y, z)$. Назовем потоком вектора $\vec{A}(x, y, z)$ через произвольную поверхность S

$$\Phi = \int_S \vec{A}d\vec{\sigma} = \int_S A_n d\sigma,$$

где $d\vec{\sigma} = \vec{n}d\sigma$, а $d\sigma$ – элемент рассматриваемой поверхности S, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к этой поверхности. Физический смысл этого определения прозрачен: если считать $\vec{A}(x, y, z)$ вектором скорости некоторого потока несжимаемой жидкости, то количество жидкости, которое протекает в единицу времени через

произвольную поверхность S, находящуюся в этом потоке, очевидно, совпадает с Φ.

Поток вектора – скалярная величина. Учитывая $d\vec{\sigma} = dydz\vec{i} + dxdz\vec{j} + dxdy\vec{k}$ и разложение $\vec{A}$ по ортам той же координатной системы, представим Φ в форме поверхностного интеграла по координатам:

$$\Phi = \int_S \vec{A}d\vec{\sigma} = \int_S A_n d\sigma = \int_S A_x \cdot dydz + A_y \cdot dxdz + A_z \cdot dxdy.$$

Особый интерес представляет случай, когда поверхность S замкнута и ограничивает некий объем V. Сформулируем и примем без доказательства часто используемую теорему, известную как **теорема Гаусса – Остроградского**:

Поток вектора $\vec{A}$ через замкнутую поверхность S равен интегралу от $div\vec{A}$, взятому по объему V, причем S охватывает этот объем:

$$\oint_S \vec{A}d\vec{\sigma} = \int_V div\vec{A}dV.$$

Здесь $div\vec{A}$ – дивергенция векторного поля $\vec{A}$ – операция, определенная ранее, которая по заданному векторному порождает скалярное поле:

$$div\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}.$$

Используя полученные выше соотношения и формулы, приведем выражения для

$$\nabla_i \hat{A}^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\sqrt{g} \hat{A}^l \right) :$$

- в декартовых координатах

$$div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

- в цилиндрических координатах

$$div\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A^\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A^\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A^z}{\partial z},$$

- в сферических координатах

$$div\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A^r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A^\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A^\phi}{\partial \phi}.$$

Теорема Гаусса – Остроградского позволяет выяснить физический смысл дивергенции. Вернемся к аналогии с потоком жидкости. Поток жидкости через замкнутую поверхность равен нулю, если количество жидкости, вытекающей из объема, ограниченного рассматриваемой замкнутой поверхностью, равно количеству жидкости, втекающей в этот объем, т.е. если или число источников и стоков жидкости в объеме одинаково, или их нет. Если жидкость вытекает из объема, то, так как угол между $\vec{n}$ и скоростью жидкости острый, поток через замкнутую S положителен, а суммарное число источников в объеме больше числа стоков. И, наконец, если жидкость втекает в объем, то угол между $\vec{n}$ и скоростью жидкости тупой, поток через поверхность отрицателен, а суммарное число источников в объеме меньше числа стоков. Теперь ясно, что согласно теореме Гаусса – Остроградского можно утверждать следующее:

- если в какой-либо области пространства $div\vec{A} = 0$, то суммарное число источников и стоков векторного поля $\vec{A}$ равно нулю. Другими словами, векторные линии $\vec{A}$ замкнуты (нигде не начинаются и нигде не кончаются);
- если в какой-либо области пространства $div\vec{A} > 0$, то суммарное число источников больше числа стоков, т.е. векторные линии $\vec{A}$ выходят из этой области (начинаются на одной или нескольких точках внутри области);
- если в какой-либо области пространства $div\vec{A} < 0$, то суммарное число источников меньше числа стоков, т.е. векторные линии $\vec{A}$ входят в эту область (заканчиваются на одной или нескольких точках внутри области).

Два свойства дивергенции:

- $$div(\vec{a} + \vec{b}) = div\vec{a} + div\vec{b}.$$

  Действительно,

  $$div(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{\partial(\vec{a} + \vec{b})^i}{\partial x^i} = \frac{\partial \vec{a}^i}{\partial x^i} + \frac{\partial \vec{b}^i}{\partial x^i} = div\vec{a} + div\vec{b}.$$

- $$div(\varphi \cdot \vec{a}) = \frac{\partial(\varphi \cdot \vec{a})^i}{\partial x^i} = \varphi\frac{\partial \vec{a}^i}{\partial x^i} + \vec{a}^i\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \varphi \cdot div\vec{a} + \vec{a} \cdot grad\varphi.$$

(c) **Интеграл по контуру, циркуляция вектора, ротор, лапласиан.** Рассмотрим некоторую дугу произвольной кривой L в поле вектора $\vec{A}$. Дифференциал $d\vec{r}$ радиуса-вектора точки, которая перемещается вдоль L, лежит на касательной к этой кривой и, как известно, имеет модуль, равный дифференциалу дуги dl. Криволинейный интеграл

$$W = \int_L \vec{A}d\vec{l} = \int_L \vec{A}d\vec{r} = \int_L (A_x dx + A_y dy + A_z dz)$$

называют **линейным интегралом** или **интегралом по контуру**. Его можно интерпретировать как работу "сил" векторного поля $\vec{A}$ при перемещении точки по кривой L. (Здесь $d\vec{l}$ означает вектор, направленный по касательной к кривой в данной точке, модуль которого равен дифференциалу дуги dl.) В случае, когда кривая L замкнута и этот интеграл берется по всей кривой, он называется **циркуляцией** C вектора вдоль кривой L:

$$C = \oint_L \vec{A}d\vec{l} = \oint_L A_l dl = \oint_L (A_x dx + A_y dy + A_z dz)$$

(в правой системе координат контур принято обходить против часовой стрелки).

