

С 321(04)

М-559



Учебно-
методические
пособия
Учебно-научного
центра ОИЯИ
Дубна

УНЦ-2003-21

И. Н. Мешков

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

2003

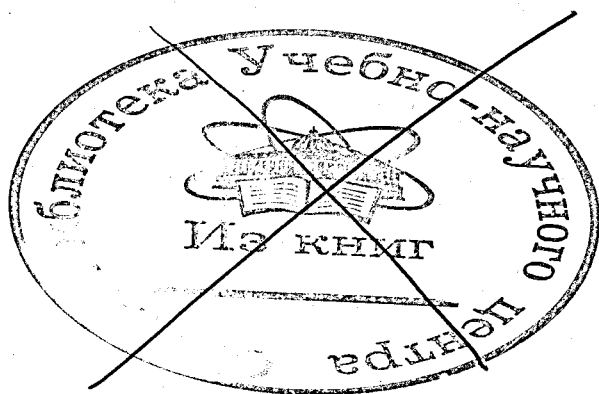
Учебно-научный центр ОИЯИ

63d1107/
M-559

И. Н. Мешков

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие



Дубна, 2003
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА
ОИЯИ

154079

Учебное пособие написано профессором базовой кафедры МИРЭА
«Электроника физических установок» при УНЦ ОИЯИ
И. Н. Мешковым (ОИЯИ) и рекомендовано к изданию
экспертной комиссией УНЦ ОИЯИ
и редакционно-издательским советом МИРЭА.

Мешков И. Н. Классическая механика: Учебное пособие. — Дубна: ОИЯИ, 2003. — 278 с.

Учебное пособие содержит изложение основ классической (неквантовой) механики, начиная с нерелятивистской и релятивистской механики частицы до механики систем частиц, механических явлений в средах, в т. ч. колебательных и волновых процессов.

Пособие предназначено для студентов и аспирантов технических и физических специальностей.

Meshkov I. N. Classic Mechanics: Textbook. — Dubna: JINR, 2003. — 278 p.

The textbook contains a description of the basis of classic (nonquantum) mechanics beginning with the nonrelativistic mechanics of single particle up to mechanics of the particle systems, mechanical phenomena in matter, including oscillation and wave processes.

The book is addressed to the students and doctoral students specialized in engineering and physics.

Оглавление

Предисловие	6
ВВЕДЕНИЕ	7
ГЛАВА 1. ОСНОВЫ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ ЧАСТИЦЫ ..	11
§ 1.1. Описание движения частицы (кинематика)	11
§ 1.2. Три закона Ньютона	15
§ 1.3. Законы сохранения импульса, энергии, момента импульса	19
§ 1.4. Как устроена механика	22
§ 1.5. Система отсчёта. Принцип относительности Галилея	23
ГЛАВА 2. МЕХАНИКА БОЛЬШИХ СКОРОСТЕЙ – СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (СТО)	26
§ 2.1. Принцип относительности Эйнштейна	26
§ 2.2. Преобразования Лоренца	27
§ 2.3. Релятивистские эффекты	29
§ 2.4. Интервал в специальной теории относительности. Мир Минковского	32
§ 2.5. Сложение скоростей	35
§ 2.6. Четырёхмерный вектор пространства–времени	38
§ 2.7. Четырёхмерный вектор энергии–импульса	39
§ 2.8. Уравнение движения релятивистской частицы	42
§ 2.9. Закон сохранения энергии, импульса и момента импульса релятивистской частицы	44
§ 2.10. Сопутствующие системы	46
ГЛАВА 3. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЁТА	48
§ 3.1. Системы, движущиеся прямолинейно и ускоренно	48
§ 3.2. Центробежная сила инерции во вращающейся системе координат	49
§ 3.3. Кориолисово ускорение	50
ГЛАВА 4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ	54
§ 4.1. Одномерное движение	54
§ 4.2. Движение двух взаимодействующих сил	56
§ 4.3. Движение в центральном поле	60
§ 4.4. Задача Кеплера	63
ГЛАВА 5. СТОЛКНОВЕНИЯ И РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЦ	73
§ 5.1. Упругие столкновения	73
§ 5.2. Рассеяние частиц	80
§ 5.3. Задача Резерфорда	83
§ 5.4. Рассеяние на малые углы	85
§ 5.5. Сечение и мишень. Длина свободного пробега	86

ГЛАВА 6. КОЛЕБАНИЯ В МЕХАНИКЕ ЧАСТИЦЫ	88
§ 6.1. Свободные колебания	88
§ 6.2. Свободные колебания в системе с трением	94
§ 6.3. Связанные свободные колебания. Внутренний резонанс	98
§ 6.4. Вынужденные колебания без трения. Внешний резонанс	101
§ 6.5. Вынужденные колебания с трением	104
§ 6.6. Параметрический резонанс*	109
§ 6.7. Перевернутый маятник*	114
§ 6.8. Свободные нелинейные колебания*	117
§ 6.9. Нелинейный резонанс: установившиеся колебания*	124
§ 6.10. Нелинейный резонанс: переходный режим, сепаратриса*	133
§ 6.11. Нелинейный резонанс при большой расстройке. Перекрытие резонансов*	146
§ 6.12. Автоколебания. Релаксационные колебания*	152
§ 6.13. Адиабатический инвариант*	153
ГЛАВА 7. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА	160
§ 7.1. Твердое тело. Уравнения движения	160
§ 7.2. Плоское движение	164
§ 7.3. Вращение тел вокруг закрепленной оси	169
§ 7.4. Качение тел	177
§ 7.5. Трехмерное движение	184
§ 7.6. Гироскоп	189
§ 7.7. Равновесие и статистика	191
§ 7.8. Деформация твердого тела	193
ГЛАВА 8. ГИДРО- И АЭРОСТАТИКА	200
§ 8.1. Закон Паскаля	200
§ 8.2. Гидростатика, аэростатика и закон Архимеда	200
§ 8.3. Идеальный газ. Барометрическая формула	202
ГЛАВА 9. ГИДРО- И АЭРОДИНАМИКА	206
§ 9.1. Поток жидкости (газа). Уравнение непрерывности	206
§ 9.2. Уравнение Бернулли	209
§ 9.3. Вязкость. Вязкое течение	214
§ 9.4. Уравнение Навье-Стокса*	220
§ 9.5. Турбулентное течение*	223
§ 9.6. Движение тел в жидкости и газе	228
ГЛАВА 10. ВОЛНЫ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ	237
§ 10.1. Продольные волны в твердом теле	238
§ 10.2. Поперечные волны в твердом теле	244
§ 10.3. Волны в газе и жидкости	246
§ 10.4. Плоские волны. Звук	247
§ 10.5. Энергия продольной волны в твердом теле. Вектор Умова	252
§ 10.6. Стоячая волна	254

§ 10.7. Волны на воде	256
§ 10.8. Ударные волны. Нелинейные волны	258
§ 10.9. Нелинейные волны	259

ГЛАВА 11. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ	261
§ 11.1. Принцип наименьшего действия и функция Лагранжа*	261
§ 11.2. Лагранжиан и обобщенные импульсы*	268
§ 11.3. Законы сохранения энергии и импульса*	269
§ 11.4. Функция Гамильтона*	271

Предметный указатель	274
----------------------------	-----

"далеко" и "близко" и др. Иными словами, важно знать ("чувствовать") характерные величины. Приведем в качестве примера характерные размеры окружающих нас природных объектов и природной системы, в которой мы живем:

Вселенная	более $5 \cdot 10^9$ пк ³
Галактика	~ 30 кпк \approx 90 тыс. св. лет
Земля-Солнце	500 световых секунд
Земля	радиус по экватору 6378,39 км
Атом	10^{-8} см
Ядро	10^{-13} см
Электрон	$< 3 \cdot 10^{-16}$ см

Другой пример — масштабы времени:

Длительность самого короткого сигнала, доступного для регистрации сегодня	уровень 10^{-14} с = 10 фемтосекунд = 10 фс
Возраст Вселенной	~ 13 млрд лет
Возраст Земли	~ 4,6 млрд лет
Протяженность года	$3,15 \times 10^7$ с (почти $\pi \times 10^7$ с)
Среднее время жизни нейтрона	898 с
Среднее время жизни π^+ -мезона	26 нс

3. *Большие и малые величины.* В физике, в отличие от математики, понятия бесконечно больших и бесконечно малых величин всегда конкретны: величина мала (велика) по сравнению с ..., т.е. всегда существует определенная шкала, уровень отсчета и т.п. Один из примеров приведен ниже, в п. 8: при скоростях тел, много меньших скорости света, справедливы законы ньютоновской механики, формально здесь можно считать $c = \infty$. Другим примером может служить задача о

³ 1 парсек (пк) $\approx 3,0857 \cdot 10^{16}$ м \approx 3 св. года — это расстояние, с которого орбита Земли имеет угловой размер в одну угловую секунду ($1'' \approx 4,848 \cdot 10^{-6}$ радиана)

движении небесных тел: пока нас интересует, например, движение Земли вокруг Солнца, размерами первой можно пренебречь, т.к. они много меньше расстояния до Солнца, и Землю можно рассматривать как точку.

4. Умение делать *оценки по порядку величины.* Очень часто для выяснения основных проблем в какой-нибудь научной или инженерной задаче не нужно знать точное решение, а достаточно оценки порядков величин основных параметров. Такие оценки позволяют определить границы возможных изменений параметров и дать примерное (приближенное) решение задачи.

Задача. Как оценить, насколько прочно гвоздь вбит в доску?

Допустим, длина гвоздя $\ell = 5$ см, мы его вбиваем за 5 ударов молотка, масса m которого 0,5 кг, скорость молотка $v \sim 5$ м/с. Значит

$$F \cdot \ell \approx N \cdot \frac{mv^2}{2}, \quad N = 5,$$

$$F = 5 \cdot \frac{0,5 \cdot 25}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-2}} = 625 \text{ Н} \approx 64 \text{ кг}.$$

Такой груз можно подвесить на этом гвозде, вбитом в потолок.

Конечно, подобная оценка достаточно грубая и может использоваться лишь для очень приближенного решения — например, в данном случае, если "запас прочности" порядка двойки, т.е. вес груза ~ 30 кг. Это утверждение справедливо для любых оценок — в них определяется *порядок величины*, знать который всегда очень важно, а точное значение дает последующий точный расчет.

5. *Правило размерности:* любая математическая формула, описывающая физическое явление, должна иметь правильную размерность. Например, сила должна измеряться в Н или динах, скорость — в м/с или см/с и т.д. Это правило часто позволяет угадать правильный ответ. И совершенно обязательно, решая любую физическую задачу, убедиться, что результат имеет правильную размерность.

6. *"Точное" и приближенное решение.* Что такое "точное измерение"? В физике говорят, что значение A данной физической величины всегда известно с конечной точностью ("ошибкой"):

Предисловие

Предлагаемое учебно-методическое пособие подготовлено к изданию кафедрой электроники физических установок Московского государственного института радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА), организованной в г. Дубна при Учебно-научном центре Объединенного института ядерных исследований, и предназначено для студентов очной формы обучения, специальность 200600 "Электроника физических установок".

Пособие ориентировано на преподаваемый в течение пяти семестров курс физики. Такой курс физики предполагает более углубленное, нежели в стандартных курсах для инженерных специальностей, изучение предмета. Вместе с тем, материал и уровень его изложения не требуют специальной математической подготовки, поэтому пособие может быть рекомендовано студентам других инженерных специальностей и аспирантам.

Материал, представленный в пособии, имеет разную степень сложности. Часть параграфов, отмеченных символом "*", может быть опущена при первом чтении без потери целостности восприятия.

Автор пользуется возможностью выразить свою глубокую благодарность академику Б.В. Чирикову, который ознакомился с рукописью, сделал ценные критические замечания и дал многочисленные рекомендации по доработке пособия.

Автор благодарен Л.В. Соболевой за обработку конспекта лекций и Т.А. Степановой за большой труд по подготовке рукописи к изданию, а также М.И. Зарубиной за тщательное редактирование рукописи.

ВВЕДЕНИЕ

Классическая механика — наука о движении материальных тел, т.е. об изменении со временем положения этих тел или их частей в пространстве. В качестве причины, вызывающей движение тел, в механике вводят понятие *силы*. Изучением природы этих сил сама механика занимается лишь до определенного уровня (см., например, § 6.11), оставляя эту задачу другим разделам физики, частью которой она является. Физика (от греческого *phýsis* — природа) — наука о природе, изучающая наиболее общие свойства окружающего нас материального мира. Слово механика произошло от греческого слова *méchaniké* — искусство построения машин.

Изучение физики и, в частности, механики — первого раздела этой науки, ставит целью формирование у будущих инженеров определенной *системы знаний*, опирающейся на знание законов природы и методов анализа и решения различного рода технических проблем, возникающих в инженерной деятельности. Чему следует уделить главное внимание при формировании этой системы знаний?

1. Прежде всего — изучению *физических законов*, а не "правил конструирования". Вот один из примеров, когда знание физического закона позволяет избежать ошибки. Можно ли построить "гиперboloид инженера Гарина"? Нет: законы физики (оптики, в данном случае) не позволяют так просто сжать луч света, как это показано на рис. 1. Такая схема просто не работает в реальном мире.

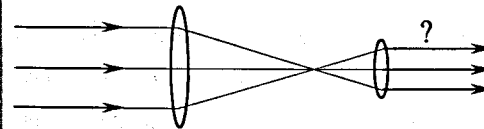


Рис. 1. Схема "гиперboloида" инженера Гарина" (А.Н. Толстой).

2. *Знание порядка величины*. Очень важно знать "размеры" любого физического объекта — протяженность в пространстве и времени, массу (если она есть), запас энергии и т. д., т.е. понимать, что такое "много" и что такое "мало",

$$x = A \pm \Delta A.$$

И чем меньше эта ошибка, тем выше точность.

7. *Критический анализ и творческий синтез.* Исследователь обязан критически осмысливать результаты своих и чужих исследований, знать пределы и условия справедливости, применимости физических результатов. Уметь на основе опытных данных, зачастую неполных, построить физическую модель изучаемого явления, вариант решения проблемы.

8. *Стираль познания.* Исследователь анализирует природные явления, пользуясь образными представлениями и физическими моделями, для описания которых использует язык математики — математический аппарат. Основой для построения любой физической теории всегда является эксперимент. Он же служит главным критерием правильности теории.

Познание природы идет по спирали: эксперимент (опытные данные) — модель (гипотеза, теория) — эксперимент — следующая модель (уточненная теория). При этом действует *принцип соответствия*: теория более высокого уровня при определенных условиях (предельном переходе) дает тот же результат, что и теория "предыдущего", на "ступеньку" ниже, уровня. Так, в классической механике мы видим, что механика больших скоростей (релятивистская механика, глава 2) при $c \rightarrow \infty$ дает те же результаты, что и механика малых скоростей (часто именно ее называют классической механикой). Аналогично, в квантовой механике, положив постоянную Планка h равной нулю, получаем результаты классической физики.

9. *Конкретность знаний* — то, что совершенно необходимо инженеру. Необходимо не только знание физических законов, но и умение производить расчеты на их основе. Полезно помнить значения физических констант, уметь пользоваться системами физических единиц, не ограничиваясь одной лишь системой СИ: нужно знать и уметь применять гауссову систему единиц (СГСЕ + СГСМ), атомную систему единиц. Нужно уметь пользоваться научно-технической литературой — знать, "где посмотреть" материал по заданной проблеме. Вот такие знания и умение и отличают специалиста от дилетанта.

ГЛАВА 1. ОСНОВЫ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ ЧАСТИЦЫ

В механике принято называть *материальной точкой* частицу конечной массы, размеры которой сколь угодно малы. В физике, однако, снимается неопределенность таких математических понятий, как "бесконечно большая (малая) величина" — достаточно оговорить "большая" ("малая") по сравнению с чем. Так, частица может рассматриваться как материальная точка, если ее размеры много меньше характерных расстояний, на которых существенно изменяются скорость и ускорение частицы. Дальше это понятие будет уточняться, — например, тело ведет себя как материальная точка, если несущественно его собственное вращение.

Частица считается "*нерелятивистской*", если её скорость много меньше скорости света c . В этом случае справедливы законы механики "малых", или нерелятивистских ($v \ll c$) скоростей. Механика релятивистских скоростей рассматривается в главе 2.

§ 1.1. Описание движения частицы (кинематика)

Положение в пространстве характеризуется радиусом-вектором $\vec{r}(t)$, 0 — точка отсчета (начало координат). Радиус-вектор $\vec{r}(t)$ описывает траекторию частицы — геометрическое место точек, в которых частица находится в разные моменты времени.

Скорость:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}. \quad (1.1)$$

Приращение радиуса-вектора (рис. 1.1): $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, $\vec{r}_{1,2} \equiv \vec{r}(1,2)$.

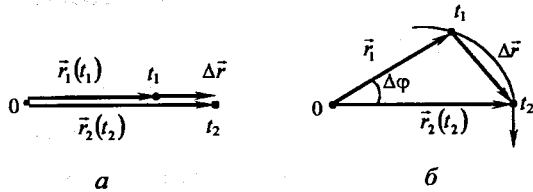


Рис. 1.1. Изменение радиуса-вектора при движении точки:
а – прямолинейное движение,
б – криволинейное движение

Ускорение:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \ddot{\vec{v}}. \quad (1.2)$$

Прямолинейное движение (рис. 1.1, а): $\overline{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Криволинейное движение. В общем случае радиус-вектор $\vec{r}(t)$ изменяется как по величине, так и по направлению (рис. 1.1, б).

Начнём со случая движения по окружности постоянного радиуса. Модуль радиуса-вектора \vec{r} в этом случае постояен, а изменяется угловая координата частицы φ :

$$|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| \equiv r,$$

$$|\overline{\Delta r}| = 2r \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \xrightarrow{\Delta \varphi \rightarrow 0} r \cdot \Delta \varphi.$$

Но $\Delta \varphi = \dot{\varphi} \cdot \Delta t = \omega \cdot \Delta t$, и при $\Delta t \rightarrow 0$ приращение $\overline{\Delta r} \rightarrow \vec{e}_\varphi \cdot r \omega \cdot \Delta t$, где \vec{e}_φ – единичный вектор, касательный к траектории – окружности, ω – угловая скорость. Величина

$$v \equiv \frac{d}{dt} |\overline{\Delta r}| = \omega r \quad (1.3)$$

– скорость, она касательна к окружности. При этом ускорение найдем, вычислив

$\vec{a} \equiv \dot{\vec{v}}$. Поскольку $\vec{v} = \vec{e}_\varphi \cdot v$, то

$$\vec{a} = \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{e}_\varphi \cdot \frac{dv}{dt}, \quad (1.4)$$

где (см. рис. 1.2, а)

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{e}_\varphi}{\Delta t} = -\vec{e}_r \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = -\vec{e}_r \cdot \omega. \quad (1.5)$$

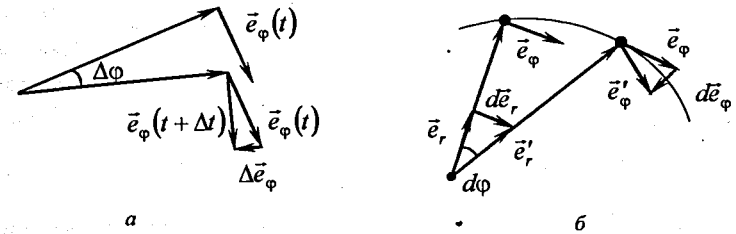


Рис. 1.2. Приращение вектора $\vec{e}_\varphi(t)$ при движении точки по окружности постоянного радиуса (а) и по плоской криволинейной траектории (б)

В результате получим

$$\vec{a} = -\vec{e}_r \cdot \omega^2 r + \vec{e}_\varphi \cdot \dot{v} \equiv \vec{a}_{uc} + \vec{a}_t.$$

Таким образом, ускорение распадается на две части – радиальное, включающее центростремительное (\vec{a}_{uc}), которое ортогонально скорости, и тангенциальное (\vec{a}_t), направленное вдоль скорости.

В общем случае, когда $\vec{r} = \vec{r}(t)$ меняется не только по направлению, но и по величине, ускорение вычисляется чуть сложнее. Приращение радиуса-вектора $\Delta \vec{r}$ содержит ещё слагаемое вдоль \vec{r} , возникающее из-за изменения \vec{r} по величине:

$$\vec{r}(t) = \vec{e}_r \cdot r(t), \quad \Delta \vec{r} = \vec{e}_r \cdot \Delta r + \vec{e}_\varphi \cdot r \omega \cdot \Delta t.$$

Соответственно, скорость частицы есть

$$\vec{v} = \vec{e}_r \cdot \frac{dr}{dt} + \vec{e}_\varphi \cdot \omega r,$$

а её производная есть полное ускорение в плоском криволинейном движении:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{dt} \cdot \dot{r} + \vec{e}_r \cdot \ddot{r} + \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \cdot \omega r + \vec{e}_\varphi \cdot \frac{d(\omega r)}{dt}.$$

Подставляя сюда $\dot{\vec{e}}_\varphi$ из (1.5) и учитывая, что, аналогично (1.3),

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \vec{e}_\varphi \cdot \frac{d\Delta\varphi}{dt} = \vec{e}_\varphi \cdot \omega,$$

найдем полное ускорение частицы:

$$\vec{a} = \vec{e}_r (\ddot{r} - \omega^2 r) + \vec{e}_\varphi (2\dot{r}\omega + \dot{\omega}r). \quad (1.6)$$

Первое слагаемое есть радиальное ускорение, содержащее ускоренное изменение радиуса-вектора \vec{r} и центростремительное ускорение

$$a_{\text{цс}} = -\omega^2 r.$$

Второе слагаемое описывает тангенциальное ускорение. Подробнее его структура обсуждается в § 3.3.

Задача 1.1. Осколки взорвавшегося звездолёта разлетаются из точки-взрыва со скоростями \vec{v}_i . Защитная капсула, в которой находятся космонавты, летит со скоростью \vec{v}_0 . Ясно, что все векторы \vec{v}_i , \vec{v}_0 направлены вдоль радиусов-векторов из точки взрыва. Какую мгновенную скорость осколка, удаленного от капсулы на расстояние \vec{R} , измерят космонавты?

Отсчитывая время от момента взрыва, найдем (рис. 1.3) скорость i -го осколка относительно капсулы:

$$\vec{V}_i = \vec{v}_i - \vec{v}_0 = \frac{\vec{r}_i}{t} - \frac{\vec{r}_0}{t} = \frac{\vec{R}}{t}.$$

Таким образом, космонавты обнаружат, что скорости осколков звездолёта пропорциональны расстоянию до каждого из них.

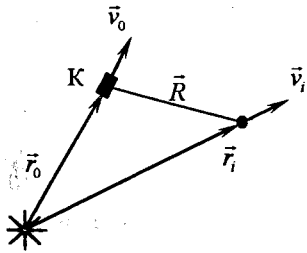


Рис. 1.3. Разлет осколков после взрыва космолёта; К — капсула с космонавтами

Этот результат известен в астрофизике как закон Хаббла (*E.P. Hubble*, 1929 г.), по имени американского астронома, установившего, что для 18 галактик справедливо соотношение

$$V = HR.$$

По современным данным $H = 50 \div 100 \text{ (км/с)/Мпк} = 1.6 \div 3.2 \cdot 10^{-18} \text{ с}^{-1}$. Этот закон является экспериментальным обоснованием модели расширяющейся Вселенной (*А.А. Фридман*, 1922 г.). Точность, с которой выполняется закон Хаббла (V пропорционально R) гораздо выше, чем точность, с которой известна константа H . Подчеркнем, что закон Хаббла справедлив для нерелятивистских скоростей $V \ll c$.

§ 1.2. Три закона Ньютона

В 1687 году Исаак Ньютон (*I. Newton*) опубликовал свой великий труд "Математические основы натуральной философии"^{*)}, где сформулировал три главных закона механики.

1-й закон. Всякое тело пребывает в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока действующие на него силы не изменят это состояние.

2-й закон. Произведение массы тела на его ускорение равно действующей на тело силе, а направление ускорения совпадает с направлением силы:

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

3-й закон. Действия двух тел друг на друга всегда равны по величине и противоположны по направлению (см. замечание в конце § 1.2).

Итак, сила введена здесь как причина изменения состояния тела. С помощью этой величины описывают взаимодействие тел, т.е. изменение состояния каждого из них под действием других тел. Долгое время в механике господствовало введенное Ньютоном понятие *дальнего действия*: считалось, что

^{*)} Отметим, что в русской литературе обычно используется этот неудачный перевод с английского названия работы Ньютона. Правильно "Nature Philosophy" означает философия природы, а не натуральная философия.

действие одного тела на другое может передаваться через пустое пространство мгновенно, как это имеет место, например, в Солнечной системе, где действуют силы тяготения (гравитации). Тогда можно ввести силу $\vec{F}(\vec{r})$ – векторную функцию координат и, вообще говоря, скорости тела. Набор векторов \vec{F} называют *полем сил* (или силовым полем). Со временем, однако, стало понятно, что взаимодействие передается с конечной скоростью. Это выяснилось по мере развития физики электромагнетизма: электромагнитное поле в вакууме распространяется со скоростью света c . Поэтому если, например, на некотором расстоянии ℓ от заряженной частицы возникнут другие заряженные частицы (скажем, фотон ионизирует атом и возникают ион и свободный электрон), то первая частица почувствует их взаимодействие через некоторое время $\tau = \ell/c$. Так возникли представления о *запаздывании взаимодействий* и *близкодействии*: взаимодействие передается, когда силовое поле (или его изменение) достигает частицы. Точнее, её достигает частица силового поля – переносчик взаимодействия. Подчеркнем, что запаздывание взаимодействия сказывается в механике больших скоростей, когда скорости частиц сравнимы со скоростью передачи взаимодействия. В случае электромагнитных полей – это скорость света, в сплошных средах – скорость распространения волн деформации, т.е. скорость звука (глава 10).

Сегодня известны четыре фундаментальные взаимодействия. Ниже они размещены по мере возрастания силы взаимодействия. В скобках даны значения массы покоя частиц – переносчиков взаимодействия (данные 2002 г.). Знак "?" означает, что частица гипотетическая или ее масса экспериментально неизвестна. Энергия покоя дана в *электронвольтах* (эВ):

$$1 \text{ эВ} = 1.602177 \text{ Дж}, 1 \text{ Мегаэлектронвольт (МэВ)} = 10^6 \text{ эВ},$$

$$1 \text{ Гигаэлектронвольт (ГэВ)} = 10^9 \text{ эВ}.$$

Четыре фундаментальных взаимодействия:

гравитационное – гравитоны? (масса равна 0)

слабое – бозоны W^\pm (80,419 ± 056 ГэВ) и Z^0 (91,1882 ± 0,0022 ГэВ)

электромагнитное – фотон ($< 10^{-16}$ эВ)

сильное – $\left\{ \begin{array}{l} \pi^\pm\text{-мезон (139,57018} \pm 0,00035 \text{ МэВ)} \\ \pi^0\text{-мезон (134,9766} \pm 0,0006 \text{ МэВ)} \\ \text{глюоны (0)} \end{array} \right.$

Характеристикой инерционных свойств частиц, т.е. того, насколько легко они ускоряются под действием сил, является масса частицы m . Это так называемая *инертная масса* m_{in} , которая содержится в уравнении, описывающем 2-й закон Ньютона:

$$m_{in} \vec{a} = \vec{F}.$$

154079 Кроме того, масса тела присутствует и в силе тяготения. Её называют *гравитационной массой* m_g . Поэтому, строго говоря, ускорение частицы под действием силы тяготения следует записывать в виде

$$m_{in} \vec{a} = \gamma \frac{m_g M}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \equiv m_g \vec{g}(\vec{r}).$$

Принципиальный вопрос физики: равны ли m_{in} и m_g ? Если $m_{in} = m_g$, то ускорение в поле силы тяготения не зависит от массы тела, что установлено опытным путем Г. Галилеем (*G. Galilei*, 1564–1642 гг.) с доступной в то время точностью. Равенство гравитационной и инертной масс называется *принципом эквивалентности*. Эксперименты по его проверке ставятся до сих пор, но результатов, указывающих на нарушение этого принципа, не получено.

Являются ли все 3 закона Ньютона независимыми? Нет! Основной из них – 2-й закон, а 1-й и 3-й законы могут быть получены из него. Действительно, если $\vec{F} = 0$, то

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0, \text{ откуда } \vec{v} = \text{const} - \text{это и есть 1-й закон.}$$

3-й закон получим, записав уравнения 2-го закона для двух взаимодействующих тел:

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_{12}, \quad m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}.$$

Сложив оба равенства, получим

$$m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = 0. \quad (1.7)$$

Введем понятие *импульса* движущейся частицы (*momentum* – англ.):

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (1.8)$$

Тогда равенство (1.7) можно записать в виде

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0, \text{ отсюда } \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0, \text{ или } \vec{p}_1 = -\vec{p}_2.$$

Итак, третий закон, гласящий, что $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, приводит к закону сохранения импульса замкнутой системы (в нашем примере – система из двух частиц). Ясно, что сумма внутренних сил замкнутой системы должна быть равна нулю, иначе система самоускоряется. Правильнее говорить, что *3-й закон есть закон сохранения импульса замкнутой системы*.

Существуют ли физические системы, в которых силы взаимодействия между частями системы не удовлетворяют закону $\sum_{ik} \vec{F}_{ik} = 0$? Нет! Иначе нарушался бы закон сохранения импульса. Но известны парадоксы. Например, сила, действующая на заряженную частицу, движущуюся параллельно проводнику с током, направлена перпендикулярно плоскости, в которой лежат проводник и частица (сила Лоренца), т.е. не направлена от проводника к частице. В чем дело? Ответ: всегда нужно рассматривать замкнутую систему, в этом примере следует учитывать магнитное поле и его импульс (это делается в электродинамике).

Итак, все три закона Ньютона объединяет второй закон:

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

Он связывает между собой инерционную характеристику тела – массу и причину, вызывающую ускорение тела, – силу.

Задача 1.2. При каком ускорении доски лежащая на ней книга начинает скользить по доске?

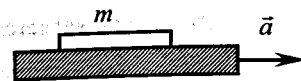


Рис. 1.4. К задаче о движущейся доске и книге

Очевидно, $F_{\text{тр}} = ma$ есть условие движения книги с тем же ускорением, что и доска.

Поскольку $F_{\text{тр}} = kmg$, получим условие "срыва": $a > kg$.

§ 1.3. Законы сохранения импульса, энергии, момента импульса

Законы сохранения каких-либо физических величин в различных процессах (например, при движении тел в механике) играют в физике особую роль. Это основа наших знаний о природе, её фундаментальные характеристики. Здесь мы познакомимся с первыми тремя законами сохранения, действующими в механике при движении частиц, взаимодействующих друг с другом.

Закон сохранения импульса. Запишем 2-й закон Ньютона для частицы, взаимодействующей с другими частицами в системе, содержащей N частиц, взаимодействующих друг с другом в отсутствие внешних сил (*замкнутая система*):

$$\frac{d\vec{p}_n}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ni}.$$

Очевидно, что $\vec{F}_{nn} = 0$ (частица не действует сама на себя), а силы взаимодействия частиц попарно равны по величине и противоположны по направлению:

$$\vec{F}_{in} = -\vec{F}_{ni}.$$

Просуммируем по всем частицам. Получим для замкнутой системы

$$\frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N \vec{p}_n = \sum_{n,j=1}^N \vec{F}_{nj} = 0,$$

отсюда

$$\sum_1^N \vec{p}_n = \text{const}, \quad (1.9)$$

а это и есть закон сохранения импульса замкнутой системы. Этот закон является следствием *однородности пространства*: в любой точке пространства

$\sum_{n,j} \vec{F}_{nj} = 0$ для замкнутой системы (см. также § 11.3).

Закон сохранения энергии. Пусть на частицу действует сила, зависящая только от координат пространства:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}).$$

Умножив скалярно обе части этого равенства на $d\vec{r} = \vec{v}dt$, запишем

$$\left(\vec{v}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right) \cdot dt = \left(\vec{F}, d\vec{r}\right).$$

Но

$$\left(\vec{v}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right) = m \left(\vec{v}, \frac{d\vec{v}}{dt}\right) = \frac{m}{2} \cdot \frac{d(\vec{v}, \vec{v})}{dt} = \frac{m}{2} \cdot \frac{dv^2}{dt}.$$

Подставив этот результат в предыдущее равенство, после интегрирования получим *закон сохранения энергии* частицы в поле сил $\vec{F}(\vec{r})$:

$$\frac{mv^2}{2} + U(\vec{r}) = \text{const}, \quad U(\vec{r}) = -\int \left(\vec{F}, d\vec{r}\right). \quad (1.10)$$

Здесь первое слагаемое слева – *кинетическая энергия* частицы, а $U(\vec{r})$ – её потенциальная энергия в поле сил $\vec{F}(\vec{r})$. Отсюда и название таких сил – *потенциальные* или *консервативные* (см. ниже). Величина

$$A = \int_1^2 \left(\vec{F}(\vec{r}), d\vec{r}\right) \quad (1.11)$$

называется *работой* силы \vec{F} на пути между точками \vec{r}_1 и \vec{r}_2 . Работа не зависит от выбора пути, если сила есть функция только координат. Действительно, любой потенциальной силе $\vec{F}(\vec{r})$ можно поставить в соответствие функцию $U(\vec{r})$ такую, что

$$\vec{F} = -\nabla U(\vec{r}), \quad (1.12)$$

а тогда

$$A = \int_1^2 \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = -\int_1^2 \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial U}{\partial x_{\alpha}} \cdot dx_{\alpha} = -\int_1^2 dU = -(U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)). \quad (1.13)$$

При этом путь между точками r_1 и r_2 может быть произвольным. Величина

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} \int_1^2 \left(\vec{F}(\vec{r}), d\vec{r}\right) = \left(\vec{F}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right) \equiv \left(\vec{F}, \vec{v}\right) \quad (1.14)$$

называется мощностью силы.

Задача 1.3. Какая рогатка стреляет дальше – жесткая или мягкая?

Если сила растяжения (сила "стрелка") задана, то

$$U = \frac{k(x_{\text{max}} - x_0)^2}{2} = \frac{F_{\text{max}}^2}{2k} = \frac{mv_0^2}{2}$$

и пуля летит тем быстрее, чем меньше k . Пользуйтесь мягкой рогаткой!

Закон сохранения энергии – следствие однородности времени: в любой момент времени t картина силового поля в пространстве одна и та же (см. также § 11.3)! Силы $F(\vec{r})$ (1.12) принято еще называть *консервативными* (от англ. *conserve* – сохранить), т.к. в их поле энергия сохраняется. Таким образом, консервативные силы – те, которые зависят только от координат частицы, но не от ее скорости или времени.

Закон сохранения момента импульса. Введём ещё одну характеристику движущейся материальной точки (частицы) – *момент импульса*:

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}]. \quad (1.15)$$

Здесь \vec{p} – импульс частицы; \vec{r} – расстояние от точки, относительно которой отсчитывается (измеряется) \vec{M} . Из (1.15) видно, что момент частицы зависит от выбора точки отсчета.

Получим уравнение, описывающее изменение момента частицы. Умножим обе части уравнения движения $\dot{\vec{p}} = \vec{F}(\vec{r})$ слева векторно на \vec{r} :

$$[\vec{r} \times \dot{\vec{p}}] = [\vec{r} \times \vec{F}] \quad (1.16)$$

и учтем тождество

$$[\dot{\vec{r}} \times \vec{p}] = [\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}]m = 0.$$

Тогда

$$[\vec{r} \times \dot{\vec{p}}] \equiv [\vec{r} \times \dot{\vec{p}}] + [\dot{\vec{r}} \times \vec{p}] = \frac{d}{dt} [\vec{r} \times \vec{p}] = \dot{\vec{M}}$$

и (1.16) можно записать в виде

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{N}, \quad (1.17)$$

где

$$\vec{N} \equiv [\vec{r} \times \vec{F}] \quad (1.18)$$

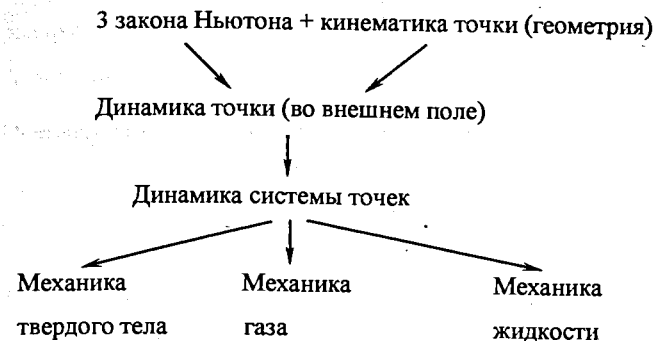
– *момент силы* \vec{F} относительно точки отсчета 0.

Для динамики точки уравнение (1.17) не дает дополнительной информации, если $\vec{N} \neq 0$. Оно имеет самостоятельную ценность при описании движения твердого тела (см. главу 6). Если же сумма моментов сил, действующих на частицу, равна нулю, момент импульса частицы является *интегралом движения*:

$$\vec{M} = \text{const} \text{ при } \sum \vec{N}_i = 0. \quad (1.19)$$

§ 1.4. Как устроена механика

Схематически можно представить "устройство" механики, т.е. структуру физической теории, описывающей механические явления, следующим образом:



3 закона Ньютона – это экспериментальный факт, т.е. *аксиомы механики*.

