

С 322/071

Н-191



Учебно-
методические
пособия
Учебно-научного
центра ОИЯИ
Дубна

УНЦ-2004-24

М. А. Назаренко*, Е. М. Сыресин

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

*Московский государственный институт радиотехники, электроники
и автоматики (Технический университет), филиал в г. Дубне

2004

Учебно-научный центр ОИЯИ

C 322/0
H-191

М. А. Назаренко, Е. М. Сыресин

**ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ**

Учебно-методическое пособие

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Дубна 2004

Учебное пособие составлено профессором базовой кафедры дубненского филиала МИРЭА «Электроника физических установок» при УНЦ ОИЯИ Е. М. Сыресиным и доцентом М. А. Назаренко и рекомендовано к изданию экспертной комиссией УНЦ ОИЯИ и редакционно-издательским советом МИРЭА.

Назаренко М. А., Сыресин Е. М.

Н19 Лекции по теории электромагнитного поля: Учебно-метод. пособие. — Дубна: ОИЯИ, 2004. — 81 с.

Учебное пособие содержит изложение теории электромагнитного поля, основ СВЧ-техники, антенн и лазеров на свободных электронах. Обсуждается генерация и применение синхротронного излучения заряженных частиц.

Пособие предназначено для студентов и аспирантов технических и физических специальностей.

Nazarenko M. A., Syresin E. M.

Lectures on Theory of the Electromagnetic Field: Textbook. — Dubna: JINR, 2004. — 81 p.

The textbook contains a description of theory of the electromagnetic field, the basis of the RF technique, the antennas and the free electron lasers. The generation and application of the synchrotron radiation is discussed.

The book is addressed to the students and doctoral students specializing in engineering and physics.

Оглавление

Предисловие	4
Электричество и магнетизм	6
Лекция 1. Электростатика и магнитостатика, уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной форме, принцип относительности в электродинамике	6
Волны и оптика	11
Лекция 2. Волновое уравнение для электромагнитного поля и потенциалов, энергия электромагнитных волн, кинематика волновых процессов	11
Лекция 3. Распространение электромагнитных волн, геометрическая оптика и ее законы, когерентность, дифракция волн и интерференция	16
Макроэлектродинамика	21
Лекция 4. Векторы индукции и напряженности поля, граничные условия, отражение и преломление электромагнитных волн	21
Радиотехника и техника сверхвысоких частот	25
Лекция 5. Устройства СВЧ линии передач, элементы ВЧ-тракта, фазовая и групповая скорости в диспергирующей среде	25
Лекция 6. Резонаторы	30
Радиопередающие устройства и теория рассеяния электромагнитных волн	34
Лекция 7. Запаздывающие потенциалы	34
Лекция 8. Дипольное излучение, проволочные антенны	39
Лекция 9. Радиопередающие устройства, полуволновой вибратор, директорная антенна, антенны с бегущей волной, дифракционные антенны, щелевые антенны	45
Лекция 10. Рассеяние электромагнитных волн	52
Излучение заряженных частиц, пучковые технологии, лазер на свободных электронах	60
Лекция 11. Синхротронное излучение, лазер на свободных электронах	60
Лекция 12. Пучковые технологии, применение синхротронного излучения, нанотехнологии при производстве микроэлектронных схем	68
Лекция 13. Излучение релятивистской заряженной частицы	72
Список литературы	81

Предисловие

Курс лекций предназначен для студентов инженерно-физических специальностей. В основе курса лежат лекции для студентов кафедры "Электроника физических установок", организованной в дубненском филиале Московского государственного института радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА) при Учебно-научном центре Объединенного института ядерных исследований.

Курс лекций включает в себя шесть разделов: "Электричество и магнетизм"; "Волны и оптика"; "Макроэлектродинамика", "Радиотехника и техника сверхвысоких частот"; "Радиопередающие устройства и теория рассеяния электромагнитных волн"; "Излучение заряженных частиц, пучковые технологии, лазер на свободных электронах". Материал трех первых разделов частично обсуждается в курсе общей физики, читаемом студентам инженерных специальностей. Четвертый раздел посвящен физике электромагнитных волн СВЧ-диапазона частот. В пятом разделе рассмотрены антенны и теория рассеяния электромагнитных волн. Эти разделы являются базовыми для инженеров-физиков, специализирующихся в области ускорительной техники, электроники и автоматики физических установок. В шестом разделе приведена классическая теория генерации электромагнитного излучения заряженных частиц. Здесь также описываются физические установки, основой которых является теория электромагнитного поля, и передовые пучковые технологии, получившие широкое развитие за последние десять лет. В курсе лекций детально рассматривается синхротронное излучение электронов в физических установках и его применение в науке и технике. Одним из перспективных направлений развития лазерной техники является создание перестраиваемого лазера на свободных электронах на основе монохроматического излучения из ондулятора, также обсуждаемого в курсе лекций.

В рамках приведенного материала предполагается знакомство студентов младших курсов, как с аспектами теории электромагнитного поля, так и с рядом электрофизических установок и технологий, обсуждаемых в курсе "Физические

установки". Это знакомство с физикой и техникой сверхвысоких частот окажется полезным при работе над курсом "Радиотехника и техника сверхвысоких частот".

Курс лекций опирается на двухтомную монографию И. Н. Мешкова, Б. В. Чирикова "Электромагнитное поле", предназначенную для студентов физических факультетов университетов. В монографии изложение ведется в гауссовой системе единиц. В данном курсе лекций теория электромагнитного поля представлена в Международной системе единиц (СИ).

Авторы выражают благодарность члену-корреспонденту РАН, профессору И. Н. Мешкову за многочисленные обсуждения при создании данного курса лекций. Авторы благодарны Н. С. Сергеевой за помощь в подготовке рукописи, А. Н. Шабашовой – за тщательное редактирование рукописи, Т. А. Степановой – за помощь в подготовке пособия к изданию.

Электричество и магнетизм

Лекция 1. Электростатика и магнитостатика, уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной форме, принцип относительности в электродинамике

Электростатика и магнитостатика, скалярный и векторный потенциалы

Скалярный потенциал от системы зарядов с плотностью ρ равен [1]

$$\varphi = \int \frac{\rho(r') dv'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|},$$

где r' – координата заряда с плотностью $\rho(r')$, r – расстояние от начала системы отсчета до точки наблюдения. Градиент потенциала определяет электрическое поле с напряженностью \vec{E} [1]:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}e_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}e_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}e_z\right).$$

Векторы электрической индукции \vec{D} и напряженности электрического поля \vec{E} связаны соотношением [1]

$$\vec{D} = \epsilon_0\epsilon\vec{E},$$

где ϵ – диэлектрическая проницаемость среды.

Ток с плотностью \vec{j} создает магнитное поле, векторный потенциал которого равен [2, 3]

$$\vec{A} = \mu_0 \int \frac{\vec{j}(r') dv'}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Величина индукции магнитного поля и векторный потенциал связаны соотношением [2, 3]

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}.$$

Векторный потенциал ортогонален вектору магнитного поля и параллелен вектору плотности тока:

$$\vec{A} \perp \vec{B},$$

$$\vec{A} \parallel \vec{j}.$$

Вектор индукции и напряженность магнитного поля связаны соотношением

$$\vec{B} = \mu_0\mu\vec{H},$$

где μ – магнитная проницаемость среды.

Пример 1. Однородное магнитное поле с напряженностью H_z

Из ортогональности напряженности магнитного поля и векторного потенциала следует, что $A_z = 0$. Величина магнитного поля H_z может быть выражена через A_x - и A_y -компоненты векторного потенциала:

$$H_z = -\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial x}.$$

Для $A_y = 0$ A_x -компонента равна

$$A_x = -H_z y.$$

Пример 2. Поле бесконечного проводника с током I

Азимутальная компонента напряженности магнитного поля бесконечного проводника, по которому течет ток I , равна

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi r} = \text{rot}\vec{A} = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}.$$

В силу эквивалентности всех точек z для бесконечно длинного провода радиальная компонента векторного потенциала равна нулю: $A_r = 0$.

Азимутальная компонента напряженности магнитного поля равна

$$H_\phi = -\frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{I}{2\pi r}.$$

Отсюда находим продольную компоненту векторного потенциала A_z :

$$\vec{A}_z = \frac{I}{2\pi} \ln(r).$$

Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной форме

В соответствии с теоремой Гаусса поток вектора электрической индукции \vec{D} по замкнутой поверхности равен сумме зарядов q , находящихся внутри данной поверхности [1]:

$$\int \vec{D} d\vec{s} = q/\epsilon_0.$$

В дифференциальной форме это уравнение может быть переписано в следующем виде [2, 3]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

Интеграл по замкнутой поверхности для вектора магнитной индукции всегда обращается в ноль из-за отсутствия "магнитных зарядов" [1]:

$$\int \vec{B} d\vec{s} = 0.$$

В дифференциальной форме это уравнение имеет вид

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Скорость изменения магнитного потока определяет ЭДС, наводимую в замкнутом контуре (закон Фарадея) [1]:

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Это уравнение может быть переписано в виде

$$\epsilon = \int \vec{E} d\vec{l} = \int \operatorname{rot} \vec{E} d\vec{S} = \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S},$$

где интеграл по $d\vec{l}$ берётся вдоль замкнутого контура, охватывающего поток, E — напряженность электрического поля вдоль контура. Из этого соотношения приходим к закону Фарадея, записанному в дифференциальной форме [2, 3]:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Вихревое электрическое поле порождается переменным магнитным полем. Найдем связь между вектором напряженности переменного электрического поля и скалярным и векторным потенциалами. Уравнение для $\operatorname{rot} \vec{E}$ перепишем в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{A}, \\ \operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Воспользовавшись условием, что

$$\operatorname{rot} \nabla \varphi = 0,$$

приходим к результату

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi.$$

Для переменного электрического поля вектор напряженности, скалярный и векторный потенциалы связаны соотношением

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Циркуляция напряженности магнитного поля вдоль замкнутого контура равна суммарному току, находящемуся внутри этого контура (теорема Стокса) [1]:

$$\int \vec{H} d\vec{l} = \vec{I} + \vec{I}_{\text{см}},$$

где I — ток в проводнике, $I_{\text{см}}$ — ток смещения, обусловленный вихревым электрическим полем. Уравнение о циркуляции магнитного поля легко может быть переписано в дифференциальной форме

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \vec{j}_{\text{см}} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Приведенные ниже уравнения носят название уравнений Максвелла [1]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Принцип относительности в электродинамике

Скалярный и векторный потенциалы представляют собой 4-вектор $A' = (\phi, A)$ [3], аналогичный 4-векторам координаты и времени, энергии и импульса. При переходе из одной системы отсчета в другую формулы преобразования для потенциалов находятся непосредственно из общих формул преобразования 4-вектора [3]:

$$\phi = \frac{\phi' + \frac{v}{c} A'_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad A_x = \frac{A'_x + \frac{v}{c} \phi'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$A_y = A'_y, \quad A_z = A'_z.$$

Преобразование Лоренца для 4-вектора потенциала позволяет осуществить переход от компонент электрического и магнитного полей в лабораторной системе координат к компонентам поля в движущейся системе координат. Учитывая, что

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

получаем следующие формулы преобразования для электрического поля [2, 3]:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y - \frac{v}{c} H'_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{E'_z - \frac{v}{c} H'_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Воспользовавшись соотношением $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$, найдем преобразование для магнитного поля:

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \frac{H'_y - \frac{v}{c} E'_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad H_z = \frac{H'_z - \frac{v}{c} E'_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Таким образом, электрическое и магнитное поля относительны, их свойства различны в разных системах отсчета.

Волны и оптика

Лекция 2. Волновое уравнение для электромагнитного поля и потенциалов, энергия электромагнитных волн, кинематика волновых процессов.

Волновые уравнения для электрического E и магнитного H полей, энергия электромагнитных волн

Запишем уравнения Максвелла в отсутствие зарядов $\rho = 0$ и токов $j = 0$:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Как следует из этих уравнений, вихревое электрическое поле переходит в магнитное поле, и наоборот: магнитное поле переходит в электрическое:

$$H \leftrightarrow E.$$

При этом вектор индукции магнитного поля всегда ортогонален вектору электрического поля:

$$\vec{B} \perp \vec{E}.$$

Плотность энергии магнитного поля равна плотности энергии электрического поля:

$$W = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu},$$

$$\sqrt{\epsilon \epsilon_0} E = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \mu}}.$$

Запишем уравнение для $\text{rot rot}(\vec{H})$:

$$\text{rot rot} \vec{H} = -\Delta \vec{H} + \text{grad}(\text{div} \vec{H}) = \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{D} = \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 \epsilon \text{rot} \vec{E} = -\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

Поскольку $\text{div} \vec{H} = 0$, приходим к волновому уравнению для электромагнитных полей

$$\Delta \vec{H} - \epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu \frac{d^2 \vec{H}}{dt^2} = 0,$$

$$\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

где $c \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 310^8 \text{ м/с}$ — скорость света в вакууме, $c_{\text{ср}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$ — скорость света

в среде с показателем преломления $n = \sqrt{\epsilon \mu}$.

Волновое уравнение для потенциалов

Электромагнитные поля могут быть выражены через скалярный и векторный потенциалы в виде

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A},$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi.$$

В отсутствие зарядов и токов электрическое и магнитное поля в волне связаны соотношением

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

которое может быть переписано в виде

$$\frac{1}{\mu \mu_0} \text{rot rot} \vec{A} = -\epsilon \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \epsilon \epsilon_0 \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Учитывая равенство

$$\text{rot rot} \vec{A} = -\Delta \vec{A} + \text{grad}(\text{div} \vec{A}),$$

приходим к соотношению

$$\Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \text{grad} \left(\text{div} \vec{A} + \epsilon \epsilon_0 \mu_0 \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 0.$$

Воспользовавшись условием калибровки для потенциалов [2, 3]

$$\text{div} \vec{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{\epsilon \mu}{c^2} = 0,$$

получаем волновое уравнение для векторного потенциала

$$\Delta \vec{A} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0.$$

Аналогичный вид имеет волновое уравнение для скалярного потенциала:

$$\Delta \varphi - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Кинематика волновых процессов, плоские волны

В плоской волне электромагнитные поля зависят лишь от одной координаты — z : $E = E(z)$, $H = H(z)$ [1]. Волновое уравнение в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2},$$

$$E \perp H \perp z.$$

Решение уравнения для плоской волны может быть записано в форме

$$E = f(z - vt),$$

$$v = \pm \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}.$$

Монохроматические волны

Рассмотрим плоскую волну в момент времени $t = 0$:

$$E(z, 0) = E_0 e^{ikz},$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число. Волна называется плоской монохроматической волной, если для нее реализуется следующая зависимость от времени и координаты:

$$E_z = E_0 e^{i(kz - \omega t)},$$

где ω — частота волны. Частота волны и волновой вектор для плоской монохроматической волны связаны соотношением

$$\omega = kv = \frac{2\pi\nu}{\lambda}.$$

Поляризация волны

Для круговой поляризации волны в фиксированной точке z векторы \vec{A} , \vec{E} и \vec{B} вращаются с угловой скоростью, не изменяясь по абсолютной величине. Волна обладает круговой поляризацией и называется правополяризованной, если векторный потенциал имеет вид

$$A_{\Pi} = A_0 e^{i(kz - \omega t)}.$$

В случае левополяризованной волны у фазы волны должен быть знак "минус":

$$A_{\Pi} = A_1 e^{-i(kz - \omega t)}.$$

Эллиптически-поляризованная волна состоит из комбинации левополяризованной и правополяризованной волн:

$$A = A_{\Pi} + A_{\text{Л}}.$$

Волна обладает линейной поляризацией, если амплитуда левополяризованной волны равна амплитуде правополяризованной волны:

$$A_{\Pi} = \pm A_{\text{Л}},$$

$$A_1 = 2A_0 \cos(kz - \omega t), \quad A_2 = 2iA_0 \sin(kz - \omega t),$$

при линейной поляризации векторы \vec{A} , \vec{E} и \vec{B} изменяются по величине, не изменяясь по направлению.