Сформулируем и примем без доказательства еще одну часто используемую интегральную теорему, известную как **теорема Стокса**:

Циркуляция вектора $\vec{A}$ по замкнутому контуру L равна потоку вектора $rot\vec{A}$ через находящуюся в рассматриваемом векторном поле произвольную поверхность S, на которую опирается линия L:

$$\oint_L \vec{A}d\vec{r} = \int_S rot\vec{A}d\vec{\sigma} \quad \text{или} \quad \oint_L \vec{A}_l dl = \int_S rot_n\vec{A}d\sigma.$$

Здесь вектор $rot\vec{A}$ – ротор векторного поля $\vec{A}$ – операция, определенная ранее, которая по заданному векторному полю порождает новое векторное поле:

$$rot\vec{A} = (rot\vec{A})^i\hat{e}_i = \hat{e}_i\frac{\epsilon^{ikl}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\hat{A}_k}{\partial x^l}.$$

Прямой расчет показывает, что в эквивалентной записи

$$rot\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{g}}\begin{Vmatrix} \hat{e}_{x^1} & \hat{e}_{x^2} & \hat{e}_{x^3} \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ \hat{A}_{x^1} & \hat{A}_{x^2} & \hat{A}_{x^3} \end{Vmatrix}.$$

Используя теперь полученные выше нужные соотношения, найдем выражения для $rot\vec{A}$:

- в декартовых координатах

$$rot\vec{A} = [\vec{\nabla}, \vec{A}] = \begin{Vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{Vmatrix},$$

- в цилиндрических координатах

$$rot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\begin{Vmatrix} \hat{e}_\rho & \hat{e}_\phi & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{Vmatrix},$$

- в сферических координатах

$$rot\vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\begin{Vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\theta & \hat{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\phi \end{Vmatrix}.$$

Векторное поле $\vec{A}$ с равным нулю ротором $rot\vec{A} = 0$ называют **безвихревым** или **потенциальным**. Происхождение этого названия легко прояснить, если учесть соотношение $rotgradu = [\vec{\nabla}, \vec{\nabla}u] \equiv 0$, которое означает, что любой вектор с равным нулю ротором можно представить как градиент некоторой скалярной функции, которую принято называть потенциалом поля, созданного этим вектором. На основании теоремы Стокса можно заключить, что в потенциальном векторном поле работа "сил" вектора по замкнутому контуру равна нулю, а это означает, что работа не зависит от пути, по которому эти "силы" перемещают точку между двумя фиксированными положениями, или *работа потенциального векторного поля вдоль некоторой кривой не зависит от формы этой кривой и равна разности значений потенциала поля в начальной и конечной точках.* Верно и обратное утверждение: векторное поле является потенциальным (т.е. имеет нулевой ротор), если работа поля вдоль любой замкнутой кривой равна нулю. Основная особенность потенциального векторного поля состоит в том, что потенциальное векторное поле вполне определяется одной скалярной функцией – его потенциалом, тогда как для задания произвольного векторного поля требуется задание трех скалярных функций – проекций вектора на оси координат.

Помимо этого, ротор обладает и следующими свойствами:

- Дивергенция ротора векторного поля равна нулю. Действительно,

$$div(rot\vec{A}) = \vec{\nabla}[\vec{\nabla}, \vec{A}] = \vec{A}[\vec{\nabla}, \vec{\nabla}] = 0.$$

Другими словами, векторное поле, созданное ротором любого вектора, *соленоидально* – так называют поле вектора, дивергенция которого равна 0.

- $rot(u\vec{A}) = u \cdot rot\vec{A} + [gradu, \vec{A}]$.
В самом деле, в декартовых координатах

$$\{rot(u\vec{A})\}^i = \epsilon^{ikl}\frac{\partial(u\vec{A})_l}{\partial x^k} = u \cdot \epsilon^{ikl}\frac{\partial(\vec{A})_l}{\partial x^k} + = \epsilon^{ikl}\frac{\partial u}{\partial x^k}(\vec{A})_l =$$

$$= u \cdot rot\vec{A} + [gradu, \vec{A}].$$

- $div[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{b}rot\vec{a} - \vec{a}rot\vec{b}$.
Нетрудно видеть, что

$$div[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{\nabla}[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{b}[\vec{\nabla}, \vec{a}] + \vec{a}[\vec{b}, \vec{\nabla}] =$$

$$= \vec{b}[\vec{\nabla}, \vec{a}] - \vec{a}[\vec{\nabla}, \vec{b}] = \vec{b}rot\vec{a} - \vec{a}rot\vec{b}.$$

Такие понятия теории поля, как градиент, дивергенция и ротор, имеют определенный физический смысл: градиент есть скорость изменения скалярной функции по направлению, по которому эта скорость достигает своего максимума; дивергенция выражает удельную плотность источников или стоков поля; ротор дает, грубо говоря, циркуляцию вектора, приходящуюся на единицу площади поверхности с такой ориентацией, чтобы эта циркуляция была наибольшей. Эти понятия связаны с дифференциальным оператором – **оператором Гамильтона**, или, как мы его называли, набла, который содержит частные производные первого порядка. Важную роль в физике играет оператор Лапласа, который представляет собой квадрат (скалярное произведение на самого себя) оператора Гамильтона и поэтому содержит частные производные второго порядка. Ковариантное выражение оператора Лапласа в общем виде

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right)$$

было получено ранее. Приведем для справок выражение этого оператора:

• в декартовых координатах

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

• в цилиндрических координатах

$$\triangle = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

• в сферических координатах

$$\triangle = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right)$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

Оператор Лапласа может действовать как на скалярную функцию $\triangle\varphi$, так и на векторную функцию

$$\triangle\vec{A} = \triangle(\hat{A}^i\hat{e}_i).$$

Если потенциал скалярного поля удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\triangle\varphi = 0,$$

то $\varphi(x, y, z)$ называется гармонической функцией. Интересно отметить, что векторное поле, которое одновременно является потенциальным и соленоидальным, удовлетворяет уравнению Лапласа. Действительно, условие потенциальности $rot\vec{A} = 0$ означает существование скалярной функции $\varphi(x, y, z)$, которая определяет $\vec{A} = grad\varphi$. Подставив последнее в условие соленоидальности $div\vec{A} = 0$, получим

$$divgrad\varphi \equiv \triangle\varphi = 0.$$

Приведем без доказательства содержание теоремы, известной как **основная теорема векторного анализа**. Если векторное поле $\vec{A}$ обращается на бесконечности в нуль как $1/r^{1+\varepsilon}$, а $div\vec{A}$ и $rot\vec{A}$ – как $1/r^{2+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$, то такое векторное поле расщепляется на два: потенциальное и соленоидальное.

• **Теорема.** *Любое непрерывное векторное поле $A(\vec{r})$, заданное во всем пространстве и исчезающее на бесконечности вместе со своими дивергенцией и ротором, может быть единственным образом (с точностью до постоянной) представлено в виде суммы потенциального $\vec{A}_1$ и соленоидального $\vec{A}_2$ полей, т.е.*

$$A(\vec{r}) = A_1(\vec{r}) + A_2(\vec{r}), \quad \text{где} \quad rot\vec{A}_1 = 0, \quad div\vec{A}_2 = 0.$$

Поскольку

$$div\vec{A} = div\vec{A}_1, \quad rot\vec{A} = rot\vec{A}_2,$$

то все источники и стоки включены в $\vec{A}_1$, а все вихри – в $\vec{A}_2$. Таким образом, содержание теоремы позволяет решить задачу определения векторного поля $\vec{A}$ по заданному распределению его дивергенции $div\vec{A} = f(r)$ и ротора $rot\vec{A} = \vec{F}(r)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти якобиевы матрицы прямого и обратного преобразований, якобиан преобразования и построить локальный базис новой системы координат
   (a) при замене декартовой системы координат цилиндрической;
   (b) при замене декартовой системы координат сферической.