§ 1.5. Система отсчёта. Принцип относительности Галилея

Положение частицы в пространстве описывается, как уже говорилось, радиусом-вектором $\vec{r}(t)$ (рис. 1.1), проведенным из точки 0 – начала отсчета в точку, где находится частица. Оси координат, связанные с выбранной для отсчета точкой 0, образуют систему координат, называемую системой отсчета. Система отсчета, по отношению к которой пространство однородно и изотропно, а время – однородно, называется *инерциальной*. В такой системе скорость *свободно* движущейся точки постоянна по величине и направлению: $\vec{v} = \overline{\text{const}}$ (т.е. частица движется по инерции – отсюда название системы).

Если ввести другую систему отсчета, движущуюся со скоростью $\vec{v}_0 = \overline{\text{const}}$ относительно первой, то преобразования координат и скорости запишутся в виде (рис. 1.5):

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}' + \vec{r}_0, & \dot{\vec{r}} &= \dot{\vec{r}}' + \dot{\vec{r}}_0, \\ \text{т.е. } \vec{v} &= \vec{v}' + \vec{V}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

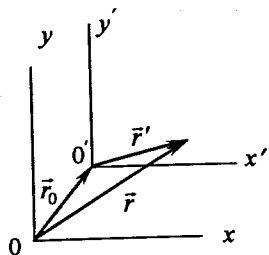


Рис. 1.5. Две системы декартовых координат

Таким образом, в любой инерциальной системе свободное тело движется с постоянной скоростью (со своей, но постоянной!). Кроме того, время одинаково во всех инерциальных системах: $t = t'$. В результате можно записать преобразования координат-времени (ось x параллельна \vec{V}):

$$\begin{aligned} x &= x' + Vt', \\ y &= y', \quad z = z', \\ t &= t'. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Итак, законы сложения перемещений и скоростей описываются равенством (1.21), (1.20). Это *преобразования Галилея*.

Равенство (1.20) справедливо и в случае, когда скорость точки зависит от времени — $v = v(t)$. Дифференцируя по времени равенство

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + V, \quad (1.22)$$

получаем, что

$$\vec{a} = \vec{a}', \quad (1.23)$$

т.е. ускорения тела в разных инерциальных системах одинаковы. Это утверждение обобщает *принцип относительности Галилея* (1564–1642 гг.): в инерциальных системах законы движения (законы механики) одинаковы.

Отметим, что преобразования Галилея всегда удовлетворяют *принципу причинности*, который гласит, что никакие последующие события не могут влиять на предшествующие события, но не наоборот. Действительно, пусть, движущийся объект, например, самолет, испускает вспышки света с каким-то

интервалом Δt . В системе самолета эти события — вспышки — происходят в одной и той же точке $x'_n = y'_n = z'_n = 0$, (для простоты), $t'_n = n \cdot \Delta t'$. Для наземного наблюдателя эти события разнесены в пространстве и времени:

$$x_n = V \cdot n \cdot \Delta t', \quad y_n = z_n = 0, \quad t_n = t' = n \cdot t'.$$

Ясно, что

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n = \Delta t' = \frac{x_{n+1} - x_n}{V} > 0,$$

т.е. $\Delta t > 0$ независимо от величины и направления скорости (при $V < 0$ интервал $x_{n+1} - x_n$ также отрицателен!). Поэтому последовательность событий вспышек в системе самолета и наблюдателя одна и та же.

Система, движущаяся ускоренно относительно инерциальной системы, называется *неинерциальной*. Законы движения в этих системах рассмотрены в главе 3.

Земля, строго говоря, является неинерциальной системой: она вращается вокруг Солнца и своей оси, так что все тела на Земле испытывают ускорение. Тем не менее во многих случаях неинерциальностью земных систем можно пренебречь. Это возможно, например, во многих экспериментах в оптике, радиофизике, физике элементарных частиц, где характерные скорости объектов (частиц) равны скорости света или близки к ней.

ГЛАВА 2. МЕХАНИКА БОЛЬШИХ СКОРОСТЕЙ – СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (СТО)

§ 2.1. Принцип относительности Эйнштейна

Альберт Эйнштейн сформулировал свою *специальную теорию относительности* (СТО) не на "пустом месте". Её основоположниками по праву считаются трое:

Хендрик Антон Лоренц (*H.F. Lorentz*) – голланд., 1853-1928 гг.

Жюль Анри Пуанкаре (*J.A. Poincaré*) – франц., 1854-1912 гг.

Альберт Эйнштейн (*A. Einstein*) – нем., 1879-1955 гг.

Но, конечно, *принцип относительности* сформулировал Эйнштейн в 1905 г.^{*)}:

"Во всех инерциальных системах
все законы природы действуют одинаково".

Отсюда следствие: *скорость света (скорость распространения электромагнитного излучения) в вакууме одинакова во всех инерциальных системах*. Подчеркнем здесь слово *в вакууме*, т.к. в среде это утверждение не справедливо.

Эта скорость измерена сегодня с высокой ($\sim 4 \cdot 10^{-9}$) точностью:

$$c = 2.997\,924\,58 \cdot 10^8 \pm 1.2 \text{ м/с} \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с.}$$

Как будет видно дальше (см. п.п. 2.3 и 2.5), это следствие имеет основополагающее значение для СТО.

Английское название принципа относительности – "The principle of relativity" обогатило физику новым термином: "relativistic mechanics" (релятивистская механика) – механика частиц, движущихся с околосветовыми скоростями $v \sim c$.

Принцип соответствия связывает между собой классическую и релятивистскую теории: при $v \ll c$ "работают" законы классической

(нерелятивистской) механики. В частности, справедливы преобразования Галилея (1.21–1.23).

§ 2.2. Преобразования Лоренца

Впервые они были получены в 1904 г. Х.А. Лоренцем, искавшим такие преобразования координат при переходе в движущуюся систему, при которых уравнения электродинамики – так называемые *уравнения Максвелла* – сохраняют форму записи в новых координатах неизменной. Эти преобразования появились до формулировки А. Эйнштейном принципов СТО, и полученные на их основе релятивистские эффекты сокращения длины и замедления хода часов (см. ниже) рассматривались как парадоксы (т.е. явления, противоречащие принятым представлениям).

В 1905 г. А. Эйнштейн получил те же преобразования на основе СТО. Здесь мы используем этот подход.

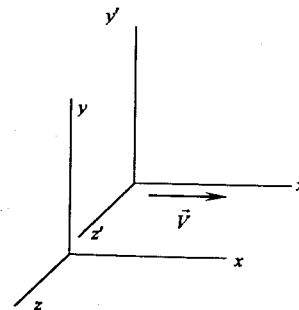


Рис. 2.1. Выбор направлений осей координат

Пусть система (x', y', z') движется со скоростью $\vec{V} = \vec{e}_x V$ (рис. 2.1) относительно системы (x, y, z) . В дальнейшем систему (x', y', z') для краткости называем "движущейся", а систему (x, y, z) – "лабораторной", хотя они совершенно равноправны физически.

^{*)} См. Эйнштейн А. Сущность теории относительности: Пер. с англ. М.: Иностр. лит., 1955.

При $V \ll c$ справедливы преобразования Галилея (1.21). В случае релятивистских скоростей $V \sim c$ можно предположить, что преобразования координат сохраняют линейность и что время зависит от значения координаты x (или x'), если скорость V параллельна оси x :

$$x = A(x' + Vt'),$$

$$y = By',$$

$$z = Cz',$$

$$t = D\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right).$$

Здесь A, B, C, D – неизвестные константы. Множитель $1/c^2$ в выражении для t добавлен из соображений размерности.

Обратные преобразования $x'_n = f(x_m)$ получим, изменив направление скорости \vec{V} на обратное. Тогда можно записать цепочку

$$x = A(x' + Vt') = A\left\{A(x - Vt) + VD\left(t - \frac{V}{c^2}x\right)\right\} = A\left(A - D\frac{V}{c^2}\right)x + A(-AV + VD)t.$$

Приравняв здесь коэффициенты при x и t справа и слева, найдем

$$1 = A^2 - AD\frac{V^2}{c^2},$$

$$0 = A(-AV + VD).$$

Отсюда

$$A = D = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Аналогично

$$y = B'y' = B^2y,$$

$$z = Cz' = Cz^2,$$

$$B = \pm 1, \quad C = \pm 1.$$

что дает

Используя принцип соответствия, т.е. условие $y = y', z = z'$ при $V \ll c$, найдем окончательно $B = C = 1$.

Где же в этом выводе применён принцип относительности Эйнштейна? Очевидно, когда значение скорости света выбрано одинаковым для прямых и для обратных преобразований, т.е. независимость c от системы отсчета!

Введем, как это принято со времен Эйнштейна, обозначения

$$\beta = \frac{V}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (2.1)$$

Параметр γ называют обычно *лоренц-фактором*. Оба параметра β и γ – безразмерные.

Окончательно запишем преобразования Лоренца:

$$x = \gamma(x' + \beta ct'),$$

$$y = y',$$

$$z = z',$$

(2.2)

$$t = \gamma\left(t' + \beta \frac{x'}{c}\right).$$

Подчеркнем принципиальное отличие преобразований Лоренца от преобразований Галилея (1.21): в СТО время *неинвариантно*, оно зависит от координат нахождения наблюдаемого объекта (частицы)!

§ 2.3. Релятивистские эффекты

"Синхронизация" наблюдений – один из весьма существенных вопросов в СТО. Принято считать, что часы А и В, покоящиеся в данной системе, идут синхронно, если световой сигнал, испущенный из точки А в момент t_A (по часам А), достигнет точки В в момент t_B (по часам В) такой, что

$$t_B = t_A + \frac{\ell_{AB}}{c}. \quad (2.3)$$

Сокращение длины. Как измерить длину движущегося стержня? Непрерывная цепочка наблюдателей в лабораторной системе, имеющих синхронизованные часы, наблюдает за движением стержня, и в условленный момент $t = t^*$ те двое наблюдателей, возле которых находятся "голова" и "хвост" стержня соответственно, делают "засечки". Расстояние между наблюдателями и есть длина движущегося стержня ℓ , измеренная в лабораторной системе.

Длина стержня в системе, где он покоится, называется его *собственной* длиной ℓ_0 .

Как же соотносятся между собой ℓ и ℓ_0 ? В лабораторной системе $\ell = x_1 - x_2$. В системе стержня, используя преобразования Лоренца (2.2), найдем:

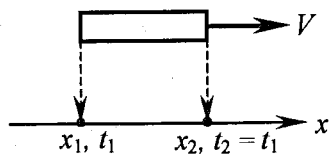


Рис. 2.2. Измерение длины стержня

$$x'_1 = \gamma(x_1 - \beta ct_1),$$

$$x'_2 = \gamma(x_2 - \beta ct_2), \quad t_2 = t_1.$$

Отсюда

$$\ell_0 = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma\ell,$$

или

$$\ell = \ell_0/\gamma. \quad (2.4)$$

Таким образом, *длина движущегося стержня в γ раз меньше его собственной длины.*

Эффект близнецов. Как измерить интервал времени? В лабораторной системе наблюдатели 1 и 2 фиксируют моменты t_1 и t_2 , когда часы пролетают

мимо каждого из них, и одновременно считывают показания на этих движущихся часах t'_1 и t'_2 (рис. 2.3).

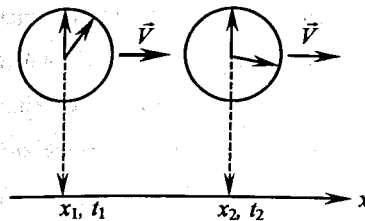


Рис. 2.3. Измерение интервала времени

Последние связаны с координатами и временем наблюдателей соотношениями:

$$t'_1 = \gamma\left(t_1 - \beta \frac{x_1}{c}\right),$$

$$t'_2 = \gamma\left(t_2 - \beta \frac{x_2}{c}\right).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \Delta t' = t'_2 - t'_1 &= \gamma\left(\Delta t - \beta \frac{\Delta x}{c}\right) = \\ &= \gamma\left(\Delta t - \beta \frac{V \cdot \Delta t}{c}\right) = \\ &= \gamma(1 - \beta^2) \cdot \Delta t = \frac{\Delta t}{\gamma}; \end{aligned}$$

$$\Delta t' = \Delta t/\gamma, \quad (2.5)$$

т.е. *время в движущейся системе течет (с точки зрения наблюдателя в неподвижной системе) медленнее* – это и есть "эффект близнецов".

Другой способ: вычислим координаты точек в лабораторной системе, в которых движущиеся часы находятся, соответственно, в моменты t'_1 и t'_2 по показаниям этих часов в движущейся системе. Запишем:

$$x_1 = \gamma(0 + \beta ct'_1), \quad x_2 = \gamma(0 + \beta ct'_2).$$

Отсюда

$$\Delta x = x_2 - x_1 = V \cdot \Delta t = \gamma \beta c \cdot \Delta t' = \gamma V \Delta t',$$

что дает $\Delta t = \gamma \cdot \Delta t'$, т.е. тот же результат (2.5).

Эффект близнецов – реально наблюдаемое физическое явление. Именно этот эффект объясняет тот факт, что короткоживущие элементарные частицы, разогнанные до околосветовых скоростей, пролетают громадные расстояния. Например, π -мезоны, родившиеся в верхних слоях атмосферы при взаимодействии космических протонов с ядрами атмосферных атомов, долетают до поверхности Земли. Собственное время жизни π^+ -мезона $\tau_0 = 26$ нс, но они пролетают путь порядка толщины атмосферы (~ 10 км), т.е. живут на лету $\tau \sim 10 \text{ км} / 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с} \approx 3.3$ мкс. Отсюда следует, что их скорость соответствует $\gamma = 3,3 \text{ мкс} / 26 \text{ нс} \approx 1,3 \cdot 10^3$, т.е. $v/c \approx 1 - 3 \cdot 10^{-7}$.

§ 2.4. Интервал в специальной теории относительности.

Мир Минковского

Величину

$$-ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2,$$

или

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.6)$$

называют *четырёхмерным интервалом*, или *четырёхинтервалом* (4-интервалом).

Эта величина – инвариант преобразований Лоренца. Покажем это:

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 \gamma^2 \left(dt' + \beta \frac{dx'}{c} \right)^2 - \gamma^2 (dx' + \beta c dt')^2 - dy'^2 - dz'^2 = \\ &= \gamma^2 \left\{ (dt')^2 \cdot (c^2 - \beta^2 c^2) + (dx')^2 \cdot (\beta^2 - 1) \right\} - (dy')^2 - (dz')^2 = \\ &= c^2 (dt')^2 - (dx')^2 - (dy')^2 - (dz')^2 = (ds')^2 = \text{Inv.} \end{aligned}$$

Релятивистские инварианты – величины, не изменяющиеся при преобразованиях Лоренца. 4-интервал – первый пример такого инварианта. Знак ds^2 – также инвариант. В зависимости от знака различают

$ds^2 > 0$ – *временноподобный интервал*,

$ds^2 < 0$ – *пространственноподобный интервал*.

Если $ds^2 > 0$, то $dt > dl/c$, где dl – расстояние между двумя точками трехмерного пространства. В этом случае два события в разных точках пространства могут быть зависимы, т.е. связаны *причинно-следственной связью*. Кроме того, существует система отсчета, в которой эти события произошли в одной точке: $dl = 0$, $dt > 0$.

Для $ds^2 < 0$ интервал времени $dt < dl/c$. Это означает, что события, происшедшие в разных точках пространства, независимы, и существует система отсчета, в которой эти два события одновременны: $dl > 0$, $dt = 0$.

Таким образом, причинно-следственные связи в релятивистских системах существенно отличаются от таких же связей в "привычном" нам мире малых скоростей, где справедлив принцип относительности Галилея (§ 1.5).

Всё 4-пространство делится на две части, в одной из которых 4-интервалы времениподобны, в другой – пространственноподобны. Проекция этого 4-пространства на 3-мерную поверхность x, y, t показана на рис. 2.4. Внутри этого, так называемого, *светового конуса* $ds^2 > 0$, вне конуса $ds^2 < 0$.

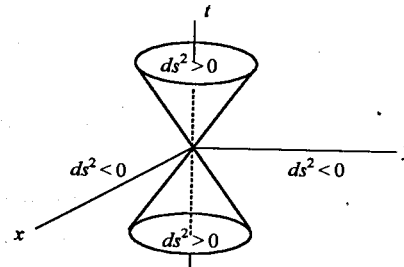


Рис. 2.4. Световой конус

Собственное время – время t_0 в системе, где тело покоится, т.е. $dl = 0$, откуда $ds^2 = c^2 \cdot (dt_0)^2$. В этой системе

$$dt_0 = ds/c, \quad (2.7)$$

откуда

$$dt_0 = \frac{1}{c} \sqrt{c^2(dt)^2 - (V \cdot dt)^2} = \frac{dt}{\gamma} \quad (2.8)$$

– тот же эффект близнецов.

Собственная длина – расстояние между двумя точками в системе координат покоящегося наблюдателя. Например, длина стержня с точки зрения сидящего на нем наблюдателя (рис. 2.5).

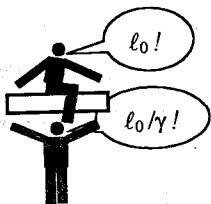


Рис. 2.5. Сокращение длины движущегося стержня

Мы видим, что пространственные координаты частицы и время измерения этих координат объединены в СТО в единое *событие*, которое можно представить в виде точки $\{x, y, z, t\}$ единого четырехмерного пространства. Такой формализм был предложен и развит немецким физиком Германом Минковски (*H. Minkowski*, 1908 г.) и позволил существенно обогатить математический аппарат СТО. Но гораздо важнее, что благодаря такому описанию возникает четырехмерное физическое пространство – "мир Минковского", где время имеет тот же смысл (расстояние вдоль четвертой оси), что и пространственные координаты. Дальше (§ 2.6) мы увидим, в каком виде нужно ввести эту четвертую координату, чтобы обеспечить достаточную одинаковость формы записи всех четырех координат.

Задача 2.1. Парадокс "Карандаш – пенал": войдет ли движущийся карандаш в пенал, если их собственные длины l_0 одинаковы?

Измеряем длину в системе пенала (лабораторная система), где $\Delta t' = 0$ (рис. 2.6, а),

$$(\Delta l')^2 = (\Delta l)^2 - c^2 \cdot (\Delta t)^2.$$

Что такое Δt ? Запишем для

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} x_1 = x'_1 = 0 \\ t'_1 = 0 \end{aligned} \right\} &\rightarrow t_1 = \gamma \left(t'_1 - \frac{V}{c^2} x'_1 \right) = 0, \\ \left. \begin{aligned} x_2 = x'_2 = l_0 \\ t'_2 = 0 \end{aligned} \right\} &\rightarrow t_2 = \gamma \left(t'_2 - \frac{V}{c^2} x'_2 \right) = -\gamma \frac{V}{c^2} \cdot l_0. \end{aligned}$$

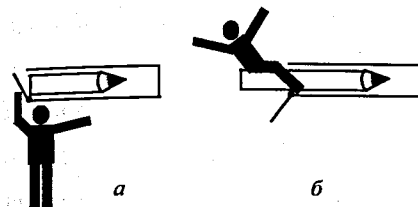


Рис. 2.6. Парадокс "Карандаш – пенал"

Событие касания "острия" в системе карандаша произойдет раньше, чем в системе пенала (рис. 2.6, б)! Тот же результат следует из инвариантности 4-интеграла.

Одновременность двух событий-измерений означает, что расстояние между ними во времени равно нулю. Если события одновременны в системе карандаша, то $\Delta t' = 0$ и соответственно имеем

$$(ds)^2 = c^2 \cdot \Delta t^2 - \Delta l^2 = -(\Delta l')^2,$$

$\Delta l' < \Delta l$ – карандаш "вошел" в пенал.

Этот парадокс очень поучителен: конечно, для любого наблюдателя движущийся мимо него предмет короче своей собственной длины, но, чтобы ответить на вопрос, аналогичный поставленному выше – "войдет или не войдет" карандаш в пенал, в СТО всегда нужно оговорить расстояние в пространстве и времени в данной системе.

§ 2.5. Сложение скоростей

Пусть частица движется со скоростью \vec{v}' в системе, которая в свою очередь движется относительно лабораторной системы со скоростью $\vec{V} = \vec{e}_x V$ (рис. 2.1). Запишем для приращений координат и времени в движущейся системе:

$$\begin{aligned} dx' &= v'_x dt', \\ dy' &= v'_y dt', \\ dz' &= v'_z dt'. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Преобразования Лоренца дают

$$\begin{aligned} dx &= \gamma(dx' + V dt') = \gamma(v'_x + V) dt', \\ dy &= dy', \\ dz &= dz', \\ dt &= \gamma\left(dt' + \frac{V}{c^2} dx'\right) = \gamma\left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right) dt'. \end{aligned}$$

Отсюда, поделив dx , dy , dz на dt , соответственно найдем

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad (2.10)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{v'_y}{\gamma\left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right)}, \quad (2.11)$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{v'_z}{\gamma\left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right)}. \quad (2.12)$$

Особенности такого закона сложения скоростей иллюстрирует случай $v' \rightarrow c$: если $v'_x = c$, то из (2.10) следует $v_x = c$. Если же $V \rightarrow c$, то также

$$v_x \rightarrow \frac{v'_x + c}{1 + \frac{v'_x}{c}} = c.$$

В то же время $v_y, v_z \rightarrow 0$, т.к. $\gamma \rightarrow \infty$ при $V \rightarrow c$. Когда $v'_y, v'_z \rightarrow c$, их значения в лабораторной системе не превосходят скорость света:

$$v_{y,z} \rightarrow \frac{c}{\gamma\left(1 + \frac{v'_x V}{c^2}\right)} < c.$$

Таким образом, закон сложения скоростей показывает, что кинематика СТО не допускает движение со скоростью, большей скорости света. Это утверждение

имеет, на самом деле, гораздо более общий характер: в природе не существует взаимодействий, передаваемых со скоростью, превышающей c . В том числе невозможна передача информации со скоростью, большей c .

Нетрудно видеть, что при выводе преобразований Лоренца можно вместо c взять любую скорость, но нужно доказать, что эта скорость одинакова во всех инерциальных системах. А вот таким свойством обладает только скорость движения *безмассовых частиц* – фотонов, и это закон природы, обнаруженный экспериментально в знаменитых опытах Майкельсона (1881 г.), повторяемых (с повышением точности измерений) до наших дней – последний из этих экспериментов поставлен в 2002 г.!

Отметим, что запрет на превышение скорости света в вакууме c не является абсолютным: он справедлив, пока справедлив принцип относительности Эйнштейна и его следствие – постоянство скорости света. Гипотеза о существовании в природе частиц, движущихся со сверхзвуковыми скоростями, существует давно. Конечно, такие частицы – *тахiony*, как их называют, ненаблюдаемы в нормальных условиях, но зато, согласно гипотезе о тахионах, должны быть наблюдаемы продукты их распада. Есть теории, предписывающие определенные "правила жизни" (и распада!) тахионов, но пока экспериментаторы безуспешно охотятся за "законорожденными" наследниками ненаблюдаемых частиц.

И еще: невозможна передача взаимодействия (информации) со скоростью, большей c , хотя и возможно *перемещение* "чего-то" со сверхсветовой скоростью. Парадокс? Нет! Например, с такой скоростью можно перемещать луч ("зайчик") по экрану осциллографа, что и делается в современных скоростных осциллографах. Но при этом не передается информация из одной точки экрана в другую: в них прилетают разные электроны (!), поэтому этот факт не противоречит СТО. Главное, что следует понимать: ни один физический объект или физическая система (в том числе система отсчета) не могут двигаться со скоростью, большей скорости света. Время от времени появляются сенсационные сообщения об открытии (обнаружении) эффекта сверхсветовых скоростей. Однако до сих пор всегда за первым сообщением вскоре следовали объяснения,

показывавшие ошибочность эксперимента или его интерпретации. До сих пор нет сколько-нибудь серьезных оснований сомневаться в справедливости СТО.

§ 2.6. Четырехмерный вектор пространства-времени

Выше уже говорилось о едином четырехмерном пространстве, в котором вводятся три пространственные ("обычные") координаты и четвертая, x_4 – координата вдоль оси времени. Теперь введем четырехмерный вектор пространства-времени – далее для краткости, 4-вектор:

$$dX_4 = \{dx, dy, dz, dx_4\}, \quad x_4 = ict.$$

Квадрат модуля этого 4-вектора есть, как легко видеть, инвариант преобразований Лоренца:

$$(dX_4)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 \cdot dt^2 = -(ds)^2 = \text{Inv.}$$

Преобразования Лоренца для компонентов 4-вектора dX_4 имеют вид

$$\begin{aligned} dx_1 &= \gamma(dx' + Vdt') = \gamma(dx'_1 - i\beta dx'_4) \\ dx_2 &= dy' = dx'_2, \\ dx_3 &= dz' = dx'_3, \\ dx_4 &= ict = ic\gamma\left(dt' + \frac{V}{c^2} \cdot dx'\right) = \gamma(dx'_4 + i\beta dx'_1). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Итак, компоненты 4-вектора преобразуются в соответствии с преобразованиями Лоренца, квадрат его модуля – инвариант этих преобразований.

Можно не вводить мнимую компоненту $x_4 = ict$, но тогда нужно помнить правило вычисления $(ds)^2$: перед квадратом четвертой компоненты, если она действительная величина, а не чисто мнимая, нужно "руками" вставлять знак минус. Для комплексной метрики (так называют выбор системы координат) этот минус появляется автоматически. Поэтому мнимая единица здесь не более, как счетчик знака, учитывающий тем самым выделенность временной координаты. Отметим, что в современной физической литературе чаще используется

действительная метрика, а для того, чтобы "не помнить" правило перемножения 4-векторов, используют специально вводимый так называемый метрический тензор. В СТО это прием не дает заметных преимуществ, но он становится совершенно необходимым в общей теории относительности, где метрический тензор связан с кривизной пространства.

§ 2.7. Четырехмерный вектор энергии-импульса

Если $v' \ll c$, то импульс преобразуется при переходе из системы в систему в соответствии с законом сложения скоростей нерелятивистской механики:

$$\begin{aligned} \vec{p}' &= m\vec{v}', \quad \vec{v} = \vec{v}' + V, \\ \vec{p} &= \vec{p}' + m\vec{V}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Предположим, что 3-вектор \vec{p} входит в состав некоторого 4-вектора, образуя его пространственную часть:

$$p_n = \{\vec{p}, p_4\}, \quad n = 1, 2, 3, 4 \text{ – номер компоненты 4-вектора.} \quad (2.15)$$

Размерность 4-й компоненты есть $[p_4] = [E]/[v]$, т.е. отношение энергии к скорости. Что это за энергия и скорость, мы пока не знаем (!). Пусть $p_4 = iE/c$, где E – неизвестная пока величина, имеющая размерность энергии. Тогда можно (2.15) записать в виде

$$p_n = \left\{ \vec{p}, \frac{iE}{c} \right\}, \quad n = 1, 2, 3, 4. \quad (2.16)$$

Для вектора p_n , как и для любого 4-вектора, можно записать преобразования Лоренца:

$$\begin{aligned} p_x &= \gamma\left(p'_x + V\frac{E'}{c^2}\right), \\ p_y &= p'_y, \quad p_z = p'_z, \\ E &= \gamma(E' + Vp'_x). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Если в движущейся системе тело покоится, то $\vec{p}' = 0$, и тогда

$$p_x^0 = \gamma V \frac{E_0'}{c^2},$$

$$p_y^0 = p_z^0 = 0, \quad (2.18)$$

$$E_0 = \gamma E_0'.$$

Здесь индексом "0" помечены значения компонент вектора (2.16) для случая частицы, покоящейся в движущейся системе. Подставляя последнее из равенств (2.18) в первое, получим

$$p_x^0 = \frac{VE_0}{c^2}. \quad (2.19)$$

Мы получили связь между параметром E и импульсом тела, движущегося со скоростью \vec{V} в лабораторной системе (это и есть тело, покоящееся в системе, движущейся со скоростью \vec{V}):

$$\vec{p} = \vec{V} \frac{E}{c^2}. \quad (2.20)$$

А что же такое E ? Это выясним, обратившись к случаю $V \ll c$, когда $\vec{p} = m\vec{V}$. В этом случае из (2.20) следует $E = mc^2$. Значит если тело покоится или движется со скоростью $V \ll c$, то

$$E = mc^2 = \text{const}. \quad (2.21)$$

Строго говоря, $E \rightarrow mc^2$ при $V \rightarrow 0$. Это означает, в частности, что в системе, где тело покоится, $E_0' = mc^2$, и из (2.18) получим

$$\begin{aligned} p_x^0 &= \gamma m V, \\ p_y^0 &= p_z^0 = 0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$E_0 = \gamma mc^2.$$

Смысл величины E_0 , будет понятен дальше. Итак, для частицы массы m (масса дана в системе, где частица покоится!), движущейся со скоростью \vec{v} , имеем:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \gamma m \vec{v}, \quad E = \gamma mc^2, \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Мы получили тем самым 4-вектор энергии-импульса:

$$p_n = \left\{ p_\alpha, \frac{iE}{c} \right\}, \quad \begin{matrix} n = 1, 2, 3, 4, \\ \alpha = 1, 2, 3. \end{matrix} \quad (2.24)$$

Квадрат модуля этого вектора есть

$$\sum_{n=1}^4 (p_n)^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{(\gamma mc^2)^2}{c^2} - (\gamma m \vec{v})^2 = \gamma^2 m^2 (c^2 - v^2) = m^2 c^2 = \text{Inv},$$

или

$$\sum_{n=1}^4 (p_n)^2 = m^2 c^2.$$

Это же равенство можно записать в виде

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (2.25)$$

Что же такое E ? Как всегда, помогает переход к нерелятивистским скоростям (принцип соответствия):

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \xrightarrow{\beta \ll 1} mc^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{2} \right) = mc^2 + \frac{mv^2}{2}, \quad \beta \equiv \frac{v}{c}.$$

Таким образом, при скоростях, малых по сравнению со скоростью света, мы получили

$$E \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2} \quad \text{при } v \ll c. \quad (2.26)$$

Второе слагаемое – хорошо знакомая кинетическая энергия тела, а первое – новая характеристика, *энергия покоя* (т.е. энергия, заключенная в теле массы m).

Это не просто игра формул, а отражение закона природы. Например, при столкновении электрона и позитрона могут рождаться новые частицы. Спрашивается, при какой энергии сталкивающихся частиц возможно рождение пары протон-антипротон? Если электрон и позитрон сталкиваются, имея равные и противоположно направленные скорости (т.н. *встречные пучки*), то реакция

$$e^+ + e^- \quad p + \bar{p}$$

(e^+ – позитрон, e^- – электрон, p – протон, \bar{p} – антипротон), возможна, если

$$E_{e^+} + E_{e^-} = 2E_e > M_p c^2 + M_{\bar{p}} c^2 = 2M_p c^2.$$

Масса протона (антипротона) $M_p c^2 \approx 938$ МэВ, значит, пороговая энергия реакции $E_e = 938$ МэВ.

Подчеркнем, что всюду выше масса m (или M) – масса частицы в системе, где она покоится, т.е. *собственная масса* частицы.

И последнее: что же такое *кинетическая энергия релятивистской частицы*? Очевидно, она равна разности полной энергии и энергии покоя частицы:

$$W = E - mc^2 = (\gamma - 1) \cdot mc^2. \quad (2.27)$$

Это и есть её кинетическая энергия. Из разложения в (2.26) видно, что при $v \ll c$ кинетическая энергия $W \approx mv^2/2$, т.е. опять-таки выполняется принцип соответствия.

§ 2.8. Уравнение движения релятивистской частицы

При $v \ll c$ 2-й закон Ньютона можно записать в любой из равноценных форм:

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad (2.28)$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, \quad (2.29)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \quad (2.30)$$

Какую форму уравнения выбрать при $v \sim c$? По-видимому, сразу же следует отказаться от формы (2.29), поскольку и при $v \sim c$ уравнение движения должно иметь один и тот же вид во всех инерциальных системах, а скорость, как мы уже знаем, преобразуется очень сложно (§ 2.5). Поэтому "неправдоподобно", чтобы

форма (2.29) была "подходящей". Форму (2.28) также использовать нельзя, пока мы не знаем закон преобразования ускорения в релятивистских системах.

Посмотрим, как обстоит дело с (2.30). Получим закон преобразования производной импульса по времени при переходе из одной инерциальной системы в другую, сохранив выбор их осей, как это сделано на рис. 2.1:

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{\gamma \left(dp'_x + V \frac{dE'}{c^2} \right)}{\gamma \left(dt' + V \frac{dx'}{c^2} \right)} = \frac{dp'_x}{dt'} \cdot \frac{1 + \frac{\partial E'}{\partial p'_x} \cdot \frac{V}{c^2}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}. \quad (2.31)$$

Здесь \vec{v} , \vec{v}' – скорости частицы в лабораторной и движущейся системах, соответственно, V – скорость преобразования. Но $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$, поэтому

$$E \frac{\partial E}{\partial p_x} = p_x c^2, \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial E}{\partial p_x} = \frac{p_x c^2}{E} = \frac{\gamma m v_x c^2}{\gamma m c^2} = v_x.$$

Подставив это значение $\partial E / \partial p_x$ в (2.31), найдем

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{dp'_x}{dt'}, \quad \text{т.е.} \quad F_x = F'_x. \quad (2.32)$$

Далее, для поперечных компонент импульса аналогично имеем

$$\frac{dp_y}{dt} = \frac{dp'_y}{\gamma \left(dt' + V dx' / c^2 \right)} = \frac{dp'_y}{dt'} \cdot \frac{1}{\gamma \left(1 + \frac{v'_x V}{c^2} \right)}$$

С учетом сложения скоростей (2.11) и равенства $p_y = p'_y$ получим отсюда

$$\frac{dp_y}{dt} = \frac{dp'_y}{dt'} \cdot \frac{v_y}{v'_y} = \frac{dp'_y}{dt'} \cdot \frac{p_y}{\gamma_y} \cdot \frac{\gamma_y}{p'_y} = \frac{dp'_y}{dt'} \cdot \frac{\gamma_y}{\gamma'_y},$$

где $\gamma_y = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Отсюда

$$\frac{dp_y}{dt} = F_y = \frac{dp'_y}{dt'} \cdot \frac{\gamma_y}{\gamma'_y} = F'_y \cdot \frac{\gamma_y}{\gamma'_y}. \quad (2.33)$$

Итак, форма уравнения (2.30) инвариантна к преобразованиям Лоренца, если компоненты силы (трехмерной силы!) преобразуются согласно соотношениям (2.32), (2.33). Таким образом, закон преобразования компонент силы в СТО имеет вид

$$\vec{F}_\perp = \vec{F}'_\perp, \quad \gamma_v \vec{F}_\perp = \gamma'_v \vec{F}'_\perp, \quad \gamma_v = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}. \quad (2.34)$$

§ 2.9. Закон сохранения энергии, импульса и момента импульса релятивистской частицы

Вначале покажем, что скалярное произведение

$$\left(\vec{v}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right) = \dot{E}. \quad (2.35)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \left(\vec{v}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right) &= \left(\vec{v}, \frac{d}{dt} \cdot \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = \\ &= \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\vec{v}, \frac{d\vec{v}}{dt} \right) + \frac{m(\vec{v}, \vec{v})}{(1-\beta^2)^{3/2}} \cdot \frac{(\vec{v}, \dot{\vec{v}})}{c^2} = \\ &= \frac{mc^2}{(1-\beta^2)^{3/2}} \cdot \frac{d\beta^2}{dt} \cdot \frac{1}{2} = mc^2 \frac{d}{dt} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{d}{dt} (\gamma mc^2) = \frac{dE}{dt}. \end{aligned}$$

Тогда, подставив в исходное равенство (2.35) значение $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ (2.30), найдём

$$\frac{dE}{dt} = \left(\vec{v}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right) = (\vec{v}, F(\vec{r})) = \frac{d}{dt} \int_0^r (F(\vec{r}'), d\vec{r}') = -\frac{dU(\vec{r})}{dt}.$$

Здесь $U(\vec{r})$ — потенциальная энергия частицы в поле силы $\vec{F}(\vec{r})$. Отсюда

$$\frac{d}{dt}(E+U) = 0, \quad \text{или} \quad E+U = \text{const}. \quad (2.36)$$

Итак, сумма релятивистской энергии E и потенциальной $U(\vec{r})$ сохраняется при движении частицы (сравни (1.10)).

Задача 2.2. Найти скорость электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов 1 МВ.

$$\left. \begin{aligned} \gamma mc^2 &= -(e)U + mc^2, & mc^2 &\approx 0,51 \text{ МэВ} \\ eU &= 1 \text{ МэВ} \end{aligned} \right\} \rightarrow \gamma \approx 3,$$

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \approx \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0,94 c.$$

Для вычисления различных параметров релятивистской частицы при заданной кинетической энергии удобно пользоваться безразмерной кинетической энергией

$$\varphi = \frac{W}{mc^2}. \quad (2.37)$$

Через параметр φ довольно просто записываются релятивистские величины:

$$\begin{aligned} \gamma &= \varphi + 1, \\ E &= \gamma mc^2 = (\varphi + 1) mc^2, \\ pc &= \sqrt{E^2 - m^2 c^4} = \sqrt{\varphi(\varphi + 2)} mc^2, \\ \beta &= \frac{p}{\gamma mc^2} = \frac{\sqrt{\varphi(\varphi + 2)}}{\varphi + 1}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

В частности, отсюда следует, что *частица релятивистская*, если $\varphi \geq 1$ т.е.

$$E \geq mc^2. \quad (2.39)$$

Вышеприведенный численный пример на языке параметра φ выглядит так:

$$\varphi = 1 \text{ МэВ} / 0,51 \text{ МэВ} \approx 2, \quad \beta = \sqrt{2(2+2)} / (2+1) \approx 0,94.$$

Если этот язык станет привычным, релятивистские вычисления не составят для вас труда.