Волновой вектор, эффект Доплера

Волновой вектор для плоской волны направлен вдоль вектора \vec{n} , характеризующего направление распространения волны:

$$\vec{k} = k\vec{n}, \quad \vec{n} \parallel \vec{z}.$$

Для плоской волны с эллиптической поляризацией электромагнитные поля в зависимости от координаты и времени определяются соотношением

$$A = A_{\Pi} e^{i\theta} + A_{\text{Л}} e^{-i\theta},$$

где $\theta = k_z z - \omega t$ — фаза волны. Частота волны изменяется при переходе из лабораторной системы координат в движущуюся систему координат (так называемый эффект Доплера). Запишем преобразования Лоренца для координат и времени при переходе из лабораторной системы координат к системе координат, движущейся со скоростью v вдоль оси x (параметры в движущейся системе обозначены штрихом) [1]:

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right).$$

На основе этих соотношений найдем преобразование для фазы волны при переходе из лабораторной системы координат в движущуюся систему координат:

$$\theta = k_x x - \omega t + k_y y + k_z z = k_x \gamma(x' + vt') - \omega \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) + k_y y + k_z z.$$

Это соотношение перепишем в виде

$$\theta = \gamma x' \left(k_x - \frac{\omega v}{c^2} \right) - \gamma (\omega - k_x v) t' + k_y y' + k_z z'.$$

При переходе от лабораторной системы координат к движущейся системе координат частота и компоненты волнового вектора изменяются по закону

$$\omega' = \gamma(\omega - k_x v), \quad k'_x = \gamma\left(k_x - \frac{\omega v}{c^2}\right), \quad k'_y = k_y, \quad k'_z = k_z.$$

Для электромагнитной волны, распространяющейся в вакууме, частота равна

$$\omega = kc.$$

В результате частоты в движущейся системе координат и в лабораторной системе связаны соотношением

$$\omega' = \gamma \omega \left(1 - \frac{v \cos \alpha}{c} \right),$$

где α – угол между направлением скорости системы координат и направлением распространения волны. При $\alpha = 0$ имеет место линейный эффект Доплера

$$\omega' = \gamma\omega \left(1 - \frac{v}{c}\right),$$

когда $\omega - \omega' \propto \omega v/c$. При $\alpha = \pi/2$ частота в движущейся системе координат равна

$$\omega' = \gamma\omega.$$

Изменение частоты при переходе от движущейся системы координат к лабораторной квадратично зависит от скорости как $\omega - \omega' \propto \omega v^2/c^2$. В этом случае говорят о квадратичном эффекте Доплера.

Лекция 3. Распространение электромагнитных волн, геометрическая оптика и ее законы, когерентность, дифракция волн и интерференция

Распространение электромагнитных волн

Плоская волна характеризуется тем, что ее направление распространения и амплитуда волны везде одинаковы. Волны могут быть не плоскими, но их можно рассматривать в приближении плоских монохроматических волн при условии [3]

$$\Delta E \ll E, \quad \Delta x \cong \lambda, \quad \Delta R \ll R.$$

Приближение плоской волны соответствует условию равенства фазы волны во всех точках волновой поверхности для данного момента времени. Геометрическая оптика рассматривает распространение электромагнитных волн как распространение лучей. Лучи представляют собой линии, касательные к которым совпадают с направлением распространения волны. Интенсивность светового потока от точечного источника равна [3]

$$I = \frac{\text{const}}{R^2}.$$

Электрическое поле сферической волны изменяется по закону [3]

$$E = \frac{\text{const}}{R} e^{ikR}$$

в зависимости от расстояния R от точечного источника.

Геометрическая оптика и ее законы, когерентность

Плоская монохроматическая волна во всех точках удовлетворяет условию

$$E = \text{const}.$$

Такая волна бесконечна во всем пространстве и соответствует временному интервалу $-\infty < t < \infty$:

$$E = E(t) \cdot e^{-i\omega_0 t},$$

где $E(t)$ – функция времени. Спектральная плотность напряженности поля волны равна [2]

$$E_\omega = \int E(t) e^{i(\omega - \omega_0)t} dt.$$

Ширина спектра и временная протяженность волны связаны соотношением неопределенности [2, 3]

$$\Delta t \Delta \omega \cong \pi.$$

Ширина спектра характеризует когерентность электромагнитной волны. Аналогичное соотношение неопределенности реализуется в пространстве волновых чисел и координат [2, 3]:

$$\Delta k_x \Delta x \cong \pi.$$

Наличие вырезающей щели (ограниченного пространства в направлениях x и y) приводит к возникновению сферической волны с угловым расхождением

$$\theta_x = \frac{\Delta k_x}{k} = \frac{1}{\Delta x k} \cong \frac{\lambda}{\Delta x},$$

$$\theta_y = \frac{\lambda}{\Delta y}.$$

Геометрическая оптика "работает" при малой длине волны $\lambda \rightarrow 0$.

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Дифракция и интерференция

Дифракция представляет собой огибание светом экранов и непрозрачных тел. Дифракция электромагнитных волн непосредственно связана с соотношением неопределенности: щель пропускает волновой участок фронта шириной d и вносит разброс поперечных волновых чисел, что приводит к появлению угловой расходимости волны

$$\theta = \frac{k_x}{k} \approx \frac{\lambda}{d}.$$

Принцип переизлучения (принцип Гюйгенса–Френеля) заключается в следующем: первичная волна доходит до участка экрана df , а затем этот участок является источником вторичных волн и сам переизлучает волну. Поле в точке наблюдения равно суперпозиции полей от всех участков переизлучающей поверхности:

$$E_p = a \int \frac{Edf_n \cdot e^{ikR}}{R},$$

где Edf_n – поток падающей волны, коэффициент $1/R$ учитывает расходимость сферической переизлученной волны. Сложение электромагнитных волн с учетом их фаз носит название интерференции волн. Найдем коэффициент a при прохождении плоской волны

$$E_p = Ee^{ikx}$$

через экран со щелью, простирающейся от y_1, z_1 до y_2, z_2 :

$$\left. \begin{array}{l} y_1 \rightarrow -\infty \\ y_2 \rightarrow \infty \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} z_1 \rightarrow -\infty \\ z_2 \rightarrow \infty \end{array} \right\}.$$

Рассмотрим случай, когда

$$x \gg z, y.$$

С учетом малости z и y разложим R :

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + \frac{y^2 + z^2}{2x}$$

и найдем амплитуду электрического поля в точке наблюдения:

$$E_p = au \frac{e^{ikx}}{x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik \frac{y^2}{2x}} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik \frac{z^2}{2x}} dz.$$

Производя замену переменных $y = \sqrt{\frac{2x}{k}} \xi$ и учитывая, что интеграл равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\xi^2) d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1+i),$$

приходим к результату

$$E_p = \frac{2aEe^{ikx}}{k} \cdot \frac{2i\pi}{2} \Rightarrow a = \frac{k}{2\pi i}.$$

В итоге поле в точке наблюдения равно

$$E_p = \int \frac{k}{2\pi i R} E \cdot e^{ikR} df_n.$$

Пример:

Найдем интенсивность свечения за экраном с круглым отверстием. Поле на оси экрана на расстоянии x от него равно

$$E_p = \frac{ke^{ikz}}{2\pi iz} \int_0^a E_0 e^{ir^2 k/2x} 2\pi r dr,$$

$$\sqrt{x^2 + r^2} = x + r^2/2x,$$

$$E_p = -ik \cdot e^{ikx} E_0 \left(\exp\left(\frac{ika^2}{2x}\right) - 1 \right).$$

Интенсивность свечения в точке x равна

$$I = 4E_0^2 \cdot \sin^2(ka^2/4x).$$

Случай, когда точка наблюдения находится на конечном расстоянии от экрана, носит название дифракции Френеля:

$$y \cong a, \quad \frac{ka^2}{2x} \cong 1, \quad x \cong \frac{a^2}{\lambda}.$$

Дифракция Фраунгофера

При $x \gg \frac{a^2}{\lambda}$ реализуется дифракция Фраунгофера (дифракция на бесконечности) [3]. Лучи света, идущие от источника в точку наблюдения, можно считать параллельными:

$$E = E_0 \cdot e^{ik_0 r}$$

После переизлучения с поверхности экрана напряженность поля в точке наблюдения равна

$$E_k = \int E_0 e^{ik_0 r - ikr} ds = \int E_0 e^{iqr} ds,$$

где $\vec{q} = \vec{k}_0 - \vec{k}$. Для узкой щели с размером $-a < y < a$ напряженность поля в точке наблюдения определяется соотношением

$$E_k' = E_0 \int_{-a}^a E^{-iqy} dy = \frac{2E_0}{q} \sin qa,$$

где $q = k\theta$. Интенсивность света в точке наблюдения равна

$$dI = \frac{I_0}{2a} \left| \frac{E_k}{E_0} \right|^2 \frac{dq}{2\pi} = \frac{I_0}{\pi a k} \frac{\sin^2 ka\theta}{\theta^2},$$

I_0 – полная интенсивность света, проходящего через щель. Максимум излучения находится под углом $\theta = 0$. Минимумы интенсивности соответствуют углам

$$\theta_{\min} = \frac{n\pi}{ka}$$

Дифракция Фраунгофера для периодической решетки

Рассмотрим периодическую решетку с N щелями, размером щели $2a$ и расстоянием между щелями $2b$. Электрическое поле в точке наблюдения при суперпозиции полей от N щелей равно

$$E_q = E_k' \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2ink(a+b)}.$$

Просуммировав по всем щелям, приходим к результату

$$E = E_q' \cdot \frac{1 - e^{-2iNdq}}{1 - e^{-2idq}} = \frac{E_q' e^{iNdq}}{e^{iqd}} \cdot \frac{\sin Ndq}{\sin dq},$$

где $d = a + b$. Полная интенсивность свечения в точке наблюдения равна [3]

$$dI = \frac{I_0}{N\pi} \left(\frac{\sin Ndq}{\sin dq} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin qa}{qa} \right)^2 dq = \frac{I}{\pi a k} \cdot \left(\frac{\sin Nk\theta d}{\sin k\theta d} \right)^2 \cdot \frac{\sin^2 k\theta a}{\theta^2 d\theta}.$$

Интенсивность свечения имеет максимумы под углами

$$\theta = \frac{\pi n}{dk}.$$

Макроэлектродинамика

Лекция 4. Векторы индукции и напряженности поля, граничные условия, отражение и преломление электромагнитных волн

Вектор индукции и напряженности магнитного поля, два типа электромагнитных волн

Существует два типа волн [2, 4]:

- 1) $A_z = 0, E_z = 0, H_z \neq 0$ – магнитная (H -волна, ТЕ-волна (transverse electric wave));
- 2) $A_z \neq 0, E_z \neq 0, H_z = 0$ – электрическая (E -волна, ТМ-волна (transverse magnetic wave)).

Прохождение волн через границу сред с различным показателем преломления существенно зависит от типа волн. Для ТМ-волны [2, 3] вектор электрического поля лежит в плоскости $\vec{k}\vec{n}$, где \vec{k} – волновой вектор, \vec{n} – нормаль к плоскости раздела двух сред. Вектор магнитного поля ортогонален плоскости $\vec{k}\vec{n}$:

$$\vec{H} \perp \vec{k}\vec{n}.$$

Для ТЕ-волны вектор электрического поля ортогонален плоскости $\vec{k}\vec{n}$ [2, 3]:

$$\vec{E} \perp \vec{k}\vec{n}.$$

Граничные условия, отражение и преломление ТМ-волны на границе раздела двух сред

Рассмотрим преломление ТМ-волн на границе раздела двух сред. Граничные условия для компонент электрического и магнитного поля имеют вид [3]

$$\begin{aligned} -E_t + E'_t &= -E''_t, \\ -\varepsilon_1(E_n + E'_n) &= -\varepsilon_2 E''_n, \\ H + H' &= H'', \end{aligned}$$

где E , H – электрическое и магнитное поля падающей волны, E' , H' – электрическое и магнитное поля отраженной волны, E'' , H'' – электрическое и магнитное поля прошедшей волны. Учитывая связь между электрическим и магнитным полем в волне:

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E = \sqrt{\mu\mu_0} H,$$

перепишем уравнение для магнитного поля в виде

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}(E + E') = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E''.$$

Из условия сохранения потока энергии получаем уравнение

$$\begin{aligned} S \cos \varphi &= S' \cos \varphi' + S'' \cos \varphi'', \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E^2 \cos \varphi &= \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E'^2 \cos \varphi' + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E''^2 \cos \varphi'', \end{aligned}$$

где $S = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^2$ – вектор потока энергии, φ – угол между волновым вектором падающей волны и нормалью к границе раздела двух сред, φ' – угол между волновым вектором отраженной волны и нормалью к границе раздела двух сред,

φ'' – угол между волновым вектором прошедшей волны и нормалью к границе раздела двух сред. Уравнения для тангенциальной и нормальной компонент электрического поля перепишем в виде

$$\begin{aligned} E \cos \varphi - E' \cos \varphi' &= E'' \cos \varphi'', \\ \varepsilon_1 (E \sin \varphi + E' \sin \varphi') &= \varepsilon_2 E'' \sin \varphi''. \end{aligned}$$

В волне угол падения равен углу отражения: $\varphi = \varphi'$. Угол преломления φ'' и угол падения φ определяются законом преломления волн [1]

$$n_1 \sin \varphi = n_2 \sin \varphi'',$$

где $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$ – показатель преломления первой среды, $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$ – показатель преломления второй среды. Введем параметры

$$\lambda_\mu = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}, \quad \lambda_\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}.$$

Перепишем уравнения для магнитного поля и тангенциальной компоненты электрического поля в виде

$$\begin{aligned} E - E' &= E'' \frac{\cos \varphi''}{\cos \varphi}, \\ E + E' &= E'' \frac{\lambda_\mu}{\lambda_\varepsilon}, \end{aligned}$$

где

$$\cos \varphi'' = \sqrt{1 - \lambda_\varepsilon^2 \lambda_\mu^2 \sin^2 \varphi}.$$

Решив систему уравнений относительно переменных E' и E'' , приходим к результату

$$\begin{aligned} E' &= E \frac{\lambda_\mu \cos \varphi - \lambda_\varepsilon \cos \varphi''}{\lambda_\mu \cos \varphi + \lambda_\varepsilon \cos \varphi''}, \\ E'' &= 2E \frac{\lambda_\varepsilon \cos \varphi}{\lambda_\mu \cos \varphi + \lambda_\varepsilon \cos \varphi''}. \end{aligned}$$

Коэффициент прохождения T_M определяется отношением потока энергии прошедшей волны к потоку энергии падающей волны:

$$T_M = \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E'^2 \cos \varphi''}{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E^2 \cos \varphi} = \frac{\lambda_M E'^2 \cos \varphi''}{\lambda_\epsilon E^2 \cos \varphi}$$

Подставив значение поля прошедшей волны, находим коэффициент прохождения

$$T_M = \frac{4\lambda_\epsilon \lambda_M \cos \varphi \cos \varphi''}{(\lambda_M \cos \varphi + \lambda_\epsilon \cos \varphi'')^2}$$

Аналогично находим коэффициент отражения, равный отношению потока прошедшей волны к потоку падающей волны [2]:

$$R_M = \left(\frac{E'}{E}\right)^2 = \frac{(\lambda_\mu \cos \varphi - \lambda_\epsilon \cos \varphi'')^2}{(\lambda_\mu \cos \varphi + \lambda_\epsilon \cos \varphi'')^2}$$