2. Найти компоненты метрического тензора и символы Кристоффеля
   (a) цилиндрической системы координат;
   (b) сферической системы координат.

3. Показать, что в декартовой системе координат ко- и контравариантные компоненты геометрических объектов совпадают.

4. Показать, что при преобразованиях типа $x^i = x^i(\acute{x}^k)$ длина вектора A_iA^i - инвариант, а $\sum A^kA^k$ не является инвариантом.
   Решение:
$$A^iA_i = \frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^k}\acute{A}^k\frac{\partial \acute{x}^l}{\partial x^i}\acute{A}_l = \delta^l_k\acute{A}^k\acute{A}_l = \acute{A}^k\acute{A}_k.$$
   В то же время
$$A^kA^k = \frac{\partial x^k}{\partial \acute{x}^l}\frac{\partial x^k}{\partial \acute{x}^m}\acute{A}^l\acute{A}^m$$
   не инвариант.

5. Показать, что при преобразованиях типа $x^i = x^i(\acute{x}^k)$ величина $d\varphi$ инвариант, если φ – скаляр.

6. Показать, что при преобразованиях типа $x^i = x^i(\acute{x}^k)$ величины $\partial\varphi/\partial x^i$ преобразуются, как компоненты ковектора, а dx^i - как компоненты вектора.

7. Показать, что символ Кронекера – тензор, компоненты которого во всех системах координат имеют одно и то же значение.

8. Доказать справедливость формулы
$$\frac{\partial e^i}{\partial x^k} = -\Gamma^i_{kl}e^l.$$

9. Получить закон преобразования символов Кристоффеля.

10. Доказать справедливость формул
$$\nabla_iA^k = g^{kl}\nabla_iA_l,$$
$$\nabla_iA_k = g_{kl}\nabla_iA^l.$$
    Решение: Воспользуемся ковариантным постоянством фундаментального тензора $\nabla_ig^{kl} = 0$ и правилом поднятия и опускания индексов $A^k = g^{kl}A_l, A_k = g_{kl}A^l$, тогда
$$\nabla_iA^k = \nabla_i(g^{kl}A_l) = A_l\nabla_ig^{kl} + g^{kl}\nabla_iA_l = g^{kl}\nabla_iA_l.$$

11. Доказать, что при преобразованиях типа $x^i = x^i(\acute{x}^k)$ ковариантная производная ∇_iA^k – тензор 2-го ранга, а $\partial A^k/\partial x^i$ не тензор.

12. Указать группу преобразований координат, относительно которых ϵ_{ikl} является тензором.

13. Показать, что если $\varphi = A^i_kb^ka_i$ – скаляр, где b^k и a_i – векторы, то A^i_k – тензор.
    Решение: φ – скаляр, поэтому в штрихованной системе координат
$$A^i_kb^ka_i = \acute{A}^i_k\acute{b}^k\acute{a}_i.$$
    Далее,
$$A^i_kb^ka_i = A^i_k\frac{\partial x^k}{\partial \acute{x}^l}\acute{b}^l\frac{\partial \acute{x}^m}{\partial x^i}\acute{a}_m = A^m_l\frac{\partial x^l}{\partial \acute{x}^k}\acute{b}^k\frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^m}\acute{b}^k\acute{a}_i = \acute{A}^i_k\acute{b}^k\acute{a}_i,$$
    что доказывает тензорный характер A^i_k.

14. Доказать, что
$$\nabla_l(T^i_k + S^i_k) = \nabla_lT^i_k + \nabla S^i_k,$$
$$\nabla_l(A^l_kB^m) = B^m\nabla_lA^i_k + A^i_k\nabla_lB^m.$$
    Решение: Докажем это для векторов (обобщение на случай тензоров элементарно). Пусть $C^i = A^i + B^i$, тогда
$$\nabla_kC^i = \frac{\partial C^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{km}C^m = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \frac{\partial B^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{km}A^m + \Gamma^i_{km}B^m = \nabla_kA^i + \nabla_kB^i.$$
    Теперь положим $C^i_k = A^iB_k$, тогда
$$\nabla_lC^i_k = \frac{\partial C^i_k}{\partial x^l} + \Gamma^i_{lm}C^m_k - \Gamma^m_{lk}C^i_m = \frac{\partial A^i}{\partial x^l}B_k + A^i\frac{\partial B_k}{\partial x^l} + (\Gamma^i_{lm}A^m)B_k +$$
$$+A_i(\Gamma^m_{lk}B_m) = (\nabla_lA^i)B_k + A^i\nabla_lB_k).$$

15. Показать, что фундаментальный тензор g_{ik} ковариантно постоянен.

16. Показать, что если φ – скаляр, а $\vec{A}$ – вектор, то абсолютный дифференциал
$$D(\varphi\vec{A}) = \varphi D\vec{A} + \vec{A}d\varphi.$$
Решение:
$$D(\varphi\vec{A}) = \nabla_k(\varphi\vec{A})dx^k = \varphi(\nabla_k\vec{A})dx^k + \vec{A}(\nabla_k\varphi)dx^k = \varphi D\vec{A} + \vec{A}d\varphi.$$

17. Доказать, что
$$Sp\tilde{A} = SpA,$$
$$SpAB = SpBA,$$
$$SpABC = SpCAB = SpBCA.$$
Решение: По определению след матрицы – это сумма ее диагональных элементов, а операция транспонирования ($\tilde{A} \equiv A^T$) не затрагивает диагональных элементов матрицы, поэтому $Sp\tilde{A} = SpA$. Согласно правилу умножения матриц и ввиду того, что немые индексы (индексы суммирования) можно переименовывать, имеем
$$SpAB = A^i_k B^k_i = B^i_k A^k_i = SpBA,$$
$$SpABC = A^i_k B^k_l C^l_i = C^i_k A^k_l B^l_i = SpCAB.$$

18. Показать, что след матрицы – инвариант преобразования подобия.
Решение: Преобразование подобия матрицы A осуществляется матрицей D согласно $\acute{A} = DAD^{-1}$, а
$$Sp\acute{A} = Sp(DAD^{-1}) = Sp(D^{-1}DA) = SpA.$$

19. Какими матрицами можно описать группу инверсии?

20. Показать, что $g = detg_{ik}$ не является скаляром, и найти закон преобразования величины g.