После того как мы выяснили инвариантность уравнения (2.30) к преобразованиям Лоренца и определили тем самым правильную форму записи уравнения движения частицы, нетрудно выяснить вопрос о поведении полного (суммарного) импульса частиц замкнутой системы. Очевидно, что всё сказанное в начале § 1.3 остается справедливым и в случае частиц, движущихся с релятивистскими скоростями, и тем самым мы приходим к закону сохранения импульса замкнутой системы (1.9).

То же имеет место при анализе момента релятивистской частицы: пока мы работаем в одной и той же системе, нерелятивистские соотношения (1.15) ÷ (1.18)

остаются справедливыми и закон сохранения момента импульса действует и для релятивистской частицы. Главный "рецепт" в этом и предыдущем случае: определить значения сил в той системе, где измеряются импульс и момент импульса частицы. И если сумма сил (сумма моментов сил) равна нулю, то импульс (момент импульса) частицы сохраняется.

Обратим также внимание на тот факт, уравнения движения в форме (2.30) точные, если сила $\vec{F}(\vec{r}, t)$ задана, т.е. мы знаем её значения в каждой точке четырёхмерного пространства (\vec{r}, t) . Это удастся сделать далеко не всегда. В частности, при движении частицы в электромагнитных полях других (в т.ч. движущихся) частиц приходится учитывать запаздывание передачи взаимодействия (скорость света!). В результате задача резко усложняется.

§ 2.10. Сопутствующие системы

СТО, вся философия которой построена на понятии инерциальных систем, казалось бы, исключает возможность применения преобразований Лоренца к ускоренно движущимся системам. В связи с этим, в частности, в свое время подвергалась сомнению справедливость *эффекта близнецов* для астронавтов, путешествующих к звездам с околосветовыми скоростями: за время их полета на Земле сменится несколько поколений. Однако звездолет неизбежно ускоряется и замедляется так, что какое-то время является неинерциальной системой. Работают ли в нем законы СТО?

Для решения этой и подобных проблем используют специальный прием: вводят набор *мгновенно сопутствующих* инерциальных систем — у каждой из них своя скорость движения, совпадающая с мгновенным значением скорости неинерциальной системы в один из моментов времени. Так как каждая из сопутствующих систем инерциальна, в них действуют законы СТО, и

пересчетом из системы в систему вычисляются необходимые релятивистские параметры.

Задача 2.3. За какое время по часам землян звездолет разгонится до скорости $v_0 \approx c$, если ускорение в системе звездолета постоянно (мощность двигателя постоянна) и равно a_0 ?

В системе ракеты ее скорость, естественно, равна нулю, а ускорение $dv'/dt' = a_0$.

Но (см. (2.31)) $dv'/dt' = \frac{1}{m} \frac{dp'}{dt'} = \frac{1}{m} \frac{dp}{dt}$, и тривиальное интегрирование дает

$$\Delta t = \frac{\Delta p}{ma_0} = \frac{v_0}{a_0 \sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \approx \gamma \frac{c}{a_0}.$$

Где в этом примере использованы мгновенно сопутствующие системы? Очевидно, когда мы обратились к формуле (2.31).

ГЛАВА 3. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

Неинерциальными называются системы, движущиеся ускоренно, в том числе вращающиеся (т.к. тело, движущееся по окружности, испытывает центростремительное ускорение). Определение неинерциальных систем дано в § 1.5.

§ 3.1. Системы, движущиеся прямолинейно и ускоренно

Пусть система x', y' (автомобиль, например) движется ускоренно в лабораторной системе (рис. 3.1). Это означает, что в лабораторной системе

$$m\ddot{x} \equiv ma = F,$$

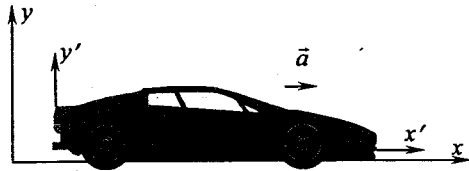


Рис. 3.1. Ускоренно движущийся автомобиль – пример неинерциальной системы

где F – сила, вызывающая ускорение. В системе автомобиля любое тело подчиняется уравнению

$$m\ddot{x}' = F'; \text{ но } \dot{x} = \dot{x}' + V, \text{ откуда } \ddot{x} = \ddot{x}' + a.$$

Следовательно,

$$m\ddot{x}' = m\ddot{x} - ma = F - ma = F'.$$

Таким образом, в системе ускорения движущегося автомобиля на тело кроме силы F действует еще сила $-ma$, именуемая *инерционной силой*, или силой инерции.

Задача 3.1. Маятник подвешен в лифте, падающем с ускорением a . Найти период колебаний.

Уравнение колебаний маятника в системе лифта (рис. 3.2) имеет вид

$$m\ddot{\varphi}\ell^2 = -m(g-a)\ell \cdot \sin\varphi \approx -m(g-a)\ell\varphi,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{(g-a)}{\ell} \cdot \varphi = 0,$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{(g-a)}{\ell}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g-a}}.$$

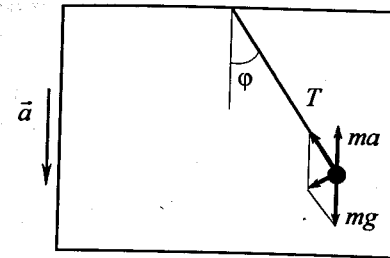


Рис. 3.2. Маятник в ускоренно падающем лифте

§ 3.2. Центробежная сила инерции во вращающейся системе координат

Рассмотрим простой пример: кубик покоится на диске, вращающемся с угловой скоростью Ω (рис. 3.3); k – коэффициент трения. Уравнение движения кубика в лабораторной системе (см. (1.6)) имеет вид

$$ma_r \equiv m(\ddot{r} - \Omega^2 r) = kmg,$$

где $\Omega^2 r$ – *центростремительное ускорение*. Сила трения направлена против направления скорости при смещении кубика. Отсюда

$$m\ddot{r} = m\ddot{r}' = m\Omega^2 r + kmg.$$

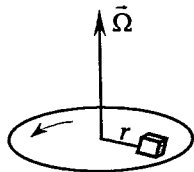


Рис. 3.3. Кубик на вращающемся диске

Таким образом, во вращающейся системе появляется центробежная сила инерции $F_{цбси}$, равная по модулю произведению массы на центростремительное ускорение в лабораторной системе и направленная вдоль радиуса наружу от оси вращения:

$$F_{цбси} = m\Omega^2 r. \quad (3.1)$$

Кубик не смещается, если $k > \Omega^2 r/g$.

§ 3.3. Кориолисово ускорение

Этот вид ускорения, возникающего при движении тела во вращающейся системе, впервые описал французский физик Густав Гаспар Кориолис (G. Coriolis, 1792–1843 гг.).

Рассмотрим вначале частный случай: частица с постоянной скоростью v движется вдоль радиуса диска, вращающегося с угловой скоростью Ω (рис. 3.4). Как мы уже видели в § 1.1, изменение скорости частицы в лабораторной системе складывается из двух частей: изменение направления вектора \vec{v} и изменение радиуса точки нахождения частицы (сравни вывод формулы (1.6)):

$$\begin{aligned} \Delta \vec{v} &= \Delta_1 \vec{v} + \Delta_2 \vec{v} = \vec{e}_\varphi v \cdot \Delta\varphi + \vec{e}_\varphi \Omega \cdot \Delta r, \\ \dot{\vec{v}} &= \vec{e}_\varphi (v\Omega + \Omega v) = \vec{e}_\varphi 2\Omega v. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Но в нашем примере скорость частицы относительно поверхности диска $v' = v$ направлена строго по радиусу, поэтому можно с тем же успехом считать, что $\dot{\vec{v}} = 2\Omega v \vec{e}_\varphi$ – это и есть кориолисово ускорение, возникшее по двум причинам: изменение направления скорости и смещение частицы по радиусу.

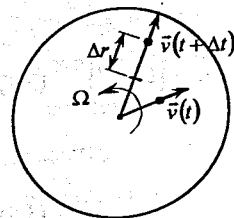


Рис. 3.4. Кориолисово ускорение частицы, движущейся по радиусу

Теперь рассмотрим общий случай – частица на вращающемся диске движется с произвольной скоростью. Будем отсчитывать радиус-вектор ее положения от центра диска $\vec{r}(t) = \vec{r}'(t)$. Из сложения скоростей имеем в лабораторной системе

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + [\vec{\Omega} \times \vec{r}]. \quad (3.3)$$

Продифференцировав по времени, получим

$$\dot{\vec{a}} = \dot{\vec{v}}'_{\text{лаб}} + [\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}] + [\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}], \quad (3.4)$$

где $\dot{\vec{v}}'_{\text{лаб}}$ – ускорение в лабораторной системе тела, имеющего скорость \vec{v}' во вращающейся системе. Подставив $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}}(t)$ из (3.3), запишем

$$\dot{\vec{a}} = \dot{\vec{v}}'_{\text{лаб}} + [\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}] + [\vec{\Omega} \times \dot{\vec{v}}'] + [\vec{\Omega} \times [\vec{\Omega} \times \vec{r}]]. \quad (3.5)$$

В свою очередь изменения $\dot{\vec{v}}'$ в лабораторной и вращающейся системах связаны знакомым равенством (см. рис. 7.5):

$$\Delta \vec{v}'_{\text{лаб}} = \Delta_{\parallel} \vec{v}' + \Delta_{\perp} \vec{v}' = \Delta \vec{v}'_{\parallel} + v' \cdot \Delta\varphi \cdot \vec{e}_{\perp}. \quad (3.6)$$

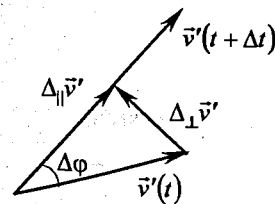


Рис. 3.5. К расчёту изменения скорости частицы \vec{v}'

Отсюда

$$\dot{\vec{v}}_{\text{лаб}} = \frac{\Delta \vec{v}'_{\text{лаб}}}{\Delta t} \Big|_{\Delta t \rightarrow 0} = \frac{\Delta \vec{v}'}{\Delta t} \Big|_{\Delta t \rightarrow 0} + [\vec{\Omega} \times \vec{v}'] = \dot{\vec{v}}_{\text{вращ}} + [\vec{\Omega} \times \vec{v}'] \equiv \vec{a}' + [\vec{\Omega} \times \vec{v}']. \quad (3.7)$$

В результате получим

$$\vec{a} = \vec{a}' + [\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}] + [\vec{\Omega} \times [\vec{\Omega} \times \vec{r}]] + 2[\vec{\Omega} \times \vec{v}']. \quad (3.8)$$

Раскрыв двойное векторное произведение, окончательно имеем

$$\vec{a} = \vec{a}' + [\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}] - \Omega^2 \vec{r} + 2[\vec{\Omega} \times \vec{v}']. \quad (3.9)$$

Первое слагаемое есть "собственно ускорение" во вращающейся системе, второе – ускорение, вызванное ускоренным вращением, третье – центростремительное ускорение, четвертое – кориолисово. Во вращающейся системе можно тогда записать уравнение движения частицы в виде

$$m\vec{a}' = \vec{F}' + m\Omega^2 \vec{r} + 2m[\vec{v}' \times \vec{\Omega}] - m[\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}]. \quad (3.10)$$

С точки зрения наблюдателя в этой системе появляются инерционные силы: центробежная сила инерции (второе слагаемое в (3.10)), кориолисова сила (третье слагаемое) и сила инерции ускоренного вращения (четвертое, последнее слагаемое).

Известны примеры проявления сил Кориолиса на Земле, возникающие из-за её вращения:

- 1) реки в северном полушарии обычно подмывают правый берег, в южном – левый (рис. 3.6), это так называемый закон Бэра;
- 2) аналогично – на железных дорогах сильнее стирается (изнутри) правый рельс;
- 3) пассаты – меридиональные ветры – искривляются (рис. 3.6).

Приведем некоторые численные оценки. Угловая скорость вращения Земли

$$\Omega_3 = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \text{ c}^{-1} \approx 0,7 \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1},$$

кориолисово ускорение автомобиля, движущегося со скоростью 90 км/ч,

$$2[\vec{v} \times \vec{\Omega}]_{\text{атм}} \approx 2 \cdot 90 \text{ км/ч} \cdot 0,7 \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1} \approx 0,35 \text{ см/с}^2 \approx 3,5 \cdot 10^{-4} \text{ g}.$$

Для реки, текущей со скоростью 1 км/ч, кориолисово ускорение в 90 раз меньше, но это не противоречит закону Бэра, т.к. в геологическом масштабе времени проявляется действие даже столь малого ускорения, порядка 10^{-5} g . При этом существенна еще большая масса воды. Такое ускорение (см. также § 8.2 ниже) создает давление на берег ($h \sim 1 \text{ км}$ – ширина реки):

$$p \sim \rho a_{\text{кор}} \cdot h \sim 10^3 \text{ кг/м}^3 \times 10^{-5} \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 \cdot 10^3 \text{ м} \sim 10^2 \text{ Па} \approx 10^{-3} \text{ атм},$$

и это давление действует на очень большую площадь берега.

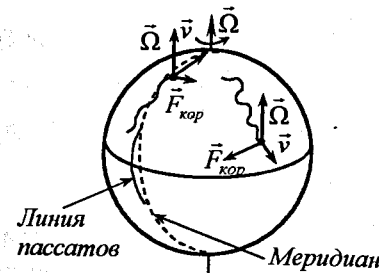


Рис. 3.6. Проявление действия сил Кориолиса на Землю

ГЛАВА 4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

§ 4.1. Одномерное движение

Уравнение движения (2.30) в одномерном случае имеет вид

$$\frac{dp}{dt} = F(x), \quad p = \gamma m \dot{x}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2}}. \quad (4.1)$$

1-й интеграл этого уравнения, как показано в § 2.9, есть закон сохранения энергии (2.36):

$$E(x) + U(x) = \text{const}, \quad (4.2)$$

или

$$\gamma m c^2 + U(x) = \text{const} = E(0) + U(0). \quad (4.3)$$

Скорость частицы есть

$$v(x) = dx/dt, \quad \text{отсюда} \quad t = \int \frac{dx}{v(x)}. \quad (4.4)$$

Это 2-й интеграл уравнения (4.1). При его вычислении ограничимся нерелятивистским случаем $v \ll c$. Тогда из (4.2) имеем

$$\frac{mv^2}{2} + U(x) = \frac{mv_0^2}{2} + U_0 = \text{const} \equiv W.$$

Отсюда

$$\frac{dx}{dt} = v(x) = \sqrt{v_0^2 - \frac{2}{m}(U(x) - U_0)} \quad (4.5)$$

или

$$t(x) = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2}{m}(U(x) - U_0)}} + t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{W_0 - U(x)}}. \quad (4.6)$$

Выражение (4.6) и называют вторым интегралом уравнения (4.1).

Отметим некоторую терминологическую трудность. В математике интегралом дифференциального уравнения принято называть функцию, образующуюся в

результате интегрирования дифференциального уравнения. Так, в одномерном уравнении движения нерелятивистской частицы

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x) \quad (4.7)$$

первый интеграл найдем, умножив обе части уравнения dx/dt и произведя интегрирование,

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \int F(x) \cdot dx + C \equiv -U(x) + C.$$

Величина

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot \sqrt{C - U(x)} \quad (4.8)$$

называется первым интегралом уравнения (4.7). Это то же самое, что и (4.5).

Вторым интегралом уравнения называется величина

$$t(x) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{C - U(x)}} + t_0 \quad (4.9)$$

(сравни с (4.6)).

В то же время в физике принято величины, сохраняющиеся при движении частиц, также называть *интегралами движения*. Таким интегралом в рассматриваемой задаче является полная энергия $E + U$ (4.2).

Финитное и инфинитное движение. Пусть частица движется в поле силы таком, что потенциальная энергия — немонотонная функция координаты x (рис. 4.1). Если полная энергия частицы $W_0^{(1)} > U_{\max}^{(1)}, U_{\max}^{(2)}$, движение инфинитное (неопределенное), т.е. область движения частицы не определена, частица движется вдоль всей оси x . В случае $W = W_0^{(2)}$ движение финитное (определенное), область движения определена — она ограничена точками $x_1 \leq x \leq x_2$, где $x_{1,2}$ — корни уравнения

$$U(x) = W_0. \quad (4.10)$$

Говорят еще, что частица находится в этом случае в *потенциальной яме*, которая образуется вблизи U_{\min} .

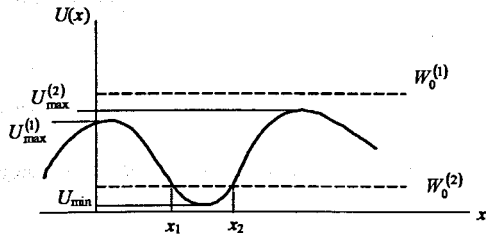


Рис. 4.1. Зависимость потенциальной энергии от координаты

§ 4.2. Движение двух взаимодействующих тел

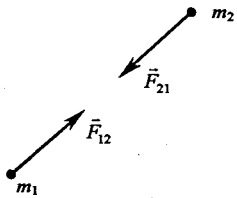


Рис. 4.2. Силы взаимодействия двух частиц

Рассмотрим движение двух частиц, взаимодействующих друг с другом с силами, равными по величине и противоположными по направлению (рис. 4.2). По-прежнему ограничимся нерелятивистской областью $v \ll c$. Система замкнутая. Пусть силы зависят только от расстояния между частицами:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \vec{F}(\vec{r}), \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2. \quad (4.11)$$

Запишем уравнение движения каждой из частиц:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}(\vec{r}), \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= -\vec{F}(\vec{r}). \end{aligned} \quad (4.12)$$

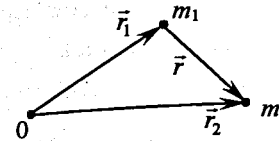


Рис. 4.3. Выбор системы отсчета в задаче о движении двух взаимодействующих тел

Сложив уравнения (4.12), имеем (см. рис. 4.3)

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0, \quad \text{откуда следует } m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = \text{const},$$

или

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p} = \text{const}. \quad (4.13)$$

Получили заранее ясный результат: *полный импульс* замкнутой системы постоянен, т.е. является *интегралом движения* (см. § 1.3).

Теперь введем радиус-вектор:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (4.14)$$

Что это такое? Запишем (4.14) в виде

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \frac{(m_1 + m_2 - m_2) \cdot \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \\ &= \vec{r}_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{r} \equiv \vec{r}_1 + \vec{r}_c, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где

$$\vec{r}_c = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{r}.$$

Аналогично,

$$\vec{R} = \vec{r}_2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{r}.$$

Отсюда ясно, что точка C лежит на прямой, соединяющей тела (см. рис. 4.4), и отстоит от тела m_1 на расстоянии r_c . При этом

$$m_1 r_c = m_2 (r - r_c). \quad (4.16)$$

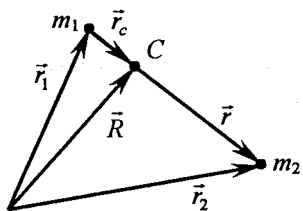


Рис. 4.4. Положение центра тяжести двух тел.
Здесь \vec{r} – радиус-вектор из m_1 в m_2 (см. (4.11))

Таким образом, точка C – центр тяжести системы двух точечных тел. С другой стороны, скорость движения точки C есть

$$\vec{v}_c = \dot{\vec{R}} = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{p}}{m_1 + m_2}, \quad (4.17)$$

или

$$\vec{p} = (m_1 + m_2) \dot{\vec{R}} \equiv (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}_c, \quad (4.18)$$

т.е. $\vec{v}_c = \dot{\vec{R}}$ – скорость движения тела с массой $m_1 + m_2$, находящегося в точке C . Иными словами, движение системы, как целого, сводится к движению материальной точки с массой, равной сумме масс тел и находящейся в точке C , называемой *центром масс*. Импульс замкнутой системы \vec{p} и скорость центра масс замкнутой системы постоянны (интегралы движения).

Теперь рассмотрим относительное движение тел. Перепишем уравнения (4.12) в виде

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{1}{m_1} \cdot \vec{F}(\vec{r}), \quad \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{1}{m_2} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \quad (4.19)$$

и вычтем второе уравнение из первого. Получим

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \ddot{\vec{r}} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \cdot \vec{F}(\vec{r}),$$

или

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}). \quad (4.20)$$

Таким образом, изменение расстояние между телами m_1 и m_2 описывается уравнением движения в поле силы $\vec{F}(\vec{r})$ частицы с массой

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.21)$$

Масса (4.21) называется *приведенной массой* системы двух тел. Как и для любого уравнения второго порядка, решение уравнения (4.20) содержит две константы, которые находят из *начальных условий*:

$$\begin{aligned} r(0) &= \vec{r}_1(0) - \vec{r}_2(0), \\ \dot{\vec{r}}(0) &= \dot{\vec{r}}_1(0) - \dot{\vec{r}}_2(0) = \vec{v}_1(0) - \vec{v}_2(0). \end{aligned}$$

Задача 4.1. Описать движение двух шариков с массами m_1 , m_2 , соединенных пружиной жесткости k , если начальные скорости шариков направлены вдоль оси x .

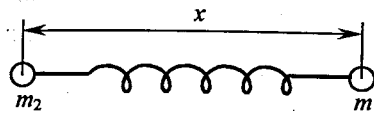


Рис. 4.5. Система двух шариков на пружинке

Запишем уравнение движения частицы с приведенной массой:

$$\mu \ddot{x} = -k(x - x_0),$$

x_0 – длина недеформированной пружины. Решение уравнения имеет вид

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{k/\mu}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

(убедиться подстановкой). Константы A и B определяются начальными условиями:

$$A = x(0) = x_1(0) - x_2(0), \quad B = \frac{1}{\omega} (\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)).$$

Таким образом, шарики колеблются относительно центра масс системы, движущейся со скоростью

$$\dot{x}_c = \frac{m_1 \dot{x}_1(0) - m_2 \dot{x}_2(0)}{m_1 + m_2}.$$

После того, как функция $\vec{r}(t)$ найдена, решение для каждой из частиц можно записать как сумму радиуса-вектора центра масс $R(t)$ и смещения частицы относительно центра масс (см. 4.15):

$$r_{1,2}(t) = R(t) \pm \frac{m_{2,1}}{m_1 + m_2} \cdot \vec{r}(t). \quad (4.22)$$

Знаки здесь учитывают выбор направления вектора \vec{r} (рис. 4.4). Соответственно, скорости частиц складываются из скорости центра масс и скорости относительного движения частиц:

$$\vec{v}_{1,2} = v_c \pm \frac{m_{2,1}}{m_1 + m_2} \cdot \dot{\vec{r}}(t).$$

Скорость центра масс замкнутой системы определяется суммарным импульсом частиц:

$$\vec{v}_c = \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{m_1 + m_2}.$$

В релятивистском случае задача о движении двух взаимодействующих тел становится гораздо сложнее. Теперь уже нельзя считать справедливым равенство (4.11), т.к. принципиально необходимо учитывать запаздывание взаимодействия. Кроме того, не удастся ввести приведенную массу, т.к. в релятивистском случае $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$.

Отметим также, что в релятивистском случае задача о взаимодействии двух заряженных тел усложняется из-за появления нецентральной силы — магнитной компоненты силы Лоренца.

§ 4.3. Движение в центральном поле

Рассмотрим движение нерелятивистской частицы в поле центральных сил, или центральном поле.

Центральным называется поле сил, направленных вдоль прямых, имеющих общий центр:

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r) \vec{e}_r, \quad (4.23)$$

где \vec{e}_r — единичный вектор, направленный вдоль радиуса сферической системы координат, начало которой совпадает с центром поля.

Это важный случай силового поля, в котором момент сил равен нулю. Действительно, момент центральных сил относительно центра поля есть

$$\vec{N}_c = [\vec{r} \times \vec{F}_c] = [\vec{e}_r \times \vec{e}_r] \cdot r F_c \equiv 0. \quad (4.24)$$

Следовательно, в центральном поле момент частицы относительно его центра есть интеграл движения (сравни (1.19)):

$$\vec{M}_c = \text{const}. \quad (4.25)$$

Следствие этого свойства центрального поля: траектория частицы в центральном поле — плоская кривая. Действительно, из определения момента импульса (1.15) и условия его постоянства (4.25) следует, что вектор $\vec{r}(t)$ — расстояние от центра поля до частицы — в любой момент времени t ортогонален постоянному во времени вектору \vec{M} , а это означает, что все векторы $\vec{r}(t)$ лежат в одной и той же плоскости.

Теперь вернемся ненадолго к кинематике. Кинематика плоского криволинейного движения материальной точки рассмотрена в § 1.1. Как мы видели (см. (1.6)), ускорение, как и скорость, имеет две компоненты — радиальную и азимутальную:

$$a_r = \ddot{r} - \dot{\phi}^2 r, \quad (4.26)$$

$$a_\phi = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\phi}). \quad (4.27)$$

Физический смысл второго слагаемого в (4.26) прост: это знакомое уже центростремительное ускорение a_{uc} (сравни (1.6)).

Теперь можно записать уравнения движения по плоской траектории:

$$m\ddot{r} - m\dot{\phi}^2 r = F_r, \quad (4.28)$$

$$\frac{m}{r} \cdot \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\phi}) = F_\phi. \quad (4.29)$$

Уравнению (4.29) можно придать вид

$$\frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\phi}) = F_\phi r. \quad (4.30)$$

Но

$$mr^2 \dot{\phi} = r \cdot mr\dot{\phi} = rmv_\phi = |[\vec{r} \times \vec{p}]| = |\vec{M}|, \quad (4.31)$$

$$F_\phi r = |[\vec{r} \times \vec{F}_\phi]| = |\vec{N}|.$$

Следовательно, уравнение (4.30) – это уравнение (1.17), записанное для модулей векторов, входящих в (1.17), т.е. уравнение, описывающее поведение модуля момента импульса.

Теперь можно вернуться к движению в центральном поле. Здесь

$$F_\varphi \equiv 0, \quad M = \text{const} = mr^2\dot{\varphi} = m \cdot 2 \frac{dS}{dt},$$

где dS – площадь сектора, который проходит радиус-вектор \vec{r} при повороте на угол $d\varphi = \dot{\varphi} \cdot dt$. Значит

$$\dot{\varphi} = \frac{M}{mr^2}, \quad (4.32)$$

$$\dot{S} = \text{const} = \frac{M}{2m}. \quad (4.33)$$

Равенство (4.33) есть не что иное, как знаменитый 2-й закон Кеплера: постоянство секториальной скорости при движении планет по околозвездным орбитам.

Подставив (4.32) в (4.28), имеем уравнение для $r(t)$:

$$m\ddot{r} - \frac{M^2}{mr^3} = F_r(r), \quad (4.34)$$

или

$$m\ddot{r} = -\frac{dU_{\text{эфф}}}{dr}, \quad \text{где } U_{\text{эфф}} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}. \quad (4.35)$$

Тем самым задача сведена к задаче о движении частицы с массой m в поле силы, потенциальная энергия которой $U_{\text{эфф}}$ складывается из "обычной" потенциальной энергии $U(r)$ (см. (1.10)) и "центробежной" энергии

$$U_\varphi(r) = -\int \frac{M^2}{mr^3} dr = \frac{M^2}{2mr^2}. \quad (4.36)$$

Первый интеграл уравнения движения (4.35) есть

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + U(r) + U_\varphi(r) = \text{const}. \quad (4.37)$$

Задача 4.2. При какой скорости метеорит упадет на Землю?

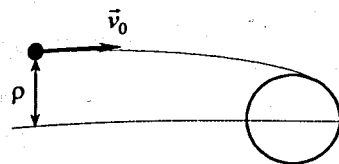


Рис. 4.6. Падение метеорита на Землю (граничная траектория)

Если при $r = \infty$ скорость метеорита равна v_0 , а расстояние от метеорита до прямой, параллельной \vec{v}_0 и проходящей через центр Земли (рис. 4.6), равно ρ (т.н. *прицельный параметр*), то const в (4.37) равна $mv_0^2/2$, и, соответственно, условие касания Земли траекторией падения метеорита ($\dot{r} = 0$) имеет вид

$$\frac{mv_0^2}{2} = -G \frac{mM_3}{R_3} + \frac{M^2}{2mR_3^2}, \quad (4.38)$$

где

$$M = mv_0\rho, \quad G \frac{mM_3}{R_3^2} = mg.$$

Здесь M_3 , R_3 – масса и радиус Земли, G – постоянная Всемириого тяготения. Отсюда найдем условие падения метеорита на Землю:

$$v_0^2 \leq \frac{2gR_3}{\frac{\rho^2}{R_3^2} - 1}, \quad (4.39)$$

или

$$\rho \leq R_3 \sqrt{1 + \frac{2gR_3}{v_0^2}}.$$

Таким образом, поперечный размер потока метеоритов, падающих на Землю, превышает ее диаметр.

§ 4.4. Задача Кеплера

Это задача о движении в поле силы, потенциальная энергия которой описывается законом

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad (4.40)$$

В природе известны два наиболее важных вида кеплеровых полей:

$$\alpha = \begin{cases} Gm_1m_2 & \text{— поле сил тяготения} \\ ke_1e_2 & \text{— кулоновское поле} \end{cases} \quad (4.41)$$

В кеплеровом поле

$$U_{\text{эфф}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mR^2}, \quad (4.42)$$

где M – момент импульса частицы. Функция $U_{\text{эфф}}(r)$ имеет минимум в некоторой точке r^* (рис. 4.7):

$$r^* = \frac{M^2}{\alpha m}, \quad (4.43)$$

$$U_{\min} = U_{\text{эфф}}(r^*) = -\frac{\alpha^2 m}{2M^2}.$$

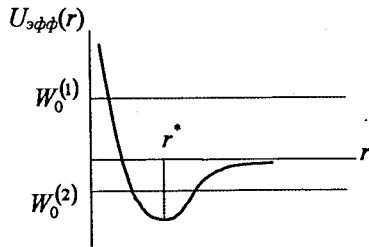


Рис. 4.7. Зависимость $U_{\text{эфф}}(r)$ для кеплерова поля

1-й интеграл уравнения движения (4.2) для кеплерова поля, очевидно, есть

$$W + U(r) = \text{const} \equiv W_0. \quad (4.44)$$

Константа W_0 – сумма кинетической и потенциальной энергий – есть интеграл движения частицы. В зависимости от значения W_0 частица может двигаться в ограниченной области пространства (*финитное*, т.е. "определенное", движение) или удаляться бесконечно далеко от силового центра (*инфинитное*, "неопределенное", движение). Ясно, что движение частицы (см. рис. 4.7)

инфинитно, если $W_0 > 0$,

финитно, если $W_0 < 0$.

Переписав (4.44) в виде

$$\frac{mr^2}{2} + U_{\text{эфф}}(r) = W_0, \quad (4.45)$$

получим для радиальной компоненты скорости

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \cdot \sqrt{W_0 - U_{\text{эфф}}(r)}}. \quad (4.46)$$

Кроме того, используя (4.32), запишем

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{M}{mr^2}, \quad (4.47)$$

и, подставив в (4.46), найдем

$$\frac{dr}{d\varphi} = \sqrt{\frac{2}{m} \cdot \sqrt{W_0 - U_{\text{эфф}}(r)}} \cdot \frac{mr^2}{M}. \quad (4.48)$$

Отсюда

$$\varphi(r) = \frac{M}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{W_0 - U_{\text{эфф}}(r)}}. \quad (4.49)$$

Выражение (4.49) для второго интеграла уравнения движения справедливо для любого центрального поля. Для кеплерова поля интеграл имеет вид

$$\varphi_{\text{кепл}}(r) = \frac{M}{\sqrt{2m}} \int \frac{d\left(-\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{W_0 + \frac{\alpha}{r} - \frac{M^2}{2mr^2}}}. \quad (4.50)$$

Вводя новую переменную

$$\xi = \frac{1}{r} \quad (4.51)$$

и параметр

$$p = \frac{M^2}{\alpha m}, \quad (4.52)$$

преобразуем подкоренное выражение в (4.50):

$$W_0 + \frac{\alpha}{r} - \frac{M^2}{2mr^2} = W_0 + \alpha\xi - \alpha p \frac{\xi^2}{2} = W_0 + \frac{\alpha}{2p} [1 - (p\xi - 1)^2]$$

Тогда

$$\varphi(r) = -\frac{M}{\sqrt{2m}} \cdot \sqrt{\frac{2p}{\alpha}} \cdot \int \frac{d\xi}{\sqrt{2\frac{pW_0}{\alpha} + 1 - (p\xi - 1)^2}} \quad (4.53)$$

Сделаем еще одну замену переменных

$$\eta = \frac{p\xi - 1}{\sqrt{2\frac{pW_0}{\alpha} + 1}} \equiv \frac{\frac{p}{r} - 1}{e},$$

где введен еще один важный параметр

$$e = \sqrt{1 + 2\frac{pW_0}{\alpha}} = \sqrt{1 + \frac{2M^2W_0}{m\alpha^2}}, \quad (4.54)$$

приведем (4.53) к виду

$$\varphi(r) = -\int \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} = \arccos \eta + \text{const}. \quad (4.55)$$

Условимся отсчитывать угол φ так, чтобы при $\eta = 0$ переменная φ равнялась $\pi/2$. При таком выборе отсчета константа интегрирования в (4.55) равна нулю, и уравнение траектории окончательно приводится к виду $\eta = \cos \varphi$, или

$$r(1 + e \cos \varphi) = p = \text{const}. \quad (4.56)$$

Это есть уравнение конического сечения. В зависимости от значения эксцентриситета e имеем

$$e > 1 - \text{гипербола} \rightarrow W_0 > 0;$$

$$e = 1 - \text{парабола} \rightarrow W_0 = 0;$$

$$e < 1 - \text{эллипс} \rightarrow W_0 < 0.$$

"Фокальный параметр" p определяет положение кривой относительно начала координат – центра поля (рис. 4.8).

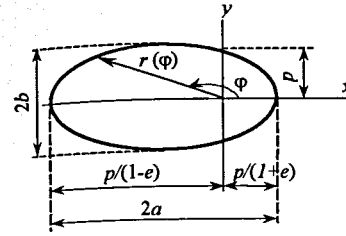


Рис. 4.8. Положение кеплерова эллипса в пространстве

Параметры эллипса. Значение большой полуоси кеплерова эллипса, очевидно, равно

$$2a = r(0) + r(\pi). \quad (4.57)$$

Подставив сюда $r(0)$ и $r(\pi)$ из 4.56, найдем

$$2a = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2} = \frac{\alpha}{|W_0|}. \quad (4.58)$$

Малая полуось $b = y_{\max}$. Из выражения

$$y = r \sin \varphi = \frac{p \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi};$$

найдем y_{\max} :

$$\frac{dy}{d\varphi} = p \frac{e + \cos \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2} = 0 \quad \text{при} \quad \cos \varphi = -e.$$

Отсюда

$$b = y_{\max} |_{\cos \varphi = -e} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m|W_0|}}. \quad (4.59)$$

Параметры гиперболы. Для гиперболы $e > 0$. Соответственно, минимальное расстояние ветвей гиперболы от центра поля сил (рис. 4.9) равно

$$r_{\min} = \frac{p}{1 \pm e} = \frac{\alpha}{2W_0} \cdot (e \mp 1). \quad (4.60)$$

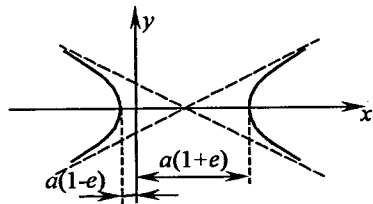


Рис. 4.9. Кеплеровы гиперболы

Задача 4.3. Найти уравнения асимптот кеплеровой гиперболы.

Подставив в уравнение гиперболы (4.56) выражения

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

запишем это уравнение в виде

$$y = \pm \sqrt{p^2 - 2epx + (e^2 - 1)x^2}.$$

Напомним, что для гиперболы $e > 1$. Поэтому при $x \rightarrow \infty$

$$y(x) \approx \pm \left[\sqrt{e^2 - 1} \cdot x - \frac{ep}{\sqrt{e^2 - 1}} \right]. \quad (4.61)$$

Это и есть уравнения асимптот (пунктирные прямые на рис. 4.9).

Космоплавание. Период обращения частицы по эллиптической орбите найдем, воспользовавшись 2-м законом Кеплера (4.33):

$$\frac{dS}{dt} = \frac{M}{2m}.$$

Отсюда

$$T = \frac{2mS}{M} = \frac{2\pi mab}{M},$$

где S , a , b – площадь и полуоси эллипса. Подставив значения последних из (4.58, 4.59), найдем

$$T = \pi \alpha \sqrt{\frac{m}{2|W_0|^3}}. \quad (4.62)$$

l -я космическая скорость – движение по окружности, центр которой совпадает с центром Земли, а радиус примерно равен земному:

$$a = b = R_3,$$

то есть

$$\frac{\alpha}{|W_0|} = \frac{M}{\sqrt{2m|W_0|}}, \quad \text{отсюда} \quad |W_0| = \frac{2m\alpha^2}{M^2}.$$

Кроме того,

$$M = mv_0 R_3, \quad (4.63)$$

$$\alpha = GmM_3 = mgR_3.$$

Из равенства

$$a = \frac{\alpha}{|W_0|} = R_3$$

найдем

$$v_1 = \sqrt{gR_3} \approx 8 \text{ км/с}. \quad (4.64)$$

Конечно, этот результат получается гораздо проще:

$$\frac{mv^2}{R_3} = G \frac{mM}{R_3^2} \approx mg.$$

Приведенный громоздкий вывод дан лишь для того, чтобы показать, как пользоваться общим решением.