Полное прохождение волны $R_M = 0$ реализуется при условии

$$\lambda_\mu \cos \varphi - \lambda_\epsilon \sqrt{1 - \lambda_\epsilon^2 \lambda_\mu^2 \sin^2 \varphi} = 0.$$

Угол падения волны (угол Брюстера), при котором отсутствует отражение, равен

$$\begin{aligned} \lambda_\mu^2 (1 - \sin^2 \varphi) &= \lambda_\epsilon^2 (1 - \lambda_\epsilon^2 \lambda_\mu^2 \sin^2 \varphi), \\ \frac{\lambda_\mu^2 - \lambda_\epsilon^2}{\lambda_\mu^2 (1 - \lambda_\epsilon^2)} &= \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Для случая $\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} = 1$ угол Брюстера определяется соотношением

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi &= \frac{1}{1 + \lambda_\epsilon^2} = \frac{1}{1 + \text{ctg}^2 \varphi}, \\ \text{tg} \varphi &= \frac{1}{\lambda_\epsilon} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}. \end{aligned}$$

Отражение и преломление ТЕ-волны на границе раздела двух сред

Находим значения магнитного поля в отраженной и прошедшей волнах [2], как это было найдено для ТМ-волны:

$$\begin{aligned} H' &= H_E \frac{\lambda_\epsilon \cos \varphi - \lambda_\mu \cos \varphi''}{\lambda_\epsilon \cos \varphi + \lambda_\mu \cos \varphi''}, \\ H'' &= H_E \frac{2\lambda_\mu \cos \varphi}{\lambda_\epsilon \cos \varphi + \lambda_\mu \cos \varphi''}, \end{aligned}$$

где H_E – напряженность магнитного поля в падающей ТЕ-волне. Коэффициенты отражения и прохождения соответственно равны [2]

$$\begin{aligned} R_E &= \left(\frac{H'_E}{H_E}\right)^2 = \left(\frac{\lambda_\epsilon \cos \varphi - \lambda_\mu \cos \varphi''}{\lambda_\epsilon \cos \varphi + \lambda_\mu \cos \varphi''}\right)^2, \\ T_E &= \frac{\lambda_\epsilon}{\lambda_\mu} \left(\frac{H''_E}{H_E}\right)^2 \frac{\cos \varphi''}{\cos \varphi} = \frac{4\lambda_\epsilon \lambda_\mu \cos \varphi \cos \varphi''}{(\lambda_\epsilon \cos \varphi + \lambda_\mu \cos \varphi'')^2}. \end{aligned}$$

Для ТЕ-волны существует критический угол φ (угол полного внутреннего отражения, $\cos \varphi'' = 0$), когда волна из менее плотной среды не проходит в более плотную среду:

$$\sin \varphi > \frac{1}{\lambda_\epsilon \lambda_\mu} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Радиотехника и техника сверхвысоких частот

Лекция 5. Устройства СВЧ линии передач, элементы ВЧ-тракта, фазовая и групповая скорости в диспергирующей среде

Устройства СВЧ линии передач, элементы ВЧ-тракта

Для распространения электромагнитных волн в СВЧ-диапазоне 100 МГц – 10 ГГц используются волноводы. Резонатор представляет собой прибор, в котором реакция на внешнее воздействие резко зависит от частоты возбуждения. Амплитуда колебаний линейно растет со временем: $E \propto t$, когда частота возбуждения совпадает с одной из собственных частот резонатора $\omega_{\text{возб}} \cong \omega_n$. При передаче электромагнитных волн высокой частоты по проводам

происходит излучение (аналогично антенне). В волноводе электромагнитная волна отражается от стенки и движется вдоль него. Простейшие волноводы представляют собой длинную металлическую трубу или длинный параллелепипед прямоугольного сечения с поперечными размерами a и b .

Волновое уравнение для векторного потенциала внутри волновода имеет вид [2, 4]

$$\Delta \bar{A} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = 0.$$

На поверхности идеально проводящего волновода выполнены следующие граничные условия для тангенциальных компонент векторов \vec{E} и \vec{A} [2, 5]:

$$E_t = 0, \quad A_t = 0.$$

Решение волнового уравнения ищем в виде монохроматической волны [2, 5]

$$\bar{A} = \bar{A}(z, x, y) \cdot e^{i\omega t},$$

для которой уравнение может быть переписано в следующей форме:

$$\Delta \bar{A} + \frac{\omega^2}{c^2} \bar{A} = 0.$$

Волну, распространяющуюся в волноводе, разложим по плоским монохроматическим волнам, движущимся вдоль оси z :

$$\bar{A} = \bar{A}(x, y) \cdot e^{i(kz - \omega t)}.$$

Для электромагнитных волн волновое число связано с частотой соотношением

$$k = \frac{\omega}{c}.$$

Электромагнитное поле в волноводе

Рассмотрим распространение волны в волноводе для случая, когда

$$\epsilon = 1, \quad \mu = 1.$$

Уравнения Максвелла

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

для монохроматической волны могут быть представлены в виде

$$\text{rot} \vec{E} = -\mu_0 i\omega \vec{H},$$

$$\text{rot} \vec{H} = \epsilon_0 i\omega \vec{E}.$$

После разложения по плоским волнам, распространяющимся вдоль волновода, получаем

$$-H_x \mu_0 i\omega = -\frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial E_z}{\partial y} + ikE_y,$$

$$-H_y \mu_0 i\omega = -\frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial x} = -ikE_x + \frac{\partial E_z}{\partial x},$$

$$\epsilon_0 i\omega E_x = -\frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial z},$$

$$\epsilon_0 i\omega E_y = -\frac{\partial H_x}{\partial z} + \frac{\partial H_z}{\partial x} = -H_x ik + \frac{\partial H_z}{\partial x}.$$

Подставив E_y из четвертого уравнения в первое, приходим к результату

$$H_x \mu_0 i\omega = -\frac{\partial E_z}{\partial y} + ik \left(-\frac{ikH_x}{i\omega\epsilon_0} + \frac{\partial H_z}{\partial x} \right).$$

Перепишем это уравнение в виде

$$H_x \mu_0 i\omega \left(1 - \frac{k^2}{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0} \right) = -\frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{ik\partial H_z}{\partial x}.$$

Введем обозначение

$$k_{\perp}^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$$

и представим уравнение в следующей форме:

$$H_x \mu_0 i\omega \cdot \frac{k_{\perp}^2}{\omega^2} = -\frac{\partial E_z}{\partial y} + ik \frac{\partial H_z}{\partial x},$$

или

$$\mu_0 H_x = \frac{i\omega}{k_{\perp}^2} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\omega k}{k_{\perp}^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x}.$$

Так же можно получить выражение для H_y -компоненты магнитного поля

$$H_y = \frac{i\omega}{ck_{\perp}^2} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{ik_z}{k_{\perp}^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y}.$$

После аналогичных преобразований имеем выражения для компонент электрического поля [2]

$$E_x = \frac{ik_z}{k_{\perp}} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{i\omega}{ck_{\perp}} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y},$$

$$E_y = \frac{ik_z}{k_{\perp}^2} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{i\omega}{ck_{\perp}^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x}.$$

Два типа волн в волноводе

В волноводе существует два типа волн [2, 5]: H -волна ($A_z = 0, E_z = 0, H_z \neq 0$) и E -волна ($A_z \neq 0, E_z \neq 0, H_z = 0$). Рассмотрим более детально поведение H -волны или ТЕ-волны ($A_z = 0$). Запишем волновые уравнения для поперечных компонент векторного потенциала в H -волне [2, 5]:

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + k^2 A_x = 0;$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + k^2 A_y = 0.$$

Решение волновых уравнений ищем в виде $A = f(x) \cdot g(y)$ [2, 5]. В этом случае волновое уравнение может быть представлено в следующей форме:

$$\frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + k^2 = 0,$$

где функции f и g удовлетворяют уравнениям

$$\frac{1}{f} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -k_x^2; \quad \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -k_y^2.$$

Решение уравнений имеет вид

$$f = A_{nm} \sin(k_x x) + B_{nm} \cos(k_x x);$$

$$g = C_{nm} \sin(k_y y) + D_{nm} \cos(k_y y).$$

Константы k_x и k_y находятся из граничных условий. В соответствии с уравнением калибровки

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0$$

при $\rho \equiv 0$ выберем значение потенциала, тождественно равное нулю: $\varphi \equiv 0$. В этом случае на поверхности волновода имеем

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \Rightarrow \frac{\partial A_n}{\partial n} = 0,$$

$$A_t = 0 \Rightarrow D_t = 0.$$

Граничные условия определяют константы k_x и k_y :

$$k_x = \frac{n\pi}{a},$$

$$k_y = \frac{m\pi}{b}.$$

Решение волнового уравнения для H -волны с учетом калибровки может быть представлено в виде

$$A_x = \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{nm} \cos(n\pi x/a) \cdot \sin(m\pi y/b),$$

$$A_y = \sum -\frac{nb}{ma} A_{nm} \cdot \sin(n\pi x/a) \cdot \cos(m\pi y/b),$$

$$k_z^2 = k^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2.$$

При $k_z^2 < 0$ волна не распространяется вдоль волновода, она быстро затухает при входе в него. В прямоугольном волноводе с размерами $a > b$ максимальная длина волны, которая может распространяться через волновод (H_{10} -волна), равна

$$\lambda_{\max} = 2a.$$

Распространение электромагнитных волн в волноводе, фазовая и групповая скорости в диспергирующей среде

Для простоты рассмотрим волновод, у которого поперечные размеры удовлетворяют условию $b \gg a$. Дисперсионное уравнение в этом случае имеет вид

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_n^2}{c^2},$$

где $\omega_n/c = \pi/a$. Фазовая скорость волны определяется показателем преломления среды [2, 5]:

$$\frac{v_\phi}{c} = \frac{\omega}{ck_z} = \sqrt{1 + \frac{\omega_n^2}{k_z^2 c^2}} > 1.$$

Для волновода можно ввести эффективное значение показателя преломления среды n_{ef} [2, 5]:

$$1 - \frac{\omega_m^2}{\omega^2} = \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2} = \left(\frac{c}{v_\phi} \right)^2 = n_{ef}^2.$$

И, как легко видеть, фазовая скорость волны выше скорости света: $v_\phi > c$.

Групповая скорость волны равна [3]

$$\frac{v_{гр}}{c} = \frac{\partial \omega}{c \partial k} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_n^2 / ck)^2}} < 1.$$

Групповая скорость волны никогда не может превышать скорость света, поскольку она определяет скорость потока энергии в волне и передача энергии со скоростью, превышающей скорость света, физически невозможна. Волна, распространяясь вдоль волновода, движется под углом α к его поверхности и затем отражается от нее. Угол α определяется соотношениями

$$\operatorname{tg} \alpha = k_1 / k_z,$$

$$\frac{v_{гр}}{c} = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + k_1^2 / k_z^2}}.$$

Лекция 6. Резонаторы

Стоячая волна

Рассмотрим отражение плоской монохроматической волны с круговой поляризацией от идеального зеркала. Суммарный вектор электрического поля для падающей и отраженной волн равен

$$E(z, t) = E_0 e^{i(-kz - \omega t)} - E_0 e^{i(kz - \omega t)} = -2iE_0 \cdot e^{-i\omega t} \sin kz.$$

Электрическое и магнитное поля в электромагнитной волне связаны соотношением

$$\sqrt{\epsilon_0} \cdot \vec{E} = \frac{\vec{k}}{k} \cdot \sqrt{\mu_0} \vec{H}.$$

Результирующее магнитное поле в падающей и отраженной волне равно

$$H(z) = -iE_0 e^{i(-kz - \omega t)} - iE_0 e^{i(kz - \omega t)} = -2iE_0 \cdot e^{-i\omega t} \cos kz.$$

Рассмотрим отражение монохроматической волны, движущейся между двумя идеальными зеркалами. В этом случае образуется неподвижная в пространстве волна (стоячая волна). При отражении от зеркала направление поляризации изменяется на противоположное. Граничные условия на поверхности металла имеют вид [1, 2]

$$E_t + E'_t = 0, \quad H_n + H'_n = 0.$$

Для двух зеркал, расстояние между которыми равно L , стоячая волна образуется при условии

$$L = \frac{n\lambda}{2}, \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L}.$$

Резонатор

Поле в резонаторе представляет собой суперпозицию полей с собственными частотами [2, 5]:

$$E = \sum E(\omega_n).$$

Моды резонатора – собственные колебания поля. Особенностью мод является стационарность полей с собственными частотами. Так, для резонатора, состоящего из двух плоских зеркал, модуль электрического поля равен

$$|E_z| = 2E_0 \sin kz = 2E_0 \sin \frac{n\pi}{L} z.$$

В резонаторе реакция на внешнее воздействие резко зависит от частоты возбуждения. Амплитуда колебаний линейно растет со временем: $E \propto t$, когда

частота возбуждения совпадает с одной из собственных частот резонатора $\omega_{\text{возб}} \equiv \omega_n$. Резонаторы используются в ускорительной технике для ускорения пучков заряженных частиц. С этой целью ток пучка модулируется на одной из собственных гармоник резонатора:

$$I = I_0 + I \cdot \sin \omega_n t.$$

Возбуждение электромагнитной волны в резонаторе модулированным пучком приводит к его ускорению.

Поле в резонаторе

Решение волнового уравнения в резонаторе.

$$\Delta E_x - \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \cdot \frac{n}{c^2} = 0$$

ищем методом разделения переменных:

$$E_x = f(x) \cdot g(y) \cdot \varphi(z) \cdot e^{-i\omega t}.$$

После подстановки функции $E(x, y, z, t)$ приходим к выражению

$$g\varphi \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial g^2}{\partial y^2} \cdot \varphi f + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \cdot f g + f g \varphi \cdot \frac{\omega^2}{c^2} = 0.$$

Разделив уравнение на $f(x) \cdot g(y) \cdot \varphi(z)$ и учитывая, что каждая из функций $f(x)$, $g(y)$ и $\varphi(z)$ зависит лишь от одной переменной, получаем следующие уравнения:

$$\ddot{g} + \kappa_1 g = 0,$$

$$\ddot{f} + \kappa_2 f = 0,$$

$$\ddot{\varphi} + \kappa_3 \varphi = 0,$$

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Решение уравнений имеет вид

$$E_x = (\alpha \sin k_1 x + \beta \cos k_1 x) \cdot (\gamma \sin k_2 y + d \cos k_2 y) \cdot (e \sin k_3 z + f \cos k_3 z).$$

Из граничных условий при $y=0, b$

$$E_x = 0$$

следует, что

$$k_2 = \frac{\pi m}{b}, \quad d = 0.$$

Из граничных условий при $z=0, c$

$$E_x = 0$$

следует, что

$$k_3 = \frac{\pi n}{c}, \quad f = 0.$$

С учетом граничных условий электрическое поле может быть представлено в виде

$$E_x = (\alpha \sin k_1 x + \beta \cos k_1 x) \cdot \sin \frac{\pi m y}{b} \cdot \sin \frac{\pi n z}{c} \cdot e^{-i\omega t}.$$

Константы α и k_1 находим из условия

$$\text{div} \vec{E} = 0, \quad \left. \frac{\partial E_x}{\partial x} \right|_{x=0, a} = 0.$$

Из граничных условий при $x=0, x=a$ следует

$$k_1 = \frac{\pi \ell}{a}, \quad \alpha = 0.$$

Компоненты электрического поля в резонаторе равны

$$E_x = E_1 \cos \frac{\pi \ell x}{a} \cdot \sin \frac{\pi m y}{b} \cdot \sin \frac{\pi n z}{c} \cdot e^{-i\omega t},$$

$$E_y = E_2 \sin \frac{\pi \ell x}{a} \cdot \cos \frac{\pi m y}{b} \cdot \sin \frac{\pi n z}{c} \cdot e^{-i\omega t},$$

$$E_z = E_3 \sin \frac{\pi \ell x}{a} \cdot \sin \frac{\pi m y}{b} \cdot \cos \frac{\pi n z}{c} \cdot e^{-i\omega t}.$$