21. Найти свертку $A^{ik}S_{ik}$, если $A^{ik} = -A^{ki}$, а $S_{ik} = S_{ki}$.
Решение: Согласно условиям задачи
$$A^{ik}S_{ik} = -A^{ki}S_{ki},$$
а возможность переименовывания немых индексов дает
$$A^{ik}S_{ik} = A^{ki}S_{ki}.$$
Сравнение этих соотношений приводит к заключению
$$A^{ik}S_{ik} = 0.$$

22. Как преобразуется свертка $T^{ik}P_{ik}$, если T^{ik} - тензор, а P_{ik} - псевдотензор 2-го ранга?
Решение: Если P_{ik} был бы тензором 2-го ранга, то его свертка с T^{ik} дала бы истинный скаляр. В отличие от закона преобразования истинного тензора, преобразование псевдотензора содержит знак якобиана преобразования $sgnY = -1$, который будет присутствовать и после свертки $T^{ik}P_{ik} = -\acute{T}^{ik}\acute{P}_{ik}$, т.е. эта свертка – псевдоскаляр.

23. Показать, что симметричность или антисимметричность тензоров 2-го ранга – свойства абсолютные.
Решение: Допустим, что в штрихованной системе координат тензор $\acute{S}_{ik}$ симметричен, т.е. $\acute{S}_{ik} = \acute{S}_{ki}$, или $\acute{S}_{ik} - \acute{S}_{ki} = 0$:
$$S_{ik} = \frac{\partial \acute{x}^l}{\partial x^i}\frac{\partial \acute{x}^m}{\partial x^k}\acute{S}_{lm}, \qquad S_{ki} = \frac{\partial \acute{x}^n}{\partial x^k}\frac{\partial \acute{x}^p}{\partial x^i}\acute{S}_{np} = \frac{\partial \acute{x}^m}{\partial x^k}\frac{\partial \acute{x}^l}{\partial x^i}\acute{S}_{ml},$$
поэтому
$$S_{ik} - S_{ki} = \frac{\partial \acute{x}^l}{\partial x^i}\frac{\partial \acute{x}^m}{\partial x^k}(\acute{S}_{lm} - \acute{S}_{ml}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad S_{ik} = S_{ki}.$$
Точно так же можно продемонстрировать, что антисимметричность тензора $\acute{A}_{ik}$ – свойство абсолютное.

24. Показать, что для произвольного тензора T^{ik}

(a) $T^{ik}A_{ik} = T^{[ik]}A_{ik}$,
(b) $T^{ik}S_{ik} = T^{(ik)}S_{ik}$,

если $A_{ik} = -A_{ki}$, а $S_{ik} = S_{ki}$.
Решение: Любой тензор можно представить как сумму симметричной и антисимметричной частей:
$$T^{ik} = \frac{1}{2}T^{ik} + \frac{1}{2}T^{ik} + \frac{1}{2}T^{ki} - \frac{1}{2}T^{ki} = \frac{1}{2}(T^{ik} + T^{ki}) + \frac{1}{2}(T^{ik} - T^{ki}) \equiv$$
$$\equiv T^{(ik)} + T^{[ik]}.$$
Свертка симметричного и антисимметричного тензоров дает нуль, т.е. если $A_{ik} = -A_{ki}$, а $S_{ik} = S_{ki}$, то

(a) $T^{ik}A_{ik} = T^{[ik]}A_{ik}$,
(b) $T^{ik}S_{ik} = T^{(ik)}S_{ik}$,

что и требовалось доказать.

25. Показать, что сумма диагональных компонент тензора 2-го ранга инвариант.

Решение:
$$A_i^i = \frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^k}\frac{\partial \acute{x}^l}{\partial x^i}\acute{A}_l^k = \delta_k^l \acute{A}_l^k = \acute{A}_k^k.$$

26. Найти вид матрицы преобразования компонент вектора при инверсии трех координатных осей, а также при повороте координат вокруг оси z на угол φ.

27. Показать, что если A – матрица ортогонального преобразования, то $\tilde{A} = A^{-1}$.

28. Показать, что при отражениях четного числа координатных осей якобиан преобразования равен $+1$, а при отражениях нечетного числа осей он равен -1.

Решение: Матрица преобразования, соответствующая отражению i-й координатной оси, диагональна, причем ii-й диагональный элемент равен -1, а остальные $+1$. Если отражению подверглось нечетное число координатных осей, то на диагонали – нечетное число "-1", поэтому детерминант такой матрицы равен -1. Если же число отраженных осей четное, то на диагонали матрицы такого преобразования четное число "-1" (остальные $+1$), а ее детерминант равен $+1$.

29. Доказать, что символ Леви-Чивиты в декартовой системе координат образует совершенно антисимметричный единичный тензор 3-го ранга.

30. Вычислить $\varepsilon_{ikl}\varepsilon^{ikl}$.

Решение: По определению ненулевые компоненты символа Леви-Чивиты равны $+1$ или -1. Поскольку каждое слагаемое суммы есть произведение одинаковых ε_{ikl}, то искомый результат будет суммой слагаемых, каждое из которых равно $+1$, а число таких слагаемых для трехмерного пространства равно $2 \cdot 3 = 3!$

31. Доказать, что для любого тензора A_k^i выполняется
$$\varepsilon_{ikl}A_m^i A_n^k A_p^l = \varepsilon_{mnp} det A_k^i.$$

32. Показать, что в трехмерном пространстве компоненты антисимметричного тензора 2-го ранга при вращениях преобразуются, как компоненты вектора.

Решение: Любому антисимметричному тензору 2-го ранга A_{ik} в трехмерном пространстве можно сопоставить псевдовектор A^i согласно
$$A^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ikl}A_{kl}. \tag{32}$$
(В этом случае A^i и A_{ik} называют *дуальными* друг другу.) Вообще говоря, A_{kl} – тензор, а ε^{ikl} – псевдотензор, поэтому согласно обратному тензорному признаку A^i – псевдовектор. Однако поскольку якобиан преобразований, обусловленных вращениями, $I = 1$, а при таких преобразованиях ε^{ikl} преобразуется, как тензор, то величины A^i образуют истинный вектор. Остается показать, что в трехмерном пространстве соотношение (1) выполняется для любого антисимметричного тензора 2-го ранга. Действительно, так как $A_{ik} = -A_{ki}$, то
$$A_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$
Согласно (1)
$$2A^1 = \varepsilon^{1kl}A_{kl} = \varepsilon^{123}A_{23} + \varepsilon^{132}A_{32} = A_{23} - A_{32} = 2A_{23}.$$
Точно так же
$$A^2 = A_{31}, \qquad A^3 = A_{12}.$$

33. Показать, что матрица бесконечно малого поворота системы координат может быть записана в виде $\hat{A} = \hat{I} + \hat{\varepsilon}$, где матрица $\hat{\varepsilon}$ антисимметрична.