Период обращения спутника Земли найдем, подставив в (4.62) значение α из (4.63):

$$T_{\text{спутника}} \approx \frac{\pi g R_3^2}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{m}{W_0} \right)^{3/2}. \quad (4.65)$$

Для квазикруговой орбиты

$$W_0 = \frac{mv_1^2}{2} - mgR_3 = -\frac{mgR_3}{2},$$

и тогда

$$T_{\text{спутника}} \approx 2\pi \sqrt{\frac{R_3}{g}} \approx 85 \text{ мин.} \quad (4.66)$$

2-я космическая скорость – при которой космический корабль покидает околоземную орбиту. Из условия движения по параболе найдем критическую скорость:

$$0 = W_0 = \frac{mv^2}{2} - G \frac{mM}{R_3} = \frac{mv^2}{2} - mgR_3,$$

откуда

$$v_{II} = \sqrt{2gR_3} \approx 11 \text{ км/с.} \quad (4.67)$$

3-я космическая скорость – при которой космический корабль покидает Солнечную систему:

$$0 = W_0 = \frac{mv^2}{2} - G \frac{mM}{R_3} - G \frac{mM_C}{R_{3C}},$$

где M_C – масса Солнца, $R_{3C} \approx 500$ световых секунд – расстояние Земля – Солнце.

Но

$$G \frac{mM}{R_{3C}^2} = \frac{mv_{орб}^2}{R_{3C}}; \quad G \frac{mM}{R_{3C}^2} \approx g,$$

где $v_{орб}$ – орбитальная скорость Земли.

$$v_{орб} = \omega_{орб} R_{3C} = \frac{2\pi}{3,15 \cdot 10^7 \text{ с}} \cdot 500 \text{ с} \cdot 3 \cdot 10^5 \text{ км/с} \approx 30 \text{ км/с},$$

(любопытно, что $1 \text{ год} \approx \pi \cdot 10^7 \text{ с.}$) В результате

$$v_{III} = \sqrt{2 \cdot \sqrt{gR_3} + v_{орб}^2} \approx 45 \text{ км/с,} \quad (4.68)$$

т.е. всего лишь в полтора раза больше орбитальной скорости Земли! Поэтому относительно Земли ракете нужно сообщить скорость $v = v_{III} - v_{орб} \approx 15 \text{ км/с}$, если ее запускать по направлению орбитальной скорости планеты. Точно так же

при запуске спутников Земли можно использовать скорость вращения Земли вокруг своей оси:

$$v_3 = \omega_{\text{зв}} \cdot R_3 = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600 \text{ с}} \cdot 6378 \text{ км} \approx 0,5 \text{ км/с.}$$

Первая космическая скорость существенна при запуске спутников Земли, вторая – межпланетных и межзвездных кораблей.

Как же вывести спутник на околоземную орбиту? Ясно, что одним толчком (баллистическая ракета) это невозможно – ракета, пройдя по эллиптической траектории, врежется в Землю. Нужно, как минимум, две точки работы двигателя – начальный разгон и "посадка" на орбиту (рис. 4.10). Со старта ракета уходит со скоростью \vec{v}_0 по эллиптической орбите, апогей которой касается круговой орбиты. В апогее, где скорость ракеты минимальна, включается двигатель последней ступени ускорения и скорость доводится до $v_1 \approx 8 \text{ км/с}$. Для возвращения на Землю требуется обратное действие – торможение.

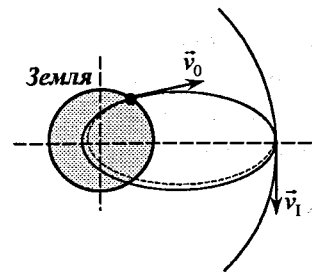


Рис. 4.10. Схема запуска спутника Земли

Задача 4.4. Как стыковать два космических корабля, находящихся на одной и той же круговой околоземной орбите?

Спрашивается, как корабль А может догнать корабль В, используя минимальное количество (т.е. два!) включений двигателя, если вначале оба корабля двигались по круговой орбите радиуса R ? Пусть угловое расстояние между кораблями $\Delta\varphi$. Очевидно, кораблю А требуется несколько большая угловая скорость. А для этого его нужно ускорить, т.е. перевести на эллиптическую орбиту (рис. 4.11), такую, что через некоторое время τ оба корабля сойдутся в

одной и той же точке. В простейшем варианте ею является исходная точка нахождения корабля А. Это означает, что

$$\tau = nT_A = \frac{2\pi m - \Delta\varphi}{\omega_B},$$

где n и m – целые. Подставляя сюда значение T_A (4.62) и принимая $v_B = v_1$, найдем

$$v_A = \left(\frac{n}{m - \frac{\Delta\varphi}{2\pi}} \right)^{1/3} \cdot v_1. \quad (4.69)$$

Ясно, что для любых $n, m \geq 1$ такое равенство можно удовлетворить. Конечно, минимальный расход топлива будет при $n = m \gg \Delta\varphi/2\pi$, когда

$$v_A - v_B \approx \frac{\Delta\varphi}{6\pi n} \cdot v_1.$$

При встрече кораблей в точке А скорость корабля А следует снизить до исходного значения $v_A^{\text{нов}} = v_B \approx v_1$.

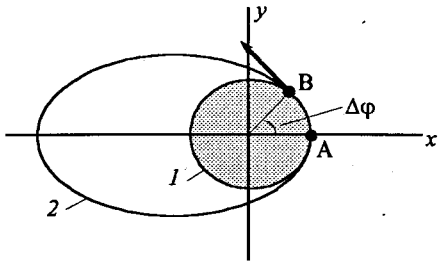


Рис. 4.11. Схема стыковки двух спутников Земли:
1 – исходная орбита, 2 – орбита догоняющего корабля А

ГЛАВА 5. СТОЛКНОВЕНИЯ И РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЦ

§ 5.1. Упругие столкновения

Рассмотрим упругое столкновение двух частиц. В таких столкновениях сохраняются суммарные импульс и энергия сталкивающихся частиц:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2,$$

$$E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2.$$

Частный случай, когда частица 2 до столкновения покоится, является, на самом деле, достаточно общим: к нему всегда можно свести задачу, перейдя в систему частицы 2. Поэтому ограничимся этим случаем.

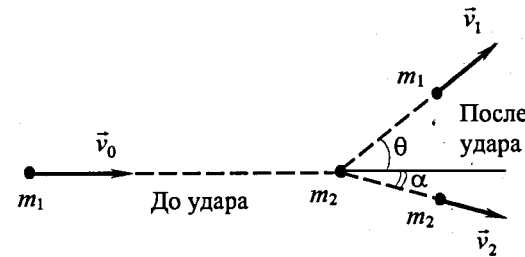


Рис. 5.1. Схема столкновения (соударения) двух частиц

Запишем закон сохранения для проекций импульса на направление начальной скорости и перпендикулярное к ней (рис. 5.1):

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 \cos \theta + m_2 v_2 \cos \alpha,$$

$$0 = m_1 v_1 \sin \theta - m_2 v_2 \sin \alpha$$

– и закон сохранения энергии

$$\frac{m v_0^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \quad (5.1)$$

Подчеркнем, что все три скорости v_1, v_2, v_0 здесь – положительные величины, модули векторов скоростей. Направления векторов \vec{v}_1, \vec{v}_2 определяются

значениями углов θ и α . Сами векторы скоростей лежат в одной плоскости, что также следует из закона сохранения импульса. Обозначив отношение масс частиц

$$\xi = m_1/m_2, \quad (5.2)$$

запишем (5.1) в виде

$$\begin{aligned} v_1 \cos \theta + \xi v_2 \cos \alpha &= v_0, \\ v_1 \sin \theta - \xi v_2 \sin \alpha &= 0, \\ v_1^2 + \xi v_2^2 &= v_0^2. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь 4 неизвестных: v_1, v_2, θ, α — и 3 уравнения. Выразим 3 неизвестные величины через θ — угол рассеяния частицы 1. Чтобы найти зависимость угла θ от прицельного параметра ρ , нужно решить задачу о движении частицы с приведенной массой в силовом поле (см., например, §§ 5.2–5.4 ниже). Для заданного угла θ достаточно законов сохранения энергии-импульса, чтобы найти значения остальных параметров частиц после соударения. Перепишем (5.3) в виде

$$\begin{aligned} v_0 - v_1 \cos \theta &= \xi v_2 \cos \alpha, \\ v_1 \sin \theta &= \xi v_2 \sin \alpha \end{aligned} \quad (5.4)$$

и сложим квадраты этих равенств. Имеем

$$v_0^2 - 2v_0 v_1 \cos \theta + v_1^2 = \xi^2 v_2^2. \quad (5.5)$$

Вычтем отсюда третье из равенств (5.3), умноженное на ξ :

$$(v_0^2 - v_1^2 = \xi v_2^2) \times \xi.$$

Получим квадратное уравнение для v_1 :

$$v_1^2(1 + \xi) - 2v_1 v_0 \cos \theta + v_0^2(1 - \xi) = 0,$$

из которого следует

$$v_1 = v_0 \cdot \frac{|\cos \theta \pm \sqrt{\xi^2 - \sin^2 \theta}|}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{m_2}{m_1}. \quad (5.6)$$

Здесь знак модуля поставлен в соответствии с определением величин v_1 и v_2 как модулей \vec{v}_1 и \vec{v}_2 . Подставив (5.6) в (5.5), найдем

$$v_2 = v_0 \sqrt{\frac{2}{\xi} \cdot \frac{\sqrt{\xi + \sin^2 \theta} \mp \cos \theta \sqrt{\xi^2 - \sin^2 \theta}}{1 + \xi}}. \quad (5.7)$$

Эта величина всегда положительна, как только что отмечено. Поделив второе из равенств (5.4) на первое, получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_1 \sin \theta}{v_0 - v_1 \cos \theta}, \quad (5.8)$$

где $v_1(\theta)$ и $v_2(\theta)$ даны соотношениями (5.6) и (5.7). Тем самым задача рассеяния решена — через параметр θ . Осталось только выбрать знаки перед радикалами в (5.6), (5.7). Для этого еще раз напомним, что v_1, v_2 — модули векторов \vec{v}_1 и \vec{v}_2 . Поэтому имеется некоторая неопределенность в выборе знака. Чтобы ее снять, приходится рассмотреть процесс соударения в системе центра масс (СЦМ).

Скорость СЦМ в нашем случае есть (см. (4.17))

$$\vec{V}_c = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_0. \quad (5.9)$$

В СЦМ импульсы соударяющихся частиц равны по величине и противоположны по направлению (рис. 5.2). До удара

$$(\vec{p}_1)_c = m_1(\vec{v}_0 - \vec{V}_c) = \mu \vec{v}_0 = -(\vec{p}_2)_c, \quad (5.10)$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

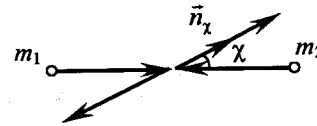


Рис. 5.2. Соударение двух частиц в системе центра масс

После удара в СЦМ эти векторы повернутся на угол рассеяния χ . Перейдя обратно в лабораторную систему, получим

$$\begin{aligned} \vec{p}'_1 &= \mu v_0 \vec{n}_\chi + m_1 \vec{V}_c = \mu v_0 \left(\vec{n}_\chi + \frac{\vec{n}_0}{\xi} \right), \\ \vec{p}'_2 &= -\mu v_0 \vec{n}_\chi + m_2 \vec{V}_c = \mu v_0 \left(-\vec{n}_\chi + \vec{n}_0 \right), \end{aligned} \quad (5.11)$$

где \vec{n}_x – единичный вектор вдоль направления рассеяния первой частицы, $\vec{n}_0 = \vec{v}_0/v_0$. Эти векторные суммы можно отобразить графически (рис. 5.3).

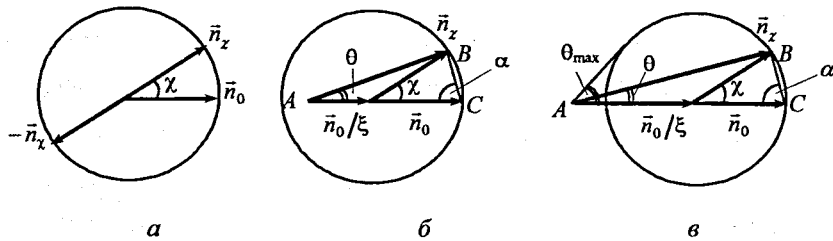


Рис. 5.3. Диаграммы расчета кинематики столкновения двух частиц в системе центра масс: а – положение единичных векторов до (\vec{n}_0) и после ($\pm\vec{n}_x$) рассеяния; б – $\xi > 1$ ($m_1 < m_2$); в – $\xi < 1$ ($m_1 > m_2$)

Из треугольников рис. 5.3 найдем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\theta &= \frac{\xi \sin \chi}{1 + \xi \cos \chi}, & \alpha &= \frac{\pi - \chi}{2}, \\ v_1 &= \frac{p'_1}{m_1} = \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2} \cdot |\overline{AB}| = \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\xi^2} + 1 - \frac{2 \cos(\pi - \chi)}{\xi}} = \\ &= \frac{v_0}{1 + \xi} \cdot \sqrt{1 + \xi^2 + 2\xi \cdot \cos \chi}, \\ v_2 &= \frac{p'_2}{m_2} = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} \cdot |\overline{BC}| = \frac{2v_0}{1 + \xi} \cdot \sin \frac{\chi}{2}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Теперь вернемся к анализу картины столкновения в лабораторной системе – соотношения (5.6) – (5.8) – и рассмотрим случаи возможных значений ξ .

1) $m_1 < m_2, \xi > 1$. Угол рассеяния может принимать значения

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \chi \leq \pi. \quad (5.13)$$

Теперь в выражении для v_2 (5.7) следует взять верхний знак “–”, и, соответственно, скорости частиц после удара равны

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 \frac{\cos \theta + \sqrt{\xi^2 - \sin^2 \theta}}{1 + \xi}, \\ v_2 &= v_0 \sqrt{\frac{2}{\xi}} \cdot \frac{\sqrt{\xi^2 - \sin^2 \theta} - \cos \theta \cdot \sqrt{\xi^2 - \sin^2 \theta}}{1 + \xi}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись рис. 5.3, б, приходим к выводу, что угол разлета частиц

$$\alpha + \theta > \frac{\pi}{2}, \quad \text{если } \xi > 1.$$

При центральном соударении $\chi = 0, \theta = \pi$, так что

$$(v_1)_{cent} = v_0 \frac{\xi - 1}{\xi + 1}, \quad (v_2)_{cent} = \frac{2v_0}{1 + \xi}. \quad (5.14)$$

При этом вектор \vec{v}_1 направлен назад, против \vec{v}_0 (отскок).

Если масса m_2 очень велика, так что $\xi \gg 1$ (удар о “стенку”), то

$$\begin{aligned} v_1 &\approx v_0 \left(1 - \frac{1 - \cos \theta}{\xi}\right), \quad v_2 \approx \frac{2v_0}{\xi} \cdot \sin \frac{\theta}{2}, \\ \operatorname{tg} \alpha &\approx \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \cdot \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) = \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\xi}\right), \\ \alpha &\approx \frac{\pi - \theta}{2}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Отсюда следует, что (с точностью до $1/\xi$) угол разлета частиц

$$\alpha + \theta = \frac{\pi + \theta}{2} > \frac{\pi}{2}. \quad (5.16)$$

2) $m_1 > m_2, \xi < 1$. В этом случае условие $v_1 > 0$ удовлетворяется при обоих знаках в (5.6), а угол θ не может превышать некоторое максимальное значение, при котором подкоренное выражение в (5.6) обращается в нуль:

$$\begin{aligned} \theta &\leq \theta_{\max} = \arcsin \xi < \frac{\pi}{2}, \\ 0 &\leq \chi \leq \pi. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Угол θ_{\max} соответствует на диаграмме (рис. 5.3, в) условию касания вектором \vec{AB} окружности. При этом

$$\chi(\theta_{\max}) \equiv \xi^* = \frac{\pi}{2} + \theta_{\max}. \quad (5.18)$$

Однако θ , как следует из рис. 5.3, в, достигнув при увеличении χ значения θ_{\max} , начинает уменьшаться. Нетрудно видеть, что в двух крайних случаях, когда $\theta=0$,

$$\left| \vec{AB} \right| = \frac{1}{\xi} + 1, \quad \chi = 0, \quad (5.19)$$

$$\left| \vec{AB} \right| = \frac{1}{\xi} - 1, \quad \chi = \pi.$$

Случай $\chi = \theta = 0$ соответствует отсутствию столкновения (частица m_1 пролетает сквозь частицу m_2), а случай $\chi = \pi, \theta = 0$ соответствует "лобовому" удару. Тем самым выясняется смысл неоднозначности решения (5.6) при $\xi < 1$:

$$v_1 = \frac{v_0}{1+\xi} \times \begin{cases} \cos\theta + \sqrt{\xi^2 - \sin^2\theta}, & 0 \leq \chi \leq \chi^*, \\ \cos\theta - \sqrt{\xi^2 - \sin^2\theta}, & \chi^* \leq \chi \leq \pi. \end{cases} \quad (5.20)$$

Аналогично (5.14) из рис. 5.3, в найдем

$$\alpha + \theta < \pi/2, \quad \text{если } \xi < 1. \quad (5.21)$$

С точки зрения наблюдателя в лабораторной системе действительно при одном и том же угле рассеяния θ могут наблюдаться частицы с большими (знак "+") и малыми (знак "-") значениями v_1 .

В случае очень тяжелой налетающей частицы, когда $\xi \ll 1$, имеем

$$\begin{aligned} \theta_{\max} &\approx \xi, \quad \chi^* \approx \frac{\pi}{2} + \xi, \\ v_1 &\approx v_0 \left(1 - \xi \pm \sqrt{\xi^2 - \theta^2} \right) \sim v_0, \\ v_2 &\approx v_0 \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 \mp \sqrt{1 - \frac{\theta^2}{\xi^2}}} \cdot (1 - \xi). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Последний результат ($v_2 \leq 2v_0$) имеет простой физический смысл: это отражение частицы 2 от частицы 1 – "стенки", движущейся со скоростью v_0 .

Последний результат ($v_2 \leq 2v_0$) имеет простой физический смысл: это отражение частицы 2 от частицы 1 – "стенки", движущейся со скоростью v_0 .

Наконец, отметим, что при $\chi \sim \theta \ll \xi$ скорость $v_1 \approx v_0$ и $\text{tg}\alpha \sim 1/\theta \gg 1$, см. (5.8), т.е. $\alpha \sim \pi/2$ – покоящаяся легкая частица после удара отскакивает под углом 90° . Это явление известно в физике столкновений заряженных частиц – так называемые "дельта-электроны", возникающие вдоль следа тяжелой ионизирующей частицы в среде.

3) $m_1 = m_2, \xi = 1$. Из (5.12) имеем

$$\theta = \frac{\chi}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi - \chi}{2}, \quad \theta + \alpha = \frac{\pi}{2}. \quad (5.23)$$

Устремив $\xi \rightarrow 1$ при $\xi > 1$, из (5.13) и (5.7) при верхнем знаке найдем

$$v_1 = v_0 \cos\theta, \quad v_2 = v_0 \sin\theta. \quad (5.24)$$

Этот же результат нужно получить и в случае $\xi \rightarrow 1$ из области $\xi < 1$. Для этих значений ξ

$$\theta_{\max} \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \chi^* \rightarrow \pi, \quad (5.25)$$

что означает исчезновение области значений $\chi > \chi^*$. Значит, если $\xi \rightarrow 1$ при $\xi < 1$, из двух решений остается первое, которое в пределе дает тот же результат (5.24).

4) Лобовой удар еще проще рассмотреть в СЦМ – это случай $\chi = \pi$. Из (5.11) найдем ($\vec{n}_\chi = -\vec{n}_0$):

$$\vec{v}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{v}_0, \quad \vec{v}_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{v}_0. \quad (5.26)$$

В частности,

$$v_1 = 0, \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_0, \quad \text{если } m_1 = m_2 \quad (5.27)$$

– частицы равной массы "обмениваются скоростями".

Последний результат позволяет дать простое описание упругого столкновения шаров равной массы (рис. 5.4). Удар передается вдоль прямой,

соединяющей центры. При этом компонента скорости 1-го шара вдоль этой прямой передается 2-му шару, а ортогональная этой прямой компонента (касательная к поверхности шара) сохраняется. Получаем точно результат (5.24).

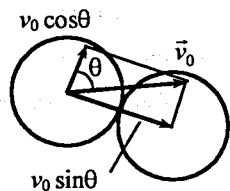


Рис. 5.4. Схема столкновения шаров равной массы

§ 5.2. Рассеяние частиц

Постановка задачи: частица приходит из бесконечности и уходит в бесконечность, провзаимодействовав с неподвижным силовым центром. Это задача двух тел, сведенная к задаче о движении тела с приведенной массой в поле центральных сил. Результирующее отклонение вектора скорости (импульса) частицы в бесконечности на некоторый угол θ (рис. 5.5) называется *рассеянием* на данный угол.

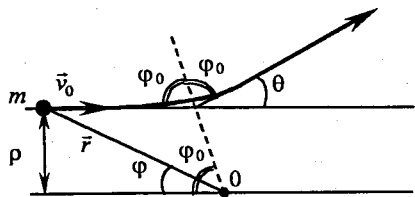


Рис. 5.5. Рассеяние частиц на силовом центре

Введем, как и в §§ 1.1 и 4.3, полярную систему координат (r, φ) . Связь между углом рассеяния θ и полным изменением угловой координаты следует из рис. 5.5:

$$2\varphi_0 + \theta = \pi. \quad (5.28)$$

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m(\varepsilon - V(r)) - \frac{M^2}{r^2}}}, \quad (5.29)$$

где r_{\min} – корень уравнения, которое запишем, используя закон сохранения энергии в поле центральных сил и учтя, что в точке $r = r_{\min}$ радиальная компонента скорости обращается в нуль ($\dot{r} = 0$):

$$E = V(r_{\min}) + \frac{M^2}{2mr_{\min}^2}. \quad (5.30)$$

Введем *прицельный параметр* ρ (рис. 5.5) – расстояние между прямыми, параллельными вектору скорости при $r = \infty$, $\varphi = 0$, одна из которых проходит через частицу, а другая – через силовой центр. Тогда

$$M = mv_0\rho, \quad E = \frac{mv_0^2}{2}, \quad (5.31)$$

и равенство (5.29) можно переписать в виде

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{V(r)}{E} - \frac{\rho^2}{r^2}}}. \quad (5.32)$$

Поток частиц через кольцо $\rho + \rho + d\rho$ равен

$$d\left(\frac{dN}{dt}\right) = j2\pi\rho d\rho \equiv jd\sigma,$$

где $j = nv_0$ – плотность потока при $r = \infty$; $\varphi = 0$. Величина

$$d\sigma = \frac{1}{j} \cdot d\left(\frac{dN}{dt}\right) \quad (5.33)$$

называется *дифференциальным сечением рассеяния* и численно равна площади кольца радиуса ρ и толщины $d\rho$:

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho = 2\pi\rho \cdot \left|\frac{d\rho(\theta)}{d\theta}\right| \cdot d\theta = \frac{\rho}{\sin\theta} \cdot \left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| \cdot d\Omega, \quad (5.34)$$

где $d\Omega = 2\pi \sin \theta \cdot d\theta$ – элемент телесного угла. Из (5.28), (5.30) и (5.32) следует, что φ_0 и, соответственно, θ зависят от прицельного параметра ρ :

$$\theta = \pi - 2\varphi_0(r_{\min}) = \theta(\rho) \quad \text{т.к.} \quad r_{\min} = r_{\min}(\rho).$$

Найдя $\varphi_0(r_{\min})$ из (5.32) и $r_{\min}(\rho)$ из (5.30), получим функцию $\theta(\rho)$, а из нее функцию $\rho(\theta)$. Тем самым будет решена задача нахождения $d\sigma(\theta)$. Дифференциальное сечение $d\sigma$ показывает, какая доля частиц из налетающего потока рассеивается на угол θ .

Задача 5.1. Найти сечение рассеяния на абсолютно упругом тяжелом шаре (рис. 5.6).

Используя рис. 5.6, запишем

$$\rho = R \sin \varphi_0 = R \cos \frac{\theta}{2}.$$

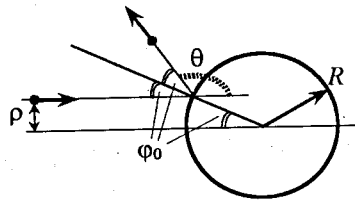


Рис. 5.6. Рассеяние на упругом тяжелом шаре

Тогда, согласно (5.34),

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\rho}{\sin \theta} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| = \frac{R^2}{\sin \theta} \cdot \frac{\cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}}{2} = \frac{\rho^2}{4}, \quad \rho \leq R. \quad (5.35)$$

Тот же результат следует из (5.32), если учесть, что

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

Тогда

$$\varphi_0 = \int_R^\infty \frac{\rho \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}}} = -\arcsin \frac{\rho}{r} \Big|_R^\infty = \arcsin \frac{\rho}{R}.$$

Отсюда $\rho = R \sin \varphi_0$, и приходим к (5.35).

Интегральное (полное) сечение рассеяния, очевидно, есть

$$\sigma = 2\pi \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \rho d\rho. \quad (5.36)$$

В случае тяжелого упругого шара получим $\sigma = 2\pi R^2$, что и следовало ожидать: доля частиц, вырезаемых из потока, равна площади поперечного сечения шара. Этот же результат справедлив для любого рассеивателя ограниченных размеров: если $\rho \leq \rho_{\max}$, то $\sigma = \pi \rho_{\max}^2$ – площадь круга радиуса ρ_{\max} . Если же $\rho_{\max} \rightarrow \infty$, то говорят, что сечение расходится:

$$\sigma \rightarrow \infty.$$

§ 5.3. Задача Резерфорда

Рассмотрим рассеяние частиц в поле

$$V(r) = \frac{\alpha}{r}. \quad (5.37)$$

В этом случае из (5.32) найдем

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^\infty \frac{\rho \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{Er} - \frac{\rho^2}{r^2}}} = - \int_x^0 \frac{dx}{\sqrt{1 + A^2 - (x + A)^2}}, \quad (5.38)$$

$$x = \rho/r, \quad A = \frac{\alpha}{2E\rho}.$$

Отсюда

$$\varphi_0 = \arccos \frac{x + A}{\sqrt{1 + A^2}} \Big|_{x_{\max}}^0 = \arccos \frac{A}{\sqrt{1 + A^2}} - \arccos \frac{x_{\max} + A}{\sqrt{1 + A^2}}.$$

Значение x_{\max} найдем из условия равенства нулю подкоренного выражения в (5.38):

$$1 + A^2 - (x_{\max} + A)^2 = 0,$$

что дает

$$x_{\max} = \sqrt{1+A^2} - A \quad \text{и} \quad \arccos \frac{x_{\max} + A}{\sqrt{1+A^2}} = \arccos 1 \equiv 0.$$

Поэтому

$$\varphi_0 = \arccos \frac{A}{\sqrt{1+A^2}}, \quad \cos \varphi_0 = \frac{A}{\sqrt{1+A^2}}, \quad \operatorname{ctg} \varphi_0 = A = \frac{\alpha}{2E\rho},$$

или, с учетом (5.28),

$$\rho = \frac{\alpha}{2E} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}. \quad (5.39)$$

Подставив этот результат в (5.34), получим так называемую *формулу Резерфорда*:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{4E}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (5.40)$$

При $\theta \ll 1$ эта формула дает

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \left(\frac{\alpha}{E}\right)^2 \cdot \frac{1}{\theta^4}, \quad (5.41)$$

т.е. резерфордово сечение расходится при малых углах рассеяния (рис. 5.7).

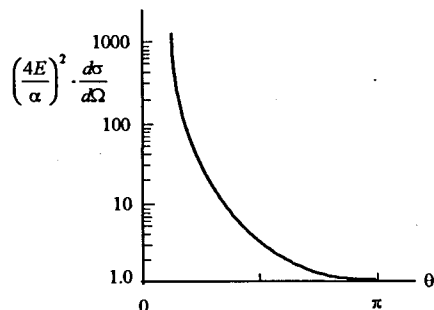


Рис. 5.7. Зависимость резерфордова сечения от угла рассеяния

Зависимость дифференциального сечения рассеяния от угла рассеяния θ (5.40), (5.41) указывает на точечный характер рассеивающего объекта. Именно такая зависимость была обнаружена в знаменитом опыте Резерфорда (1911 г.), где изучалось рассеяние α -частиц, испускаемых радиоактивным источником, на очень тонкой золотой фольге (рис. 5.8). Из полного изотропного потока α -частиц,

покидающих источник, трубкой-коллиматором вырезался тонкий пучок. В фольге α -частицы рассеивались и попадали на люминесцентный экран, где вспыхивали "точки", свидетельствовавшие о попадании α -частиц. Экспериментатор визуально измерял зависимость числа частиц от угловой координаты, т.е. распределение прошедших частиц по углу рассеяния (рис. 5.8). Согласно $N(\theta)$ с формулой (5.40) позволило Резерфорду сделать вывод о малом размере атомного ядра и предложить планетарную структуру атома. В опытах Резерфорда α -частицы имели энергию около 100 кэВ, массы атома золота и α -частицы соответственно равны

$$M_{Au} = 197 \text{ а.е.м.}, \quad m_{\alpha} = 4 \text{ а.е.м.},$$

так что приведенная масса $\mu \approx m_{\alpha}$.

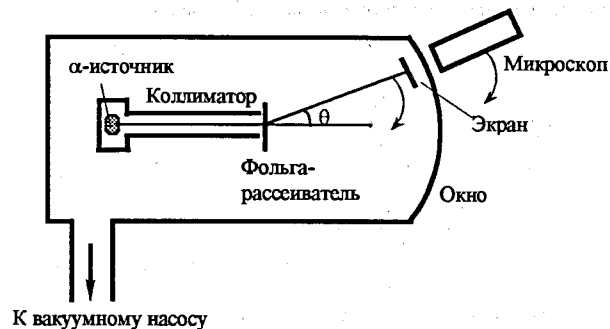


Рис. 5.8. Схема опыта Резерфорда

§ 5.4. Рассеяние на малые углы

Задачу Резерфорда можно решить приближенно, не прибегая к громоздкому интегрированию, если ограничиться областью малых углов рассеяния. Поперечный импульс, набранный за время похождения мимо центра, есть

$$p_{\perp} = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\perp}(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\perp}(z) \cdot \frac{dz}{v(z)} \sim F(\rho) \cdot \frac{2\rho}{v_0},$$

где z — координата вдоль вектора \vec{v}_0 ; ρ — прицельный параметр (см. рис. 5.4).

Тогда угол рассеяния

$$\theta \sim \frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}} = \frac{F(\rho)}{p_{\parallel}} \cdot \frac{2\rho}{v_0} = \frac{\rho F(\rho)}{E}, \quad (5.42)$$

а дифференциальное сечение

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\rho}{\sin \theta} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| \sim \frac{\rho}{\theta} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right|, \quad \theta \ll 1. \quad (5.43)$$

Подставляя $d\theta/d\rho$ из (5.42) в (5.43), получим $d\sigma/d\Omega$ для области малых углов рассеяния $\theta \ll 1$.

Задача 4.2. Найти сечение малоуглового рассеяния частиц на поле с потенциалом

$$V(r) = \frac{\alpha_n}{r^n}.$$

Подставив $F(r) = -\frac{dV}{dr} = \frac{n\alpha_n}{r^{n+1}}$ в (5.42), найдем

$$\theta \sim \frac{n\alpha_n}{E\rho^n}, \quad \frac{d\theta}{d\rho} = -\frac{n^2\alpha_n}{E\rho^{n+1}},$$

откуда

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{n} \left(\frac{n\alpha_n}{E} \right)^{2/n} \cdot \theta^{-2(1+\frac{1}{n})}.$$

При $n=1$ приходим к формуле Резерфорда для малых углов (5.41).

§ 5.5. Сечение и мишень. Длина свободного пробега

Пусть поток частиц интенсивностью \dot{N} частиц/с движется в рассеивающей среде плотностью n_0 частиц/см³ (рис. 5.9). Найдем закон, по которому изменяется интенсивность потока, считая, что рассеянные частицы выбывают из потока.

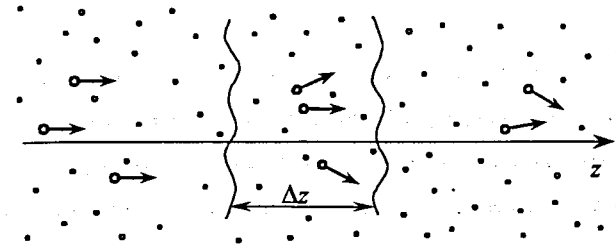


Рис. 5.9. Рассеяние потока частиц в среде

В слое среды, толщина которого Δz , а площадь поперечного сечения S равна площади поперечного сечения потока, содержатся N_0 рассеивающих частиц:

$$N_0 = n_0 \cdot \Delta z \cdot S. \quad (5.44)$$

При прохождении потока через слой Δz рассеяние испытают частицы, число которых равно (см. (5.36))

$$\Delta N_{\text{расс}} = \frac{\sigma N_0}{S} \cdot \dot{N} = \sigma \frac{\dot{N}}{S} \cdot n_0 \cdot \Delta z \cdot S, \quad \text{т.е.} \quad \frac{d\dot{N}}{dz} = -\sigma n_0 \dot{N}. \quad (5.45)$$

Проще всего объяснить эти формулы "геометрически": из потока частиц \dot{N} рассеивается доля, пропорциональная суммарной площади рассеивателей, т.е. каждый рассеиватель заменяем кружком площади σ .

Из (5.45) имеем закон убывания интенсивности потока:

$$\dot{N}(z) = \dot{N}(0) \cdot e^{-z/\lambda}, \quad \lambda = \frac{1}{\sigma n_0}. \quad (5.46)$$

Величина λ называется *длиной свободного пробега* частиц потока в рассеивающей среде.

ГЛАВА 6. КОЛЕБАНИЯ В МЕХАНИКЕ ЧАСТИЦЫ

Колебания – важный класс физических процессов, в которых физическая система периодически, т.е. через некоторые промежутки времени, именуемые *периодом колебаний*, приходит в одно и то же состояние, причем это утверждение справедливо для любого из возможных состояний системы. Простейший вид такого движения – колебания частицы в механике, рассматриваемые в данной главе.

Строго говоря, следует отличать колебательное движение от циклического, как, например, колебания простейшего маятника – шарика, подвешенного на веревочке, от вращения этого шарика вокруг точки подвески при сообщении ему достаточно высокой скорости. Признаками колебательного движения являются *ограниченность отклонения* системы от положения равновесия и периодическое изменение знака (направления) скорости. Кроме того, величина периода может изменяться со временем. Все это мы подробнее рассмотрим в этой главе, ограничившись, в основном, случаем *одномерного движения*.

§ 6.1. Свободные колебания

Рассмотрим движение частицы под действием силы $F(x)$, представленной на рис. 6.1. Пусть в точках x_0 и x_1 сила $F(x)$ обращается в нуль, причем

$$\left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x_0} < 0, \quad \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x_1} > 0. \quad (6.1)$$

В общем случае можно разложить функцию $F(x)$ в ряд вблизи произвольной точки x^* :

$$F(x) = F(x^*) + \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x^*} \cdot (x - x^*) + \dots \quad (6.2)$$

Если $x^* = x_0$, то

$$F(x_0) = 0, \quad \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x_0} \equiv -k < 0 \quad (k > 0).$$

Здесь мы ввели обозначение для производной силы по координате, что позволяет вблизи точки x_0 записать

$$F(x) \approx -k(x - x_0). \quad (6.3)$$

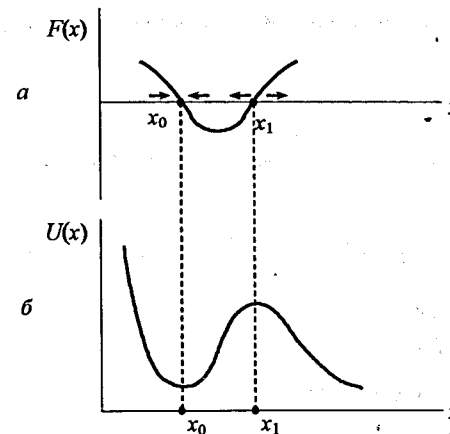


Рис. 6.1. График силы (а) и потенциальной энергии (б)

В этом приближении сила линейно изменяется с координатой, поэтому система "частица + сила" называется "*линейный осциллятор*" (от лат. *oscillo* – качаться). Коэффициент k будем называть *жесткостью осциллятора* (по аналогии с жесткостью пружины).

Нетрудно сообразить, что точки x_0 и x_1 – положения равновесия системы: частица, помещенная в одну из этих точек и лишенная скорости, будет в этой точке покоиться ($F(x_0) = F(x_1) = 0$). Однако поведение частицы вблизи этих точек принципиально отличается. Частица, выведенная из положения равновесия x_0 , вернется в него, т.к. сила имеет здесь "возвращающий" характер:

$$F(x) > 0 \quad \text{при} \quad x < x_0$$

$$\text{и} \quad F(x) < 0 \quad \text{при} \quad x > x_0.$$

Это и есть *условие устойчивого равновесия*. Его можно записать также через производные силы и потенциальной энергии:

$$-\left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x_0} = \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=x_0} > 0. \quad (6.4)$$

Обратная ситуация (и обратные неравенства) имеет место вблизи точки x_1 . Сила здесь уводит частицу от положения равновесия – такое *равновесие неустойчивое*.

Уравнение движения вблизи x_0 получим с учетом выражения для силы из (6.2):

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0). \quad (6.5)$$

Точка над x , как и всегда, обозначает производную по времени. Полученное уравнение удобно записать в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x - x_0) = 0, \quad (6.6)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (6.7)$$

Его принято называть *уравнением линейного осциллятора*.