Собственные частоты резонатора определяются соотношением

$$\frac{\omega_{lmn}^2}{c^2} = \pi^2 \left(\frac{\ell^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right).$$

Низшая мода резонатора реализуется, когда

$$\ell = 1, \quad m = 1, \quad n = 0,$$

$$\frac{\omega_{110}^2}{c^2} = \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$$

Применение резонаторов в первую очередь направлено на генерацию и усиление электромагнитных колебаний в радиодиапазоне. При оптимизации резонатора необходимо решить две проблемы: минимизировать потери и повысить напряженность электрического поля. Потери в резонаторе определяются его добротностью [2]:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\omega_{lmn}}{Q} W,$$

где $Q \approx 10^4 - 10^5$ - добротность резонатора. Типичное электрическое поле в резонаторе при частотах $\omega \approx 1$ ГГц составляет порядка

$$E \approx 1 \text{ МВ/см.}$$

Радиопередающие устройства и теория рассеяния электромагнитных волн

Лекция 7. Запаздывающие потенциалы

Уравнения для скалярного и векторного потенциалов при наличии тока и плотности заряда

Уравнения для потенциалов в отсутствие зарядов $\rho=0$ и токов $j=0$ (электромагнитные волны) имеют вид

$$\Delta \bar{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Запишем уравнение циркуляции магнитного поля при наличии зарядов и токов, изменяющихся во времени:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Учитывая, что

$$\vec{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad \vec{H} = \frac{\text{rot} \bar{A}}{\mu_0 \mu},$$

перепишем уравнение для $\text{rot} \vec{H}$ в виде

$$\frac{1}{\mu_0 \mu} \text{rot rot} \bar{A} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} - \epsilon_0 \epsilon \cdot \left(\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} + \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right),$$

или

$$\frac{1}{\mu_0 \mu} (\text{grad div} \bar{A} - \Delta \bar{A}) = \vec{j} - \epsilon_0 \epsilon \cdot \left(\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} + \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right).$$

Преобразуем это уравнение к виду

$$\Delta \bar{A} - \mu_0 \mu \cdot \epsilon_0 \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\vec{j} \mu_0 \mu - \text{grad} \left(\text{div} \bar{A} + \epsilon_0 \epsilon \cdot \mu_0 \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 0.$$

Учитывая условие калибровки потенциалов

$$\text{div} \bar{A} + \epsilon_0 \epsilon \cdot \mu_0 \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

приходим к уравнению для векторного потенциала при наличии токов в среде [3]

$$\Delta \bar{A} - \frac{n}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\vec{j} \mu_0 \mu.$$

Аналогично получим уравнение для скалярного потенциала φ . Из дифференциального уравнения для электрического поля легко приходим к уравнению для потенциалов, воспользовавшись условием калибровки для связи векторного и скалярного потенциалов:

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon} = \text{div} \left(-\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \right) = -\Delta \varphi + \frac{n}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon}.$$

Перепишем уравнение для потенциала φ в традиционной форме [3]

$$\Delta \varphi - \frac{n}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon}.$$

Запаздывающие потенциалы

Рассмотрим движение точечного заряда, движущегося со скоростью v (рис. 1). Из-за конечной скорости света он придет в точку O , находящуюся на расстоянии r от частицы, в момент времени t , если излучение произошло в момент времени t' :

$$t - t' = \frac{r(t')}{c}.$$

Свет придет в точку, находящуюся на расстоянии r от частицы, с временным сдвигом $r(t')/c$. Положение частицы относительно лабораторной системы координат описывается вектором \vec{R} , а положение точки наблюдения — вектором \vec{r}_p . Три вектора \vec{R} , \vec{r}_p и \vec{r} связаны между собой соотношением

$$\vec{R}(t') + \vec{r}(t') = \vec{r}_p.$$

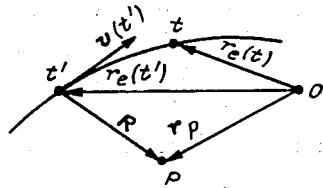


Рис. 1. Движение точечного заряда

Скорость частицы равна

$$v(t') = \frac{dR(t')}{dt'}.$$

Введем единичный вектор \vec{n} , направленный вдоль вектора \vec{r} :

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}(t)}{r(t)}.$$

Дифференцируя вектор \vec{R} , получим скорость частицы

$$\frac{d\vec{R}}{dt'} = \vec{v} = \left(\frac{dr_p}{dt'} - \frac{dr(t')}{dt'} \right).$$

Учитывая, что $r_p = \text{const}$ и $\vec{r} \frac{d\vec{r}}{dt'} = -\vec{r} \cdot \vec{v}$ $\left(\frac{d\vec{r}}{dt'} = -\vec{n} \cdot \vec{v} \right)$, найдем связь между временными интервалами излучения и приема:

$$dt = dt' \cdot \left(1 + \frac{dr(t')}{cdt'} \right) = dt' \cdot (1 - \vec{n} \cdot \vec{v}).$$

Скалярный и векторный потенциалы частицы с зарядом e , движущейся со скоростью v , соответственно равны [2, 4]

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{e\delta(x' - R(t'))}{r} \cdot \delta\left(t' + \frac{r}{c} - t\right) d^3x' dt',$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{e\vec{\beta}(t') \cdot \delta(x' - R(t'))}{r} \cdot \delta\left(t' + \frac{r}{c} - t\right) d^3x' dt',$$

где положение частицы относительно лабораторной системы координат описывается вектором \vec{R} , а положение точки наблюдения — вектором \vec{r}_p : $\vec{r} = \vec{r}_p - \vec{x}'$. После интегрирования по d^3x' получаем

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{e\delta(t' - t + \vec{r}_p - \vec{R}/c)}{(\vec{r}_p - \vec{R})} dt',$$

где $t' = t - \frac{\vec{r}_p - \vec{R}}{c} = t - \frac{\vec{r}}{c}$ — момент времени излучения. Учитывая соотношение для интервала времени излучения и приема

$$dt' = \frac{dt}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v})},$$

находим потенциал движущейся частицы

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{e\delta(t' - t_1) dt_1}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}) \cdot r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r(1 - n v)} \Big|_{t' = t - r/c}$$

Аналогично находим значение векторного потенциала

$$\vec{A} = \frac{e\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\beta}}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}} \cdot \frac{1}{r} \Big|_{t' = t - r/c}$$

Для системы зарядов с плотностью $\rho(r')$ по аналогии запишем скалярный и векторный потенциалы:

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(t - \bar{r}/c, \bar{r}')}{r} dV',$$

$$\vec{A}(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(t - \bar{r}/c, \bar{r}')}{r} dV'.$$

Электромагнитное поле на большом расстоянии от излучателя

Рассмотрим электромагнитное поле на большом расстоянии от излучателя по сравнению с размерами системы зарядов:

$$r_p \gg r'.$$

В этом случае величины скалярного и векторного потенциалов определяются соотношениями [2]

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_p} \int \rho \cdot \left(t - \frac{R_0}{c} + \frac{\bar{r}\bar{n}}{c} \right) dV,$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r_p} \int \vec{j}_{t-R/c + \bar{r}\bar{n}/c} dV.$$

Зная векторный потенциал, найдем напряженность магнитного поля

$$\vec{H} = \frac{\text{rot}\vec{A}}{\mu_0}.$$

Поскольку векторный потенциал в точке приема зависит от переменной $(t - r/c)$, то получаем

$$\mu_0 \vec{H} = \text{rot}\vec{A} = \left[\nabla \left(t - \frac{r}{c} \right) \cdot \vec{A} \right] = -\frac{1}{c} \bar{n} \cdot \vec{A}.$$

Воспользовавшись связью электрического и магнитного полей для электромагнитной волны [1]

$$\sqrt{\epsilon_0} \cdot \vec{E} = [\vec{H} \cdot \bar{n}] \cdot \sqrt{\mu_0},$$

приходим к результату

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \bar{n} \cdot \dot{\vec{A}} \cdot \bar{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

Поток вектора энергии равен [1]

$$\vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{H}.$$

Интенсивность излучения (скорость потерь энергии в единицу времени и в единицу телесного угла) определяется потоком вектора энергии, прошедшим через площадь $ds = r^2 d\Omega$:

$$dI = \vec{S} \cdot \vec{r}^2 d\Omega.$$

Таким образом, угловое распределение интенсивности излучения равно

$$\frac{dI}{d\Omega} = S \cdot r^2.$$

Лекция 8. Дипольное излучение, проволочные антенны

Дипольное излучение

Рассмотрим излучение системы, когда ее размеры a много меньше длины волны [2]:

$$a \ll \lambda$$

или когда временное запаздывание, обусловленное размерами системы, мало по сравнению с периодом колебаний волны T :

$$\frac{a}{c} \ll T.$$

Такое излучение носит название дипольного излучения. Скалярный и векторный потенциалы для дипольного излучения равны

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_0} \int \rho_{(t-R_0/c)} dV,$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r_0} \int \vec{j}_{(t-R_0/c)} dV,$$

где $t' = t - R_0/c$ – время излучения, t – время приема сигнала, R_0 – расстояние от точки излучения до точки приема. Плотность тока $j = \sum e\vec{v}$ может быть записана в виде

$$\sum e\vec{v} = \sum \frac{d\vec{r}'}{dt} \cdot e = \frac{d\vec{d}}{dt}.$$

Она характеризует скорость изменения дипольного момента системы $d = \sum er'$.

Тогда векторный потенциал системы токов может быть представлен в виде

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{r_0} \sum e\vec{v} = \frac{\mu_0}{4\pi r_0} \cdot \frac{d\vec{d}}{dt}.$$

Учитывая связь между векторным потенциалом и магнитным полем

$$\mu_0 \vec{H} = \frac{\dot{\vec{A}} \cdot \vec{n}}{c},$$

находим напряженность магнитного поля в электромагнитной волне для дипольного излучения

$$\mu_0 H = \frac{\ddot{\vec{d}} \cdot \vec{n}}{4\pi r_0 c}.$$

Электрическое поле в волне легко может быть найдено, если известно значение магнитного поля:

$$\sqrt{\epsilon_0} \vec{E} = \sqrt{\mu_0} \vec{H} \cdot \vec{n} = \frac{\dot{\vec{A}} \cdot \vec{n} \cdot \vec{n}}{c\sqrt{\mu_0}}.$$

Из этого соотношения находим напряженность электрического поля

$$E = \frac{\ddot{\vec{d}} \cdot \vec{n} \cdot \vec{n}}{4\pi r_0 \epsilon_0 c^2 r_0}$$

с учетом того, что $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$. Поток энергии равен

$$S = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H^2 = \frac{(\ddot{\vec{d}} \cdot \vec{n})^2}{16\pi^2 \epsilon_0 r_0^2 c^3}.$$

Интенсивность излучения в единицу телесного угла $d\Omega$ определяется потоком вектора энергии, прошедшим через площадь $ds = r^2 d\Omega$:

$$dI = S \cdot r^2 d\Omega = S \cdot r^2 2\pi \sin \theta d\theta.$$

Угловое распределение интенсивности излучения (рис. 2) равно

$$\frac{dI}{d\theta} = \frac{\ddot{d}^2}{8\pi \epsilon_0 c^3} \cdot \sin^3 \theta.$$

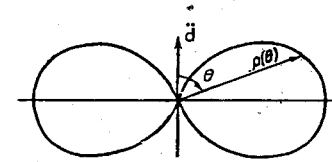


Рис. 2. Угловое распределение интенсивности дипольного излучения

Проинтегрировав по всем углам θ , от 0 до π , найдем полную интенсивность дипольного излучения

$$I = \frac{\ddot{d}^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}.$$

Радиопередающие устройства, антенны

Антенна представляет собой выходной элемент излучателя или приемника излучения в радиодиапазоне. Антенны подразделяются на три класса [2]:

- 1) антенны, выполненные в виде линейных проводников, в которых возбуждается стоячая волна (вибраторные антенны) или бегущая волна (антенны бегущей волны);
- 2) антенны, где излучателями служат отверстия в стенках волноводов, в которых возбуждено переменное магнитное поле;

3) антенны-интерферометры, в которых излучатели объединены в интерференционные схемы.

Антенны характеризуются следующими параметрами [2]:

- 1) частотные свойства, область рабочих длин волн;
- 2) коэффициент передачи антенны $\langle I_{изл} \rangle / I_{мощн}$ (средняя мощность излучения, деленная на подводимую мощность);
- 4) распределение излучения по направлению;
- 5) сопротивление излучателя, характеризующее нагрузку с точки зрения усилителя:

$$R_{изл} = \frac{\langle I_{изл} \rangle}{\langle I^2 \rangle} = \frac{2\langle I_{изл} \rangle}{I_0^2}$$

Проволочные антенны

Проволочные антенны представляют собой линейные проводники, в которых специальным образом возбуждается волна переменного тока радиочастоты.

Точечный диполь

Рассмотрим проволочную антенну (рис. 3), в которой в зависимости от продольной координаты x возбужден ток

$$I(x, t) = I_0 \cdot e^{-i\omega t} \cdot \frac{\sin k(\ell - |x|)}{\sin k\ell}$$

В том случае, когда длина антенны ℓ много меньше длины волны:

$$\ell \ll \lambda,$$

распределение тока в антенне при $k\ell \ll 1$ может быть получено из разложения в

ряд функции $\frac{\sin k(\ell - |x|)}{k\ell} \approx 1 - \frac{|x|}{\ell}$ в виде

$$I(x, t) = I_0 \cdot e^{-i\omega t} \left(1 - \frac{|x|}{\ell} \right)$$

Дипольный момент и распределение тока в антенне связаны соотношениями

$$d = \int \rho x dv, \quad \dot{d} = \int \dot{\rho} x dv = - \int \frac{dI}{dx} \cdot x dx,$$

плотность заряда ρ и ток I определяются уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{dI}{dx}$$

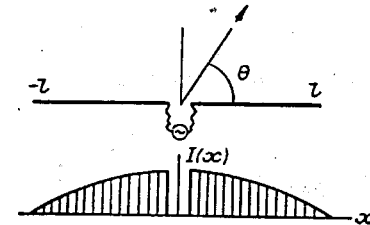


Рис. 3. Распределение интенсивности в антенне типа точечного диполя

После интегрирования по продольной координате находим первую и вторую производные дипольного момента антенны:

$$\dot{d} = \int_{-l}^l \frac{I_0 \cdot e^{-i\omega t}}{\ell} \cdot x dx = \frac{I_0 \cdot e^{-i\omega t}}{\ell} \cdot 2 \frac{\ell^2}{2} = I_0 \cdot e^{-i\omega t} \cdot \ell,$$

$$\ddot{d} = -i\omega I_0 \cdot e^{-i\omega t} \cdot \ell.$$

Зная вторую производную от дипольного момента, найдем векторный потенциал в точке с координатой r_0

$$\vec{A}_z = \frac{\mu_0}{4\pi r_0} \cdot \ell \vec{I}_0 \cdot e^{-i\omega t},$$

а затем азимутальную компоненту магнитного поля

$$H_\alpha = \frac{\ddot{d} \times \vec{n}}{4\pi r_0 c} = \frac{i\omega \ell I_0 \cdot e^{-i\omega t}}{4\pi c r_0} \cdot \sin \theta.$$

Электрическое поле E на большом расстоянии от диполя равно

$$\vec{E}_0 = \frac{\ddot{\vec{d}} \cdot \vec{n} \cdot \vec{n}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_0} = \frac{i\ell\omega I \cdot e^{i\omega t}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_0} \cdot \sin\theta.$$

Зная компоненты электрического и магнитного полей, легко записать поток энергии S и интенсивность излучения dI на единицу площади:

$$dI = \bar{S} r_0^2 d\Omega = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \frac{\omega^2 I_0^2 \ell^2}{16\pi^2 r_0^2 c^2} \cdot \sin^2\theta \cdot \sin^2\left(\omega t - \frac{\omega r}{c} + \frac{\pi}{2}\right) \cdot r_0^2 2\pi \sin\theta d\theta,$$

$$\frac{dI}{d\theta} = \frac{\omega^2 I_0^2 \ell^2}{8\pi\epsilon_0 c^3} \cdot \sin^3\theta \cdot \sin^2\left(\omega t - \frac{\omega r}{c} + \frac{\pi}{2}\right).$$

После интегрирования по углам θ приходим к результату

$$I = \frac{\omega^2 I_0^2 \ell^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \cdot \sin^2\left(\omega t - \frac{\omega r}{c} + \frac{\pi}{2}\right).$$

Интенсивность дипольного излучения, усредненная во времени, равна

$$\langle I \rangle = \frac{\omega^2 I_0^2 \ell^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}.$$

Сопротивление излучателя определяется соотношением

$$R_{\text{изл}} = \frac{\langle I_{\text{изл}} \rangle}{\langle I^2 \rangle} = \frac{2\langle I_{\text{изл}} \rangle}{I_0^2}.$$

Для точечного диполя сопротивление равно

$$R_{\text{изл}} = \frac{\omega^2 \ell^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} = 790 \cdot \frac{\ell^2}{\lambda^2} \text{ Ом.}$$

Таким образом, точечный диполь представляет собой широкополосную антенну, его эффективность квадратично падает с увеличением длины волны. Антенны типа точечного диполя широко используются в СВ-, ДВ- и СДВ-диапазонах.