Решение: При повороте на угол $\varphi = 0$ матрица $\hat{A} = \hat{I}$ совпадает с матрицей тождественного преобразования, а если угол поворота мал, то $\hat{A} = \hat{I} + \hat{\varepsilon}$, причем $\varepsilon_{ik} \ll 1$, тогда
$$x^i x_i = A_k^i \acute{x}^k A_i^l \acute{x}_l = (\delta_k^i + \varepsilon_k^i)\acute{x}^k(\delta_i^l + \varepsilon_i^l)\acute{x}_l \approx$$
$$\approx \delta_k^i \delta_i^l \acute{x}^k \acute{x}_l + \delta_k^i \varepsilon_i^l \acute{x}^k \acute{x}_l + \delta_i^l \varepsilon_k^i \acute{x}^k \acute{x}_l.$$
Поскольку длина вектора при вращениях неизменна: $x^i x_i = \acute{x}^k \acute{x}_l$, то
$$\delta_k^i \varepsilon_i^l \acute{x}^k \acute{x}_l + \delta_i^l \varepsilon_k^i \acute{x}^k \acute{x}_l = 0 \quad \text{или} \quad \varepsilon_{kl}\acute{x}^k \acute{x}^l = -\varepsilon_{lk}\acute{x}^k \acute{x}^l \Longrightarrow \varepsilon_{kl} = -\varepsilon_{kl}.$$
Итак, матрица $\hat{\varepsilon}$ антисимметрична. Введем вектор, дуальный ε_{ik}, так, чтобы
$$\delta\varphi^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ikl}\varepsilon_{kl},$$

поэтому

$$2\epsilon_{mni}\delta\varphi^i = \epsilon^{kli}\epsilon_{mni}\varepsilon_{kl} = (\delta^k_m\delta^l_n - \delta^k_n\delta^l_m)\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{mn} - \varepsilon_{nm} = 2\varepsilon_{mn}.$$

Следовательно,

$$\varepsilon^{ik} = \epsilon^{ikl}\delta\varphi_l.$$

Ввиду того, что

$$x^i = (\delta^i_k + \varepsilon^i_k)\acute{x}^k = \acute{x}^i + \varepsilon^{ik}\acute{x}_k = \acute{x}^i + \epsilon^{ikl}\acute{x}_k\delta\varphi_l,$$

в векторных обозначениях

$$\delta\vec{r} = [\delta\vec{\varphi}\cdot\vec{r}].$$

Таким образом, антисимметричная матрица $\hat{\varepsilon}$ описывает бесконечно малый поворот системы координат, а дуальный ей вектор $\delta\vec{\varphi}$ есть угол бесконечно малого поворота (величина этого вектора совпадает с $\delta\varphi$, а направление – с направлением базисного вектора оси вращения).

34. Показать, что единственным вектором, компоненты которого одинаковы во всех системах координат, является нуль-вектор.
Решение: По условию задачи $A_x = \acute{A}_x$, $A_y = \acute{A}_y$, $A_z = \acute{A}_z$. Любое преобразование координат должно быть совместимо с этим условием. Допустим,

$$\hat{A} = \hat{T}(\hat{A}),$$

где

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– матрица вращения на угол φ вокруг оси z. Выберем $\varphi = \pi$, тогда $A_x = -\acute{A}_x$, $A_y = -\acute{A}_y$, $A_z = \acute{A}_z$, что совместимо с условиями задачи, только если $A_x = A_y = 0$. Если выбрать теперь $\hat{T}$ так, чтобы она представляла вращение на угол $\varphi = \pi$ вокруг оси x, то точно так же получим $A_x = 0$. Таким образом, $\vec{A} = 0$.

35. Показать, что всякий тензор 2-го ранга, компоненты которого одинаковы во всех системах координат, пропорционален δ_{ik}.
Решение: Произвольный тензор можно представить в виде суммы симметричной $S_{ik} = T_{(ik)}$ и антисимметричной $A_{ik} = T_{[ik]}$ частей:

$$T_{ik} = \frac{1}{2}(T_{ik} + T_{ki}) + \frac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki}) =$$

$$= T_{(ik)} + T_{[ik]}.$$

Антисимметричной части можно сопоставить дуальный псевдовектор, и согласно результатам задачи 34 его компоненты будут одинаковы во всех системах координат, только если это нуль-вектор. Выберем далее систему координат, в которой $S_{ik} = T_{(ik)}$ имеет диагональный вид

$$S_{ik} = \lambda^{(m)}\delta_{ik}, \quad \delta_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если $\lambda^{(1)} \neq \lambda^{(2)} \neq \lambda^{(3)}$, то компоненты S_{ik} будут зависеть от выбора координат, что противоречит условиям задачи. Остается предположить, что

$$S_{ik} = \lambda\cdot\delta_{ik},$$

что и завершает доказательство.

36. Доказать, что для любой невырожденной матрицы $A(x)$ выполняется соотношение

$$Sp\Big(A^{-1}\frac{\partial A}{\partial x^i}\Big) = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\ln(\det A)\Big).$$

37. Доказать следующие соотношения:

(a) $g_{ik,l} = \Gamma_{ikl} + \Gamma_{kil}$,
Решение: Учитывая часто используемое обозначение частной производной

$$(...)_{,l} \equiv \frac{\partial(...)}{\partial x^l},$$

имеем

$$g_{ik,l} = (\vec{e}_i\vec{e}_k)_{,l} = (\vec{e}_i)_{,l}\vec{e}_k + \vec{e}_i(\vec{e}_k)_{,l} = \Gamma^m_{il}\vec{e}_m\vec{e}_k + \vec{e}_i\Gamma^m_{kl}\vec{e}_m =$$

$$= g_{mk}\Gamma^m_{il} + g_{im}\Gamma^m_{kl}.$$

Подставив выраженные через метрический тензор символы Кристоффеля

$$\Gamma^m_{ik} = \frac{1}{2}g^{mn}\Big(\frac{\partial g_{ni}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{nk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^n}\Big),$$

получим

$$g_{ik,l} = \Gamma_{ikl} + \Gamma_{kil},$$

где

$$\Gamma_{ikl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right).$$

Утверждение доказано.

(b) $g_{ik}(g^{kl})_{,m} = -g^{kl}g_{ik,m}$,
Решение: Продифференцировав известное соотношение

$$g^{ik}g_{kl} = \delta^i_l$$

по x^m и имея в виду равенство нулю производной от единичного тензора δ^i_l, получим искомый результат.