Проинтегрируем (6.6) "в лоб", положив $x_0 = 0$ (для простоты) и повторяя, фактически, вывод формулы (4.6). Умножив на \dot{x} и проинтегрировав, найдем

$$\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2 = C,$$

где C – неизвестная константа. Отсюда

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{C - \omega_0^2 x^2}.$$

Второй интеграл получим, записав

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{C - \omega_0^2 x^2}} = \frac{1}{\omega_0} \arcsin \frac{\omega_0 x}{\sqrt{C}} + B,$$

где B – также неизвестная (пока) константа. Перепишем это выражение в виде

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t, \quad (6.8)$$

где A , φ и a , b – переобозначенные пары констант. Результат (6.8) показывает, что решение уравнения (6.6) следует искать в виде

$$x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t + C. \quad (6.9)$$

Подставим (6.9) в (6.6), найдем

$$-\omega^2(a \cos \omega t + b \sin \omega t) + \omega_0^2(a \cos \omega t + b \sin \omega t) + \omega_0^2 C - \omega_0^2 x_0 = 0.$$

Отсюда

$$\omega^2 = \omega_0^2, \quad C = x_0,$$

где ω_0 – *частота колебаний*, которая связана с коэффициентом k и массой частицы формулой (6.7).

Итак,

$$x(t) = x_0 + a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t. \quad (6.10)$$

Константы a , b найдем из начальных условий:

$$\text{при } t=0 \quad x = x_n, \quad \dot{x} = v_n;$$

отсюда

$$x_n = x_0 + a, \quad \dot{v}_n = \omega_0 b.$$

В итоге

$$x(t) = x_0 + (x_n - x_0) \cos \omega_0 t + \frac{v_n}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (6.11)$$

Другая форма записи решения:

$$x(t) = x_0 + A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (6.12)$$

$$A = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + \frac{v_n^2}{\omega_0^2}}, \quad \text{tg} \varphi = \frac{v_n}{\omega_0 x_n}.$$

Подчеркнем, что при анализе движения линейного осциллятора мы ограничились первым членом разложения силы по координатам (6.3). Отсюда ещё одно название колебаний, которые хорошо описываются формулами (6.11), (6.12) – *малые колебания*. Кроме того, такие колебания и такие осцилляторы называют гармоническими (от греч. *harmonikos* – созвучный стройный) – это колебания, в которых отклонение осциллятора от положения равновесия изменяется со временем по закону синуса. И наконец, укажем ещё на одну особенность решения (6.11), (6.12) – это колебания с одной определенной частотой ω_0 . Такие колебания называют также *изохронными* (от греч. *isos* – равный, *chronos* –

время). Их важное свойство, как видно из (6.12), – частота колебаний не зависит от начальных условий, т.е. от амплитуды колебаний (сравни с § 6.8 ниже).

Задача 6.1. Найти решение (6.12) для маятника – шарик массы m подвешен на нити длиной ℓ (рис. 6.2), длина нити много больше радиуса шарика.

Записав выражение для суммы сил веса и натяжения, действующих на шарик,

$$F_t = -mg \sin \varphi \approx -mg\varphi, \quad \varphi \ll 1,$$

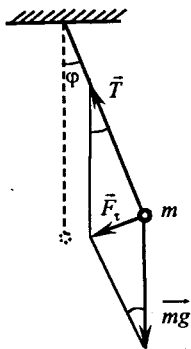


Рис. 6.2. Маятник

и его ускорения

$$a_t = \ddot{\varphi} \ell,$$

придем к уравнению малых колебаний шарика по углу φ :

$$m\ddot{\varphi} \ell = -mg\varphi,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

Отсюда найдем

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Константы φ_0, α определяются начальными условиями.

Задача 6.2. Описать движение шарика на пружинном подвесе (рис. 6.3).

Пусть x – смещение шарика от положения, в котором сила тяжести уравновешена силой натяжения пружины, когда шарик покоится.

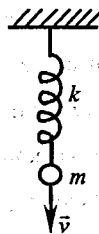


Рис. 6.3. "Пружинный осциллятор"

Тогда уравнение малых колебаний имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx.$$

Отсюда

$$x(t) = x(0) \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Выпишем основные характеристики свободного осциллятора.

Частота и период колебаний:

$$\Delta\varphi(T) = \omega_0 T = 2\pi, \quad \text{откуда } T = 2\pi/\omega_0.$$

Фаза колебаний:

$$\varphi = \omega_0 t.$$

Амплитуда:

$$A = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + \frac{\dot{x}_n^2}{\omega_0^2}}, \quad \varphi = \omega_0 t,$$

её величина определяется начальными значениями отклонения x_n и скорости \dot{x}_n частицы.

Энергия осциллятора: для случая $x_0 = 0$ найдем значения кинетической $W(x)$ и потенциальной $U(x)$ энергий:

$$W(x) = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{m}{2} \left(-x_n \sin \omega_0 t + \frac{v_n}{\omega_0} \cos \omega_0 t \right)^2 \cdot \omega_0^2 \equiv W(t), \quad (6.13)$$

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2}{2} \left(x_n \cos \omega_0 t + \frac{v_n}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right)^2 \equiv U(t). \quad (6.14)$$

Отметим, что уравнение (6.6) и все последующие результаты сводятся к случаю $x_0 = 0$ простой заменой переменной: $y = x - x_0$. Физический смысл этого преобразования достаточно прост – теперь мы отсчитываем координату частицы от положения равновесия x_0 . Из (6.14) следует, что сумма кинетической и потенциальной энергий осциллятора постоянна – это интеграл движения (что очевидно из закона сохранения энергии). То же самое дает прямое суммирование (6.13) и (6.14):

$$W(x) + U(x) = \frac{m\omega_0^2}{2} \left(x^2 + \frac{v^2}{\omega_0^2} \right) = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} = E = \text{const.} \quad (6.15)$$

Отметим, что максимальные значения $W(x)$ и $U(x)$ также равны полной энергии осциллятора:

$$W_{\max} = U_{\max} = E. \quad (6.16)$$

В этом легко убедиться, подставив в (6.13) выражения для \dot{x} и x в форме (6.12). Таким образом, при колебаниях линейного осциллятора его кинетическая энергия "перекачивается" в потенциальную, и обратно.

§ 6.2. Свободные колебания в системе с трением

Рассмотрим поведение осциллятора, в котором действует сила трения, пропорциональная скорости "маятника":

$$F_{\text{тр}} = -\alpha v = -\alpha \dot{x}. \quad (6.17)$$

Это первый член разложения функции $F_{\text{тр}}(v)$ по скорости. Можно в данном случае считать, что $F_{\text{тр}}(0) = 0$ – сила трения покоя. На самом деле, сила трения покоя – величина неопределенная, имеющая любое значение в интервале $0 \div F_{\text{max}}$. При $F_{\text{внешн}} > F_{\text{max}}$ тело сдвигается, трение покоя "срывается" (см. задачу 1.2). Конечно, выбранное приближение (6.17) – грубая модель взаимодействия со средой. Возможны, к тому же, случаи, когда следующий член разложения силы в (6.17), пропорциональный квадрату скорости, становится существенным

(см. § 9.6 и задачу 9.8). Кроме того, сила трения отличается ещё и наличием больших *флуктуаций* (от лат. *fluctuatio* – колебание) – случайных отклонений величины силы от её среднего значения. Особенно ясно это можно видеть на примере трения, возникающего при скольжении твердого тела по поверхности другого.

Уравнение линейного осциллятора с трением можно тогда записать в виде

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x},$$

или

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad 2\lambda \equiv \frac{\alpha}{m}. \quad (6.18)$$

При $\lambda \rightarrow 0$ решение этого уравнения имеет вид (6.11): $x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$.

Если $\lambda \neq 0$, то удобнее использовать решение в комплексной форме. Напомним основные соотношения для комплексных чисел:

$$x = u + iv, \quad |x| = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad x = |x| \cdot e^{i\psi}, \quad \text{tg} \psi = v/u, \quad e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha.$$

Физическое решение есть действительная часть комплексного решения:

$$\text{Re } x = |x| \cos \psi.$$

Переходя теперь к комплексной форме, запишем искомое решение в виде

$$x(t) = \frac{a}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + \frac{b}{2} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) = \frac{a+b}{2} \cdot e^{i\omega t} + \frac{a-b}{2} \cdot e^{-i\omega t}.$$

Поэтому при $\lambda \neq 0$ можно попытаться найти решение в виде

$$x(t) = \tilde{A} e^{\kappa t}, \quad (6.19)$$

где \tilde{A}, κ – неизвестные и, вообще говоря, комплексные постоянные. После подстановки (6.19) в уравнение (6.18) имеем

$$(\kappa^2 + 2\lambda\kappa + \omega_0^2) \tilde{A} e^{\kappa t} = 0,$$

откуда

$$\kappa_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \equiv -\lambda \pm i\omega, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}. \quad (6.20)$$

Если $\lambda < \omega_0$, то $\omega^2 \equiv \omega_0^2 - \lambda^2 > 0$ – действительная величина. В этом случае имеем

$$x(t) = e^{-\lambda t} (\tilde{A}e^{i\omega t} + \tilde{B}e^{-i\omega t}) = e^{-\lambda t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t). \quad (6.21)$$

Вычислив константы А и В из начальных условий (сравни (6.11) выше), получим

$$x(t) = \left(x_n \cos \omega t + \frac{v_n}{\omega} \sin \omega t \right) \cdot e^{-\lambda t}. \quad (6.22)$$

Пример поведения осциллятора с трением для случая $v_n=0$, $x_n \neq 0$ показан на рис. 6.4. За время $\tau=1/\lambda$ амплитуда колебаний спадает в e раз. Величину λ называют *декрементом затухания колебаний* (от лат. *decrementum* – уменьшение), параметр τ – *время релаксации* (от лат. *relaxatio* – ослабление), или затухания колебаний.

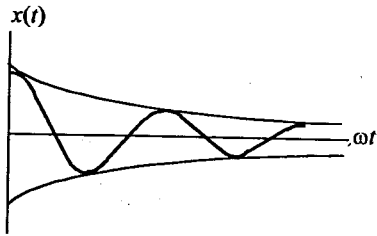


Рис. 6.4. Поведение осциллятора с трением ($\dot{x}_n = 0$). Жирная линия – затухающие колебания $x(t)$, тонкие линии – огибающие $e^{-\lambda t}$

Рассмотрим баланс энергии в затухающих колебаниях. Обозначив $\varphi = \omega t$, запишем

$$W(x) = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{m}{2} \left\{ -\lambda \left(x_n \cos \varphi + \frac{v_n}{\omega} \sin \varphi \right) + \omega \left(-x_n \sin \varphi + \frac{v_n}{\omega} \cos \varphi \right) \right\}^2 \cdot e^{-2\lambda t},$$

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2}{2} \left\{ x_n \cos \varphi + \frac{v_n}{\omega} \sin \varphi \right\}^2 \cdot e^{-2\lambda t}.$$

Ограничимся случаем *слабого трения*:

$$\lambda \ll \omega_0 \approx \omega. \quad (6.23)$$

Имеем

$$W(\varphi) \approx \frac{m\omega_0^2}{2} \left(-x_n \sin \varphi + \frac{v_n}{\omega_0} \cos \varphi \right)^2 \cdot e^{-2\lambda t},$$

$$U(\varphi) \approx \frac{m\omega_0^2}{2} \left(x_n \cos \varphi + \frac{v_n}{\omega_0} \sin \varphi \right)^2 \cdot e^{-2\lambda t}, \quad (6.24)$$

$$E(t) = W(\varphi) + U(\varphi) \approx \frac{m\omega_0^2 a_0^2}{2} \cdot e^{-2\lambda t} \equiv E_0 e^{-2\lambda t},$$

$$a_0^2 = x_n^2 + (v_n/\omega_0)^2.$$

Таким образом, при наличии трения энергия осциллятора уменьшается со временем с декрементом 2λ .

Мощность силы трения. Поскольку работа силы F на пути dx есть $dA = F \cdot dx$, то мощность, равная работе, совершаемой в единицу времени, есть

$$P_{\text{тр}} = \dot{A} = F_{\text{тр}} \dot{x} = -\alpha \dot{x}^2.$$

Подставив сюда (6.22), для случая слабого трения найдем

$$P_{\text{тр}} \approx -\alpha \omega_0^2 \left(x_n \sin \varphi + \frac{v_n}{\omega_0} \cos \varphi \right)^2 \cdot e^{-2\lambda t}, \quad \lambda \ll \omega_0.$$

Найдем среднее значение этой мощности за период. При этом учтем, что средние значения квадратов синуса и косинуса фазы за период равны

$$\overline{\sin^2 \varphi}^T = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega_0 t \cdot dt = \frac{1}{T\omega_0} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cdot d\varphi = \frac{1}{2},$$

$$\overline{\cos^2 \varphi}^T = \frac{1}{T\omega_0} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \cdot d\varphi = \frac{1}{2}, \quad \overline{2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi}^T = 0.$$

В результате получим

$$\overline{P_{\text{тр}}}^T = -\alpha \omega_0^2 \left(x_n^2 + \frac{v_n^2}{\omega_0^2} \right) \cdot \frac{1}{2} e^{-2\lambda t} = 2\lambda m \omega_0^2 \frac{a_0^2}{2} e^{-2\lambda t} = -2\lambda E_0 e^{-2\lambda t}, \quad (6.25)$$

т.е. (см. (6.24))

$$\overline{P_{\text{тр}}}^T = -\frac{dE}{dt}. \quad (6.26)$$

Таким образом, мощность силы трения расходуется на гашение энергии осциллятора.

§ 6.3. Связанные свободные колебания. Внутренний резонанс

Два примера связанных осцилляторов показаны на рис. 6.5 и 6.6 – это осцилляторы, которые могут обмениваться своей энергией через связь.

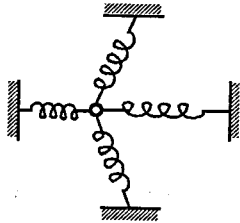


Рис. 6.5. Шарик, подвешенный на пружинах, – четыре, вообще говоря, связанных осциллятора

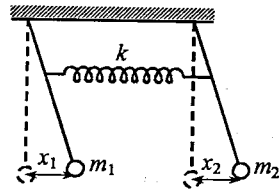


Рис. 6.6. Два связанных маятника

Рассмотрим движение двух маятников, связанных пружиной жесткости k (рис. 6.6). Запишем уравнения движения:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -m_1 g \frac{x_1}{\ell_1} - k(x_1 - x_2), \quad (6.27)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -m_2 g \frac{x_2}{\ell_2} - k(x_2 - x_1),$$

или

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \alpha_1 x_2, \quad \omega_{1,2}^2 = \frac{g}{\ell_{1,2}} + \frac{k}{m_{1,2}}, \quad (6.28)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = \alpha_2 x_1, \quad \alpha_{1,2} = \frac{k}{m_{1,2}}.$$

Ограничимся простейшим случаем одинаковых маятников:

$$m_1 = m_2 = m, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \quad \omega_1 = \omega_2 \equiv \omega_0.$$

Именно такой случай маятников с одинаковыми параметрами наиболее интересен: это так называемый *внутренний резонанс*, или *резонанс связи* (от лат. *resonans* – "дающий звук"). И будем искать решение системы уравнений (6.28) в виде

$$x_{1,2}(t) = A_{1,2} e^{i\omega t}. \quad (6.29)$$

Подставив (6.29) в (6.28), получим систему двух уравнений:

$$\begin{aligned} A_1(\kappa^2 + \omega_0^2) &= \alpha A_2, \\ A_2(\kappa^2 + \omega_0^2) &= \alpha A_1, \end{aligned} \quad (6.30)$$

которая имеет ненулевое решение, если её детерминант равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \kappa^2 + \omega_0^2 & \alpha \\ \alpha & \kappa^2 + \omega_0^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$\kappa^2 + \omega_0^2 = \pm \alpha, \quad \kappa = \pm i \sqrt{\omega_0^2 \mp \alpha}. \quad (6.31)$$

Обозначим

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 + \alpha}, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha}, \quad \alpha < \omega_0^2. \quad (6.32)$$

Решение (6.29) состоит из четырех слагаемых:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 e^{i\Omega t} + B_1 e^{-i\Omega t} + C_1 e^{i\omega t} + D_1 e^{-i\omega t} = \\ &= a_1 \cos \Omega t + b_1 \sin \Omega t + c_1 \cos \omega t + d_1 \sin \omega t, \end{aligned} \quad (6.33)$$

и аналогично для $x_2(t)$. Для нахождения констант используем начальные условия:

$$\begin{aligned} x_1'' &= a_1 + c_1, & \dot{x}_1'' &= \Omega b_1 + \omega d_1, \\ x_2'' &= a_2 + c_2, & \dot{x}_2'' &= \Omega b_2 + \omega d_2. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Где взять еще 4 уравнения? Подставим решения (6.33) в исходные уравнения и приравняем коэффициенты при \sin и \cos :

$$\begin{aligned} a_1(\omega_0^2 - \Omega^2) &= \alpha a_2, & b_1(\omega_0^2 - \Omega^2) &= \alpha b_2, \\ c_1(\omega_0^2 - \omega^2) &= \alpha c_2, & d_1(\omega_0^2 - \omega^2) &= \alpha d_2. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Эти 4 уравнения после подстановки значений Ω , ω дают:

$$\begin{aligned} a_1 &= -a_2 \equiv a, & b_1 &= -b_2 \equiv b, \\ c_1 &= c_2 \equiv c, & d_1 &= d_2 \equiv d. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Из (6.36) и (6.34) можно найти значения амплитуд через начальные координаты и скорости. В частности, если $x_1'' = x_0$, $\dot{x}_1'' = \dot{x}_2'' = 0$, $x_2'' = 0$, т.е. при $t=0$ первый маятник отклонен, а второй находится в положении равновесия, имеем:

$$\begin{aligned} a + c &= x_0, & \Omega b + \omega d &= 0, \\ -a + c &= 0, & -\Omega b + \omega d &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$a = c = x_0/2, \quad b = d = 0.$$

Решение для этого частного случая имеет вид

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{x_0}{2} (\cos \Omega t + \cos \omega t), \\ x_2(t) &= \frac{x_0}{2} (-\cos \Omega t + \cos \omega t). \end{aligned}$$

Этот результат особенно ясен в случае слабой связи: $\alpha \ll \omega_0^2$. Тогда $\Omega \approx \omega_0 + (\alpha/2\omega_0)$, $\omega \approx \omega_0 - (\alpha/2\omega_0)$, и решение принимает вид

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_0 \cos \omega_0 t \cdot \cos \frac{\alpha t}{2\omega_0}, \\ x_2(t) &= x_0 \sin \omega_0 t \cdot \sin \frac{\alpha t}{2\omega_0}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Получаем биения с частотой $\alpha/2\omega_0 \ll \omega_0$ (рис. 6.7). Отчётливо видно, как энергия колебаний одного маятника перекачивается в энергию колебаний другого. При этом сумма энергий маятников постоянна и равна

$$E = E_1 + E_2 = \frac{m\omega_0^2 x_0^2}{2}. \quad (6.38)$$

Такова характерная особенность резонанса связи: амплитуды колебаний маятника ограничены, т.к. ограничена энергия, запасённая в осцилляторах (сравни § 6.4).

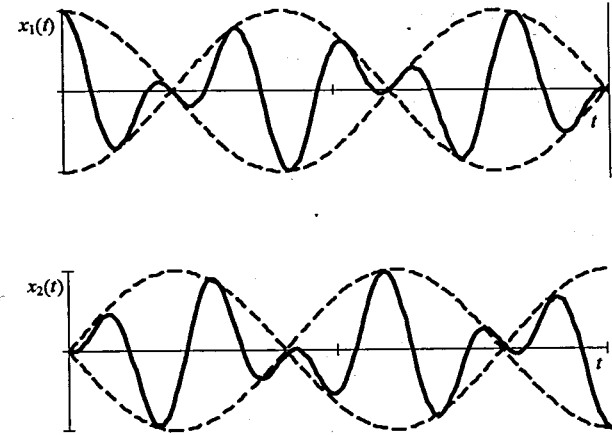


Рис. 6.7. Колебания (биения) связанных маятников

§ 6.4. Вынужденные колебания без трения. Внешний резонанс

Рассмотрим движение осциллятора под действием внешней периодической силы:

$$m\ddot{x} + kx = F(t) = F_0 \sin \Omega t. \quad (6.39)$$

Решение этого неоднородного дифференциального уравнения есть сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$x(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t + x_F(t). \quad (6.40)$$

В данном случае проще использовать решение в действительной форме. Два первых слагаемых в (6.40) описывают свободные колебания, амплитуда которых, как и прежде, определяется начальными условиями (см. (6.11) и (6.12)). Эти колебания затухнут со временем, если есть трение. Решение $x_F(t)$ ищем в виде

$$x(t) = a \sin(\Omega t + \Psi). \quad (6.41)$$

Почему Ω ? Из-за того, что $x_F(t)$ описывает вынужденное движение под действием внешней силы. Соответственно и частота изменения $x(t)$ совпадает с частотой вынуждающей силы. Переписав (6.39) в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t \quad (6.42)$$

и подставив в него (6.41), получим

$$-\Omega^2 a \sin(\Omega t + \Psi) + \omega_0^2 a \sin(\Omega t + \Psi) = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t.$$

Раскрыв $\sin(\Omega t + \Psi)$ и приравняв коэффициенты при $\sin \Omega t$ и при $\cos \Omega t$, имеем

$$\begin{aligned} -\Omega^2 a \cos \Psi + \omega_0^2 a \cos \Psi &= F_0/m, \\ -\Omega^2 a \sin \Psi + \omega_0^2 a \sin \Psi &= 0. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} a \cos \Psi &= \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)}, \\ a \sin \Psi \cdot (\omega_0^2 - \Omega^2) &= 0. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Возможны два случая.

1) $\Omega \neq \omega_0$. Тогда

$$\sin \Psi = 0, \quad \text{т.е. } \Psi = 0, \pm \pi.$$

Т.к. по определению амплитуда колебаний всегда положительна (не путать с отклонением!), т.е. $a > 0$, то из второго уравнения (6.44) следует

$$\Psi = \begin{cases} 0, & \Omega < \omega_0; \\ \pm \pi, & \Omega > \omega_0. \end{cases} \quad (6.45)$$

а из первого уравнения

$$a(\Omega) = \frac{F_0}{m \cdot |\omega_0^2 - \Omega^2|}. \quad (6.46)$$

Таким образом, если частота внешней силы Ω меньше собственной частоты осциллятора ω_0 , он колеблется с частотой Ω и его смещение всегда находится в той же фазе, что и сила ($\Psi = 0$). В частности, при $\Omega \rightarrow 0$ просто смещается положение равновесия, переходя из точки $x_0 = 0$ в точку

$$x_0 = a(0) = \frac{F_0}{m\omega_0^2}.$$

Если же $\Omega > \omega_0$, осциллятор колеблется с частотой Ω , но его смещение находится в противофазе с силой ($\Psi = \pm \pi$). Пример такого рода осцилляторов – система подвески различных экипажей (автомобилей, вагонов и т.п.). Жесткость рессор и пружин амортизаторов выбирается так, чтобы собственная частота колебаний осциллятора "автомобиль – пружины" была достаточно низкой. Тогда при ударах о неровности автомобиль "подбирает под себя" колеса, а его салон не смещается. Тот же принцип используется в сейсмических приборах, где груз, подвешенный на пружине, имеет массу, образующую с пружиной низкочастотный осциллятор, собственная частота которого много меньше характерных частот колебаний почвы. Тогда при землетрясениях груз просто не успевает сместиться, когда из-под него "уходит земля", и стрелка самописца, размещенная на грузе, рисует кривую смещения на ленте, соединенной с колеблющейся опорой – "землей".

2). $\Omega = \omega_0$. В этом случае $\Psi \neq 0, \pm \pi$, и амплитуда $a = \infty$. Это случай *внешнего резонанса*. Зависимости амплитуды $a(\omega)$ и фазы $\psi(\omega)$ вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы ω показаны на рис. 6.8.

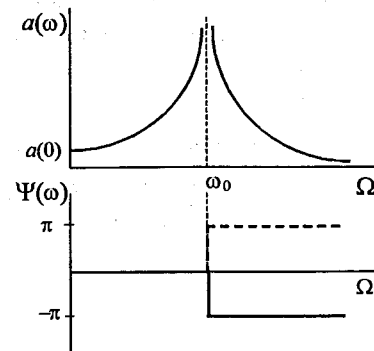


Рис. 6.8. Поведение амплитуды и фазы вынужденных колебаний вблизи резонанса $\Omega = \omega_0$

Переход к резонансу. Пусть $\Omega \rightarrow \omega_0$. Для определенности положим

$$\Omega = \omega_0 - \Delta\Omega, \quad \Delta\Omega > 0, \quad \text{тогда } \Psi = 0.$$

Запишем решение (6.41), (6.45), (6.46) и разложим его по малому $\Delta\Omega$:

$$x(t) = \frac{F}{m} \cdot \frac{\sin \Omega t}{\omega_0^2 - \Omega^2} \approx \frac{F}{m} \cdot \frac{\sin \omega_0 t - \cos \omega_0 t \cdot \Delta \Omega t}{2\omega_0 \cdot \Delta \Omega}$$

При $t \rightarrow \infty$ (т.е. при $t \gg 1/\Delta\Omega$) это выражение дает

$$x(t) \approx -\frac{Ft}{2m\omega_0} \cos \omega_0 t = \frac{Ft}{2m\omega_0} \sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (6.47)$$

Таким образом, в резонансе амплитуда линейно растет со временем, а колебания сдвинуты по фазе на $-\pi/2$ относительно силы:

$$a(t) = \frac{Ft}{2m\omega_0}, \quad \Psi = -\frac{\pi}{2}. \quad (6.48)$$

Итак, амплитуда возрастает неограниченно при $\Omega \rightarrow \omega_0$, т.к. осциллятор получает энергию от внешнего источника силы. При этом в точном резонансе сколь угодно малое возмущение вызывает неограниченный рост амплитуды. От амплитуды возмущения, как следует из (6.47), зависит скорость роста амплитуды осциллятора:

$$\frac{dx_{max}}{dt} = \frac{F}{2m\omega_0}$$

Задача 6.3. При движении одинаковых тяжело груженых автомобилей по грунтовым дорогам можно наблюдать резонанс их системы подвески с ямами, выбитыми автомобилями. Оценить характерное расстояние между ямами.

Так как скорость всех автомобилей v_0 на такой плохой дороге примерно одна и та же, то выбываемые ими ямы следуют с периодом $L = v_0 \cdot (2\pi/\omega_0)$, где ω_0 — частота собственных колебаний системы "автомобиль — пружины подвески".

§ 6.5. Вынужденные колебания с трением

Уравнение колебаний осциллятора с трением под действием вынуждающей гармонической силы имеет вид

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F_0 \sin \Omega t, \quad (6.49)$$

где Ω — частота вынуждающей силы. Перепишем его в виде

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t, \quad (6.50)$$

Нас интересуют, как и в п. 6.4, установившиеся вынужденные колебания:

$$x(t) = a \sin(\Omega t + \Psi). \quad (6.51)$$

Здесь Ψ — сдвиг фазы колебаний осциллятора относительно фазы силы Ωt .

Подставив (6.51) в (6.50), имеем

$$a\Omega^2 \sin(\Omega t + \Psi) + 2\lambda\Omega a \cos(\Omega t + \Psi) + \omega_0^2 a \sin(\Omega t + \Psi) = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t.$$

Отсюда, приравняв коэффициенты вначале при $\sin \Omega t$, а затем при $\cos \Omega t$, найдем

$$a = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \Psi - 2\lambda\omega \sin \Psi}, \quad (6.52)$$

$$a\{(\omega_0^2 - \Omega^2) \sin \Psi + 2\lambda\omega \cos \Psi\} = 0. \quad (6.53)$$

Из второго уравнения следует

$$\operatorname{tg} \Psi = -\frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}, \quad (6.54)$$

а подстановка этого результата в (6.52) дает

$$a = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}}. \quad (6.55)$$

Найдем максимум этой функции $a(\Omega)$. Продифференцировав подкоренное выражение в (6.55) по Ω , получим уравнение для нахождения экстремального (резонансного) значения Ω :

$$-2(\omega_0^2 - \Omega^2) \cdot 2\Omega + 2\Omega(2\lambda)^2 = 0.$$

Отсюда

$$\Omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2},$$

или, в случае слабого трения $\lambda \ll \omega_0$,

$$\Omega_{рез} \approx \omega_0 - \frac{\lambda^2}{\omega_0} \quad (6.56)$$

Эта частота называется *резонансной*. Соответственно, амплитуда в резонансе есть

$$a_{рез} = \frac{F_0/m}{2\lambda\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \xrightarrow{\lambda \ll \omega_0} \frac{F_0}{2m\lambda\omega_0} \quad (6.57)$$

Из (6.55) и (6.57) следует, что в осцилляторе с малым трением отношение амплитуд при $\Omega = \Omega_{рез}$ и $\Omega \rightarrow 0$ равно

$$\frac{a_{рез}}{a(\Omega=0)} = \frac{\omega_0}{2\lambda} \quad (6.58)$$

Итак, резонанс в осцилляторе с трением достигается при некотором значении частоты вынуждающей силы $\Omega_{рез}$ (6.56). Амплитуда в резонансе ограничена (6.57), а фаза колебаний (см. (6.54)) всегда отрицательна, т.е. отстаёт от фазы силы. В точном резонансе она, как и при резонансе в отсутствие трения, сдвинута на $-\pi/2$ относительно фазы силы.

Кривая $a(\Omega)$, изображённая на рис. 6.9, называется *резонансной кривой*, её важной характеристикой является *полуширина* $2\delta\Omega$ – ширина на уровне, где квадрат амплитуды $a^2(\Omega)$ вдвое меньше своего максимального значения $a_{рез}^2$ (рис. 6.10). Через $\delta\Omega$ определяют ещё одну важную характеристику осциллятора с трением – его *добротность*:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta\Omega} \quad (6.59)$$

Ясно, что $\delta\Omega \sim \lambda$, так что $Q = \omega_0/\lambda$. Эта величина характеризует качество ("добротность") осциллятора.

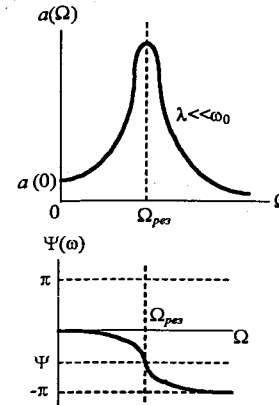


Рис. 6.9. Поведение амплитуды (резонансная кривая) и фазы вблизи резонанса в осцилляторе с трением

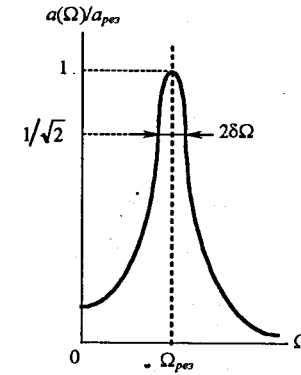


Рис. 6.10. Резонансная кривая и её "полуширина" $2\delta\Omega$

Задача 5.4. Вычислить $\delta\Omega$ и Q точно.

Для этого найдем $\delta\Omega$ из условия

$$a_{рез}^2 = 2a^2 \Big|_{\Omega=\Omega_{рез}+\delta\Omega}$$

Запишем

$$a_{рез}^2 \approx \left[\frac{F_0/m}{2\lambda\omega_0} \right]^2 = 2 \left[\frac{F_0/m}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}} \right]^2 \approx 2 \left[\frac{F_0/m}{\sqrt{(2\omega_0 \cdot \delta\Omega)^2 + (2\lambda\Omega)^2}} \right]^2,$$

откуда

$$4(\lambda\omega_0)^2 = 4 \frac{\omega_0^2(\delta\Omega)^2 + (\lambda\omega_0)^2}{2},$$

что дает

$$\delta\Omega = \pm\lambda, \quad (6.60)$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}. \quad (6.61)$$

Этот результат позволяет дать еще два объяснения физического смысла понятия добротности. Во-первых, из (6.59) следует, что

$$Q = \frac{a_{\text{рез}}}{a(\Omega=0)}. \quad (6.62)$$

Во-вторых, из (6.22) следует, что время τ , за которое амплитуда собственных колебаний осциллятора с трением спадает в e раз, равно $\tau = \lambda^{-1}$. За это время осциллятор совершит N_e колебаний, где

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi\lambda} = \frac{Q}{\pi}. \quad (6.63)$$

До сих пор мы рассматривали случай внешней вынуждающей силы, изменяющейся во времени по закону синуса (косинуса), — это так называемая *гармоническая сила* (см. (6.39), (6.50)). В общем случае произвольной зависимости силы от времени функция $F(t)$ может быть представлена в форме ряда (*ряд Фурье*) или интеграла (*интеграл Фурье*) по гармоническим функциям — $\sin\omega t$, $\cos\omega t$. Если функция $F(t)$ — периодическая, с периодом T (но не гармоническая!), производится разложение в ряд Фурье:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos n\omega_0 t + \sum b_n \sin n\omega_0 t,$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(\xi) \cdot \cos n\omega_0 \xi d\xi,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(\xi) \cdot \sin n\omega_0 \xi d\xi.$$

Члены ряда называют *гармониками* функции $F(t)$. В случае аperiodической зависимости используется разложение в интеграл Фурье:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\omega}(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega,$$

где

$$F_{\omega}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \cdot e^{-i\omega \xi} d\xi$$

— *спектральная или амплитудная функция* силы $F(t)$.

Подставляя эти выражения для силы в уравнение осциллятора (6.50), ищем решение $x(t)$ также в форме ряда или интеграла Фурье. Нетрудно видеть, что в результате получаем уравнения для амплитуд гармоник или амплитудной функции, совпадающие с (6.52). Тем самым задача для произвольной силы $F(t)$ сведена к задаче для гармонической силы.

Во многих задачах удобно использовать общую форму решения уравнения вынужденных колебаний (6.50):

$$x(t) = \frac{e^{-\lambda t}}{m\omega} \cdot \int_0^t F(\xi) \cdot e^{\lambda \xi} \cdot \sin \omega(t-\xi) \cdot d\xi,$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}, \quad \lambda < \omega_0.$$

В справедливости этого решения нетрудно убедиться подстановкой его в уравнение (6.50).

§ 6.6. Параметрический резонанс*

Рассмотрим осциллятор с переменной жесткостью $k(t)$, выбрав специальный вид функции $k(t)$:

$$m\ddot{x} + k(t) \cdot x = 0, \quad k(t) = k_0(1 + h \cos \Omega t), \quad h \ll 1. \quad (6.64)$$

Это уравнение, записанное в форме

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h \cos \Omega t)x = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{k_0/m}, \quad (6.65)$$

называется *уравнением Матвея*. Примером такого осциллятора может служить маятник в виде шара на стержне, который прикреплен к шарниру, совершающему вертикальные колебания (рис. 6.11).

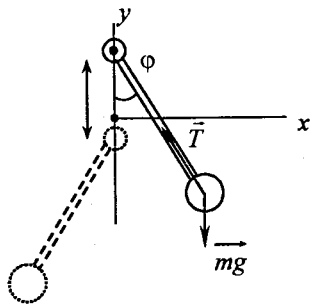


Рис. 6.11. Маятник — шар со стержнем, прикреплённым к вертикально колеблющемуся шарниру

Задача 6.5. Получить уравнение колебаний маятника, изображенного на рис. 6.11. Считать, что длина стержня l много больше радиуса шара.

Введём оси координат (см. рис. 6.11), отсчитывая значение y от положения несмещённого подвеса, т.е. будем считать, что точка подвеса колеблется по закону

$$y_0(t) = b \cos \Omega t. \quad (6.66)$$

Пренебрегая массой стержня, запишем уравнения движения шарика:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= -mg + T \cos \varphi, \\ m\ddot{x} &= -T \sin \varphi. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Кроме того, учтём очевидные геометрические соотношения:

$$y = y_0(t) - l \cdot \cos \varphi, \quad x = l \cdot \sin \varphi. \quad (6.68)$$

Подставив (6.66) и (6.68) в (6.67), получим систему уравнений для $\varphi(t)$ и $T(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sin \varphi}{dt^2} &= -\frac{T}{ml} \cdot \sin \varphi, \\ \frac{d^2 \cos \varphi}{dt^2} &= -\frac{b\Omega^2}{l} \cdot \cos \Omega t + \frac{g}{l} - \frac{T}{ml} \cdot \cos \varphi. \end{aligned}$$

Умножив первое уравнение на $\cos \varphi$, а второе на $\sin \varphi$ и вычтя из первого второе, исключим в результате T , а продифференцировав $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$, получим уравнение для φ :

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + \omega_0^2(1 + h \cdot \cos \Omega t) \cdot \sin \varphi &= 0, \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad h = -\frac{b\Omega^2}{g}. \end{aligned} \quad (6.69)$$

В случае малых колебаний, $\varphi \ll 1$, это уравнение совпадает с (6.65).

Отметим, что в отличие от маятника с нитью (рис. 6.2) здесь необходим жесткий стержень, т.к. при достаточно быстром движении точки подвеса вниз нить может провиснуть и в уравнениях (6.67) T обратится в нуль — движение маятника станет более сложным.

При определенном значении частоты Ω колебания осциллятора с переменной жесткостью (6.64) сопровождаются быстрым нарастанием амплитуды. Это явление и называют *параметрическим резонансом*. Понять причину такого названия позволяет упрощенное рассмотрение, с которого начнем анализ явления.