Лекция 9. Радиопередающие устройства, полуволновой вибратор, директорная антенна, антенны с бегущей волной, дифракционные антенны, щелевые антенны

Полуволновой вибратор

Рассмотрим проволочную антенну (рис. 4), в которой в зависимости от продольной координаты x возбужден ток [2]

$$I(x, t) = I_0 \cdot e^{-i\omega t} \cdot \cos kx.$$

Длина антенны при этом сравнима с длиной волны [2]:

$$2\ell = \lambda/2.$$

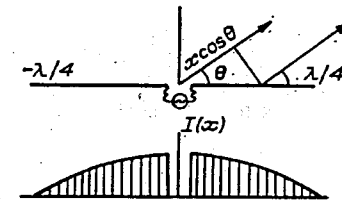


Рис. 4. Распределение интенсивности в полуволновом вибраторе

В этом случае мы не можем пользоваться дипольным приближением: нужно учесть интерференцию волн. Векторный потенциал, создаваемый участком антенны длиной dx , определяется соотношением

$$d\vec{A} = \frac{\vec{e}_x \cdot e^{-i\omega(t-r_p/c) - ikx \cos\theta}}{cr_p} \cdot I_0 \cdot \cos kx dx.$$

Интегрируя по всей длине антенны, приходим к результату

$$\vec{A} = \vec{e}_x \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_0}{r_p} \cdot e^{-i\omega(t-r_p/c)} \cdot \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} e^{-ikx \cos\theta} \cos kx dx.$$

Отдельно вычислим интеграл

$$\text{Int} = \frac{1}{2k} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-i\xi \cos \theta} (e^{i\xi} + e^{-i\xi}) d\xi = \frac{1}{k} \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos \theta\right)}{1 - \cos \theta} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos \theta\right)}{1 + \cos \theta} \right) = \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos \theta\right)}{k \sin^2 \theta}$$

Подставив значение интеграла, найдем векторный потенциал в точке с координатой r_p от полуволнового вибратора:

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_0}{kr_p} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} \cdot e^{-i\omega(t-r_p/c)}$$

Напряженность магнитного поля для полуволнового вибратора равна

$$\vec{H} = \frac{\dot{A} \cdot \vec{n}}{\mu_0 c} = \frac{2I_0}{4\pi r_p} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos \theta\right)}{\sin \theta} \cdot \frac{i\omega[\vec{n} \cdot \vec{e}_x]}{ck} \cdot e^{-i\omega(t-r_p/c)}$$

где $\vec{n} \cdot \vec{e}_x = \sin \theta$. Модуль вектора напряженности равен

$$|H| = \frac{2I_0}{4\pi r_p} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos \theta\right)}{\sin \theta}$$

Поток энергии равен

$$S = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} |H|^2$$

Интенсивность излучения для полуволнового вибратора определяется соотношением

$$dI = \left(\frac{2I_0}{4\pi r_p}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot 2\pi \cdot \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos \theta\right) \cdot \sin \theta d\theta \cdot r_p^2 \cdot \sin^2\left(\omega t - \frac{r_p}{c}\right)}{\sin^2 \theta}$$

Интегрируя по всем углам θ и усредняя по времени, найдем усредненную интенсивность излучения

$$\langle J \rangle = \frac{I_0^2}{4\pi \epsilon_0 c} \int \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} d \cos \theta$$

Учитывая значение определенного интеграла

$$\int_{-1}^1 \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot \xi\right) d\xi}{1 - \xi^2} = 1,22, \quad \xi = \cos \theta,$$

найдем усредненную во времени интенсивность излучения для полуволнового вибратора

$$\langle J \rangle = \frac{1,22 \cdot I_0^2}{4\pi \epsilon_0 c},$$

а также сопротивление излучения

$$R_{\text{изл}} = \frac{1,22^2}{4\pi \epsilon_0 c} = 73 \text{ Ом},$$

Сопротивление излучения полуволнового вибратора равно сопротивлению стандартного кабеля ($R_{\text{каб}} = 75 \text{ Ом}$), который используется для соединения антенн с приемниками.

Петлевой вибратор

Рассмотрим два параллельно соединенных полуволновых вибратора. Из-за емкостной связи между вибраторами токи в них направлены в одну и ту же сторону (а не в противоположные стороны, как это было для электростатики) (рис. 5) [2].

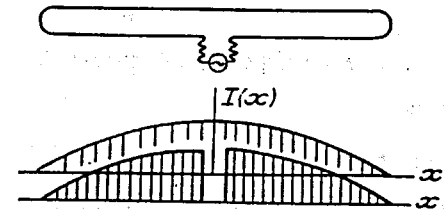


Рис. 5. Распределение интенсивности в петлевом вибраторе

Это приводит к увеличению эффективного тока в антенне в 2 раза ($I_0 \rightarrow 2I_0$) и интенсивности излучения в 4 раза ($I_0^2 \rightarrow 4I_0^2$). Сопротивление петлевого вибратора также возрастает в 4 раза по сравнению с полуволновым вибратором:

$$R_{пв} = 4R_{изл} = 292 \text{ Ом.}$$

Директорная антенна

Директорная антенна состоит из петлевого вибратора (A), рефлектора (R) и директора (D) (рис. 6) [2]. Токи в каждом из антенных электродов A, D, R одинаковы, а фазы сдвинуты так, чтобы

$$\delta_D = -\delta_R = kh = kd = \frac{\pi}{2}.$$

где h – расстояние между петлевым вибратором и рефлектором, а d – расстояние между петлевым вибратором и директором.

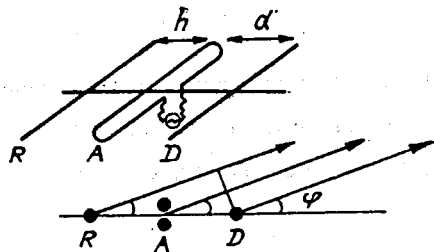


Рис. 6. Схема директорной антенны

Электрическое поле, создаваемое директорной антенной в точке с угловыми координатами θ и φ , равно

$$E(\theta, \varphi) = E_R \cdot e^{ikh \sin \theta \cos \varphi} + E_A + E_D \cdot e^{-ikd \sin \theta \cos \varphi}.$$

Зная поле от полуволнового вибратора, являющегося основой каждого элемента директорной антенны, приходим к результату

$$E(\theta, \varphi) = E_0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos \theta\right)}{\sin \theta} \cdot e^{-i\omega t} \cdot \left(e^{i\psi_1} + 2 + e^{i\psi_2} \right),$$

где

$$\psi_1 = kd \sin \theta \cos \varphi + \delta_R = \frac{\pi}{2} \cdot \sin \theta \cos \varphi + \frac{\pi}{2},$$

$$\psi_2 = -kd \sin \theta \cos \varphi + \delta_D = -\frac{\pi}{2} \cdot \sin \theta \cos \varphi - \frac{\pi}{2}.$$

Для данных сдвигов фаз находим электрическое поле директорной антенны

$$E(\theta, \varphi) = 2E_0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos \theta\right)}{\sin \theta} \cdot e^{-i\omega t} \cdot \left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \sin \theta \cos \varphi\right) \right).$$

Угловая интенсивность директорной антенны $dJ/d\Omega$ пропорциональна:

$$\frac{dJ}{d\Omega} \propto \left(\frac{\cos \pi/2 \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 \cdot \left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \sin \theta \cos \varphi\right) \right)^2.$$

Максимум излучения находится при углах $\varphi = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$ [2]:

$$\frac{dJ}{d\Omega} = 16 \left(\frac{dJ}{d\Omega} \right)_{\text{вибр}}$$

Излучение направлено в сторону директора и ослаблено в сторону рефлектора. Интенсивности излучения директорной антенны в 16 раз выше по сравнению с полуволновым вибратором. Директорные и рефлекторные электроды выполняются как пассивные вибраторы, токи в них возбуждаются за счет емкостной и индуктивной связи. Для этого директор делается короче (индуктивная связь), а рефлектор – длиннее (емкостная связь). Директорные антенны используются в УКВ- и СВЧ-диапазонах.

Штыревая антенна

Штыревая антенна используется в портативных радиостанциях. Штыревая антенна представляет собой половину дипольной антенны, расположенной на

проводящей поверхности Земли. Если ее длина удовлетворяет условию $l \ll \lambda/4$, она работает как точечный вибратор. В том случае, если длина штыревой антенны соответствует $l = \lambda/4$, она представляет собой полуволновой вибратор. Штыревые антенны широко используются в ДВ- и КВ-диапазонах.

Антенна с бегущей волной

Рассмотрим проволочную антенну, в которой возбуждена бегущая волна, что соответствует распределению тока в антенне

$$I(x) = I_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

Векторный потенциал в точке r_p для антенны с бегущей волной равен

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{I}_0}{r_p} \cdot e^{-i\omega t - r_p/c} \int_{-l/2}^{l/2} e^{ikx(1 - \cos\theta)} dx$$

После интегрирования по длине антенны приходим к результату

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{I}_0}{kr_p} \cdot e^{-i\omega t - r_p/c} \cdot \frac{2 \sin(kl(1 - \cos\theta)/2)}{(1 - \cos\theta)}$$

$$\vec{H} = \frac{\dot{\vec{A}} \cdot \vec{n}}{c\mu_0} = -\frac{1}{4\pi ck} \cdot \frac{\omega \vec{I}_0}{r_p} \cdot \sin\theta \cdot \left(\frac{2 \sin(kl(1 - \cos\theta)/2)}{1 - \cos\theta} \right)$$

Угловое распределение интенсивности излучения для антенны с бегущей волной равно

$$\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{I_0^2}{8\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{2 \sin(kl(1 - \cos\theta)/2)}{1 - \cos\theta} \right)^2 \cdot \sin^2 \theta$$

Нулевое излучение $J = 0$ находится под углами $\theta = 0, \pi$. Интенсивность излучения равна нулю $J = 0$ при $\theta = \pi/2$ и $kl = 2\pi m$ или $l = m\lambda$. При $kl \ll 1$ интенсивность излучения максимальна при $\theta_{\max} = \pi/2$. Антенны с бегущей волной применяются чаще всего как приемные антенны.

Рамочные антенны

Рамочные антенны – наиболее распространенный тип антенн в радиоприемниках. Такая антенна представляет собой катушку на ферритовом сердечнике. Рассмотрим случай, когда размер рамочной антенны много меньше длины волны: $\alpha \ll \lambda$. Магнитный момент рамочной антенны с током I равен

$$m_z = I_0 S \mu N,$$

где N – количество витков, μ – магнитная проницаемость ферритового сердечника, S – площадь рамки. Векторный потенциал и интенсивность излучения для рамочной антенны с магнитным моментом m равны

$$\vec{A} = \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^2},$$

$$\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{I_0^2 N^2 \mu^2}{8\pi\epsilon_0 c} \cdot (k^2 S^2) \cdot \sin^2 \theta,$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число.

Дифракционные антенны

В СВЧ- и УКВ-диапазонах, когда поперечные размеры антенны много больше длины волны излучения, металлическая поверхность, выполненная в виде параболоида вращения, работает как сферическое зеркало $y^2 = 2px$ с фокусным расстоянием $F = p/2$. Угловое разрешение такой антенны определяется дифракционными эффектами

$$\Delta\theta = \lambda/D.$$

Щелевые антенны

Щелевые антенны (рис. 7) используются в приемно-передающих устройствах, где высокую направленность излучения необходимо сочетать с компактностью антенны (бортовые радиолокаторы самолетов). Такая антенна представляет собой замкнутый с одного конца волновод, в котором возбуждается

стоячая волна. На принимающей поверхности волновода (щелевой антенны) делаются щели для приема волн. Расстояние между щелями обычно выбирается $l = \lambda/2$.

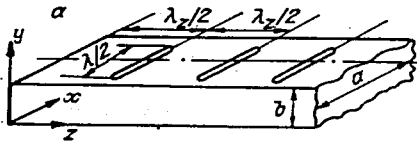


Рис. 7. Схема щелевой антенны

Лекция 10. Рассеяние электромагнитных волн

Рассеяние волны свободным зарядом

Под действием электромагнитной волны, падающей на заряженные частицы, последние испытывают ускорение и, соответственно, излучают. Процесс переизлучения может быть рассмотрен как рассеяние электромагнитной волны частицами. Введем дифференциальное сечение рассеяния [5]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{S} \cdot \frac{dJ}{d\Omega},$$

где S – поток вектора Умова–Пойтинга, $dJ/d\Omega$ – интенсивность излучения частицы. Свободная частица в поле линейно-поляризованной волны движется с ускорением a :

$$ma = eE_0 e^{-i\omega t}.$$

Заряженная частица, движущаяся с ускорением a , переизлучает электромагнитную волну. Электрическое поле $E_{\text{изл}}$ для дипольного излучения на расстоянии r от частицы равно

$$E_{\text{изл}} = \frac{ea \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 rc^2}.$$

Поток энергии для падающей и переизлученной волны соответственно равен

$$S_{\text{пад}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot E_0^2, \quad \bar{S}_{\text{изл}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot E^2.$$

Угловое распределение излучения частицы, движущейся в поле электромагнитной волны с ускорением a , равно

$$\frac{dJ}{d\Omega} = S_{\text{изл}} \cdot r^2 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot \left(\frac{e^2 \sin^2 \theta}{mc^2 4\pi\epsilon_0} \right)^2 \cdot E_{\text{изл}}^2 \frac{r^2}{r^2}.$$

Подставив значение электрического поля, найдем угловое распределение интенсивности излучения:

$$\frac{dJ}{d\Omega} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot r_e^2 \sin^2 \theta \cdot E_0^2.$$

Дифференциальное сечение рассеяния равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{S_{\text{пад}}} \cdot \frac{dJ}{d\Omega},$$

или

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot \left(r_e^2 \sin^2 \theta \cdot E_0^2 / \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot E_0^2 \right).$$

В итоге после преобразований получим

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 \sin^2 \theta.$$

Проинтегрировав по углу θ , найдем полное сечение рассеяния

$$\sigma = r_e^2 \int_0^\pi \sin^2 \theta \cdot 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{8\pi r_e^2}{3}.$$

Сечение рассеяния $\sigma = \frac{8\pi r_e^2}{3}$ носит название "сечение рассеяния Томсона".