(c) $(g^{ik})_{,l} = -\Gamma^i_{ml}g^{mk} - \Gamma^k_{ml}g^{mi}$,
Решение: Фундаментальный (метрический) тензор ковариантно постоянен, т.е.

$$\nabla_l g^{ik} = \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{lm}g^{mk} - \Gamma^k_{lm}g^{im} = 0.$$

Если использовать обозначение

$$(g^{ik})_{,l} \equiv \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l},$$

получим

$$(g^{ik})_{,l} = -\Gamma^i_{ml}g^{mk} - \Gamma^k_{ml}g^{mi}.$$

(d) $g_{,i} = gg^{kl}g_{kl,i}, \qquad g = \det g_{ik}$,

(e) $\Gamma^i_{ik} = (\ln\sqrt{g})_{,k} = \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g})_{,k}$,

(f) $(A^i)_{;i} = \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}A^i)_{,i}$,

(g) $(A^k_i)_{;k} = \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}A^k_i)_{;k} - \Gamma^m_{in}A^n_m$,

(h) $(A^{ik})_{;k} = \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}A^{ik})_{;k} \quad (A^{ik} = -A^{ki})$,

(i) $\triangle S \equiv (S_{;i})^{;i} = \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}g^{ik}S_{,k})_{,i}$.

38. Пусть $A = \det A_{ik}$, где A_{ik} – тензор 2-го ранга. Доказать, что A не скаляр и поэтому ковариантную производную нельзя определять как $\nabla_i A \equiv A_{;i} = A_{,i}$. Как нужно определять $A_{;i}$ (через $A_{,i}$ и A)?
Решение: Тензор 2-го ранга A_{ik} преобразуется согласно

$$A_{ik} = \frac{\partial \acute{x}^l}{\partial x^i}\frac{\partial \acute{x}^m}{\partial x^k}\acute{A}_{lm}$$

или если ввести матрицу Якоби $X^l_i = \partial\acute{x}^l/\partial x^i$, то в матричных обозначениях

$$A = X\acute{A}X^T.$$

Поэтому

$$\det A = \det X \det \acute{A} \det X^T = Y^2 \det \acute{A}.$$

Таким образом, $A = \det(A_{ik})$ – тензорная плотность веса 2.

Как и любая ковариантная производная, $A_{;i}$ должна быть линейной по $A_{,i}$ и A:

$$A_{;i} = A_{,i} + K_i A,$$

здесь K_i – неопределенные коэффициенты.

Определитель g метрического тензора, как и A, является тензорной плотностью веса 2, а ковариантная производная g должна быть равна нулю, т.е.

$$g_{;i} = g_{,i} + K_i g = 2g\Gamma^k_{ik} + K_i g = 0 \implies K_i = -2\Gamma^k_{ik}.$$

39. Доказать, что

(a) $[\vec{a}\cdot\vec{b}]^2 = a^2b^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$,
Решение: $[\vec{a}\cdot\vec{b}]^2 = [\vec{a}\cdot\vec{b}][\vec{a}\cdot\vec{b}] = \vec{b}[[\vec{a}\cdot\vec{b}]\vec{a}] = \vec{a}[\vec{b}[\vec{a}\cdot\vec{b}]] =$

$$= \vec{a}(\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{b}) - \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{b})) = a^2b^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2.$$

(b) $[\vec{a}\cdot[\vec{b}\cdot\vec{c}]] + [\vec{c}\cdot[\vec{a}\cdot\vec{b}]] + [\vec{b}\cdot[\vec{c}\cdot\vec{a}]] = 0.$
Решение: $[\vec{a}\cdot[\vec{b}\cdot\vec{c}]] + [\vec{c}\cdot[\vec{a}\cdot\vec{b}]] + [\vec{b}\cdot[\vec{c}\cdot\vec{a}]] =$

$$= \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) + \vec{a}(\vec{c}\vec{b}) - \vec{b}(\vec{c}\vec{a}) + \vec{c}(\vec{b}\vec{a}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c}) = 0.$$

40. Доказать, что

$$grad(\varphi\cdot\psi) = \varphi\cdot grad\psi + \psi\cdot grad\,\varphi,$$

$$grad(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a} + [\vec{a}, rot\vec{b}] + [\vec{b}, rot\vec{a}].$$

Решение: $(grad\varphi)_i \equiv \partial\varphi/\partial x^i$, поэтому

$$(grad\varphi\cdot\psi)_i = \psi\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} + \varphi\frac{\partial\psi}{\partial x^i}.$$

Воспользовавшись полученным в тексте соотношением

$$\frac{\partial a_k}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^k} = \epsilon_{ikl}(rot\vec{a})^l,$$

имеем

$$(grad(\vec{a}\cdot\vec{b}))_i = a^k(\epsilon_{ikl}(rot\vec{b})^l + \frac{\partial b_i}{\partial x^k}) + b_k(\epsilon^{ikl}(rot\vec{a})_l + \frac{\partial a^i}{\partial x^k}) =$$

$$= a^k\frac{\partial b_i}{\partial x^k} + b_k\frac{\partial a_i}{\partial x^k} + [\vec{a}, rot\vec{b}]_i + [\vec{b}, rot\vec{a}]_i.$$

41. Доказать, что

$$div(\varphi\cdot\vec{a}) = \varphi\cdot div\vec{a} + \vec{a}\cdot grad\varphi,$$

$$div[\vec{a}\cdot\vec{b}] = \vec{b}\cdot rot\vec{a} - \vec{a}\cdot rot\vec{b}.$$

42. Показать, что из общего определения ротора следует

$$rot\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{g}}\begin{Vmatrix} \hat{e}_{x^1} & \hat{e}_{x^2} & \hat{e}_{x^3} \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ A_{x^1} & A_{x^2} & A_{x^3} \end{Vmatrix}.$$

43. Доказать, что

$$rot(\varphi\cdot\vec{a}) = \varphi\cdot rot\vec{a} - [\vec{a}\cdot grad\varphi],$$

$$rot[\vec{a}\cdot\vec{b}] = \vec{a}\cdot div\vec{b} - \vec{b}\cdot div\vec{a} + (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\cdot\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b}.$$

Решение:

$$(rot[\vec{a}\cdot\vec{b}])^i = \epsilon^{ikl}\epsilon_{lmn}\frac{\partial(a^m b^n)}{\partial x^k} = (\delta^i_m\delta^k_n - \delta^i_n\delta^k_m)\left(a^m\frac{\partial b^n}{\partial x^k} + b^n\frac{\partial a^m}{\partial x^k}\right) =$$

$$a^i(\vec{\nabla}\vec{b}) - b^i(\vec{\nabla}\vec{a}) + \left(b^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right)a^i - \left(a^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right)b^i = \vec{a}div\vec{b} - \vec{b}div\vec{a} + (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b}.$$