Представим (6.65) в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 = -h\omega_0^2 x \cdot \cos \Omega t.$$

Поскольку $h \ll 1$, в нулевом приближении осциллятор — свободный и, приняв для простоты $\dot{x}|_{t=0} = 0$, для свободных колебаний $x_0(t)$ имеем

$$x_0(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где A — некоторая амплитуда колебаний. Подставив $x_0(t)$ в правую часть, запишем для следующего приближения $x_1(t)$:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 &\approx -h\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi) \cdot \cos \Omega t = \\ &= -\frac{h\omega_0^2 A}{2} \cdot \{ \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi] + \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi] \}. \end{aligned}$$

Мы получили уравнение вынужденных колебаний с периодической силой. Ясно, что при $\omega_0 - \Omega = -\omega_0$ имеет место *резонанс*. Таким образом, переменная жесткость осциллятора резонансно раскачивает его колебания, если

$$\Omega = 2\omega_0. \quad (6.70)$$

Это резонанс осциллятора с одним из его параметров — в данном случае с переменной силой тяжести. Отсюда и название — параметрический.

Теперь проведем более строгий анализ уравнения Матвее. Его решение ищем в виде

$$x(t) = a(t) \cdot \cos \omega t + b(t) \cdot \sin \omega t, \quad (6.71)$$

где ω — неизвестная (пока!) частота. Подставив (6.71) в уравнение (6.65), найдем

$$\begin{aligned} \ddot{a} \cos \omega t - 2\dot{a}\omega \sin \omega t - \omega_0^2 a \cos \omega t + \ddot{b} \sin \omega t + 2b\omega \cos \omega t - \\ - \omega^2 b \sin \omega t + \omega_0^2(1 + h \cos \Omega t) \cdot (a \cos \omega t + b \sin \omega t) = 0. \end{aligned} \quad (6.72)$$

Учтем, что

$$\begin{aligned}\cos \Omega t \cdot \cos \omega t &= \frac{1}{2} [\cos(\Omega + \omega)t + \cos(\Omega - \omega)t], \\ \cos \Omega t \cdot \sin \omega t &= \frac{1}{2} [\sin(\Omega + \omega)t - \sin(\Omega - \omega)t].\end{aligned}$$

Домножим уравнение (6.72) на $\sin \omega t$ и усредним по времени. Затем сделаем то же самое, домножив на $\cos \omega t$. При этом вспомним, что *среднее значение функции $f(t)$ по отрезку времени τ равно*

$$\overline{f(t)}^\tau = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt. \quad (6.73)$$

Кроме того, будем считать, что амплитуды $a(t)$ и $b(t)$ медленно изменяются со временем, так что их можно вынести из-под интеграла (6.73) при усреднении. Это справедливо, если

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt}, \quad \frac{1}{b} \frac{db}{dt} \ll \omega.$$

В качестве отрезка времени τ , по которому производится усреднение, выберем период колебаний $T = 2\pi/\omega$. Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned}\overline{\cos \omega t}^T &= \overline{\sin \omega t}^T = 0, \\ \overline{\cos^2 \omega t}^T &= \overline{\sin^2 \omega t}^T = \frac{1}{2}.\end{aligned} \quad (6.74)$$

С учетом этих результатов находим, что слагаемые, содержащие h , не зануляются только в том случае, если

$$\Omega = 2\omega,$$

что совпадает с условием резонанса (6.70). Пренебрегая \ddot{a} по сравнению с $\omega^2 a$ (справедливость этого проверим ниже), получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}\text{при } \overline{\sin^2 \omega t}^T: & -\dot{a}\omega - \frac{\omega^2 b}{2} + \frac{\omega_0^2 b}{2} - \frac{\omega_0^2 b h}{4} = 0, \\ \text{при } \overline{\cos^2 \omega t}^T: & -\frac{\omega^2 a}{2} + \dot{b}\omega + \frac{\omega_0^2 a}{2} + \frac{\omega_0^2 a h}{4} = 0.\end{aligned} \quad (6.75)$$

Полагая

$$a(t) = a_0 e^{\lambda t}, \quad b(t) = b_0 e^{\lambda t}, \quad (6.76)$$

получим систему двух уравнений для неизвестных a_0 и b_0 :

$$\begin{aligned}2a_0 \lambda \omega + b_0 \left(\omega^2 - \omega_0^2 + \frac{\omega_0^2 h}{2} \right) &= 0, \\ -a_0 \left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{\omega_0^2 h}{2} \right) + 2b_0 \lambda \omega &= 0.\end{aligned} \quad (6.77)$$

Приравнявая ее детерминант нулю:

$$\text{Det} = 4\lambda^2 \omega^2 + \left\{ \left(\omega^2 - \omega_0^2 \right)^2 - \frac{\omega_0^4 h^2}{4} \right\} = 0,$$

имеем

$$\lambda^2 = \frac{1}{4\omega^2} \left\{ - \left(\omega^2 - \omega_0^2 \right)^2 + \frac{\omega_0^4 h^2}{4} \right\}. \quad (6.78)$$

Вводя *расстройку частоты*

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = \frac{\Omega}{2} - \omega_0, \quad (6.79)$$

для $\Delta\omega \ll \omega_0$ имеем

$$\lambda^2 \approx -(\Delta\omega)^2 + \frac{\omega_0^2 h^2}{16}.$$

Отсюда ясно, что $\lambda^2 > 0$ и амплитуды (6.76) нарастают во времени, если

$$|\Delta\omega| < \frac{\omega_0 h}{4}. \quad (6.80)$$

Величина $\Delta\omega$ называется *шириной резонанса*. При этом *инкремент* нарастания (от лат. *incrementum* – увеличение) амплитуды колебаний есть

$$\lambda \approx \omega_0 \sqrt{\frac{h^2}{16} - \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)^2}, \quad (6.81)$$

а резонансная частота возмущения равна

$$\Omega = 2(\omega_0 \pm \Delta\omega), \quad -\frac{\omega_0 h}{4} < \Delta\omega < \frac{\omega_0 h}{4}. \quad (6.82)$$

Итак, источником раскочки колебаний является один из параметров осциллятора – переменная во времени жесткость $k(t)$ (6.64).

Отметим, что из (6.81) следует малость λ по сравнению с ω_0 : $\lambda \sim h$, $\Delta\omega \ll \omega_0$. Тем самым подтверждена справедливость предположений, сделанных при получении системы уравнений (6.75).

Параметрический резонанс часто встречается в технике, в частности в циклических ускорителях заряженных частиц.

§ 6.7. Перевернутый маятник*

Естественно задать вопрос о поведении осциллятора, рассмотренного в предыдущем параграфе, при изменении частоты Ω во всём диапазоне значений, от нуля ($\Omega \ll \omega_0$) до бесконечности ($\Omega \gg \omega_0$).

Ответ для области малых значений Ω достаточно очевиден: здесь не происходит "ничего интересного" — маятник, совершая колебания с частотой ω_0 , медленно смещается вверх-вниз по вертикали в соответствии с законом (6.66).

Совершенно иначе ведёт себя маятник из задачи 6.5 при $\Omega \gg \omega_0$. Для анализа его поведения воспользуемся уравнением (6.69), считая b малым, а частоту Ω большой:

$$h \ll 1, \quad \Omega \gg \omega_0. \quad (6.83)$$

Будем искать решение уравнения (6.69) в виде суммы двух функций

$$\varphi(t) = \Phi(t) + \xi(t), \quad |\xi(t)| \ll |\Phi(t)|; \quad (6.84)$$

медленно, $\Phi(t)$, и быстро, $\xi(t)$, изменяющихся со временем, считая вторую малой (по модулю) по сравнению с первой. Подставив (6.84) в уравнение (6.69), произведём разложение $\sin\varphi$ по малому параметру — приём, часто и успешно применяемый в физике. При этом ограничимся членами, линейными по ξ .

Получим

$$\ddot{\Phi} + \ddot{\xi} + \omega_0^2(1 + h \cos \Omega t) \cdot \sin \Phi + \omega_0^2 \xi \cdot \cos \Phi + \omega_0^2 \cdot h \xi \cdot \cos \Omega t \cos \Phi = 0. \quad (6.85)$$

Теперь можно отделить медленные слагаемые, содержащие $\Phi(t)$, от быстро меняющихся со временем, содержащих $\xi(t)$. Для этого произведём усреднение по времени — по периоду быстрых колебаний частоты Ω . Получим

$$\ddot{\Phi} + \omega_0^2 \cdot \sin \Phi + h \omega_0^2 \cdot \cos \Phi \cdot \overline{\xi \cdot \cos \Omega t} = 0. \quad (6.86)$$

Уравнение для быстрых колебаний $\xi(t)$ найдём из (6.85), выделив быстрые слагаемые первого порядка малости по ξ и h :

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \cdot \cos \Phi \cdot \xi \approx -h \omega_0^2 \sin \Phi \cdot \cos \Omega t. \quad (6.87)$$

Уравнение (6.87) для ξ есть не что иное, как уравнение маятника, на который действует переменная внешняя сила (правая часть уравнения). Отсюда ясно, что $\xi(t)$ изменяется с частотой вынуждающей силы Ω , что мы и предполагали вначале (см. (6.84)):

$$\xi(t) = \frac{h \omega_0^2 \cdot \sin \Phi(t)}{\Omega^2 - \omega_0^2 \cdot \cos \Phi(t)} \cdot \cos \Omega t \approx \frac{h \omega_0^2}{\Omega^2} \cdot \sin \Phi \cos \Omega t. \quad (6.88)$$

Подставляя (6.88) в (6.86) и произведя усреднение по быстрым колебаниям (см. 6.74), приходим к уравнению для $\Phi(t)$

$$\ddot{\Phi} + \omega_0^2 \left(1 + \frac{h^2 \omega_0^2}{2 \Omega^2} \cdot \cos \Phi \right) \cdot \sin \Phi = 0.$$

Это уравнение позволяет сделать важный вывод об устойчивости такого маятника, для чего удобно переписать его в форме 2-го закона Ньютона:

$$\ddot{\Phi} = -\omega_0^2 \cdot \sin \Phi \left(1 + \frac{h^2 \omega_0^2}{2 \Omega^2} \cdot \cos \Phi \right) \equiv f(\Phi).$$

Выражение в правой части имеет смысл некоторой "силы" (точнее, это $F/m\ell$). Поэтому положение устойчивого равновесия маятника найдём из условия (6.4):

$$\frac{df}{d\Phi} \leq 0,$$

или

$$\cos \Phi + \frac{h^2 \omega_0^2}{2 \Omega^2} \cdot \cos 2\Phi \geq 0.$$

Отсюда видно, что точка $\Phi = 0$ всегда устойчива. Но при этом появляется вторая точка устойчивости:

$$\Phi = \pm\pi, \text{ если } \frac{h^2\omega_0^2}{2\Omega^2} > 1. \quad (6.89)$$

Для маятника из задачи 6.5 это означает, что при достаточно большой амплитуде колебаний точки подвески

$$b > \frac{\sqrt{2gl}}{\Omega} \quad (6.90)$$

маятник перевернется вверх и будет совершать колебания вокруг второй точки устойчивого равновесия.

Впервые такое поведение маятника было описано Н.Н. Боголюбовым, а экспериментально продемонстрировал эффект "переворота" П.Л. Капица. Поэтому в литературе можно встретить название *маятник Капицы*, хотя правильнее было бы назвать его *маятником Боголюбова-Капицы*.

Читателю доставит удовольствие убедиться, что такой же эффект переворота возникает при колебании точки подвеса по горизонтали и при движении по кругу (суперпозиция вертикальных и горизонтальных колебаний). Последнее позволяет предложить простейшую реализацию перевернутого маятника: стержень с шариком, прикрепленный шарнирно к ободу вращающегося колеса. Из условия (6.90) нетрудно получить, что при длине стержня $\ell = 10$ см ($\omega_0 = 9,9 \text{ с}^{-1}$) и радиусе колеса $b = 2$ см частота вращения Ω должна быть больше 70 с^{-1} , или больше 700 оборотов/мин.

Перевернутый маятник, забавная, на первый взгляд, игрушка, позволяет понять важный физический эффект – искусственное образование положения устойчивого равновесия осциллятора с помощью быстрого периодического изменения со временем (модуляции) одного из его параметров. Пример такой системы – циклический ускоритель заряженных частиц с так называемой *жесткой фокусировкой*. В таком ускорителе система магнитных линз, установленных по его периметру, вынуждает частицу совершать частые и "мелкие" колебания вокруг устойчивой равновесной траектории.

§ 6.8. Свободные нелинейные колебания*

Нелинейные колебания имеют место, если упругая сила осциллятора нелинейно зависит от смещения. Как правило, такие колебания *ангармонические* (негармонические) и *неизохронные*. Примером нелинейного осциллятора является маятник (рис. 6.2) при достаточно больших амплитудах: сумма сил тяжести и натяжения нити, возвращающих маятник в положение равновесия, пропорциональна отклонению только при малых его значениях:

$$F_{\tau} = -mg \sin \varphi = -\tilde{m}g \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \dots \right).$$

С ростом φ все больше проявляется нелинейность силы.

В общем случае зависимость силы от смещения x можно при $x \rightarrow 0$ представить в виде ряда

$$f(x) = -kx - \alpha x^2 - \beta x^3. \quad (6.91)$$

Второе и третье слагаемые – так называемые *квадратичная и кубическая нелинейности* силы. В этом случае уравнение колебаний запишем в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3. \quad (6.92)$$

В аналитических функциях это уравнение не интегрируется. Одним из исключений является маятник, уравнение колебаний которого (см. задачу 6.1) есть

$$\ell \ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0,$$

а его первый интеграл имеет вид

$$\dot{\varphi}^2 - 2 \frac{g}{\ell} \cos \varphi = \text{const}.$$

Это есть всё тот же закон сохранения энергии (6.15), теперь – для нелинейного осциллятора. Выбрав начальные условия так, что $\varphi|_{t=0} = 0$, получим

$$\dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}_0^2 - 2\omega_0^2(1 - \cos \varphi), \quad (6.93)$$

где $\dot{\phi}_0 \equiv \dot{\phi}|_{t=0}$ – начальное значение угловой скорости маятника. Теперь можно построить зависимость угловой скорости маятника $\dot{\phi}$ от смещения ϕ . Получим кривые, описывающие движение маятника в координатах $\dot{\phi}, \phi$ – его траектории на так называемой *фазовой плоскости*, или *фазовые траектории*. Обычно фазовой плоскостью принято называть плоскость переменных "импульс – фаза". Для маятника величина $\dot{\phi}$ есть его угловая скорость, связанная с импульсом очевидным соотношением $p = m\ell\dot{\phi}$. Поэтому с точностью до постоянного множителя $m\ell$ плоскость $(\phi, \dot{\phi})$ также можно называть фазовой.

Функции (6.93), описывающие фазовые траектории, удобно представить в безразмерной форме

$$\frac{\dot{\phi}}{\omega_0} = \pm \sqrt{A - 2 + 2 \cos \phi}, \quad A = \left(\frac{\dot{\phi}_0}{\omega_0} \right)^2 \quad (6.94)$$

(рис. 6.12). Подчеркнём, что положение траектории на фазовой плоскости определяется двумя начальными условиями: $\phi|_{t=0}$ и $\dot{\phi}|_{t=0} \equiv \dot{\phi}_0$. Мы выбрали $\phi|_{t=0} = 0$.

Если начальная скорость маятника $\dot{\phi}_0$ мала, так что $A < 4$, смещение ϕ может принимать лишь ограниченные значения (подкоренное выражение должно оставаться положительным!):

$$-\pi \leq -\arccos(1 - A) \leq \phi \leq \arccos(1 - A) \leq \pi$$

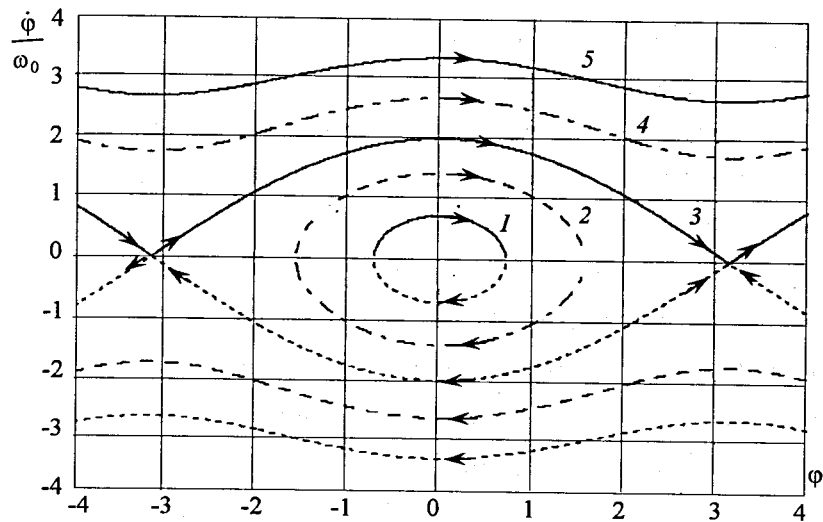


Рис. 6.12. Движение маятника на фазовой плоскости: фазовые траектории (6.86) для $A = 0,5$ (1); 2,0 (2); 4,0 (3); 7,0 (4); 11,0 (5).

и *фазовая траектория* имеет вид замкнутой кривой (кривая 1 на рис. 6.12). При $A > 4$ значения ϕ не ограничены и колебательное движение маятника переходит во вращение в вертикальной плоскости, когда начальная кинетическая энергия маятника $m(\dot{\phi}_0 \ell)^2 / 2$ достаточна, чтобы забросить его грузик на высоту 2ℓ (это и есть условие $A > 4$). На рис. 6.12 этому режиму маятника соответствуют кривые 3 – 5.

Кривая 3, разделяющая области колебательного и вращательного движений, называется *сепаратрисой* (от лат. *separabi* – отделять). Для маятника уравнение сепаратрисы получим из (6.94) при $A = 4$:

$$\dot{\phi} = \pm 2\omega_0 \cdot \cos \frac{\phi}{2}.$$

Такое поведение – фазовые траектории, разделенные сепаратрисой, – характерно для многих нелинейных осцилляторов. В точках сепаратрисы, где угловая скорость маятника обращается в нуль ($\dot{\phi} = 0$), направление движения маятника

может изменяться. Это точки остановки $\varphi = \pm\pi$, особые точки на фазовых траекториях. Физически это одна и та же точка — положение маятника "вертикально вверх". В ней маятник может покоиться, а сколь угодно малые возмущения выводят его из этого состояния. Стрелки на кривых рис. 6.12 указывают направление движения по фазовой траектории: в верхней полуплоскости $\dot{\varphi} > 0$ и маятник движется вправо по φ ($\varphi(t)$ растет), в нижней $\dot{\varphi} < 0$ и маятник движется влево ($\varphi(t)$ убывает).

В области малых колебаний фазовая траектория имеет форму эллипса. Действительно, при $\varphi \ll 1$ ($\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$) уравнение фазовой траектории (6.93), (6.94) принимает вид уравнения эллипса:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{\dot{\varphi}_0^2} + \frac{\varphi^2}{\varphi_{\max}^2} = 1, \quad \varphi_{\max} = \frac{\ddot{\varphi}_0}{\omega_0^2}. \quad (6.95)$$

Вернемся к общему случаю (6.92). Можно найти приближенные решения для случая малых нелинейных членов αx^2 и βx^3 . Примем

$$\omega_0^2 \gg \alpha x_{\max}^2 \gg \beta |x_{\max}|^3 \quad (6.96)$$

и будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(t) + x_1(t) + x_2(t), \quad x_2 \ll x_1 \ll x_0, \\ x_0(t) &= a \cos \omega t, \quad \omega = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2, \quad \omega_2 \ll \omega_1 \ll \omega_0, \end{aligned} \quad (6.97)$$

где ω — точное значение частоты осциллятора. Уравнение (6.92) преобразуем к такому виду, что левая часть обращается в нуль при подстановке $x = x_0(t)$:

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \ddot{x} + \omega_0^2 x = - \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \ddot{x} - \alpha x^2 - \beta x^3. \quad (6.98)$$

Решение в первом приближении ищем в виде

$$x_1(t) = x_0(t) + x_1(t) = a \cos \omega t + x_1(t), \quad \omega = \omega_0 + \omega_1, \quad |x_1| \ll a, \quad \omega_1 \ll \omega_0.$$

Ограничившись квадратичным членом αx^2 в правой части, запишем так уравнение для $x_1(t)$:

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 \approx - \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \ddot{x}_0 - \alpha x_0^2. \quad (6.99)$$

Подставив в правую часть

$$x_0 = a \cos \omega t, \quad \omega = \omega_0 + \omega_1,$$

получим из (6.99) уравнение

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = (\omega^2 - \omega_0^2) a \cos \omega t - \alpha \frac{a^2}{2} (1 + \cos 2\omega t),$$

которое имеет вид уравнения вынужденных колебаний. Ищем его решение в виде

$$x_1(t) = A + B \cos \omega t + C \cos 2\omega t.$$

Подстановка этого выражения в предыдущее уравнение даёт

$$A = -\alpha \frac{a^2}{2\omega_0^2}, \quad C = \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2},$$

а для слагаемых, содержащих B , получим тождественный нуль слева. Это означает, что и справа нужно принять

$$\omega^2 - \omega_0^2 \ll \alpha a,$$

а поскольку $\omega^2 - \omega_0^2 \approx 2\omega_1\omega_0$, то попросту положить

$$\omega_1 = 0.$$

Тогда выполняется требование "иерархии" членов разложения (6.97), и для иерархии $x_1(t)$ найдём

$$x_1(t) = -\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} \left(1 - \frac{\cos 2\omega t}{3} \right). \quad (6.100)$$

Перейдем ко второму приближению

$$x_{II}(t) = x_0 + x_1 + x_2, \quad \omega = \omega_0 + \omega_2. \quad (6.101)$$

Подставим (6.101) в (6.98) и сохраним теперь кубический член в правой части. При этом слагаемыми, содержащими x_2 , в правой части пренебрегаем (в соответствии с алгоритмом подобных итерационных вычислений). Получим

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 =$$

$$= - \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) (\ddot{x}_0 + \ddot{x}_1) - \alpha (x_0 + x_1)^2 - \beta (x_0 + x_1)^3.$$

И в этом виде уравнение можно существенно упростить. Во-первых, учтем уравнение (6.99) для x_1 , что позволяет сократить слагаемые с \ddot{x}_1 , x_1 в левой части с соответствующими слагаемыми с \ddot{x}_0 и αx_0^2 в правой. Затем, пренебрежем членами с ω_2^2 , αx_1^2 , βx_1 и выше в правой части, членом порядка $\omega_2 \ddot{x}_1$ в первом слагаемом там же, а также примем $\omega \approx \omega_0$ в слагаемом $\omega_0^2 \ddot{x}_2 / \omega^2$ в левой части. Наконец, положим $x_0 = a \cos \omega t$ в правой части. В итоге получим

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 \approx \frac{2\omega_2}{\omega_0} (-\omega_0^2 a \cos \omega t) - 2\alpha x_0 x_1 - \beta a^3 \cos^3 \omega t.$$

Подставив сюда x_1 из (6.100), имеем

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = 2\omega_2 \omega_0 \cos \omega_0 t + \frac{\alpha^2 a^3}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{\cos 2\omega t}{3} \right) \cdot \cos \omega t - \beta a^3 \cos^3 \omega t.$$

Произведя очевидные тригонометрические преобразования:

$$\cos 2y \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\cos 3y) + \cos y \quad \text{и} \quad \cos^3 y = \frac{1}{2} \cos y (1 + \cos 2y) = \frac{3 \cos y}{4} + \frac{\cos 3y}{4},$$

имеем

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = 2\omega_2 \omega_0 a \cos \omega_0 t + \frac{\alpha^2 a^3}{\omega_0^2} \left(\cos \omega t - \frac{\cos 3\omega t}{6} - \frac{\cos \omega t}{6} \right) -$$

$$- \frac{\beta a^3}{2} \left(\cos \omega t + \frac{\cos 3\omega t}{2} + \frac{\cos \omega t}{2} \right).$$

И, окончательно,

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = a \left(2\omega_2 \omega_0 + \frac{5}{6} \cdot \frac{\alpha^2 a^2}{\omega_0^2} - \frac{3\beta^2 a^2}{4} \right) \cdot \cos \omega t -$$

$$- a^3 \left(\frac{\alpha^2}{6\omega_0^2} + \frac{\beta}{4} \right) \cdot \cos 3\omega t. \quad (6.102)$$

Аналогично тому, как это сделано при выводе (6.100), во избежание бессмысленности результата нужно положить здесь равным нулю выражение в скобках в первом слагаемом правой части, откуда

$$\omega_2 = \left(\frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3} \right) \cdot a^2. \quad (6.103)$$

Таким образом, для x_2 мы получили уравнение вынужденных колебаний (6.102), в котором "вынуждающая сила" пропорциональна $\cos 3\omega t$:

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -\frac{a^3}{2} \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\alpha^2}{3\omega_0^2} \right) \cdot \cos 3\omega t.$$

Подставив сюда $x_2(t) = A \cos 3\omega t$, найдем

$$x_2(t) = \frac{a^3}{16\omega_0^2} \cdot \left(\frac{\alpha^2}{3\omega_0^2} + \frac{\beta}{2} \right) \cdot \cos 3\omega t. \quad (6.104)$$

Теперь можно записать окончательный результат:

$$\omega = \omega_0 + \omega_2 = \omega_0 + \kappa a^2,$$

$$\kappa = \frac{3}{8} \cdot \frac{\beta}{\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}, \quad (6.105)$$

$$x(t) = a \cos \omega t + b_0 + b_1 \cos 2\omega t + b_2 \cos 3\omega t,$$

$$b_0 = -\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2}, \quad b_1 = \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2}, \quad b_2 = \frac{a^3}{16\omega_0^2} \left(\frac{\alpha^2}{3\omega_0^2} + \frac{\beta}{2} \right).$$

Итак, мы получили, что частота нелинейного осциллятора имеет сдвиг, пропорциональный квадрату амплитуды. Это и есть отмеченная в начале параграфа *неизохронность нелинейного осциллятора*. Смещение $x(t)$ содержит гармоники ω , 2ω , 3ω . Мы провели анализ до члена $x_2(t)$ ряда (6.97). Нетрудно проследить, что в более высоких порядках $x_3(t)$, ... $x_n(t)$ появляются и более

высокие гармоники. Так, в нашем анализе вторая гармоника появилась в результате подстановки в нелинейный член αx^2 ненулевого приближения $x_0(t)$. В следующем приближении члены αx^2 и βx^3 дали третью гармонику. Ясно, что при подстановке ряда

$$x_0(t) + x_1(t) + \dots + x_n(t)$$

в член βx^3 появятся члены $x_n^3(t)$, которые дадут гармоники $3n\omega_0$ (см. "очевидные тригонометрические преобразования" на стр. 122). И, конечно, амплитуды гармоник быстро убывают с ростом их номера.

Задача 6.5. Найти параметры (6.105) для маятника при больших амплитудах его колебаний.

Воспользовавшись уравнением движения маятника (задача 6.1), найдем

$$m\ell\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi \approx -mg \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \dots \right),$$

или

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \frac{\omega_0^2}{6} \varphi^3, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

Сравнивая это уравнение с (6.92), найдем

$$\alpha = 0, \quad \beta = -\frac{\omega_0^2}{6}, \quad \kappa = -\frac{\omega_0}{16},$$

$$b_0 = b_1 = 0, \quad b_2 = -\frac{\varphi_0^3}{192},$$

φ_0 — амплитуда колебаний маятника.

§ 6.9. Нелинейный резонанс: установившиеся колебания*

Рассмотрим поведение осциллятора под действием внешней периодической силы $F_0 \sin \Omega t$. До какой величины возрастает амплитуда его колебаний, если частота Ω близка к резонансной частоте ω_0 ? Подчеркнем, что здесь мы рассматриваем *установившиеся колебания*, не обсуждая переходный

процесс, как это делалось в § 6.4 (формулы (6.47), (6.48)). Поэтому, говоря о возрастании амплитуды, мы сравниваем установившиеся значения амплитуд на частоте $\Omega \approx \omega_0$ и вдали от резонанса, $\Omega \gg \omega_0$ и $\Omega \ll \omega_0$. Добавим в уравнение (6.92) вынуждающую силу и трение, запишем уравнение вынужденных колебаний нелинейного осциллятора в форме, аналогичной (6.50):

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t - \alpha x^2 - \beta x^3. \quad (6.106)$$

Как учесть нелинейность? Проще всего перенести члены $\alpha x^2 + \beta x^3$ справа налево и объединить с $\omega_0^2 x$, используя результат (6.105):

$$\omega_0^2 x + \alpha x^2 + \beta x^3 \equiv \omega^2(a) \cdot x, \quad \omega(a)^2 = \omega_0^2 + \kappa a^2. \quad (6.107)$$

Здесь переменная частота $\omega(x)$ заменена ее приближенным значением из (6.105).

Тогда уравнение (6.106) можно представить в виде

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \omega^2(a) \cdot x = \frac{F_0}{m} \cdot \sin \Omega t. \quad (6.108)$$

В дальнейшем ограничимся случаем слабого трения

$$\lambda \ll \omega_0. \quad (6.109)$$

Подставив в (6.108) решение в виде (6.51), найдем, аналогично (6.55), уравнение для амплитуды a :

$$a = \frac{F_0/m}{\sqrt{[(\omega_0 + \kappa a^2)^2 - \Omega^2]^2 + (2\lambda\Omega)^2}}. \quad (6.110)$$

Введя *расстройку*

$$\xi = \Omega - \omega_0 \ll \omega_0, \quad (6.111)$$

приближенно можно записать

$$a \approx \frac{F_0}{2m\omega_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\kappa a^2 - \xi)^2 + \lambda^2}}. \quad (6.112)$$

Из полученного выражения немедленно можно сделать два вывода.

Во-первых, максимальное значение амплитуды достигается при $\xi = \kappa a^2$, т.е. при частоте, отличной от ω_0 :

$$a_{\max} = \frac{F_0}{2m\omega_0\lambda} \quad \text{при} \quad \xi = \kappa a^2. \quad (6.113)$$

Значение a_{\max} совпадает с величиной амплитуды *линейного осциллятора с трением* в резонансе (6.57). Это не удивительно, поскольку мы заменили частоту нелинейного осциллятора постоянной величиной $\omega(a^2)$ и выбрали частоту вынуждающей силы равной этой величине: $\Omega = \omega(a^2)$.

Во-вторых, при $\xi = \lambda = 0$, т.е. в резонансе для линейного осциллятора в отсутствие трения ($\Omega = \omega_0$, § 6.4), амплитуда колебаний равна

$$a(\omega_0) = a_0 \approx \left(\frac{F_0}{2\kappa m\omega_0} \right)^{1/3}. \quad (6.114)$$

Если же трение присутствует, $\lambda \neq 0$, то

$$a(\omega_0) < a_{\max}.$$

В случае *сильного трения* $\lambda \gg \kappa a^2$ можно определить *полуширину резонансной кривой* $2\Delta\Omega$, аналогично тому, как это сделано для линейного осциллятора в § 6.5. Положив в (6.112) $a = a_{\max}/2$, запишем уравнение для ξ^* , при котором амплитуда уменьшается вдвое:

$$\frac{a_{\max}}{2} \sqrt{\left(\frac{\kappa a_{\max}^2}{4} - \Delta\xi \right)^2} + \lambda^2 = \frac{F_0}{2m\omega_0} = a_{\max} \sqrt{(\kappa a_{\max})^2 + \lambda^2}.$$

Отсюда находим $\xi^* = \sqrt{3}\lambda$, и полуширина резонансной кривой, соответственно, равна

$$2\Delta\Omega \equiv 2\xi^* \approx 2\sqrt{3}\lambda \quad (6.115)$$

(сравни с (6.60)).

Исследуем зависимость амплитуды колебаний от расстройки ξ . Уравнение (6.112) – кубическое уравнение для амплитуды $a(\xi)$. Действительные корни этого уравнения дают искомые значения амплитуды. Удобно ввести безразмерные переменные

$$y = \frac{a}{a_0}, \quad \zeta = \frac{\xi}{\kappa a_0^2}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\kappa a_0^2}. \quad (6.116)$$

Подчеркнем, что амплитуда a_0 , определённая в (6.114), есть характеристика амплитуды силы и нелинейного осциллятора в отсутствие трения. В этих переменных уравнение для амплитуды (6.112) принимает вид:

$$y = \frac{1}{\sqrt{(y^2 - \zeta)^2 + \rho^2}}. \quad (6.117)$$

Разрешив (6.117) относительно ζ , получим

$$\zeta = y^2 \pm \sqrt{\frac{1}{y^2} - \rho^2}. \quad (6.118)$$

Нетрудно убедиться, что подкоренное выражение здесь всегда положительно, т.к. условие

$$y \leq \frac{1}{\rho}$$

означает всего лишь (см. обозначения (6.116) и (6.114)), что

$$a \leq \frac{F_0}{2m\omega_0\lambda} \equiv a_{\max}. \quad (6.119)$$

Чтобы найти *зависимость амплитуды осциллятора от расстройки*, построим функцию $y(\zeta)$ по формуле (6.118). Для этого проще всего построить зависимость $\zeta(y)$, после чего повернуть рисунок вокруг оси y на 180° , затем вокруг третьей оси на 90° . Получим кривую, которая существенно меняет свой вид с ростом трения (рис. 6.13). *В отсутствие трения*, т.е. $\rho = 0$ (рис. 6.13, а), амплитуда $a(\xi)$ растет при изменении расстройки ξ из области отрицательных значений к нулю – это кривая 1 на рис. 6.13, а, соответствующая знаку "–" перед корнем.

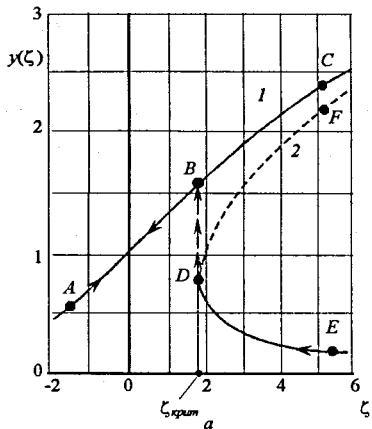


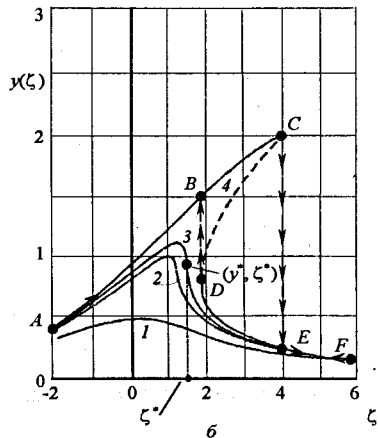
Рис. 6.13. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний нелинейного осциллятора от расстройки:

$a - \rho = 0$; кривые 1, 2 соответствуют знакам

"-" (1) и "+" (2) в (6.110);

b – значения ρ для кривых 1 – 4 равны соответственно 2,0 (1); 1,0 (2); 0,8667 (3 – критическая кривая); 0,5 (4).

$$y(\zeta) = \frac{a(\xi)}{a_0}; \quad \zeta = \frac{\xi}{ka_0^2}; \quad \rho = \frac{\lambda}{ka_0^2}.$$



При положительной и достаточно большой расстройке $\zeta > \zeta_{\text{крит}}$ появляется вторая ветвь кривой $y(\zeta)$, которая соответствует знаку "+" перед корнем в (6.118):

$$\zeta = y^2 + \frac{1}{y}.$$

Кривые 1 и 2 имеют общую асимптоту $y_{\text{асимпт}}(\zeta) = \sqrt{\zeta}$, а кривая 2, кроме того, ещё и асимптоту $y_{\text{асимпт}}^{(2)} = 0$.

Значение критической точки D найдём из очевидного условия

$$\frac{d\zeta}{dy} = 2y - \frac{1}{y^2} = 0,$$

что даёт

$$y_{\text{крит}} = 2^{2/3}, \quad \zeta_{\text{крит}} = \frac{3}{2^{2/3}} = 1,8899, \quad a(\xi_{\text{крит}}) = 0,7937a_0. \quad (6.120)$$

Отметим, что значение $y(\zeta)$ кривой 1 в точке B (т.е. при $\zeta = \zeta_{\text{крит}}$) равно

$$y_B = 2^{2/3} = 1,5874.$$

В области $\zeta > \zeta_{\text{крит}}$ ($\xi > \xi_{\text{крит}}$) все три корня уравнения (6.117) действительные, а решение уравнения (6.118) неоднозначно – возможны три значения амплитуды $y(\zeta)$, т.е. $a(\xi)$. Из физических соображений ясно, что все три решения не могут быть устойчивы. Можно показать (см. задачу 6.7 в § 6.10), что решения, соответствующие кривой 1 (ABC) и ветви DE кривой 2 рис. 6.13, а, устойчивы. Решение, соответствующее ветви DF кривой 2 (пунктир), – неустойчиво. Тем не менее остается неоднозначность двух устойчивых решений в области $\zeta > \zeta_{\text{крит}}$ (ветви BC и DE). Эта неоднозначность не устраняется в случае осциллятора без трения. Ниже мы увидим, что достаточно присутствия слабого трения, чтобы неоднозначность исчезла.