Сечение рассеяния в поле неполяризованной волны

Сечение рассеяния в электромагнитном поле неполяризованной волны равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 \sin^2 \theta,$$

где угол θ – угол между вектором электрического поля E неполяризованной волны и радиусом-вектором:

$$\sin^2 \theta = \sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta_0 = 1 - \sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi,$$

здесь θ_0 – угол между осью z и радиусом-вектором r , φ – азимутальный угол в плоскости xy (рис. 8).

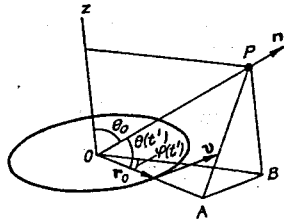


Рис. 8. Рассеяние в поле неполяризованной волны

Дифференциальное сечение рассеяния в поле неполяризованной волны равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 (1 - \sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi).$$

Усредняя по всем углам φ в поле неполяризованной волны, получаем

$$\left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle_{\varphi} = r_e^2 \left(1 - \frac{\sin^2 \theta_0}{2} \right) = \frac{r_e^2}{2} (2 \sin^2 \theta_0 + 2 \cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0).$$

Усредненное сечение рассеяния для неполяризованной электромагнитной волны перепишем в виде

$$\left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle_{\varphi} = \frac{r_e^2}{2} (1 + \cos^2 \theta_0).$$

Сила реакции излучения

Интенсивность дипольного излучения (скорость потерь энергии частицей) равна

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0} \frac{\ddot{x}^2}{c^3}.$$

Скорость потерь энергии определяется силой торможения F :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = F \frac{dx}{dt} = Fv.$$

Перепишем эти два уравнения в форме

$$Fv + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0} \frac{\dot{v}^2}{c^3} = 0.$$

Проинтегрируем полученное уравнение по времени:

$$\int Fv dt + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0} \int \frac{\dot{v}^2}{c^3} dt = 0.$$

Учитывая, что

$$\int \dot{v}^2 dt = \int \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} dt = v \frac{dv}{dt} - \int \frac{vd^2v}{dt^2} dt,$$

приходим к результату

$$\int \left(F - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{v} \right) \cdot v dt + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} v \dot{v} = 0.$$

В среднем энергия частицы сохраняется, если на нее действует сила реакции [3]

$$F_{\text{торм}} = \frac{e^2 \ddot{v}}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{e^2 \ddot{x}}{6\pi\epsilon_0 c^3}.$$

Рассеяние волны связанными зарядами

Движение электронов в атоме описывается уравнением колебаний

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

С учетом силы реакции движение связанного электрона в поле электромагнитной линейно-поляризованной волны имеет вид [4]

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e^2 \ddot{x}}{6\pi\epsilon_0 mc^3} + \frac{eE_0 \cdot e^{i\omega t}}{m}$$

Введем величину радиуса электрона

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} = r_e$$

и перепишем уравнение движения электрона в атоме:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \frac{2}{3} \frac{r_e}{c} \ddot{x} = \frac{eE_0 e^{-i\omega t}}{m}$$

Решение уравнения движения электрона ищем в виде $x = A \cdot e^{-i\omega t}$. Тогда запишем первую, вторую и третью производные для координаты x :

$$\dot{x} = +Ai\omega \cdot e^{-i\omega t}, \quad \ddot{x} = -A\omega^2 \cdot e^{-i\omega t}, \quad \dddot{x} = -i\omega^3 A e^{-i\omega t}$$

После подстановки производных в уравнение движения найдем константу A :

$$-A\omega^2 + \omega_0^2 A - \frac{2}{3} \frac{r_e}{c} i\omega^3 A = \frac{eE_0}{m}$$

В результате координата x и ускорение соответственно равны

$$x = \frac{(eE_0/m) \cdot e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{2}{3} \frac{r_e}{c} i\omega^3},$$

$$\ddot{x} = \frac{-\omega^2 (eE_0/m) \cdot e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{2}{3} \frac{r_e}{c} i\omega^3}$$

Электрическое поле для дипольного излучения $E_{\text{изл}}$ на расстоянии r от частицы равно

$$E_{\text{изл}} = \frac{e\ddot{x} \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 rc^2}$$

Угловое распределение излучения частицы, движущейся в поле электромагнитной волны с ускорением a , равно

$$\frac{dJ}{d\Omega} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_{\text{изл}}^2 r^2$$

Дифференциальное сечение рассеяния равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{E_{\text{изл}}^2}{E_{\text{пад}}^2} r^2 \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{E_{\text{изл}}^2}{E_{\text{пад}}^2} r^2$$

После подстановки получаем дифференциальное сечение рассеяния связанного электрона в поле линейно-поляризованной волны

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{\left[\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{2}{3} \frac{r_e i \omega^3}{c} \right]^2}$$

Возведя знаменатель в квадрат, приходим к результату

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 \sin^2 \theta \cdot \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{4}{9} \left(\frac{r_e}{c} \right)^2 \omega^6}$$

Сечение рассеяния связанного заряда определяется частотой электромагнитной волны. Рассмотрим область высоких частот $\omega \gg \omega_0$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r^2 \sin^2 \theta \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{3} \frac{r_e \omega}{c} \right)^2}$$

При резонансе $\omega = \omega_0$ дифференциальное сечение рассеяния равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{9}{4} r_e^2 \sin^2 \theta \cdot \left(\frac{c}{r_e \omega_0} \right)^2$$

В области низких частот $\omega \ll \omega_0$ дифференциальное сечение рассеяния определяется соотношением

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 \sin^2 \theta \cdot \frac{\omega^4}{\omega_0^4}$$

Теория голубого неба

Анализ рассеяния электромагнитных волн связанными зарядами позволяет объяснить цвет неба в зависимости от времени суток. Длина волны красного света равна $\lambda_{\text{кр}} = 6300 \text{ \AA}$, а для голубого света она составляет $\lambda_{\text{гол}} = 4800 \text{ \AA} < \lambda_{\text{кр}}$.

Голубой свет, проходя через атмосферу, рассеивается больше, чем другие цвета: $\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{\sin^2 \theta}{\lambda^4}$, поскольку имеет малую длину волны, поэтому в середине дня, когда солнце находится в зените, небо голубое.

Совершенно другая картина наблюдается на утренней или вечерней заре, когда солнце находится на горизонте. Красный свет под углом 90° практически не рассеивается, в то время как голубой свет рассеивается наиболее интенсивно. И когда свет проходит большой путь, в нем не остается голубого, он все больше становится красным, поэтому на заре преобладают красные тона неба.

Рассеяние волн системой зарядов

При падении электромагнитной волны на систему, состоящую из двух заряженных частиц, находящихся на расстоянии d друг от друга, электрическое поле рассеянной электромагнитной волны равно

$$E_s = E_{s1} + E_{s2} = E_0(1 + e^{ikd \cos \theta}).$$

Поток энергии электромагнитного поля пропорционален квадрату электрического поля:

$$\begin{aligned} E_s E_s^* &= E_0^2 (1 + e^{ikd \cos \theta}) \cdot (1 + e^{-ikd \cos \theta}) = E_0^2 \left(1 + 1 + 2 \cdot \left(\frac{e^{ikd \cos \theta} + e^{-ikd \cos \theta}}{2} \right) \right) = \\ &= E_0^2 \left(1 + 1 + 2 \cdot \left(\frac{e^{ikd \cos \theta} + e^{-ikd \cos \theta}}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Упростив это выражение, приходим к результату

$$E_s E_s^* = 2E_0^2 (1 + \cos(kd \cos \theta)).$$

Дифференциальное сечение рассеяния для системы из двух зарядов равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 2r_e^2 \sin^2 \theta \cdot (1 + \cos(kd \cos \theta)).$$

В случае если $kd \ll 1$ (когерентное рассеяние), дифференциальное и полное сечения рассеяния соответственно равны

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 4r_e^2 \sin^2 \theta, \quad \sigma = 4\sigma_T,$$

где σ_T – сечение рассеяния Томсона. Проинтегрировав по всем углам θ , найдем значение полного сечения когерентного рассеяния:

$$\begin{aligned} \sigma &= 2\pi 2r_e^2 \int \sin^2 \theta \cdot (1 + \cos(kd \cos \theta)) d(\cos \theta) = 4\pi r_e^2 \int (1 - x^2) \cdot (1 + \cos kdx) dx = \\ &= 4\pi r_e^2 \left[\left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^{+1} + \frac{\sin kdx}{kd} \Big|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} x^2 \cos(kdx) dx \right] = \\ &= 4\pi r_e^2 \left[2 - \frac{2}{3} + \left(\frac{\sin kdx}{kd} - \frac{x^2 \sin kdx}{kd} - \frac{2x \cos kdx}{(kd)^2} + \frac{2 \sin kdx}{(kd)^3} \right) \Big|_{-1}^{+1} \right]. \end{aligned}$$

В результате получаем

$$\sigma = \frac{16\pi r_e^2}{3} \cdot \left[1 - \frac{3 \cos kd}{(kd)^2} + \frac{3 \sin kd}{(kd)^3} \right].$$

При $kd = 2\pi$ сечение рассеяния равно

$$\sigma = 2\sigma_T \left[1 - \frac{3}{(4\pi)^2} \right].$$

Для системы из N зарядов сечение рассеяния в зависимости от длины волны определяется соотношениями [2, 6]

$$\lambda \gg \alpha; \quad \sigma = N^2 \sigma_T - \text{когерентное рассеяние,}$$

$$\lambda \approx \alpha; \quad \sigma = \sigma_T F(a/\lambda) - \text{промежуточный случай,}$$

$$\lambda \ll \alpha; \quad \sigma = N \sigma_T - \text{некогерентное рассеяние.}$$

Функция $F(a/\lambda)$ имеет тот или иной конкретный вид в зависимости от расположения зарядов. Рассеяние электромагнитных волн в рентгеновском диапазоне широко используется в физике конденсированных сред для анализа структуры вещества.

Излучение заряженных частиц, пучковые технологии, лазер на свободных электронах

Лекция 11. Синхротронное излучение, лазер на свободных электронах

Спектр синхротронного излучения

Синхротронное излучение возникает при движении заряженной частицы в магнитном поле [2, 6].

Угловое распределение излучения определяется энергией частиц. Характерный угол излучения релятивистской частицы определяется отношением поперечного импульса частицы к продольному импульсу:

$$\theta \approx \frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}}$$

Вспользуемся преобразованием Лоренца для продольной и поперечной компонент импульса:

$$p_{\perp} = p'_{\perp}, \quad p_{\parallel} = \gamma p'_{\parallel},$$

здесь p и p' — импульсы частицы в движущейся и лабораторной системах координат соответственно. Для дипольного излучения в собственной системе координат продольный и поперечный импульсы частицы равны. Учитывая этот факт, находим угловое распределение излучения заряженной частицы:

$$\theta \approx \frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}} = \frac{p'_{\perp}}{\gamma p'_{\parallel}} \approx \frac{1}{\gamma}$$

Релятивистская заряженная частица излучает вперед. Её излучение сосредоточено в конусе с углом раствора

$$\theta \approx 1/\gamma.$$

Рассмотрим движение релятивистской частицы с $\gamma \gg 1$ в поворотном дипольном магните с радиусом кривизны траектории частицы R . Наблюдатель, находящийся на большом расстоянии от магнита, зарегистрирует синхротронное излучение частицы с участка орбиты длиной

$$L_f = R \cdot \theta \approx \frac{R}{\gamma}.$$

Эффективный поперечный размер источника синхротронного излучения, регистрируемый удаленным наблюдателем, равен

$$\Delta = R - R \cos \theta = \frac{R \cdot \theta^2}{2} \approx \frac{R}{\gamma^2},$$

здесь $\theta \approx 1/\gamma$ — угол раствора конуса, в который направлено излучение релятивистской частицы. Длительность излучения определяется двумя эффектами: временем, в течение которого частица пролетает участок L_f , и запаздыванием синхротронного излучения

$$\Delta T = \frac{L_f}{v} - \frac{L_f}{c} = \frac{L_f}{c} \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

Учитывая, что для релятивистской частицы с $\gamma \gg 1$ $2 \cdot \left(1 - \frac{v}{c}\right) \approx \frac{1}{\gamma^2}$, получаем

длительность импульса синхротронного излучения

$$\Delta T = \frac{R}{\gamma c} \cdot \frac{1}{\gamma^2} \approx \frac{R}{c} \cdot \frac{1}{\gamma^3}.$$

Ширина спектра синхротронного излучения может быть найдена из соотношения неопределенности

$$\Delta \omega \cdot \Delta T \approx 1.$$

Таким образом, характерная частота синхротронного излучения равна

$$\omega \approx \frac{c}{R} \gamma^3.$$

Максимум спектра излучения находится на длине волны (критическая длина волны)

$$\lambda_c \approx \frac{R}{\gamma^3}.$$

При большой длине волны интенсивность синхротронного излучения падает с ростом длины волны как [2, 6]

$$\frac{dN}{d\lambda} \propto \left(\frac{\lambda c}{\lambda}\right)^{1/3}$$

При малых длинах волн интенсивность синхротронного излучения экспоненциально снижается с уменьшением длины волны [2, 6]:

$$\frac{dN}{d\lambda} \propto \sqrt{\frac{\lambda_c}{\lambda}} \cdot \exp\left(-\frac{\lambda_c}{\lambda}\right)$$

Интенсивность синхротронного излучения

Интенсивность дипольного излучения заряженной частицы, движущейся с ускорением a , равна

$$I = \frac{e^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

Учитывая, что ускорение заряженной частицы в магнитном поле равно

$$\vec{a} = \frac{e}{m} \cdot \gamma \vec{v} \cdot \vec{B},$$

найдем интенсивность синхротронного излучения для релятивистской частицы [2, 6]

$$I = \frac{8\pi\epsilon_0}{3} r_e^2 c v^2 \gamma^2 B^2,$$

где r_e – радиус электрона, $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_e} = mc^2$.

Потери энергии частицей, движущейся со скоростью $v \approx c$, за один оборот в ускорителе со средним радиусом орбиты R определяются соотношением [6, 7]

$$\Delta\epsilon = I \cdot \frac{2\pi R}{v} = \frac{16\pi^2 \epsilon_0}{3} \cdot \gamma^2 c v B^2 r_e^2 R.$$

В практической системе единиц потери энергии частицей за один оборот составляют [6, 7]

$$\Delta\epsilon (\text{кэВ}) = 90 \cdot \frac{E^4 (\text{ГэВ})}{R (\text{м})}$$

Потери энергии частицей на единицу длины поворотного магнита равны

$$\frac{d\epsilon}{ds} = \frac{I}{v} = \frac{8\pi\epsilon_0}{3} \cdot r_e^2 v c \gamma^2 B^2.$$

Число γ -квантов, излученных за период обращения частицы в накопительном кольце, равно [7]

$$N = \frac{\Delta\epsilon}{\hbar c / \lambda_c} \approx \frac{16\pi^2 \epsilon_0}{3} \cdot \frac{\gamma^2 B^2 r_e^2 v c R^2}{\hbar c \gamma^3}$$

В магнитном поле с индукцией B релятивистская частица с импульсом $p = \gamma m v$ движется по орбите радиусом R :

$$eBR = \gamma m v.$$

Число γ -квантов, излученных за период обращения частицы, линейно растет с ростом релятивистского фактора γ [7]:

$$N = \frac{16\pi^2 \epsilon_0}{3} \cdot \frac{\gamma^4 m^2 v^3 c r_e^2}{\hbar c \gamma^3 e} = \frac{\gamma \beta^3 e^3}{3 \epsilon_0 \hbar c}$$

При движении частицы в магнитном поле с $B_{\perp} = B_{\max} \sin \frac{2\pi z}{\lambda_0}$ (магнитное

поле ондулятора) средние потери энергии частицей на единицу длины в два раза ниже, чем при максимальном магнитном поле B_{\max} (среднее значение $\sin^2(2\pi z/\lambda) = 1/2$):

$$\frac{d\epsilon}{ds} = \frac{8\pi\epsilon_0}{3} \cdot r_e^2 v c \gamma^2 \cdot \frac{B_{0\max}^2}{2}$$

При прохождении частицей участка с гармоническим магнитным полем длиной L потери энергии частицей составляют [7]

$$\Delta\epsilon = \frac{4\pi\epsilon_0}{3} \cdot r_e^2 v c \gamma^2 B_{\max}^2 L.$$

Одной из ключевых характеристик синхротронного излучения является яркость [6, 7]

$$B = \frac{dn/d\theta}{(2\pi)^{3/2} S_x \cdot S_y \cdot \theta_y} \left[\frac{\text{фотон}}{c \cdot \text{мрад}^2 \cdot \text{мм}^2 \cdot 0,1\% \text{ ш.п.}} \right]$$

Демпфирование бетатронных колебаний. Радиационное охлаждение.