44. Показать, что

- $divgrad\varphi = \Delta\varphi,$
- $rotrot\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \Delta\vec{A},$
- $rotgrad\varphi = 0,$

- $divrot\vec{A} = 0.$

Решение:

- $divgrad\varphi = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\varphi) = (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\varphi = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi,$
- $rotrot\vec{A} = [\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{A}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} = graddiv\vec{A} - \Delta\vec{A},$
- $rotgrad\varphi = [\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\varphi] = 0,$
- $divrot\vec{A} = \vec{\nabla}[\vec{\nabla}, \vec{A}] = [\vec{\nabla}, \vec{\nabla}]\vec{A} = 0.$

45. Найти $gradf(r)$, $div\vec{r}$, $rot\vec{r}$.
Решение: $div\vec{r} = \frac{\partial r^i}{\partial x^i} = 3.$

$$rot\vec{r} = \begin{Vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{Vmatrix} = 0.$$

46. Найти "физические" компоненты базисных векторов в
   (a) цилиндрической системе координат,
   (b) сферической системе координат.

47. Найти "физические" компоненты градиента в цилиндрических и сферических координатах.

48. Показать, что "физические" компоненты векторного произведения $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в произвольной координатной системе имеют вид

$$\hat{c}^i = \sqrt{\frac{g_{ii}}{g}}\cdot\epsilon^{ikl}a_k b_l.$$

49. Как преобразуются компоненты $rot\vec{a}$ и векторного произведения $[\vec{a}\cdot\vec{b}]$ при вращениях и отражениях, если
   (a) $\vec{a}$, $\vec{b}$ - истинные векторы;
   (b) $\vec{a}$ – вектор, а $\vec{b}$ – псевдовектор;
   (c) $\vec{a}, \vec{b}$ - псевдовекторы.

50. Показать, что потенциал соленоидального и одновременно потенциального векторного поля определяется уравнением Лапласа.

51. Вычислить

$$grad(\vec{A}(r)\cdot\vec{r}), \qquad \vec{A}\cdot\vec{r}=\varphi(r),$$

$$grad(\vec{A}(r)\cdot\vec{B}(r)),$$

$$div(\varphi(r)\cdot\vec{A}(r)), \qquad \vec{A}(r)=\vec{r},$$

$$rot(\varphi(r)\cdot\vec{A}(r)), \qquad \vec{A}(r)=\vec{r}.$$

52. Доказать, что

$$[[\vec{\nabla},\vec{A}]\vec{B}]=\vec{A}\cdot div\vec{B}-(\vec{A}\cdot\nabla)\cdot\vec{B}-[\vec{A},rot\vec{B}]-[\vec{B},rot\vec{A}],$$

$$[[\vec{A},\vec{\nabla}]\vec{B}]=-\vec{A}\cdot div\vec{B}+(\vec{A}\cdot\nabla)\cdot\vec{B}+[\vec{A},rot\vec{B}].$$

БИОГРАФИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

- **ГАМИЛЬТОН Вильям Роуан** (1805 – 1865) – ирландский математик и физик, президент Ирландской академии наук в Дублине. Окончил Тринити-колледж, с 1827 г. профессор Дублинского университета и директор астрономической обсерватории. Развитая Гамильтоном аналогия между волновой и корпускулярной оптикой почти через сто лет была использована Шредингером при формулировке основ квантовой механики. Гамильтон установил аналогию между классической механикой и геометрической оптикой, ввел понятие групповой скорости, разработал вариационный принцип наименьшего действия и аналитический аппарат классической механики.

- **ГАУСС Карл Фридрих** (1777 – 1855) - немецкий математик, названный современниками королем математики. Родился в Брауншвейге в семье водопроводчика. Его удивительные математические способности обнаружились, когда ему исполнилось три года. Вычислительную технику, в которой он был непревзойденным мастером, Гаусс совершенствовал всю жизнь. После обнаружения малой планеты Церера, предвычисленной Гауссом, он стал считаться величайшим математиком мира и получил почетное звание "геттингенского колосса". Гаусс вошел в историю математики как один из создателей неевклидовой геометрии. Трудно указать такую область чистой и прикладной математики, в которую бы Гаусс не внес существенного вклада.

- **ГРИН Джордж** (1793 – 1841) – английский математик-самоучка. Грин поступил в Кембриджский университет в сорокалетнем возрасте и окончил его в 1838 г. В 1828 г. Грин опубликовал книгу "Опыт применения математического анализа в теории электричества и магнетизма". В ней он впервые ввел в науку понятие и термин "потенциал" и развил теорию электромагнетизма. Книга Грина, вышедшая незначительным тиражом, оставалась неизвестной до ее переиздания (1845) даже в самой Англии. За это время другими учеными были переоткрыты некоторые результаты Грина.

- **ДЕКАРТ Рене** - выдающийся французский математик, физик, философ, физиолог. Родился в 1596 г. в дворянской семье. С 1629 по 1649 г. жил в Голландии. Умер в 1650 г. в Стокгольме. Математические исследования Декарта тесно связаны с его философскими и физическими работами. Декарт впервые ввел понятие координат, переменной величины и функции, что составило его основную заслугу в математике.

- **ЕВКЛИД** – древнегреческий математик, автор первого из дошедших до нас теоретических трактатов по математике. Его научная деятельность протекала в Александрии в начале III в. до н.э. Главная работа Евклида "Начала" составила целую эпоху в развитии элементарной геометрии. В "Началах" Евклида, состоящих из 13 книг, дан образец дедуктивного изложения геометрического материала на основе предпосланной системы аксиом. По свидетельствам современников, Евклид был мягким, очень скромным и независимым человеком.

- **КАРТАН Эли** (1869 – 1951) – французский математик; преподавал в Лионе, Нанси, с 1912 г. - в Парижском университете. С 1931 г. член Парижской академии наук. Автор многочисленных работ по теории непрерывных групп, теории открытых им спиноров и теории относительности.

- **КЛЕЙН Феликс** (1849 – 1925) - немецкий математик: обучался в Бонне, профессор математики в Эрлангене, Мюнхене и Геттингене. Автор ряда фундаментальных работ по неевклидовой геометрии, теории непрерывных групп и различным вопросам геометрии. В своей работе под названием "Эрлангенская программа" (1892) Клейн разработал общую схему геометрического исследования. Эта работа оказала сильное влияние на дальнейшее развитие геометрии.