Неограниченный рост $y(\zeta)$ с ростом ζ на кривой 1 рис. 6.13, а не означает, что нелинейный осциллятор можно в отсутствие трения раскачать до бесконечной амплитуды. Если мы "включили" силу сразу на частоте Ω , существенно большей ω_0 ($\zeta \gg \zeta_{\text{крит}}$), у осциллятора "нет шансов" попасть на кривую 1 – он раскачается до амплитуды, соответствующей ветви ED . Если же включить силу на частоте $\Omega \approx \omega_0$ ($\zeta < \zeta_{\text{крит}}$) и, "добравшись" до кривой 1, начать увеличивать частоту в область $\zeta \gg \zeta_{\text{крит}}$, рано или поздно вступит в силу другое ограничение – "подростут" и станут существенны следующие нелинейные члены разложения (6.107), т.е. начнёт расти жесткость осциллятора. Поэтому, в частности, с ростом a приближение (6.108) перестает работать и нет оснований считать, что амплитуда будет неограниченно возрастать с увеличением расстройки. Таким образом, даже в отсутствие трения значения амплитуды вблизи резонанса ограничены.

Рассмотрим теперь случай *слабого трения*. Кривые $y(\zeta)$ (рис. 6.13, б), построенные численно по формуле (6.118) так же, как это сделано для рис. 6.13, а (см. выше), имеют характерный вид. При большом трении λ или малой силе F_0

(кривая 1) зависимость $a(\xi)$ не отличается принципиально от аналогичной зависимости для линейного осциллятора с трением (рис. 6.10). Её полуширина $2 \cdot \Delta\zeta \approx 6$, что совпадает с оценкой (6.115) для $\rho = 2$ ($2\sqrt{3}\rho = 6,9$ для $\rho = 2$). С уменьшением трения максимум резонансной кривой растет и сдвигается вправо (кривая 2). Наконец, при уменьшении трения ниже некоторой критической величины ρ^* (см. ниже) у кривой $a(\xi)$ "отрастает" верхняя правая ветвь – петля, в результате чего при $\zeta > \zeta^*$ значение $a(\xi)$ становится неоднозначным (кривая 4).

Прежде чем обсудить эту проблему, найдем параметры критической кривой (кривая 3 на рис. 6.13, б). Очевидно, на кривой с петлей (кривая 4) должны существовать две точки (С и D на рис. 6.13, б), где

$$\frac{dy}{d\zeta} = \infty.$$

На критической кривой, разделяющей кривые с петлей ($\rho < \rho^*$) и кривые без петли ($\rho > \rho^*$), эти точки сливаются, совпадая с точкой перегиба кривой $y(\zeta)$ при $\rho \geq \rho^*$.

Попытка решить задачу "в лоб" путём вычисления $d\zeta/dy$ из (6.118) приводит к алгебраическому уравнению, неразрешимому в простых аналитических функциях. Поэтому перепишем (6.118) в виде

$$y^2 \left[(y^2 - \zeta)^2 + \rho^2 \right] = 1.$$

Дифференцируя это равенство по ζ , найдем

$$2y \frac{dy}{d\zeta} \left[(y^2 - \zeta)^2 + \rho^2 \right] + y^2 \cdot 2(y^2 - \zeta) \left[2y \frac{dy}{d\zeta} - 1 \right] = 0.$$

Отсюда

$$\frac{dy}{d\zeta} = \frac{y \cdot (y^2 - \zeta)}{(y^2 - \zeta)^2 + \rho^2 + 2y^2(y^2 - \zeta)}. \quad (6.121)$$

Из (6.121) следует, в частности, условие максимума амплитуды при $\rho \neq 0$:

$$\frac{dy}{d\zeta} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = \zeta_{\max} = y_{\max}^2, \quad \rho \neq 0. \quad (6.122)$$

Подставив это значение ζ_{\max} в (6.117), найдем y_{\max} . В результате имеем

$$y_{\max} = y(\zeta_{\max}) = \frac{1}{\rho}, \quad a_{\max} = \frac{F_0}{2m\omega_0\lambda}, \quad \zeta_{\max} = \frac{1}{\rho^2}. \quad (6.123)$$

Таким образом, цепочка вычислений "замкнулась": максимальное значение амплитуды нелинейного осциллятора с трением a_{\max} совпало с ранее найденным (6.119).

Теперь можно вернуться к анализу кривой $y(\zeta)$, или $a(\xi)$. Заметим, что $dy/d\zeta = \infty$ в точках, где знаменатель в (6.121) обращается в нуль, т.е.

$$\zeta^2 - 4y^2\zeta + 3y^4 + \rho^2 = 0.$$

Это уравнение можно разрешить относительно ζ :

$$\zeta = 2y^2 \pm \sqrt{y^4 - \rho^2}$$

– и относительно y^2 :

$$y^2 = \frac{1}{3} \left(2\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 3\rho^2} \right).$$

Критической кривой 3 на рис. 6.13, б соответствует случай, когда точки С и D сливаются, т.е. точка (y^*, ζ^*) , где $dy/d\zeta = \infty$, единственная. А это означает, что в этой точке оба корня в полученных выражениях должны обращаться в нуль, что имеет место при

$$y^* = \sqrt{\rho}, \quad \zeta^* = \sqrt{3}\rho. \quad (6.124)$$

А теперь потребуем, чтобы точка (6.124) лежала на кривой $y(\zeta)$ (6.118). Подставив в уравнение (6.118) значения y^*, ζ^* (6.124), получим уравнение для критического значения параметра ρ :

$$\sqrt{3}\rho^* = \rho^* + \sqrt{\frac{1}{\rho^{*2}} - (\rho^*)^2}.$$

Знак "+" перед корнем здесь выбран из тех соображений, что расположение точки (y^*, ζ^*) следует ожидать в области $\zeta > 0$. Разрешив полученное уравнение для ρ^* , найдем

$$\rho^* = \left[(\sqrt{3} - 1)^2 + 1 \right]^{-1/3} = 0,8667.$$

Подставив это значение ρ^* в (6.124), найдем *параметры критической кривой*:

$$y^* = 0,9310; \quad \zeta^* = 1,5011; \quad y_{\max}(\rho^*) = 1/\rho^* = 1,1537. \quad (6.125)$$

Подстановкой этих параметров в (6.118) легко убедиться, что точка (y^*, ζ^*) лежит на этой кривой при $\rho = \rho^*$ и знаке "+" перед корнем.

Подчеркнем, что кривые в переменных y, ζ являются универсальными, т.е. зависящими от безразмерных параметров осциллятора.

Обсудим еще раз особенности резонансной кривой (рис. 6.13, б). Если (очень медленно) увеличивать частоту вынуждающей силы Ω из области $\zeta < 0$ ($\Omega < \omega_0$), то при фиксированном значении F_0 амплитуда колебаний будет монотонно возрастать (участок AB) до тех пор, пока ζ не попадет в область значений $\zeta > \zeta^*$. Здесь, как и для осциллятора без трения (рис. 6.13, а, участок $\zeta > \zeta_{\text{крит}}$), формально возможны три разных значения амплитуды $y(\zeta)$, среднее из которых (участок CD , показанный пунктиром) является неустойчивым (см. задачу 6.7 в § 6.10). Это достаточно наглядно видно при дальнейшем увеличении ζ от точки B : по достижении точки C осциллятору "просто некуда деться" и он скачком сбрасывает амплитуду до уровня ветви EF , где она монотонно убывает с ростом отстройки частоты ζ . Источник силы воспринимает этот скачок как мгновенное увеличение жесткости осциллятора (рис. 6.14). Если же уменьшать ζ от точки F влево, то амплитуда монотонно возрастает до точки D , где скачком увеличивается до уровня ветви BA . Ветвь CD кривой 4 не реализуется, так как состояние осциллятора на ней неустойчиво: если осциллятор случайно попадает в это состояние, он под действием сколь угодно малых возмущений переходит в одно из двух устойчивых состояний на ветвях BC или DE . Такое поведение осциллятора, описываемое диаграммой $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A$, типично для нелинейных систем и называется *гистерезисом* (от греч. *hysteresis* – запаздывание). В данном случае "запаздывает" скачок амплитуды.

Важный вывод, который следует из рассмотрения, проведенного в этом параграфе: амплитуда колебаний нелинейного осциллятора в резонансе

ограничена даже в отсутствие трения. К этому вопросу мы вернемся в двух следующих параграфах.

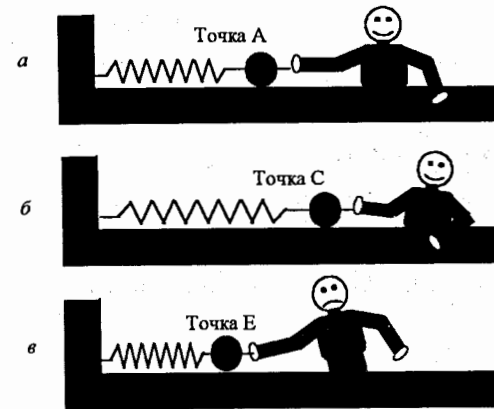


Рис. 6.14. Поведение нелинейного осциллятора с трением при изменении частоты вынуждающей силы: $\Omega_A < \Omega_C \approx \Omega_E$

§ 6.10. Нелинейный резонанс: переходный режим, сепаратриса*

До сих пор мы рассматривали установившиеся колебания, считая амплитуду и частоту колебаний нелинейного осциллятора хотя и связанными друг с другом, но неизменными во времени. На самом деле оба эти параметра изменяются, если осциллятор находится вблизи резонанса. При этом, как показано выше, связь между амплитудой и частотой в стационарном режиме (установившиеся колебания с постоянными амплитудой и фазой) описывается соотношениями (6.117), (6.118) и кривыми рис. 6.13.

Рассмотрим теперь переходный режим, начав с качественного описания поведения маятника под действием переменной силы со строго резонансной частотой. Если вначале маятник покоился, то после включения силы он начнет колебаться с амплитудой, линейно возрастающей со временем (см. (6.48)). По мере роста амплитуды всё более заметной становится нелинейность маятника, а это означает, что его собственная частота начинает изменяться в соответствии с соотношениями (6.105). В результате маятник "уходит" из точного резонанса,

появляется сдвиг фаз между отклонением маятника $x(t)$ и силой $F(t) = F_0 \sin \Omega t$, и этот сдвиг нарастает по мере роста амплитуды колебаний маятника $a(t)$. Наконец, наступает момент, когда сдвиг фаз достигает значения, при котором сила начинает тормозить его движение. Это вызывает уменьшение амплитуды, а с ней и постепенный возврат значения частоты колебаний к исходному значению. Но тогда сила снова становится ускоряющей, вызывая рост амплитуды, и т.д. Тем самым мы пришли к медленным колебаниям амплитуды и сдвига фазы.

Исследуем это явление, используя подход, значительно упрощенный по сравнению с развитым в современной теории колебаний. Вернемся к уравнению (6.108) и ограничимся случаем без трения ($\lambda = 0$). Будем искать решение в виде (6.51):

$$x(t) = a(t) \cdot \sin(\Omega t + \psi(t)), \quad (6.126)$$

но амплитуду $a(t)$ и фазу $\psi(t)$ считаем теперь зависящими от времени. Вычислим вторую производную по времени функции $x(t)$ (6.126), введя для краткости записи обозначение

$$\varphi(t) = \Omega t + \psi(t). \quad (6.127)$$

Найдем

$$\ddot{x}(t) = \ddot{a} \cdot \sin \varphi + 2\dot{a}(\Omega + \dot{\psi}) \cdot \cos \varphi - a(\Omega + \dot{\psi})^2 \cdot \sin \varphi + a\ddot{\psi} \cdot \cos \varphi.$$

Подставим это выражение в уравнение (6.108). Получим

$$\left[\ddot{a} - a(\Omega + \dot{\psi})^2 + a(\omega_0 + \kappa a^2)^2 \right] \cdot \sin \varphi + [2\dot{a}(\Omega + \dot{\psi}) + a\ddot{\psi}] \cdot \cos \varphi = \frac{F_0}{m} \cdot \sin \Omega t. \quad (6.128)$$

Теперь раскроем $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ и приравняем сомножители при $\cos \Omega t$ в левой и правой частях, а затем повторим ту же процедуру с сомножителями при $\sin \Omega t$ (как это делалось в § 6.5). В результате придем к системе из двух дифференциальных уравнений:

$$A \cdot \cos \psi - B \cdot \sin \psi = \frac{F_0}{m},$$

$$A \cdot \sin \psi + B \cdot \cos \psi = 0,$$

где введены обозначения

$$A(t) = \ddot{a} + \left[(\omega_0 + \kappa a^2)^2 - (\Omega + \dot{\psi})^2 \right] a,$$

$$B(t) = 2\dot{a}(\Omega + \dot{\psi}) + a \cdot \ddot{\psi}.$$

Напрашивается преобразование этих уравнений к виду, более удобному для анализа. Умножив первое уравнение на $\cos \psi$, а второе на $\sin \psi$, сложим их и получим

$$A(t) = \frac{F_0}{m} \cdot \cos \psi.$$

Аналогично, умножив первое уравнение на $\sin \psi$, а второе на $\cos \psi$, после вычитания одного из другого найдем

$$B(t) = -\frac{F_0}{m} \cdot \sin \psi.$$

В этой форме записи проще разделить малые и большие величины. Будем считать, что амплитуда $a(t)$ и фаза $\psi(t)$ изменяются со временем достаточно медленно, так что

$$\frac{|\dot{a}|}{a} \sim |\dot{\psi}| \ll \omega_0 \sim \Omega, \quad |\dot{a}| \Omega \gg a |\ddot{\psi}|, \quad |\ddot{a}| \ll \omega_0 |\dot{\psi}|. \quad (6.129)$$

Кроме того, введем опять расстройку (6.111), считая её также малой:

$$\xi = \Omega - \omega_0 \sim \kappa a^2 \ll \omega_0 \sim \Omega. \quad (6.130)$$

Тогда в выражениях для A и B можно сохранить только старшие по порядку величины члены:

$$A(t) \approx 2\omega_0 (\kappa a^2 - \xi - \dot{\psi}) a,$$

$$B(t) \approx 2\dot{a} \Omega.$$

В справедливости этого приближения мы убедимся ещё раз ниже (см. (6.137)). В результате с учётом равенства (6.114) система уравнений может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \kappa a^2 - \xi - \frac{\kappa a_0^3}{a} \cdot \cos \psi, \\ \frac{da}{dt} &= -\kappa a_0^3 \cdot \sin \psi, \\ \kappa a_0^3 &\equiv \frac{F_0}{2m\omega_0}. \end{aligned} \quad (6.131)$$

Задача 6.6. Получить уравнения (6.131) из уравнения (6.128), используя метод усреднения.

Умножим обе части уравнения (6.128) на $\sin \varphi$ и усредним по быстрым колебаниям с частотами Ω и выше. Считая функции $a(t)$, $\psi(t)$ и их производные медленно меняющимися во времени, вынесем их из под интеграла при усреднении. Например:

$$\overline{\ddot{a} \cdot \sin^2 \varphi} = \frac{1}{T} \int_0^T \ddot{a} \cdot \sin^2 \varphi \cdot dt \approx \frac{\ddot{a}}{T} \int_0^T \sin^2 \varphi \cdot dt = \frac{\ddot{a}}{2}, \quad \text{где } T = 2\pi/\Omega.$$

Учитывая, что $\overline{\cos \varphi \cdot \sin \varphi} = 0$ и

$$\overline{\sin \Omega t \cdot \sin \varphi} \approx \cos \psi \cdot \overline{\sin^2 \Omega t} + \sin \psi \cdot \overline{\cos \Omega t \cdot \sin \Omega t} = \frac{\cos \psi}{2},$$

приходим к первому из уравнений (6.131).

Умножая обе части уравнения (6.128) на $\cos \varphi$ и производя операцию усреднения, аналогично получаем второе из уравнений (6.131).

Таким образом, проведенная выше операция разделения по фазовым множителям эквивалентна операции усреднения с выделением медленных переменных – амплитуды $a(t)$ и фазы $\psi(t)$.

Прежде всего, отметим два частных решения системы уравнений (6.131).

Решение 1. Второе из уравнений (6.131) дает закон роста амплитуды линейного осциллятора в резонансе (6.48), если фаза ψ выбрана соответствующим образом:

$$\psi = -\frac{\pi}{2}, \quad a(t) = \frac{F_0 t}{2\omega_0 m}. \quad (6.132)$$

Заметим, что во втором уравнении нелинейность к фактически отсутствует.

Поэтому, положив $\kappa = 0$, мы не изменим результат (6.132). Тогда при $\xi = 0$ обе части первого уравнения (6.131) обращаются тождественно в нуль. Таким

образом, решение 1 уравнений (6.131) описывает поведение линейного осциллятора в точном резонансе.

Решение 2. При нулевой и постоянной фазе ($\psi = 0$, $\dot{\psi} = 0$) и при постоянной амплитуде ($\dot{a} = 0$) второе уравнение дает тождественный нуль, а первое принимает вид, точно совпадающий с уравнением для амплитуды нелинейного осциллятора (6.112) в отсутствие трения ($\lambda = 0$). Это означает, что система уравнений (6.131) даёт правильное значение амплитуды установившихся колебаний нелинейного осциллятора вблизи резонанса (рис. 6.13, а).

Теперь можно описать картину переходного процесса в осцилляторе при включении переменной силы, имеющей частоту, близкую к собственной частоте осциллятора ω_0 . Будем считать, что амплитуда силы F_0 достаточно мала, так что рост амплитуды колебаний $a(t)$ происходит медленно и условие (6.129) выполняется.

Пусть частота изменения силы Ω точно совпадает с частотой ω_0 . Тогда вначале амплитуда колебаний $a(t)$ растет линейно со временем, в соответствии с решением 1. Когда амплитуда $a(t)$ достигает значения, при котором становится существенной нелинейность осциллятора, т.е.

$$\kappa a^2 \sim \omega_0/3,$$

осциллятор переходит в режим колебаний, в пределе описываемый решением 2 при $\psi = 0$:

$$a(t) \rightarrow a_0, \quad \psi \rightarrow 0,$$

где a_0 – корень первого из уравнений (6.131) при $\psi = 0$, $\xi = 0$ (см. (6.114)). Для такого перехода фаза колебаний осциллятора должна измениться от $-\pi/2$ до нуля. а это означает, что неизбежно возникает режим колебаний, в котором $\dot{\psi}(t) \neq 0$, а закон роста амплитуды отличается от линейного закона.

Можно найти решение системы уравнений (6.131) для $a(t)$, близкого к амплитуде a_0 (6.114). Для этого продифференцируем первое из уравнений (6.131) и будем удерживать члены порядка ψ , \dot{a} , т.е. пренебрежем членами порядка $\dot{a}\xi$ и

т.п. Учтём также, что в рассматриваемой задаче $\xi = \text{const}$, т.к. это заданная расстройка. В результате получим

$$a\ddot{\psi} \approx 3\kappa a^2 \cdot \dot{a} - \kappa a_0^3 \cdot \sin \psi \cdot \dot{\psi}.$$

Подставим сюда \dot{a} из второго уравнения (6.131) и положим $a = a_0$. В результате придём к уравнению

$$\ddot{\psi} + \kappa a_0^2 (\dot{\psi} + 3\kappa a_0^2) \cdot \sin \psi = 0. \quad (6.133)$$

Слагаемое $\dot{\psi}$ даёт при $\psi \ll 1$ малый член $\psi \dot{\psi}$. Поэтому грубо приближенно примем уравнение для ψ в виде

$$\ddot{\psi} + 3(\kappa a_0^2)^2 \cdot \sin \psi = 0. \quad (6.134)$$

А это знакомое уже уравнение нелинейного "маятника" (см. § 6.8). Частота его малых (линейных) колебаний есть, очевидно,

$$\Omega_\phi = \sqrt{3\kappa} a_0^2 = \sqrt{3\kappa}^{1/3} \left(\frac{F_0}{2m\omega_0} \right)^{2/3}. \quad (6.135)$$

Это так называемая *частота фазовых колебаний* нелинейного осциллятора вблизи резонанса. Прделав с уравнением (6.134) ту же операцию интегрирования, что и для нелинейного маятника, придём к соотношению, аналогичному (6.93):

$$\dot{\psi}^2 = \dot{\psi}_0^2 - 2\Omega_\phi^2 (1 - \cos \psi). \quad (6.136)$$

Константа $\dot{\psi}_0$ есть значение $\dot{\psi}$ при $\psi = 0$, её величина определяется "предысторией" процесса роста амплитуды осциллятора под действием принуждающей силы.

Здесь уместно оценить справедливость сделанных приближений.

Поскольку $\Omega_\phi \sim \kappa a_0^2$, то

$$|\dot{\psi}| \leq \Omega_\phi |\psi_{\max}| \leq \Omega_\phi \cdot \pi, \quad |\dot{a}| \leq \Omega_\phi a_0, \quad |\ddot{a}| \leq \Omega_\phi^2 a_0. \quad (6.137)$$

Легко проверить, что уравнения (6.131) получены с достаточно хорошей точностью.

Для нахождения амплитуды $a(t)$ положим в первом из уравнений (6.131)

$$a(t) = a_\xi + \delta(t), \quad |\delta(t)| \ll a_\xi, \quad (6.138)$$

где a_ξ — установившееся значение амплитуды вблизи резонанса в отсутствие трения, которое есть решение уравнения (6.118) при $\lambda = 0$ ($\rho = 0$). При этом мы из двух возможных решений $\xi(a_\xi)$ выбираем то, которое соответствует верхней ветви резонансной кривой (рис. 6.13, а), т.е. расстройка не превышает критического значения (6.120):

$$\xi = \kappa a_\xi^2 - \frac{\kappa a_0^3}{a_\xi}, \quad \xi < \xi_{\text{крит}} = 1,8899 \kappa a_0^2. \quad (6.139)$$

С учетом этого равенства из первого уравнения (6.131) найдем, в линейном по $\Delta a(t)$ приближении,

$$\delta(t) \approx \frac{\dot{\psi}}{3\kappa a_\xi} - \frac{a_0^3}{3a_\xi^2} (1 - \cos \psi).$$

Затем подставим сюда $\dot{\psi}$ из (6.136). В результате имеем

$$a(\psi) = a_\xi + \delta(\psi) \approx a_\xi \left(1 - \frac{a_0^3}{3a_\xi^3} (1 - \cos \psi) \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{a_0^2}{a_\xi^2} \cdot \sqrt{C - 1 + \cos \psi} \right), \quad (6.140)$$

$$C = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{\dot{\psi}_0}{\kappa a_0^2} \right)^2.$$

В точном резонансе ($\xi = 0$, $a_\xi = a_0$) это выражение принимает вид

$$a_{\text{res}}(\psi) \approx a_0 \left(\frac{2 + \cos \psi}{3} \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{C - 1 + \cos \psi} \right). \quad (6.141)$$

В итоге мы получили выражение, аналогичное (6.94), что означает существование на плоскости $(a(\psi), \psi)$ вблизи резонанса некоторой области, в которой амплитуда и фаза ограничены по величине (рис. 6.15). Как и в случае (6.94), мы имеем *сепаратрису*, отделяющую область ограниченных значений фазы ψ от области, где фаза изменяется неограниченно. Сепаратриса описывается соотношениями (6.140), (6.141) при $C = 2$, что соответствует неотрицательному значению подкоренного выражения (кривая 4 на рис. 6.15). Однако в этом случае,

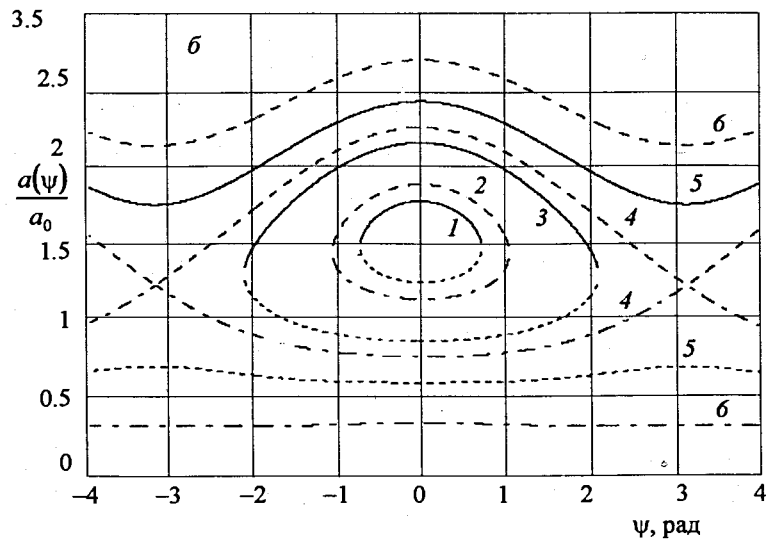
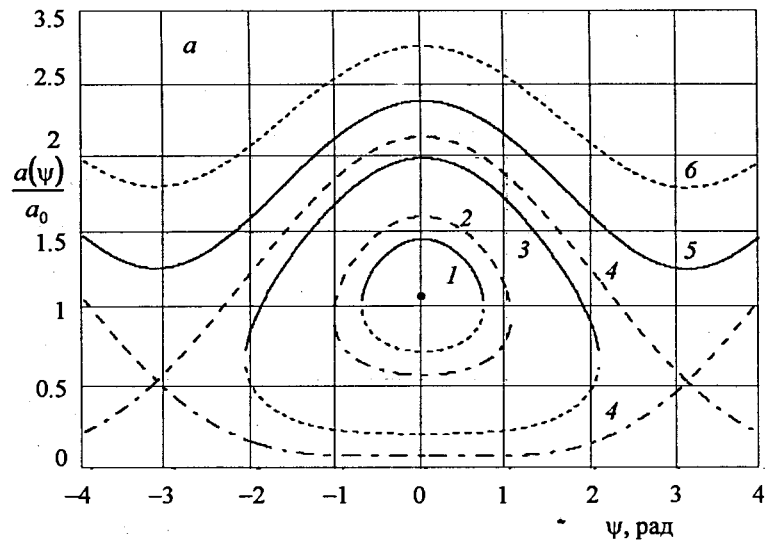


Рис. 6.15. "Движение" нелинейного осциллятора на фазовой плоскости $(a(\psi), \psi)$ вблизи резонанса (6.132): $a - \xi = \xi_{\min} = 0,0795\kappa a_0^2$ ($a_\xi = 1,0746a_0$),

$$b - \xi = 1,5833\kappa a_0^2 \quad (a_\xi = 1,5a_0),$$

$$C = 0,25 (1); 0,5 (2); 1,5 (3); 2 (4 - \text{сепаратриса}); 3 (5); 4 (6)$$

в отличие от (6.94), на кривой $a(\psi)$ существует, вообще говоря, область отрицательных значений амплитуды, что физически бессмысленно: амплитуда по определению есть положительная величина. Это указывает на приближенный характер проведенного рассмотрения. Действительно, условие $|\alpha| \ll a_\xi$ выполняется для (6.131) далеко не во всей области возможных значений $a(\psi)$. Тем не менее, полученные результаты позволяют дать качественно правильное описание поведения нелинейного осциллятора вблизи резонанса и сделать оценки по порядку величины, совпадающие с результатами более строгого анализа.

Отметим, что в точном резонансе (6.141) минимальное значение амплитуды на сепаратрисе отрицательно:

$$a_{\min} \Big|_{\substack{\xi=0 \\ C=2}} = a^{(-)}(0) \Big|_{\substack{\xi=0 \\ C=2}} = a_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \right) = -0,1547.$$

Для того, чтобы поведение нелинейного осциллятора повторяло поведение маятника (6.94), потребуем выполнения условия

$$(a_{\min})_{\text{sep}} > 0.$$

Это дает нам минимальное значение a_ξ , при котором сепаратриса существует. Из (6.140) находим

$$a_{\min} \Big|_{\substack{\xi \neq 0 \\ C=2}} = a^{(-)}(0) \Big|_{\substack{\xi \neq 0 \\ C=2}} = a_\xi \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a_0^2}{a_\xi^2} \right).$$

Эта величина положительна, если

$$a_\xi > \left(\frac{3}{4} \right)^{1/4} \cdot a_0 \approx 1,0746a_0. \quad (6.142)$$

Тогда из (6.139) находим граничное значение ξ ($\rho=0$):

$$\xi_{\min} = 0,224 \cdot \kappa a_0^2. \quad (6.143)$$

Картина фазового движения осциллятора в этом случае приведена на рис. 6.15, а. Следовательно, нужно совсем немного сдвинуть частоту от точного резонанса, чтобы получить сепаратрису. Размах сепаратрисы по амплитуде равен

$$\Delta a = a^{(+)}(0) - a^{(-)}(0) = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a_0^2}{a_\xi} \leq 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3/4} \cdot a_0 \approx 2,48 a_0. \quad (6.144)$$

При увеличении расстройки амплитуда a_ξ возрастает согласно уравнению (6.118) и верхней ветви кривой $a_\xi(\xi)$ на рис. 6.13, а. Соответственно, картина "движения" осциллятора на фазовой плоскости становится все более похожей на полученную для маятника (сравни рис. 6.12 и 6.15, б).

Естественно задать вопрос о возможности существования сепаратрисы при $\xi > \xi_{крит}$, т.е. в области неоднозначного решения $a_\xi(\xi)$. Как уже сказано выше, в этой области значений ξ устойчивой является нижняя ветвь кривой, на которой $a_\xi(\xi) \leq a_\xi(\xi_{крит}) = 0,7937 a_0$ (см. (6.120)). А для таких значений a_ξ , как мы только что выяснили, сепаратриса не существует (см. (6.142)). Тем самым мы получаем оценку размера сепаратрисы по частоте:

$$0,0795 \kappa a_0^2 = \xi_{\min} \leq \xi \leq \xi_{крит} = 1,8899 \kappa a_0^2,$$

$$\Delta \xi \sim 2 \kappa a_0^2. \quad (6.145)$$

Эту величину называют *шириной резонанса*. А сама область *нелинейного резонанса* располагается левее области неоднозначного решения (рис. 6.13, а). Центр области (центр сепаратрисы) находится, как следует из (6.140) и рис. 6.15, в точке

$$C = 0(\psi = 0), \quad \psi = 0, \quad a_{center} = a_\xi. \quad (6.146)$$

Задача 6.7. Исследовать устойчивость нелинейного осциллятора без трения при изменении частоты вынуждающей силы, используя уравнения (6.131).

Пусть в начальный момент осциллятор совершал стационарные колебания с амплитудой $a(\xi) \equiv a_\xi$ и его состояние соответствовало точке (a_ξ, ξ) , расположенной на одной из двух кривых рис. 6.13, а. Рассмотрим поведение осциллятора после воздействия на него мгновенного возмущения — например, какого-то внешнего толчка, в результате чего амплитуда и фаза колебаний получили малые приращения:

$$a_\xi \rightarrow a_\xi + \Delta a, \quad \psi \rightarrow \psi + \Delta \psi.$$

Подставим возмущённые значения в (6.131), учитывая, что до "толчка" колебания совершались с постоянной амплитудой ($\dot{a}_\xi = 0$) и фазой ($\dot{\psi} = 0$). Произведя соответствующие разложения, получим в линейном по $\Delta a, \Delta \psi$ приближении

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\psi}{dt} &= \kappa a_\xi^2 - \xi - \frac{\kappa a_0^3}{a_\xi} \cdot \cos \psi + \kappa \left(2\dot{a}_\xi + \frac{a_0^3}{a_\xi^2} \cdot \cos \psi \right) \cdot \Delta a + \frac{\kappa a_0^3}{a_\xi} \cdot \sin \psi \cdot \Delta \psi, \\ \frac{d\Delta a}{dt} &= -\kappa a_0^3 \cdot \sin \psi - \kappa a_0^3 \cdot \cos \psi \cdot \Delta \psi. \end{aligned} \quad (6.147)$$

Начнём со случая, когда точка (a_ξ, ξ) находилась на кривой I (ABC) рис. 6.13, а, т.е. a_ξ и ξ связаны уравнением (6.147):

$$\xi^{(1)} = \kappa \left(a_\xi^2 - \frac{a_0^3}{a_\xi} \right). \quad (6.148)$$

Сразу же отметим, что для этой кривой

$$\frac{d\xi^{(1)}}{da_\xi} = \kappa \left(2a_\xi + \frac{\kappa a_0^3}{a_\xi^2} \right) > 0.$$

В первом из уравнений (6.147) три первых члена в правой части описывают невозмущённое состояние, их сумма должна быть поэтому равна нулю. Отсюда

$$\cos \psi = \frac{\kappa a_\xi^2 - \xi}{\kappa a_0^3} \cdot a_\xi, \quad (6.149)$$

что для кривой I согласно (6.148) даёт

$$\cos \psi^{(1)} = 1, \quad \psi^{(1)} = 0, \quad (6.150)$$

как и должно быть для решения 2. Тогда уравнения (6.147) для "возмущённого" состояния вблизи кривой I принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\psi}{dt} - \kappa \left(2a_\xi + \frac{a_0^3}{a_\xi^2} \right) \cdot \Delta a &= 0, \\ \frac{d\Delta a}{dt} + \kappa a_0^3 \cdot \Delta \psi &= 0. \end{aligned} \quad (6.151)$$

Мы получили систему линейных однородных дифференциальных уравнений, стандартный способ решения которых состоит в поиске решения в виде экспонент

$$\Delta \psi(t) = A e^{pt}, \quad \Delta a(t) = B e^{pt}.$$

Подстановка этого решения в (6.151) приводит к системе линейных однородных алгебраических уравнений для коэффициентов A и B, которая имеет ненулевое решение, если

$$\text{Det} = \begin{vmatrix} p & -\kappa \left(2a_\xi + \frac{a_0^3}{a_\xi^2} \right) \\ \kappa a_0^3 & p \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда находим значения характеристических чисел для случая кривой 1:

$$p_{1,2} = \pm ip_0, \quad p_0 = \kappa \sqrt{\left(2a_\xi + \frac{a_0^3}{a_\xi^2} \right) \cdot a_0^3}. \quad (6.152)$$

Ясно, что p_0 — действительное число, поэтому решение описывается суммой комплексных экспонент

$$\Delta \tilde{a}(t) = \tilde{B}_1 e^{ip_0 t} + \tilde{B}_2 e^{-ip_0 t}.$$

Физическое решение есть, как известно, действительная часть комплексного решения

$$\Delta \tilde{a}(t) = \text{Re} \{ \Delta \tilde{a}(t) \} = C_1 \cos p_0 t + C_2 \sin p_0 t. \quad (6.153)$$

Константы C_1 и C_2 определяются из начальных условий — величины $\Delta a(0)$ и скорости скачка амплитуды. Для нас в данном случае знать их величину не принципиально. Для выяснения вопроса об устойчивости колебаний достаточно заметить, что

$$|\Delta a(t)| = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

имеет конечное значение. Тем самым показано, что в результате "толчка" точка (a_ξ, ξ) смещается на ограниченное расстояние от кривой 1, совершая в дальнейшем колебания с частотой p_0 вокруг этой кривой. Следовательно, мы выяснили, что *вынужденные колебания осциллятора на резонансной кривой 1 всегда устойчивы.*

Перейдём теперь к случаю кривой 2, для которой

$$\xi^{(2)} = \kappa \left(a_\xi^2 + \frac{a_0^3}{a_\xi} \right). \quad (6.154)$$

Теперь производная

$$\frac{d\xi^{(2)}}{da_\xi} = \kappa \left(2a_\xi - \frac{a_0^3}{a_\xi^2} \right) \quad (6.155)$$

имеет разный знак для двух ветвей кривой 2:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi^{(2)}}{da_\xi} &> 0, \quad \text{ветвь } DF, \\ \frac{d\xi^{(2)}}{da_\xi} &< 0, \quad \text{ветвь } DE. \end{aligned} \quad (6.156)$$

Повторяем процедуру, проделанную с решением для кривой 1: подставим $\xi^{(2)}$ из (6.154) в уравнение (6.149). Находим

$$\cos \psi^{(2)} = -1, \quad \text{откуда } \psi^{(2)} = \pm \pi.$$

Тогда уравнения (6.147) дают нам

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta \psi}{dt} - \kappa \left(2a_\xi - \frac{a_0^3}{a_\xi^2} \right) \cdot \Delta a &= 0, \\ \frac{d\Delta a}{dt} - \kappa a_0^3 \cdot \Delta \psi &= 0. \end{aligned}$$

Далее, аналогично (6.152), находим значения характеристических чисел для случая кривой 2:

$$q_{1,2} = \pm q, \quad q = \kappa \sqrt{\left(2a_\xi - \frac{a_0^3}{a_\xi^2} \right) \cdot a_0^3}. \quad (6.157)$$

Этот результат принципиально отличается от (6.152): подкоренное выражение, как следует из (6.155) и (6.156), положительно для ветви DA и отрицательно для ветви DE, т.е.

$$q = \begin{cases} |q|, & \text{ветвь } DF, \\ i|q|, & \text{ветвь } DE. \end{cases}$$

Это означает, что решение в форме комплексных экспонент имеет место только для ветви DE. Для ветви DF решение есть линейная комбинация двух действительных экспонент, из которых положительная даёт неограниченный рост во времени начального возмущения.

Таким образом, мы показали, что состояния осциллятора в точках (a_ξ, ξ)

устойчивы на кривой 1 и ветви DE кривой 2,

неустойчивы на ветви DF кривой 2.

Полученное решение не даёт ответа на вопрос о поведении осциллятора в области $\xi > \xi_{\text{крит}}$, где существуют два устойчивых состояния. Как мы видели в предыдущем параграфе, выбор состояния определяется начальными условиями — значениями частоты и вынуждающей силы при $t = 0$.

§ 6.11. Нелинейный резонанс при большой расстройке.

Перекрытие резонансов*

В нелинейном осцилляторе возможны резонансные явления и при большом различии (*расстройке*, (6.111)) частоты вынуждающей силы Ω и собственной частоты осциллятора ω_0 .