Синхротронное излучение в накопителях заряженных частиц приводит к затуханию их колебаний за счет потерь энергии. Время затухания колебаний (время радиационного охлаждения) определяется соотношением [7]

$$\frac{1}{\tau_{\text{rad}}} = \frac{\Delta \epsilon}{\epsilon},$$

где $\Delta \epsilon$ – потери энергии частицей за один оборот. Характерное время затухания колебаний за счет синхротронного излучения из поворотных магнитов равно [7]

$$\frac{1}{\tau_{\text{rad}}} = \frac{\Delta \epsilon}{\epsilon} = \frac{8\pi\epsilon_0}{3} \cdot \frac{r_e^2 v^2 c \gamma^2 B^2}{\gamma m c^2} \cdot \frac{2\pi R}{v}.$$

Время радиационного охлаждения для ондулятора длиной L составляет

$$\tau_{\text{rad}}^{-1} = \frac{4\pi\epsilon_0}{3} \cdot c r_e^2 v \gamma B_{\text{max}}^2 \cdot \frac{L}{m c^2}.$$

Квантовые флуктуации

Синхротронное излучение определяет равновесный размер пучка в ускорителе за счет квантовых флуктуаций излучения, приводящих к разбросу энергии частиц. Характерная энергия квантов излучения равна [7, 8]

$$\epsilon_\gamma = \hbar \omega_0 \gamma^3.$$

Частица с энергией E_e излучает N фотонов [7, 8]:

$$N = \frac{E_e}{\epsilon_\gamma}.$$

Излучение квантов статически независимо, поэтому разброс по числу излученных квантов δN (дисперсия числа квантов) будет пропорционален \sqrt{N} .

Соответственно, разброс энергии частиц равен $\delta \epsilon_e = \epsilon_\gamma \delta N$ [7, 8]

$$\delta \epsilon_e = \sqrt{\epsilon_\gamma E_e}.$$

Установившийся горизонтальный размер пучка по порядку величины равен [7, 8]

$$\Delta x \approx D \frac{\delta \epsilon_e}{E_e} \approx D \sqrt{\frac{\epsilon_\gamma}{E_e}},$$

где $D = R/q^2$ – дисперсионная функция накопителя, R – средний радиус орбиты накопителя, $q \approx 3-5$ – так называемое бетатронное число.

Лазер на свободных электронах, монохроматическое излучение из ондулятора

Для формирования монохроматического излучения высокой яркости в лазере на свободных электронах (ЛСЭ) с перестраиваемой длиной волны применяются ондуляторы. В качестве рабочей среды в них используется пучок релятивистских электронов, проходящих через ондулятор. В ондуляторе создается переменное магнитное поле, изменяющееся по гармоническому закону вдоль распространения пучка заряженных частиц [2, 6]

$$H_\perp = H_0 \cdot \sin \frac{2\pi z}{\lambda_0},$$

где λ_0 – пространственный период ондуляторности. Частица в поперечном магнитном поле движется по спирали. Шаг спирали определяется ларморовским радиусом ρ

$$\rho = \frac{p}{eH} = \frac{\gamma m c}{eH},$$

где p – импульс частицы. Параметр α – угол отклонения электронов в ондуляторе, равный

$$\alpha = \frac{\lambda_0}{2\rho} = \frac{\lambda_0 e H}{2\pi \gamma m c},$$

характеризует отношение периода ондуляторности λ_0 к шагу ларморовской спирали. Угол конуса излучения релятивистской частицы равен $\theta \approx 1/\gamma$. Параметр ондуляторности K характеризует отношение угла отклонения электронов во встроеном приборе к характерному углу $\theta \approx 1/\gamma$, в который направлено синхротронное излучение релятивистской частицы:

$$K = \frac{\alpha}{\theta} = \frac{\lambda_0 e H}{2 \pi m c}$$

Параметр ондуляторности для ондулятора всегда удовлетворяет условию $K \ll 1$. Для наблюдателя, регистрирующего излучение из ондулятора под углом θ к его оси, период излучения определяется продольной скоростью электронов и эффектами запаздывания света:

$$T = \frac{\lambda_0(1-\beta \cos \theta)}{v_{\parallel}} - \frac{\lambda_0(1-\beta \cos \theta)}{c},$$

где $v_{\parallel}^2 = v_0^2 - v_{\perp}^2 = v^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{4}\right)$ — продольная скорость электрона, множитель

$1 - \beta \cos \theta$ представим в виде $1 - \beta \cos \theta = \frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 = \frac{1}{\gamma^2} (1 + \theta^2 \gamma^2)$. Учитывая, что при

$\gamma \gg 1$ множитель $1 - \frac{1}{2\gamma^2} \approx \frac{v}{c}$, находим период излучения для наблюдателя,

регистрирующего излучение вдоль оси ондулятора при $\theta = 0$:

$$T = \frac{\lambda_0}{c} \cdot \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha_0^2}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2}\right)} - 1 \right] = \frac{\lambda_0}{c} \cdot \left(1 + \frac{\alpha_0^2}{4} + \frac{1}{2\gamma^2} - 1 \right) = \frac{\lambda_0}{2\gamma^2 c} \cdot \left(1 + \frac{\alpha_0^2 \gamma^2}{2} \right).$$

Таким образом, период ондуляторного излучения равен

$$T = \frac{\lambda_0}{2\gamma^2 c} \cdot \left(1 + \frac{K^2}{2} \right),$$

где $K = \alpha \gamma$ — параметр ондуляторности. Длина волны синхротронного излучения для первой гармоники равна

$$\lambda_{\text{онд}} = \frac{\lambda_0}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{K^2}{2} \right).$$

Синхротронное излучение из ондулятора при $K \ll 1$ когерентно. Длина волны излучения из ондулятора может легко варьироваться при изменении энергии электронов (релятивистского фактора γ). Перестраивание длины волны

излучения из ондулятора при изменении энергии электронов является одним из ключевых достоинств рентгеновского лазера на свободных электронах по сравнению с традиционными лазерами. Ондулятор представляет собой аналог дифракционной решетки. Для ондулятора длиной $L = N\lambda_0$ интенсивность синхротронного излучения увеличивается с ростом числа периодов N как $I \propto N^2$. Как следует из соотношения неопределенности, ширина спектра излучения уменьшается с ростом N :

$$\Delta\omega \cdot TN \cong 1.$$

Монохроматичность ондуляторного излучения определяется числом периодов ондулятора N :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_{\text{онд}}} \approx \frac{1}{N}.$$

Лазер на свободных электронах, созданный на основе ондуляторного излучения, обладает рядом преимуществ по сравнению с другими типами лазеров. Во-первых, длина волны излучения определяется параметрами ондулятора и энергией электронов, а следовательно, может быть практически любой и плавно перестраиваться. Во-вторых, наличие электронных пучков со средней мощностью порядка десятков мегаватт и средней плотностью мощности до сотни мегаватт на квадратный миллиметр позволяет создавать ЛСЭ со средней мощностью до нескольких мегаватт. В-третьих, использование в качестве рабочей среды электронного пучка позволяет обеспечить малую (дифракционную) угловую расходимость излучения. Эти особенности определяют области применения ЛСЭ: лазерная медицина, спектроскопия, лазерная фотохимия и разделение изотопов.

Синхротронное излучение из виглера

Для формирования жесткого рентгеновского излучения в накопительных кольцах устанавливают виглеры. В виглере, так же как и в ондуляторе, создается переменное магнитное поле, изменяющееся по гармоническому закону вдоль распространения пучка заряженных частиц [2, 6]

$$H_{\perp} = H_0 \sin \frac{2\pi z}{\lambda_0}$$

Встроенные приборы с поперечным гармоническим магнитным полем называются виглерами при параметре ондуляторности

$$K = \frac{\lambda_0 e H}{2\pi m c} > 1.$$

В предельном случае $K \gg 1$ ($K \approx 100$) встроенный прибор называется шифтером, он служит для генерации жесткого рентгеновского излучения с малой длиной волны или для смещения спектра синхротронного излучения в область малых длин волн. Магнитное поле в шифтере достигает значения $B_{sh} = 10$ Т, в то время как в дипольном магните оно составляет $B_{mag} = 1$ Т. Поскольку длина волны синхротронного излучения обратно пропорциональна значению магнитного поля:

$$\lambda_c \approx \frac{R}{\gamma^3} \approx \frac{1}{B},$$

то использование шифтера позволяет на порядок понизить значение длины волны по сравнению с синхротронным излучением из поворотных магнитов.

Лекция 12. Пучковые технологии, применение синхротронного излучения, нанотехнологии при производстве микронных схем

Синхротронное излучение широко используется для исследований в физике конденсированных сред и атомной физике, биологии и медицине, химии и геологии, дает возможность расширения исследований по проблемам экологии, а также развивает новые технологии, такие как микромеханика и литография, технология материалов и металлургия [2, 6]. Применение синхротронного излучения в различных областях науки и техники основано на физических явлениях, приведенных в таблице.

Применение синхротронного излучения.

Физические явления и процессы	Эффекты			
	Фотоэлектроны	Оже-электроны	Флуоресценция	Рентгеновская флуоресценция
Вторичная эмиссия	Упругое рассеяние	Неупругое рассеяние	Рентгеновская дифракция	Фотоэлектронная дифракция
Химические эффекты	Реакции	Десорбция	Фотохимия при возбуждении СИ	
Радиационные эффекты	Радиационные повреждения			
Технологии	Литография	Микромеханика		

Поглощение рентгеновского излучения

Интенсивность синхротронного излучения (СИ), прошедшего через образец, экспоненциально падает с изменением толщины образца:

$$I_{пр} = I_0 \cdot e^{-\mu d},$$

здесь μ – коэффициент поглощения излучения. Интенсивность СИ, поглощенная в образце, равна

$$I_{погл} = I_0 (1 - e^{-\mu d}).$$

Абсорбция СИ дает информацию об атомной структуре в окрестностях атома, поглотившего γ -квант СИ. Фотоэлектроны, образующиеся при поглощении γ -кванта СИ, могут быть рассмотрены в волновом приближении. Изображение от фотоэлектронов аналогично дифракционной картине в оптике. "Волна" взаимодействует с соседними атомами, окружающими адсорбирующий атом. В результате взаимодействия происходит модуляция интенсивности поглощенного СИ. Так, например, вкрапленные в образец атомы приводят к появлению пика интенсивности. Положение пика дает информацию о расстоянии между атомами, высота пика – о количестве соседних атомов вокруг вкрапленного атома, ширина пика – о тепловом движении вкрапленных атомов.

Рентгеновский флуоресцентный анализ

Метод основан на свойстве атомов испускать под действием СИ характеристическое излучение, спектр которого однозначно определяется атомным номером облучаемого элемента. Рентгеновский флуоресцентный анализ дает информацию об элементном содержании в веществе. Для анализа достаточно иметь образцы с размерами порядка нескольких микрометров. Минимальное разрешение данного метода составляет 1 атом примеси на 10^9 атомов образца.

Фотоэлектронная спектроскопия

Фотоэлектронная спектроскопия с малоугловым разрешением используется для исследований электронной структуры твердого тела и его поверхности. Электроны, эмитируемые с образца под действием СИ, анализируются по углу и кинетической энергии. Распределение электронов по энергии дает информацию об энергии связи в атомах образца.

Рентгеновская литография

Нанесение на поверхность кристаллов проводящих покрытий заданной конфигурации позволяет создавать сложные схемы микроэлектроники – так называемые большие интегральные схемы (рис. 9, а). Слой фоторезиста после воздействия на него СИ устойчив к кислоте и предохраняет проводник от разрушения во время травления в кислоте. На поверхности кремния возникает схема электрических соединений (рис. 9, б).

Сегодня для создания интегральных микросхем с размерами 2–3 мкм применяется ультрафиолетовый лазер. СИ позволит создавать интегральные схемы с размерами 20–30 Å (реализация нанотехнологий). В результате в 1000 раз уменьшатся размеры электронной техники.

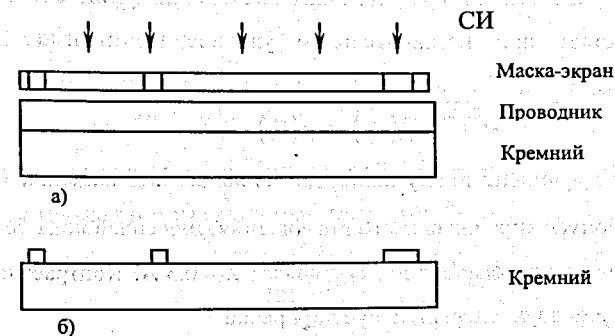


Рис. 9. Принцип создания больших интегральных схем в микроэлектронике

Рентгеноструктурный анализ

Явление дифракции рентгеновских лучей на периодических кристаллических решетках лежит в основе структурного анализа:

$$qa_m = 2ka_m \sin \frac{\theta}{2} = 2\pi m, \quad m = 1, 2, 3.$$

При одновременном выполнении условия Вульфа–Брэгга для трехмерного кристалла возникают узкие максимумы (рефлексы) на дифракционной картине. Образец качают (вращают) вокруг нескольких осей и получают трехмерное изображение образца (так расшифровываются молекулы ДНК).

Рентгеноскопия

Интенсивность излучения, прошедшего через образец, равна

$$I = I_0 e^{-\mu d}.$$

Разностный метод рентгенограмм используется для получения контрастных рентгеновских снимков с малой дозой облучения. Для этого в кровь человека вводятся соли йода. Для выделения контрастной разности интенсивности

излучения работают вблизи края поглощения, где коэффициент пропускания скачком возрастает при незначительном увеличении энергии фотонов от значения E_1 до E_2 :

$$\mu(E_2) \gg \mu(E_1),$$

$\mu_2 = \mu(E_2)$ – коэффициент пропускания для сильного поглощения, $\mu_1 = \mu(E_1)$ – коэффициент пропускания для слабого поглощения. Для солей йода длина волны, соответствующая краю поглощения, составляет $\lambda = 0,3 \text{ \AA}$. Контрастная разность интенсивностей для двух энергий излучения равна

$$I = I_0(e^{-\mu_1 d} - e^{-\mu_2 d}).$$

Контрастные рентгенограммы используются для рентгеноскопии кровеносных сосудов с характерным диаметром сосуда 1 мм. Например, для просвечивания желудка используются соли бария ($Z = 56$), которые сильно поглощают излучение с длиной волны, превышающей $\lambda = 0,13 \text{ \AA}$.