- **КРИСТОФФЕЛЬ Эльвин Бруно** - немецкий геометр. Родился в Монтуа (на Рейне) в 1829 г., умер в Страсбурге в 1900 г. Профессор Политехнической школы в Цюрихе, Берлинской промышленной академии и Страсбургского университета. Ученик Дирихле, а в широком смысле и Римана. Известен замечательными исследованиями алгебраических и абелевых функций, уравнений в частных производных и дифференциальной геометрии.

- **КРОНЕКЕР Леопольд** (1823 – 1891) – немецкий математик. Член Берлинской академии наук и профессор Берлинского университета (с 1861 г.). Основные работы Кронекера относятся к алгебре и теории чисел, теории квадратичных форм и теории групп. Кронекер был сторонником "арифметизации" математики, которая, по его мнению, должна быть сведена к арифметике целых чисел, так как только последняя, как он утверждал, обладает подлинной реальностью. Защищая эти взгляды, Кронекер вел упорную борьбу с последователями теоретико-функциональной школы Вейерштрасса и теоретико-множественной школы Кантора.

- **ЛАПЛАС Пьер Симон** - французский математик и механик. Родился в Бомоне в 1749 г., умер в Париже в 1827 г. Член Парижской академии наук, один из основателей Нормальной и Политехнической школ. Основные работы Лапласа относятся к области небесной механики. Ему принадлежит ряд фундаментальных работ по дифференциальным уравнениям и теории вероятности. Исследования Лапласа по физике касаются вопросов теории капиллярности, акустики и электромагнетизма.

- **ЛЕВИ-ЧИВИТА Туллио** (1873 – 1941) – итальянский математик и механик, профессор в Падуе и Риме. Автор исследований по теории дифференциальных уравнений, небесной механике, гидродинамике; им разработан тензорный анализ, обоснована теория адиабатических инвариантов; ему принадлежат работы по механике и геометрии неголономных систем и релятивистской механике.

- **ПУАНКАРЕ Анри** - крупнейший французский математик. Родился в Нанси в 1854 г., умер в Париже в 1912 г. Обучался в Политехнической и Горной школах в Париже. С 1886 г. профессор Парижского университета. Член Парижской академии наук. Его исследования об устойчивости движения и о фигурах равновесия жидкой вращающейся массы открыли новые горизонты в астрономии и космогонии, позволяя применять более совершенные методы современного анализа. Он является также одним из основателей специальной теории относительности. Исследования Пуанкаре охватывают почти все разделы математики и математической физики.

- **РИМАН Георг Фридрих Бернхард** (1826 – 1866) – выдающийся немецкий математик. Родился в Брезеленце (Ганновер), умер от туберкулеза в Италии. В Геттингенском университете слушал лекции Гаусса, многие идеи которого были развиты им позже. Там же сблизился с физиком Вебером, который пробудил в нем глубокий интерес к вопросам математического естествознания. Риман положил начало новому направлению теории аналитических функций и широкому применению идей и методов математической физики, дал основные идеи топологии. Он рассматривал геометрию в весьма широком смысле, как учение о непрерывных многообразиях. Введение римановых пространств раскрыло новые пути в развитии математики. Большое значение для физики XX в. имел разработанный Риманом (1861) аппарат дифференциальных квадратичных форм.

- **РИЧЧИ Курбастро Грегорио** (1853 – 1925) – итальянский геометр. Профессор Падуанского университета. Риччи является одним из основателей тензорного исчисления. В работе "Методы абсолютного дифференциального исчисления и их приложения" (1901), написанной им совместно с Леви-Чивитой, дано не только первое систематическое изложение тензорного исчисления, но и его приложения к классической механике, теоретической физике и римановой геометрии.

- **СТОКС Джордж Габриель** (1819 – 1903) - английский физик и математик, член Лондонского королевского общества. Труды Стокса охватывают различные вопросы оптики, гидродинамики и математической физики. Среди гидродинамических работ наибольшее значение имеют труды по теории движения вязкой жидкости (уравнение Навье – Стокса). Стокс – автор ряда крупных математических исследований.

- **ЭЙНШТЕЙН Альберт** – один из выдающихся физиков со времен Ньютона. Родился в 1879 г. в Ульме (Германия), умер в 1955 г. в Принстоне (США). Окончил Цюрихский политехникум. Начал работать экспертом в патентном бюро, затем работал в Цюрихском политехникуме, Пражском и Берлинском университетах. В 1933 г. переехал в Принстон (США).

  В истории естествознания занимает совершенно особое место. Созданием специальной и общей теории относительности Эйнштейн завершил классическую физику и одновременно заложил основы нового учения о пространстве, времени и тяготении. Его фундаментальные исследования по квантовой теории света, развивающие известную идею Планка о дискретной природе теплового излучения, положили начало новой эре – эре физики атома и атомного ядра. Исходя из квантовых представлений, Эйнштейн объяснил уменьшение теплоемкости твердых тел при низких температурах. Предсказал явление индуцированного излучения. Развил молекулярно-статистическую теорию броуновского движения и создал квантовую статистику частиц с целым спином.

  За объяснение фотоэффекта удостоен Нобелевской премии (1921).

- **ЯКОБИ Карл Густав Якоб** - немецкий математик. Родился в Потсдаме в 1804 г., умер в Берлине в 1851 г. Профессор Берлинского университета. С 1827 г. член Берлинской академии наук. Им получены фундаментальные результаты в области уравнений с частными производными. В своих лекциях по динамике и в ряде исследований по теории эллиптических функций Якоби решил ряд важнейших вопросов чистой и прикладной математики. Он усовершенствовал предложенный Гамильтоном метод интегрирования дифференциальных уравнений динамики, известный как метод Гамильтона – Якоби.

ПРОИСХОЖДЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ТЕРМИНОВ

- **Вектор** – от латинского слова "vector" – переноситель.
- **Градиент** – от латинского слова "gradiens" – шагающий.
- **Дивергенция** – от латинского слова "diverge" – расходиться.
- **Дифференциал** – от латинского слова "differentia" – разность. (Введен Лейбницем, а термин "производная" – Лагранжем.)
- **Интеграл** – от латинского слова "integer" – целый.
- **Координата** – от латинских слов "co" – с, "ordinata" – упорядоченная.
- **Набла** для символа ∇ – от библейского названия "нобел" – музыкального инструмента типа арфы, имеющего форму треугольника.
- **Ротор** – от латинского слова "roto" – вращаю.
- **Симметрия** – от греческого слова "symmetria" – соразмерность ("sym" – с, "metrio" – измерять).
- **Скаляр** – от латинского слова "scala" – лестница, для обозначения вещественных чисел, расположенных как ступеньки лестницы.
- **Тензор** – от латинского слова "tensor" – растягиватель.