Лекция 13. Излучение релятивистской заряженной частицы

Поле заряда, движущегося с релятивистской скоростью

Скалярный и векторный потенциалы заряда, движущегося с релятивистской скоростью, соответственно равны (см. лекцию 7)

$$\varphi(r, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \cdot \frac{1}{(1 - \bar{v}\bar{n}/c)},$$

$$\vec{A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \cdot \frac{\vec{v}}{(1 - \bar{v}\bar{n}/c)}.$$

Множитель $\chi = (1 - \bar{v}\bar{n}/c)$ учитывает эффекты запаздывания, связанные с конечной скоростью распространения света; $\bar{n} = \vec{r}/r$. Электрическое поле определяется скалярным и векторным потенциалами:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi.$$

Подставив значения скалярного и векторного потенциалов, получаем выражение для электрического поля

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_e \chi^3 c} \cdot \bar{n} \dot{\vec{\beta}} \cdot (\bar{n} - \vec{\beta}) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \gamma^2 \chi^3 r_e} \cdot (\bar{n} - \vec{\beta}).$$

Для заряда, движущегося с постоянной скоростью, электрическое поле определяется только вторым слагаемым (рис. 10):

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \gamma^2 \chi^3 r_e} \cdot (\bar{n} - \vec{\beta}).$$



Рис. 10. Векторная диаграмма электрического поля заряда, движущегося с постоянной скоростью

Магнитное поле рассчитывается по формуле

$$\vec{H} = \bar{n} \cdot \vec{E} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}.$$

Излучение нерелятивистской частицы

Электрическое поле медленно движущегося заряда равно

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_e c} \cdot \bar{n} \cdot \bar{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}.$$

Магнитное поле определяется соотношением

$$\vec{H} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_e c} \cdot \bar{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = \frac{q\dot{u}}{4\pi r_e c} \cdot \sin\theta.$$

Вектор потока энергии равен

$$\vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot H^2 = \left(\frac{q\dot{u}}{4\pi rc} \cdot \sin\theta \right)^2 \cdot \frac{1}{c\epsilon_0} = \frac{q^2 \dot{u}^2 \cdot \sin^2\theta}{16\pi^2 r^2 c^3 \epsilon_0}.$$

Угловое распределение интенсивности излучения определяется вектором потока энергии:

$$\frac{dI}{d\theta} = S \cdot \sin\theta \cdot 2\pi d\theta r^2.$$

Проинтегрировав по всем углам θ , находим интенсивность излучения I (скорость потерь энергии частицей):

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = I = 2\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{q^2 \dot{u}^2}{16\pi^2 c^3 \epsilon_0} = \frac{q^2 \dot{u}^2}{6\pi c^3 \epsilon_0}.$$

В следующем параграфе выполним аналогичные преобразования для релятивистской частицы.

Излучение быстро движущегося заряда

Рассмотрим случай, когда скорость и ускорение заряженной частицы параллельны друг другу: $\beta \parallel \dot{u}$ [2]. Электрическое и магнитное поля в этом случае равны

$$\vec{E} = \frac{q\vec{n} \cdot \vec{n} \cdot \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r c^2 \cdot \left(1 - \frac{v \cos\theta}{c}\right)^3},$$

$$\vec{H} = \vec{n} \cdot \vec{E} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = \epsilon_0 c \vec{n} \cdot \vec{E}.$$

Модуль напряженности магнитного поля определяется соотношением

$$H = \frac{q \sin\theta \dot{u}}{4\pi r c \cdot \left(1 - \frac{v \cos\theta}{c}\right)^3}.$$

Вектор потока энергии равен

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}.$$

Учитывая соотношение между H и E , находим модуль вектора потока энергии:

$$S = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot H^2 = \frac{H^2}{c\epsilon_0} = \frac{q^2 \dot{u}^2 \sin^2\theta}{16\pi^2 r c^3 \epsilon_0 \left(1 - \frac{v \cos\theta}{c}\right)^6}.$$

Энергия, теряемая частицей в единицу времени t' , измеренного в собственной системе отсчета, равна

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = S \cdot \frac{dt}{dt'} \cdot r^2 d\Omega,$$

где вектор \vec{S} определяет поток энергии за единицу времени t в точке приема. Интервалы времени в точке излучения dt' и в точке приема dt связаны соотношением

$$dt = dt' \cdot \left(1 - \frac{v \cos\theta}{c}\right).$$

Скорость потерь энергии релятивистской частицей в собственной системе отсчета равна

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \frac{\dot{u}^2 q^2}{16\pi^2 c^3 \epsilon_0} \cdot \frac{\sin^2\theta}{\left(1 - \frac{v \cos\theta}{c}\right)^5}.$$

Рассмотрим ситуацию, когда ускорение частицы постоянно: $dv = \dot{u} dt$. Скорость потерь энергии в этом случае равна

$$d\mathcal{E} = \frac{\dot{u} q^2 \sin^2\theta}{16\pi^2 c^3 \epsilon_0} \cdot \int_{u_0}^v \frac{dv}{\left(1 - \frac{v \cos\theta}{c}\right)^5} = \frac{q^2 \dot{u} \sin^2\theta}{64\pi^2 \epsilon_0 c^2 \cos\theta} \cdot \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{u_0 \cos\theta}{c}\right)^4} - 1 \right].$$

Угловое распределение излучения релятивистской частицы

Скорость потерь энергии частицей, или угловое распределение интенсивности пропорциональны следующему выражению (см. предыдущий параграф):

$$\frac{d\epsilon}{dt'} = \frac{dI}{d\Omega} \propto \frac{\sin^2 \theta}{\left(1 - \frac{v \cos \theta}{c}\right)^5}.$$

Угловое распределение интенсивности излучения релятивистской частицы имеет минимум $\frac{dI}{d\Omega} = 0$ при угле $\theta = 0$. Максимум излучения соответствует углу

$$\theta \approx \frac{1}{\gamma}.$$

Таким образом, излучение релятивистской частицы направлено строго вперед. Угловая ширина излучения релятивистской частицы оценивается соотношением $\theta \approx \gamma^{-1}$.

Излучение релятивистской частицы при ускорении, перпендикулярном скорости

Электрическое поле релятивистской частицы равно [2]

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_e \chi^3 c} \cdot \vec{n} \dot{\vec{\beta}} \cdot (\vec{n} - \vec{\beta}) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \gamma^2 \chi^3 r_e} \cdot (\vec{n} - \vec{\beta}).$$

При $\gamma \gg 1$ пренебрегаем вторым слагаемым и получаем выражение для E

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_e \chi^3 c} \cdot \vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} (\vec{n} - \vec{\beta}).$$

Рассмотрим ситуацию, когда ускорение заряженной частицы $w = c\dot{\vec{\beta}}$ перпендикулярно ее скорости: $\dot{\vec{\beta}} \perp \vec{\beta}$. Распишем векторное произведение в формуле для электрического поля в виде

$$\vec{n} \cdot (\vec{n} - \vec{\beta}) \cdot \vec{w}_1 = (\vec{n} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{n} \vec{w}_1) - \vec{w}_1 (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}).$$

Учитывая, что (см. рис. 11)

$$\vec{n} \cdot \vec{\beta} = \frac{v \cos \theta}{c},$$

$$\vec{n} \vec{w}_1 = w \sin \theta \cos \varphi,$$

получаем выражение для электрического поля

$$E = \frac{q w_1 \left[(\vec{n} - \vec{\beta}) \cdot \sin \theta \cos \varphi - \frac{\vec{w}_1}{w} \cdot \left(1 - \frac{v \cos \theta}{c}\right) \right]}{4\pi\epsilon_0 r_e c \cdot \left(1 - \frac{v \cos \theta}{c}\right)^3}.$$

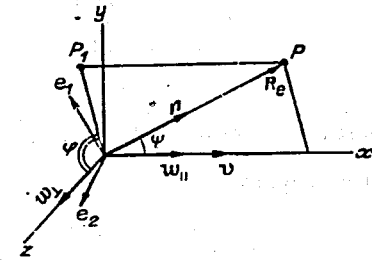


Рис. 11. Движение релятивистской заряженной частицы

Найдем квадрат модуля напряженности электрического поля:

$$\begin{aligned} E^2 &\propto (\vec{n} - \vec{\beta})^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \left(1 - \frac{v \cos \theta}{c}\right)^2 - 2 \left(\frac{\vec{w}}{w} \cdot \vec{n}\right) \left(1 - \frac{v \cos \theta}{c}\right) \sin \theta \cos \varphi = \\ &= (1 + \beta^2 - 2\beta \cos \theta) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \left(1 - \frac{v \cos \theta}{c}\right)^2 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \left(1 - \frac{v \cos \theta}{c}\right) = \\ &= -(1 - \beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \left(1 - \frac{v \cos \theta}{c}\right)^2. \end{aligned}$$

После арифметических преобразований получаем

$$E^2 \propto \frac{\left(1 - \frac{v \cos \theta}{c}\right)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\left(1 - \frac{v \cos \theta}{c}\right)^6}.$$

Скорость потерь энергии релятивистской частицей в собственной системе отсчета равна

$$\frac{d\varepsilon}{dt'} \propto \frac{dt}{dt'} \vec{E} \cdot \vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E^2 \left(1 - \frac{v \cos \theta}{c}\right).$$

После подстановки квадрата модуля электрического поля получаем скорость потерь энергии релятивистской частицей

$$\frac{d\varepsilon}{dt'} = \frac{e^2 w^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{\left(1 - \frac{v \cos \theta}{c}\right)^2 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\left(1 - \frac{v \cos \theta}{c}\right)^5} d\Omega.$$

Излучение для релятивистской частицы с $\beta \perp \dot{\beta}$ также направлено вперед, и угловое распределение имеет ширину

$$\theta \approx \gamma^{-1}.$$

Излучение релятивистской частицы, движущейся в электромагнитных полях

В собственной системе координат ускорение частицы w_0 определяется величиной электрического поля E_0 в этой системе координат:

$$w_0 = \frac{c}{m} E_0.$$

Продольная $E_{||}$ и поперечная E_{\perp} компоненты электрического поля в собственной системе координат находятся из преобразований Лоренца для компонент поля в лабораторной системе координат (см. лекцию 1):

$$E_{||0} = E_{||}, \quad E_{\perp 0} = \gamma \cdot (E_{\perp} + \vec{\beta} \times \vec{H}).$$

Подставив значения электрического поля в собственной системе координат в выражение для ускорения, найдем его величину через компоненты поля в лабораторной системе координат:

$$w_0^2 = \frac{q^2}{m^2} \cdot \left[E_{||}^2 + \gamma^2 (E_{\perp} + \vec{\beta} \times \vec{H})^2 \right].$$

После арифметических преобразований получаем выражения для ускорения заряженной частицы

$$\begin{aligned} w_0^2 &= \gamma^2 \frac{q^2}{m^2} \cdot \left(E_{||}^2 - \beta^2 E_{||}^2 + E_{\perp}^2 + 2E_{\perp} (\vec{\beta} \cdot \vec{H}) + (\vec{\beta} \cdot \vec{H})^2 \right) = \\ &= \gamma^2 \frac{q^2}{m^2} \cdot \left[(\vec{E} + \vec{v} \cdot \vec{H})^2 - (\vec{\beta} \cdot \vec{E})^2 \right]. \end{aligned}$$

Интенсивность излучения заряженной частицы равна

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = I = \frac{q^2 w_0^2}{6\pi c^3 \varepsilon_0}.$$

Подставив выражение для ускорения w_0 , находим интенсивность излучения заряженной частицы, движущейся в электромагнитных полях:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{q^4 \gamma^2}{6\pi c^3 m^2 \varepsilon_0} \cdot \left[(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{H})^2 - \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{E}}{c} \right)^2 \right].$$

Переходное излучение

Рассмотрим движение ультрарелятивистской частицы в вакууме вдоль оси цилиндрической трубы переменного сечения. Поле частицы при $v \approx c$, ($\gamma \gg 1$) имеет, как уже знаем, большие значения вблизи $\theta = \pi/2$:

$$E \approx \frac{e\vec{r}}{r^3} \cdot \frac{\gamma}{\left(1 + \frac{\alpha^2 \gamma^2}{2}\right)^{3/2}}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta \ll 1,$$

$$H = \vec{\beta} \cdot E.$$

В этой области ($\theta \approx \pi/2$, $\alpha \leq 1/\gamma$) поле направлено почти ортогонально скорости:

$E_{\perp}/E_{||} = \text{tg} \theta \approx \gamma$. В области малых углов ($\theta \leq 1$) поле примерно в γ^3 раз меньше.

Поле релятивистской частицы по своей структуре близко к полю плоской волны. Когда частица влетает в трубу меньшего диаметра, последняя "срезает" поле частицы, и оно, отразившись от торцевой стенки на стыке труб, излучается в направлении, обратном движению частицы. Потери энергии частицей на излучение можно оценить как

$$\Delta \varepsilon \sim \frac{1}{4\pi} \int_a^b E_{\perp}^2(r) 2\pi r dr \cdot \ell_{\parallel} \approx \frac{e^2 \gamma^2}{4\pi \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \cdot \ell_{\parallel}$$

Здесь a – максимальный радиус трубы в области перехода, b – минимальный радиус трубы, ℓ_{\parallel} – характерный продольный размер области поля частицы, $\ell_{\parallel} \sim ab \sim b/\gamma$. Тогда

$$\Delta \varepsilon \sim \frac{\gamma e^2}{4\pi \varepsilon_0 b} \cdot \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right)$$

При $b \ll a$ приходим к задаче об излучении частицы, пролетающей сквозь круглое отверстие в плоском экране.

Очевидно, длина формирования переходного излучения в данном случае есть ℓ_{\parallel} , а длительность вспышки и ширина спектра излучения

$$\tau \sim \frac{\ell_{\parallel}}{c} \sim \frac{b}{\gamma c}$$

$$\omega \sim \Delta \omega \sim \frac{\pi}{\tau} \sim \frac{\pi \gamma c}{b}, \quad \lambda \sim \frac{b}{\gamma}$$

Сгусток из N частиц в данной ситуации будет излучать когерентно (т.е. потери энергии вырастут в N^2 раз), если его размеры $\Delta z < \ell_{\parallel}$, $\Delta r \ll b$. Если же мы имеем дело с длинным и (для простоты) тонким пучком частиц ($\Delta z \gg \ell_{\parallel}$), то излучение будет происходить некогерентно. Точнее, здесь нужно решить задачу о поле движущегося заряженного релятивистского цилиндра. Аналогичные оценки по порядку величины дают [2]

$$E_{\perp} \sim \frac{eN}{2\pi \varepsilon_0 r \ell}, \quad \ell_{\parallel} \sim b, \quad \Delta \varepsilon_N \sim \frac{e^2 N^2}{2\pi \varepsilon_0 \ell^2} \cdot b \cdot \ln \frac{a}{b}$$

где $\ell \gg b$ – длина сгустка в лабораторной системе. Излучение будет происходить на переднем фронте сгустка, на длине $\Delta z \sim a$, пока не установится стационарное поле. Такие же процессы происходят на заднем фронте сгустка.

Список литературы

Основная литература:

1. Савельев И. В. Курс общей физики. М.: Наука, 1998.
2. Мешков И. Н., Чириков Б. В. Электромагнитное поле. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 2001.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 2001.

Дополнительная литература:

5. Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика. М.: Физматгиз, 1963.
6. Тернов И. М., Михайлин В. В. Синхротронное излучение, теория и эксперимент. М.: Энергоатомиздат, 1986.
7. Мешков И. Н., Сыресин Е. М. Ускорители заряженных частиц в ядерной физике и физике высоких энергий: Лекции для молодых ученых. Дубна, 1998.
8. Сыресин Е. М. Охлаждение заряженных частиц в накопителях и ускорителях // Международная школа молодых ученых "Проблемы ускорения заряженных частиц". Дубна, 1997.