Мы видели выше (§ 6.8), что свободные колебания нелинейного осциллятора можно описать в виде суммы гармоник частоты $\omega(a^2)$ (6.105):

$$n\omega(a) \xrightarrow{a \rightarrow 0} n\omega, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.158)$$

Как показано в предыдущем параграфе, амплитуда колебаний нелинейного осциллятора вблизи резонанса в отсутствие трения описывает на фазовой плоскости замкнутую кривую $a(\psi)$ (6.140), не выходящую за пределы сепаратрисы, если начальные условия таковы, что

$$C \leq 2, \quad \text{т.е. } \psi_0 \leq 2\sqrt{3}ka_0^2.$$

Говорят, что в этом случае осциллятор *захвачен в нелинейный резонанс*.

Чтобы сшить описания, данные в этом и предыдущем параграфах, достаточно ввести слабое трение. Его действие приводит к постепенному свёртыванию кривой (6.140) к её центру, в результате чего амплитуда и фаза колебаний достигают установившихся значений:

$$a(t) \rightarrow a_{center} = a_\xi, \quad \psi(t) \rightarrow 0.$$

Отсюда можно заключить, что при воздействии на нелинейный осциллятор переменной силы $F_0 \sin \Omega t$ амплитуда колебаний будет принимать максимальные значения a_n на частотах

$$\Omega = n\omega.$$

Конечно, значения a_n существенно убывают с ростом номера гармоники n , в соответствии с тем, как убывают амплитуды гармоник свободных колебаний (см. (6.105), коэффициенты b_0, b_1, b_2, \dots).

Проиллюстрируем это на примере нелинейного осциллятора без трения (уравнение (6.108) при $\lambda=0$). Будем, как и в § 6.8, использовать метод последовательных приближений, т.е. искать решение в виде ряда убывающих членов

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_n(t), \quad (6.159)$$

$$|x_n| \gg |x_{n+1}|,$$

где $x_0(t)$ – вынужденное решение для линейного осциллятора. В этом разделе удобно использовать комплексную форму решения (см. § 6.2), записав уравнение для осциллятора в виде (сравни (6.106))

$$\ddot{x} + \omega^2(a) \cdot x = \frac{F_0}{m} \cdot e^{i\Omega t} - \alpha x^2 - \beta x^3. \quad (6.160)$$

Здесь, как и раньше, F_0 и Ω – амплитуда и частота вынуждающей силы, m – "масса" осциллятора (колеблющегося тела), $\omega^2(a)$ – собственная частота нелинейного осциллятора, которая описывается соотношением (6.105). В нулевом приближении, положив в (6.160) α и β равными нулю, найдем

$$x_0(t) = \frac{F_0/m}{\omega^2 - \Omega^2} \cdot e^{i\Omega t}.$$

Для $x_1(t)$ получим приближенное уравнение, подставив в правую часть (6.160), как и в § 6.8, $x(t) = x_0(t)$. Запишем

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t} - \alpha x_0^2 - \beta x_0^3, \quad x_1(t) = x_0(t) + x_1(t). \quad (6.161)$$

Частное решение этого уравнения, описывающее вынужденные колебания, имеет вид

$$x_1(t) = \frac{F_0/m}{\omega^2 - \Omega^2} \cdot e^{i\Omega t} - \alpha \left(\frac{F_0}{m} \right)^2 \cdot \frac{1}{(\omega^2 - \Omega^2)^2} \cdot \frac{1}{\omega^2 - (2\Omega)^2} \cdot e^{2i\Omega t} - \beta \left(\frac{F_0}{m} \right)^3 \cdot \frac{1}{(\omega^2 - \Omega^2)^3} \cdot \frac{1}{\omega^2 - (3\Omega)^2} \cdot e^{3i\Omega t}. \quad (6.162)$$

Отсюда, в частности, следует, что кроме исследованного в предыдущем разделе резонанса на частоте $\Omega \approx \omega$ возможны резонансы на частотах $\Omega \approx \omega/2$ и $\Omega \approx \omega/3$. Вопрос о значениях амплитуд вынужденных колебаний на этих частотах обсудим позже (см. (6.169)).

В следующем приближении имеем уравнение для $x_{II}(t)$, аналогичное (6.161):

$$\ddot{x}_{II} + \omega^2 x_{II} = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t} - \alpha(x_0 + x_1)^2 - \beta(x_0 + x_1)^3, \\ x_{II}(t) = x_0(t) + x_1(t) + x_2(t).$$

В правой части содержатся нелинейные по x_0 , x_1 члены, которые и вызовут возникновение резонанса на частотах

$$n\Omega = \omega, \quad n = 1, 2, \dots, 9. \quad (6.163)$$

Наибольшее значение $n=9$ возникает от последнего слагаемого в выражении для $x_1(t)$: при возведении в куб оно дает $e^{i9\Omega t}$. В следующих порядках приближения появляются колебания на ещё более высоких частотах:

$$n \rightarrow \infty, \quad a_n \rightarrow 0.$$

Этим "чудеса" нелинейного резонатора не ограничиваются. До сих пор, перенеся нелинейные члены αx^2 и βx^3 в правую часть уравнения (6.106), мы рассматривали их как некую "внешнюю силу", действующую на "нелинейный" резонатор. С тем же успехом можно, сохранив эти члены в левой части, объединить их с линейным слагаемым:

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{\omega^2} \cdot x^2 + \frac{\beta}{\omega^2} \cdot x^3 \right) = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}. \quad (6.164)$$

Поскольку $x = x(t)$, то, как нетрудно видеть, мы пришли к уравнению (6.65) для осциллятора с переменной жесткостью, на который действует внешняя сила. Она, как мы только что видели, может возбуждать колебания этого осциллятора на частотах $n\Omega$. Можно провести с (6.164) процедуру итераций (последовательных приближений), аналогичную только что проделанной с уравнением (6.160). Нетрудно получить, что в скобках появятся слагаемые с частотами

$$\Omega, 2\Omega, 3\Omega, \dots$$

Применяя к ним условие параметрического резонанса (6.70), получим ещё один набор резонансных частот:

$$n\Omega = 2\omega.$$

Помня, что свободные колебания нелинейного осциллятора содержат набор гармоник с частотами $n\omega$, можно заключить, что возможны параметрические резонансы на частотах

$$m\Omega = 2\ell\omega, \quad \text{где } m, \ell - \text{целые.}$$

Наконец, учитывая, что половина всех чисел m — чётные, окончательно находим значения резонансных частот нелинейного осциллятора:

$$\Omega = \frac{p}{q} \cdot \omega, \quad (6.165)$$

где p, q — любые целые числа. Резонанс на частоте $\Omega = \omega$ ($p = q = 1$) часто называют *главным*.

В отсутствие трения амплитуды вынужденных колебаний осциллятора, казалось бы, должны неограниченно возрастать при $\Omega \rightarrow p\omega/q$. Это видно на примере решения (6.162) при $\Omega \rightarrow \omega, \omega/2, \omega/3$. Однако в действительности это не происходит, т.к. собственная частота нелинейного осциллятора зависит от амплитуды колебаний (см. (6.105)):

$$\omega(a) \approx \omega_0 + ka^2.$$

Поэтому с ростом амплитуды условие резонанса нарушается и рост амплитуды прекращается. Все это мы видели в § 6.10 в случае главного резонанса $\Omega \approx \omega_0$. Поведение осциллятора вблизи нелинейного резонанса (6.165) можно приблизительно описать, используя тот же прием, что и § 6.10 — представив этот осциллятор в виде линейного с собственной частотой

$$\omega_p = p\omega(a) \approx p\omega_0 + pka^2, \quad (6.166)$$

зависящей от амплитуды. Соответственно, уравнение его вынужденных колебаний запишем в виде, аналогичном (6.108):

$$\ddot{x} + p^2 \omega^2(a) \cdot x = A_{pq} \frac{F_0}{m} \cdot e^{iq\Omega t}, \quad (6.167)$$

где A_{pq} – константа, зависящая от параметров p и q . Такой подход означает, что из членов ряда (6.159) мы оставили только наибольший, соответствующий резонансной частоте. Чтобы получить значение A_{pq} , нужно методом последовательных приближений "добраться" до гармоники $p\omega_0$, как это делалось в § 6.8. Воздержимся от этой процедуры ввиду её очевидной невыполнимости для больших (и, тем более, произвольных) p . Экстраполируя результат (6.105), можно утверждать, что

$$A_{pq} \propto \alpha, \beta \ll 1$$

и убывает с ростом p, q .

Вблизи нелинейного резонанса (6.165) можно положить

$$\Omega = \frac{p}{q} (\omega_0 + \xi) \quad (6.168)$$

и искать решение (6.167) в виде

$$x(t) = a_p e^{iq\Omega t}$$

Подстановка в (6.167) дает

$$a_p = A_{pq} \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{|q^2 \Omega^2 - p^2 \omega^2(a)|} \approx A_{pq} \frac{F_0}{2p^2 m \omega_0} \cdot \frac{1}{|k a_p^2 - \xi|}. \quad (6.169)$$

Это выражение есть не что иное, как уравнение для амплитуды a , аналогичное полученному в § 6.9 для главного резонанса (см. (6.112), $\lambda = 0$, $A_{pq} = p = q = 1$). Поэтому всё сказанное о нелинейном резонансе в §§ 6.9 и 6.10 может быть перенесено сюда, если произвести замену

$$F_0 \rightarrow A_{pq} \frac{F_0}{p^2}. \quad (6.170)$$

При этом амплитуда a_0 уменьшается (см. (6.114)) как $A^{1/3} p^{-2/3}$. В частности, сохраняется характер поведения амплитуды колебаний вблизи резонанса $p\omega/q$ – он по-прежнему описывается кривыми, подобными изображенным на рис. 6.13, а, 6.15. Для размеров области резонанса остаются справедливыми, с учетом замены

(6.170), оценки (6.144), (6.145). Это означает, что с ростом числа p ширина нелинейного резонанса $p\omega/q$ уменьшаются по крайней мере как

$$\Delta a \propto p^{-2/3}, \quad \Delta \xi \propto p^{-4/3}. \quad (6.171)$$

Именно поэтому параметр p принято называть *порядком резонанса*.

Всё сказанное о нелинейном резонансе при большой расстройке позволяет заключить, что множество нелинейных резонансов дискретное и всюду плотно, хотя их проявление становится всё менее заметным по мере роста порядка резонанса p . Важно, что амплитуда колебаний вблизи резонанса ограничена: если внешнее возмущение строго гармоническое, с фиксированной частотой, то её действие в резонансе стабилизируется нелинейностью, как мы видели в двух предыдущих параграфах.

С ростом p и q расстояние между соседними резонансами убывает:

$$\Delta \Omega_{pq} = \left(\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} \right) \cdot \omega_0 \Rightarrow \frac{p}{q^2} \cdot \omega_0 \quad \text{при} \quad p_1 = p_2 + 1, \quad q_1 = q_2 = q.$$

При этом возможны такие значения величины вынуждающей силы и параметров осциллятора, что это расстояние становится меньше ширины резонанса:

$$\Delta \Omega_{pq} < \Delta \xi,$$

или

$$\frac{p^{7/3}}{q^2} < \frac{2k a_0^2}{\omega_0}.$$

Такое состояние называют *перекрытием резонансов*. В этом случае осциллятор, захваченный в зависимости от начальных условий в тот или иной нелинейный резонанс, может переходить в область соседнего резонанса – происходит "блуждание" осциллятора от одного резонанса к другому. Процесс такого блуждания носит нерегулярный характер, как будто на осциллятор действуют какие-то случайные силы, хотя на самом деле никаких сил нет. Поэтому такой режим получил название *стохастического*. Для него характерна *локальная неустойчивость*: траектории точки (a, ψ) на фазовой плоскости расходятся экспоненциально во времени. В современной теории колебаний такие процессы исследованы достаточно глубоко. В частности, развитие теории нелинейных

резонансов и связанных с ними стохастических процессов позволило дать объяснение природы такого явления, как *случайность в классической механике*.

§ 6.12. Автоколебания. Релаксационные колебания*

Автоколебаниями называют колебательное движение, которое может возбуждаться и поддерживаться в системе за счет "подкачки" энергии извне. В этом случае в системе присутствует активный элемент, компенсирующий потери энергии (например, пружина в механических часах). Разновидностью автоколебаний являются *релаксационные колебания*. Это существенно нелинейные колебания, ангармоничность которых заложена в устройстве системы. Примером такого релаксационного осциллятора может служить "самоопустошающийся" водяной бак (рис. 6.16): вода, заполнив бак до уровня *A* и всю сливную трубу, начинает выливаться со скоростью, которая определяется размерами сливной трубы. Если скорость слива превышает скорость поступления, уровень воды в баке начинает понижаться. По достижении уровня *B* столб воды в трубе разрывается, в неё проникает воздух и слив воды прекращается.

Для описания автоколебаний (в том числе релаксационных) широко используются методы, развитые в теории гармонических и (особенно) нелинейных колебаний (§§ 6.1 – 6.11).

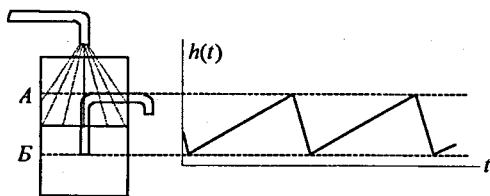


Рис. 6.16. Релаксационные колебания уровня воды в баке

§ 6.13. Адиабатический инвариант*

В колебательном движении существует величина, которая приблизительно сохраняется при достаточно медленном изменении какого-либо из параметров осциллятора – так называемый *адиабатический инвариант* (от греч. *adiabatos* – непреходимый). Особенность этого интеграла движения в том, что он – приближённый, т.е. сохраняется во времени с некоторой точностью. Тем не менее это важная характеристика колебательного процесса, позволяющая существенно облегчить его описание в том случае, если такой интеграл движения существует.

Начнём рассмотрение с достаточно общего случая. Пусть η – какой-то параметр осциллятора, например, k , m или ω_0 , медленно изменяющийся во времени, так что

$$T \frac{d\eta}{dt} \ll \eta, \quad (6.172)$$

где T – период колебаний осциллятора. Посмотрим, как в этом случае изменяется величина

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dx, \quad p = m\dot{x}, \quad (6.173)$$

где \oint – интеграл по периоду колебаний. Считаем, что за период полная энергия осциллятора E изменяется пренебрежимо мало и её величина зависит от параметра η . В этом случае можно записать

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{dt}$$

Кроме того, считаем, что импульс колеблющегося тела есть функция координаты, энергии и параметра η : $p = p(x, \eta, E)$, поскольку

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}. \quad (6.174)$$

Тогда производная по времени параметра I есть

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{2\pi} \oint \left\{ \frac{\partial p}{\partial E} \cdot \frac{dE}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \cdot \frac{d\eta}{dt} \right\} \cdot dx = \frac{1}{2\pi} \oint \left\{ \frac{\partial p}{\partial E} \cdot \frac{dE}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \right\} \frac{d\eta}{dt} \cdot dx. \quad (6.175)$$

Но $E = \text{const}$, т.е. явно не изменяется во времени за промежуток $\Delta t \sim T$. Поэтому

$E(p(\eta), x, \eta) = \text{const}$, так что можно записать

$$\frac{dE}{d\eta} = \frac{\partial E}{\partial \eta} + \frac{\partial E}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial E}{\partial \eta} = - \frac{\partial E}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial \eta}$$

и, соответственно,

$$\frac{\partial p}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial \eta} = - \frac{\partial p}{\partial E} \cdot \frac{\partial E}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial \eta} \equiv - \frac{\partial p}{\partial \eta}.$$

Подстановка этого результата в последнее выражение в (6.175) дает

$$\frac{dI}{dt} = 0.$$

Таким образом, мы показали, что

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dx = \text{const}, \quad (6.176)$$

т.е. является интегралом движения при условии постоянства $E(\eta)$. Для линейного осциллятора эта величина может быть вычислена достаточно просто:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \oint p dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^T m \dot{x} dx = \frac{1}{2\pi} m \omega_0 a^2 \int_0^T \sin^2 \omega_0 t dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} m \omega_0 a^2 \pi = \frac{m \omega_0 a^2}{2} = \frac{E}{\omega_0}. \end{aligned}$$

Здесь a – амплитуда колебания. Мы получили

$$I = \frac{E}{\omega_0}. \quad (6.177)$$

С другой стороны, выражение для энергии (6.174) можно рассматривать как уравнение эллипса в координатах p, x :

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{x^2}{2E/k} = 1.$$

Его площадь есть

$$S = \pi \sqrt{2mE} \cdot \sqrt{\frac{2E}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot E = 2\pi \frac{E}{\omega_0} = 2\pi I.$$

Это означает, что на плоскости координат p, x (фазовое пространство) осциллятор движется по эллиптической траектории, а площадь этого фазового эллипса сохраняется при медленном изменении параметра осциллятора.

Задача 5.6. Найти закон изменения амплитуды колебаний маятника с медленно изменяющейся длиной $\ell(t)$ (рис. 6.2).

Запишем адиабатический инвариант для маятника:

$$I = \frac{E}{\omega_0} = \frac{m\omega_0^2 a^2}{2\omega_0} = \frac{m}{2} \cdot a^2 \omega_0 = \frac{m}{2} \cdot a^2 \sqrt{\frac{g}{\ell}} = \text{const}.$$

Здесь a – амплитуда колебания вдоль оси x (горизонталь на рис. 6.2). Отсюда

$$a(t) = a(0) \cdot \left(\frac{\ell(t)}{\ell(0)} \right)^{1/4},$$

т.е. амплитуда колебаний увеличивается с длиной маятника пропорционально $\ell^{1/4}$. При этом амплитуда углового отклонения маятника

$$\Phi_{\text{max}}(t) = \frac{a(t)}{\ell(t)} \Phi_{\text{max}}(0) \cdot \left(\frac{\ell(0)}{\ell(t)} \right)^{3/4}$$

уменьшается с ростом ℓ как $\ell^{3/4}$.

Для сравнения укажем, что при мгновенном изменении длины маятника величина изменения амплитуды зависит от того, в какой фазе колебаний этот скачок длины нити произошёл. Так, например, если длина изменилась в момент, когда маятник проходил положение равновесия, амплитуда отклонения изменится в соответствии с законом сохранения энергии:

$$\frac{mv_{\text{max}}^2}{2} = \frac{m\omega_0^2(0)a^2(0)}{2} = \frac{m\omega_0^2(t)a^2(t)}{2},$$

откуда

$$a(t) = \frac{\omega_0(0)}{\omega_0(t)} \cdot a(0) = \sqrt{\frac{\ell(t)}{\ell(0)}} \cdot a(0).$$

Этот же результат легко получить из геометрических соотношений для маятника, учитывая, что высота его подъёма над положением равновесия в этом случае не изменится. Если же длина изменилась при максимальном отклонении маятника, то амплитуда углового отклонения, очевидно, постоянна, а амплитуда линейного отклонения изменяется как

$$a \approx \alpha \cdot \ell.$$

При этом энергия колебаний возрастает:

$$E = \frac{m\omega_0^2 a^2}{2} = \frac{\alpha^2}{2} \cdot mgl.$$

Доказательство существования адиабатического инварианта не указывает явно на его приближённый характер. Физически более ясным является подход, развитый в своё время в квантовой механике. Здесь мы приведём его упрощённое изложение.

Пусть частота линейного осциллятора медленно изменяется с характерным временем τ , т.е.

$$\left| \frac{d\omega}{dt} \right| \ll \frac{\omega}{T} \equiv \frac{\omega^2}{2\pi}, \quad \text{т.е. } \tau \gg T, \quad (6.178)$$

где $T = 2\pi/\omega$ – период колебаний осциллятора. Это условие означает, что за время T частота колебаний изменяется мало.

Будем искать решение уравнения

$$\ddot{x} + \omega^2(t) \cdot x = 0$$

в виде

$$x(t) = a(t) \cdot \sin \psi(t). \quad (6.179)$$

Естественно ожидать, что фаза есть

$$\psi(t) \approx \int_0^t \omega(t') \cdot dt' + \psi_0 \quad (6.180)$$

и амплитуда $a(t)$ – медленно изменяющаяся функция времени:

$$\left| \frac{da}{dt} \right| \ll \frac{a}{T}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (6.181)$$

В справедливости этих ожиданий мы убедимся, подставив решение (6.179) в уравнение колебаний. Найдём:

$$\ddot{a} \cdot \sin \psi + 2\dot{a} \cdot \dot{\psi} \cdot \cos \psi + a \cdot \cos \psi \cdot \ddot{\psi} - a \cdot \sin \psi \cdot (\dot{\psi})^2 + \omega^2 \cdot a \cdot \sin \psi = 0.$$

Приравняв нулю суммы коэффициентов при $\sin \psi$ и $\cos \psi$, получим систему уравнений для $a(t)$ и $\psi(t)$:

$$\ddot{a} + a(\omega^2 - (\dot{\psi})^2) = 0, \quad (6.182)$$

$$2\dot{a}\dot{\psi} + a\ddot{\psi} = 0.$$

Из второго уравнения найдём

$$\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{\ddot{\psi}}{2\dot{\psi}},$$

откуда

$$a = \frac{C}{\sqrt{\dot{\psi}}}, \quad (6.183)$$

где C – неизвестная пока константа. Первое уравнение даёт значение $\dot{\psi}$:

$$\dot{\psi} = \sqrt{\omega^2 + \frac{\ddot{a}}{a}} \approx \omega. \quad (6.184)$$

Последнее приближение получено из условий медленности $a(t)$ (6.172). В результате отсюда из (6.183) имеем

$$a \approx \frac{C}{\sqrt{\omega(t)}}, \quad \psi = \int_0^t \omega(t') \cdot dt' + \psi_0. \quad (6.185)$$

А теперь нетрудно убедиться в справедливости условия (6.181), вычислив производную $a(t)$ из (6.185) и учтя условие (6.178):

$$\left| \frac{da}{dt} \right| = \frac{C}{2\omega^{3/2}} \cdot \left| \frac{d\omega}{dt} \right| \ll \frac{C}{2\sqrt{\omega}} \cdot \frac{1}{T} = \frac{a}{T}.$$

Таким образом, мы получили решение в виде

$$x(t) = \frac{C}{\sqrt{\omega(t)}} \cdot \sin \left[\int_0^t \omega(t') \cdot dt' + \psi_0 \right]. \quad (6.186)$$

Константы C и ψ_0 найдём из начальных условий:

$$x(0) = \frac{C}{\sqrt{\omega(0)}} \cdot \sin \psi_0,$$

$$\dot{x}(0) = C \cdot \sqrt{\omega_0} \cdot \cos \psi_0.$$

Отсюда

$$C = \sqrt{[x(0)]^2 + \left[\frac{\dot{x}(0)}{\omega(0)}\right]^2} \cdot \sqrt{\omega(0)} = a(0) \cdot \sqrt{\omega(0)},$$

где $a(0)$ – амплитуда колебаний в момент $t = 0$ (см. (6.12)). В результате мы нашли больше, чем искали: не только значение константы C , но и условие

$$a(t) \cdot \sqrt{\omega(t)} = C = a(0) \cdot \sqrt{\omega(0)},$$

т.е. некий инвариант. Учитывая связь энергии осциллятора с его амплитудой (6.15), отсюда находим для адиабатического инварианта:

$$I = \frac{E(t)}{\omega(t)} = \frac{m\omega a^2}{2} = \frac{mC^2}{2}$$

есть константа.

Осталось выяснить вопрос о точности, с которой этот инвариант сохраняется. Для этого вернёмся к равенству (6.184) и сохраним малую поправку к ω :

$$\dot{\psi} \approx \omega + \frac{1}{2\omega} \cdot \frac{\ddot{a}}{a}.$$

Подставив этот результат в (6.183), найдём

$$a(t) \approx \frac{C}{\sqrt{\omega}} \cdot \left(1 - \frac{1}{4\omega^2} \cdot \frac{\ddot{a}}{a}\right).$$

В результате, определив инвариант как отношение энергии осциллятора к его частоте, видим, что он равен сумме константы и малой поправки, зависящей от времени:

$$I(t) = \frac{m\omega(t) \cdot a^2(t)}{2} = I_0 + \Delta I(t),$$

$$I_0 = \frac{mC^2}{2} = \text{const} = \frac{m\omega(0) \cdot a^2(0)}{2}, \quad (6.187)$$

$$\Delta I(t) \approx -I_0 \cdot \frac{1}{4\omega^2} \cdot \frac{\ddot{a}}{a}.$$

Для оценок можно принять

$$\ddot{a} \sim \frac{a}{\tau^2}.$$

Тогда отклонение $I(t)$ от постоянного значения есть

$$\frac{|\Delta I(t)|}{I_0} \sim \frac{1}{(2\omega\tau)^2}. \quad (6.188)$$

Строгий анализ показывает, что это отклонение порядка $e^{-\omega\tau}$.

ГЛАВА 7. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 7.1. Твердое тело. Уравнения движения

Абсолютно твердое тело есть система частиц, расстояния между которыми неизменны. Это модель реального тела, деформациями которого можно пренебречь.

Будем описывать движение частиц тела с помощью радиусов-векторов \vec{R}_i , связанных с некоторой, достаточно произвольно выбранной, системой отсчета, и расстояний \vec{r}_i внутри тела, отсчитываемых от какой-то фиксированной точки O внутри тела (рис. 7.1):

$$\vec{R}_i = \vec{r}_0 + \vec{r}_i. \quad (7.1)$$

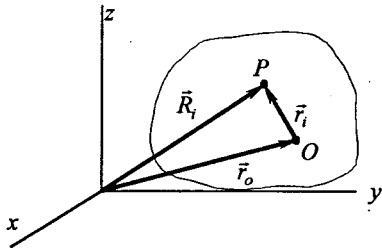


Рис. 7.1. Выбор систем отсчета

Уравнение движения i -й частицы, входящей в состав твердого тела, имеет вид (см. (1.7))

$$\dot{\vec{p}}_i = m_i \dot{\vec{v}}_i = \vec{F}_i + \vec{f}_i, \quad (7.2)$$

где \vec{F}_i – внешняя сила, действующая на частицу; \vec{f}_i – внутренняя сила – сила связи между частицами тела. Внутренние силы, действующие между любыми двумя частицами тела, равны по величине и противоположны по направлению:

$$\vec{f}_{in} = -\vec{f}_{ni}, \quad \vec{f}_i = \sum_{n=1}^N \vec{f}_{in}, \quad \vec{f}_{ii} \equiv 0; \quad (7.3)$$

i, n – номер частиц; N – число частиц, образующих тело; f_i – полная внутренняя сила, действующая на i -ю частицу. Просуммировав (7.2) по всем частицам с учетом (7.3), получим для полного импульса тела \vec{p} :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad \vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i, \quad \vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i, \quad (7.4)$$

где \vec{F} – полная внешняя сила, действующая на тело.

Поскольку

$$\vec{p} = \sum_i m_i \dot{\vec{R}}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{R}_i, \quad (7.5)$$

то, вводя радиус-вектор \vec{r}_0

$$\vec{r}_0 = \frac{\sum_i m_i \vec{R}_i}{m}, \quad m = \sum_i m_i \text{ – масса тела}, \quad (7.6)$$

из (7.4) получим

$$m \ddot{\vec{r}}_0 = \vec{F}. \quad (7.7)$$

Таким образом, под действием внешней силы \vec{F} тело движется как частица массы m , находящаяся в точке $\vec{r}_0(t)$ (7.6). Тем самым задача о движении тела сведена к известной уже задаче о движении частицы. Поэтому точку O с координатами $\vec{r}_0(t)$ называют *центром масс* тела (сравни (4.14)).

Осталось описать движение частиц тела относительно его центра масс – точки O . Прежде всего, отметим, что из (7.1) и (7.6) следует

$$\sum_i m_i \vec{r}_i \equiv 0 \quad (7.8)$$

(это "сразу ясно", т.к. такая сумма равна произведению массы тела на расстояние до центра масс от ... центра масс!).

Поскольку точка O закреплена внутри тела, то частицы могут только вращаться относительно этой точки, оставаясь от неё на неизменном расстоянии:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t), \quad |\vec{r}_i(t)| = \text{const}. \quad (7.9)$$

Для описания этого относительного движения умножим обе части (7.2) векторно на \vec{r}_i и, просуммировав по всем частицам, составляющим тело, получим

$$\sum_i [\vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i] = \sum_i [\vec{r}_i \times \vec{f}_i] + \sum_i [\vec{r}_i \times \vec{F}_i]. \quad (7.10)$$

Левую часть равенства можно преобразовать к полной производной. Для этого запишем тождество

$$\frac{d}{dt} [\vec{r}_i \times \vec{p}_i] = [\dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i] + [\vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i].$$

Но

$$\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{R}}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i + m_i \dot{\vec{r}}_0. \quad (7.11)$$

Подставив это выражение в первое слагаемое справа и суммируя по i , найдем

$$\sum_i [\dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i] = \sum_i m_i [\dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_i] + \left[\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_0 \right] = 0,$$

поскольку первое слагаемое тождественно равно нулю ("векторный квадрат" любого вектора равен нулю, а второе слагаемое содержит нулевой множитель – производную по времени суммы (7.8)). Таким образом

$$\frac{d}{dt} \sum_i [\vec{r}_i \times \vec{p}_i] = \sum_i [\vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i].$$

В свою очередь,

$$\frac{d}{dt} \sum_i [\vec{r}_i \times \vec{p}_i] = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{M}_i = \frac{d\vec{M}}{dt},$$

где \vec{M}_i , \vec{M} – моменты импульса i -й частицы и тела соответственно (см. (4.26)).

Таким образом, левая часть уравнения (7.10) равна полной производной по времени от момента импульса тела. Теперь учтем свойство внутренних сил (7.3).

Из него следует (см. рис. 7.2), что для двух любых частиц 1 и 2 сумма моментов внутренних сил, действующих между этими частицами, равна

$$[\vec{r}_1 \times \vec{f}_{12}] + [\vec{r}_2 \times \vec{f}_{21}] = [(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{f}_{21}] = [\vec{\ell} \times \vec{f}_{21}] = 0,$$

т.к. $\vec{\ell} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ – вектор, параллельный вектору \vec{f}_{21} .

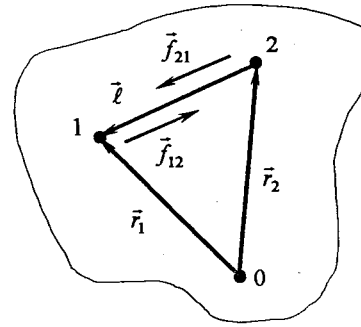


Рис. 7.2. К расчету моментов внутренних сил, действующих на частицы тела

В итоге из (7.10) получим уравнение моментов

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{M}}{dt} &= \vec{N}, \\ \vec{M} &= \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i \times \vec{p}_i], \quad \vec{N} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i \times \vec{F}_i], \end{aligned} \quad (7.12)$$

\vec{N} – суммарный момент внешних сил.

Итак, задача о движении твердого тела в поле внешних сил сведена к двум векторным дифференциальным уравнениям: уравнению движения центра масс (7.7) и уравнению моментов (7.12), описывающему вращение вокруг центра масс (7.6).

Отметим, что при таком разделении задачи на части уравнение (7.12) можно еще упростить. Поскольку $\dot{\vec{r}}_0 \equiv V_0$ – скорость центра масс тела, то, учитывая (7.11) и (7.8), найдем

$$\vec{M} = \sum_i m_i [\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i] + \left[\sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{V}_0 \right] = \sum_i m_i [\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i]. \quad (7.13)$$

В свою очередь, скорость $\dot{\vec{r}}_i$ можно связать с мгновенной угловой скоростью $\vec{\Omega}$ (рис. 7.4) – кинематика точки i вращающегося тела:

$$\Delta \vec{r}_i = r_i \cdot \Delta \psi \cdot \vec{e}_\perp, \quad \dot{\vec{r}}_i = \frac{\Delta \vec{r}_i}{\Delta t} \Big|_{\Delta t \rightarrow 0} = r_i \dot{\psi} \vec{e}_\perp. \quad (7.14)$$

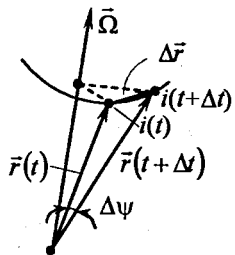


Рис. 7.3. К расчету кинематики точки вращающегося тела

Подставив $\dot{\vec{r}}_i$ отсюда в (7.13), получим *момент импульса тела относительно центра масс*:

$$\vec{M} = \sum_i m_i [\vec{r}_i \times [\vec{\Omega} \times \vec{r}_i]]. \quad (7.15)$$

Уравнения движения твердого тела (7.7) и (7.12) позволяют сформулировать *условия равновесия* твердого тела: тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, если сумма внешних сил, действующих на тело, и сумма их моментов равны нулю. Равенство нулю только внешней силы не исключает вращения тела, если $\vec{N} \neq 0$, и, наоборот – при нулевом моменте сил тело, не вращаясь, движется ускоренно и прямолинейно, если $F \neq 0$:

$$\begin{aligned} \vec{F} = 0 & - \text{отсутствие ускоренного поступательного движения,} \\ \vec{N} = 0 & - \text{отсутствие вращения тела с ускорением.} \end{aligned} \quad (7.16)$$

§ 7.2. Плоское движение

Движение, при котором ось движения тела неподвижна (в том числе *закреплена*) или перемещается параллельно самой себе, называется *плоским*. В этом случае траектория каждой частицы лежит в фиксированной плоскости, ортогональной оси вращения. Если ось к тому же *закреплена*, то траектории частиц тела – окружности. В плоском движении удобно характеризовать положение частиц тела их расстояниями ξ_i от оси вращения (рис. 7.4):

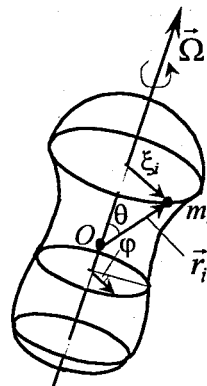


Рис. 7.4. Плоское движение тела

$$\xi_i = r_i \sin \theta = |[\vec{e}_\Omega \times \vec{r}_i]|, \quad \vec{e}_\Omega = \frac{\vec{\Omega}}{\Omega}$$

В координатах (ξ, φ) выражение для (7.15) можно упростить, раскрыв двойное векторное произведение:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \sum_i m_i (\vec{\Omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{\Omega} \cdot \vec{r}_i)) = \\ &= \vec{\Omega} \sum_i m_i r_i^2 - \Omega \sum_i m_i r_i \cos \theta \cdot (\vec{e}_\Omega r_i \cos \theta + \vec{e}_\xi r_i \sin \theta), \end{aligned} \quad (7.17)$$

где \vec{e}_Ω , \vec{e}_ξ – единичные векторы, направленные вдоль оси вращения и вдоль координаты ξ_i соответственно.

В двух случаях сумма, содержащая \vec{e}_ξ , при суммировании обращается в нуль.

1) *Тело является симметричным и ось вращения совпадает с осью симметрии*. Тогда каждой частице массы m_i найдется расположенная диаметрально противоположно частица такой же массы m'_i , но при этом $\vec{e}_\xi = -\vec{e}_\xi$ и слагаемые взаимно уничтожатся.

2) *Ось вращения жестко закреплена*. Если симметрия относительно оси вращения не имеет места, сумма с \vec{e}_ξ дает ненулевую составляющую, перпендикулярную оси вращения; \vec{M}_\perp – вектор, вращающийся вместе с телом.

Это нагрузка на закрепленную ось, не влияющая на вращение, если не рассматривать деформацию оси, трение в ее подвеске и т.п. эффекты.

Вот такое движение, удовлетворяющее одному из этих условий, и будем называть *плоским*. В этом случае выражение (7.17) принимает вид

$$\vec{M} = \vec{\Omega} \sum_i m_i r_i^2 \sin^2 \theta = \vec{\Omega} \sum_i m_i \xi_i^2,$$

или

$$\vec{M} = I \vec{\Omega}, \quad I = \sum_i m_i \xi_i^2 = \int \rho \xi_i^2 dV. \quad (7.18)$$

Величина I называется *моментом инерции тела относительно данной оси вращения*, ρ – плотность тела. Уравнение (7.12) для случая *плоского вращения* тела принимает простой вид:

$$I \cdot \frac{d\Omega}{dt} = N. \quad (7.19)$$

Векторы $\vec{\Omega}$, $\dot{\vec{\Omega}}$ и \vec{N} параллельны друг другу и направлены вдоль оси вращения. Момент инерции – характеристика твердого тела, играющая в уравнении моментов (7.19) ту же роль, что и масса в уравнении движения частицы. В отличие от массы, момент инерции, подчеркнем еще раз, зависит от положения оси вращения.

Задача 7.1. Вычислить моменты инерции симметричных тел.

1). Гантель – два "точечных" шарика массы m и радиуса R каждый, соединенных невесомым стержнем длины ℓ . Ось вращения перпендикулярна стержню и проходит через его середину, $R \ll \ell$.

$$I = 2 \times m \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 = \frac{m\ell^2}{2}, \quad R \ll \ell.$$

2). Палочка длины ℓ . Ось вращения проходит через середину палочки и перпендикулярна ее оси.

$$I_o = \frac{m}{\ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 dx = \frac{m\ell^2}{12}. \quad (7.20)$$

3). Палочка, ось проходит через край палочки и перпендикулярна ее оси.

$$I_1 = \frac{m}{\ell} \int_0^{\ell} x^2 dx = \frac{m\ell^2}{3}. \quad (7.21)$$

4). Диск радиуса R и толщины h . Ось вращения совпадает с его осью.

$$I_o = \frac{m}{\pi R^2 h} \cdot \int_0^R \xi^2 \cdot dz \cdot \xi \cdot d\xi \cdot d\varphi = \frac{mR^2}{2}.$$

5). Тот же диск вращается вокруг диаметра ($h \ll R$).

$$I_D = \frac{m}{\pi R^2 h} \cdot \int_{-R}^R dz \cdot \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dx \cdot x^2 \cdot h = \frac{mR^2}{4}.$$

6). Шар радиуса R , ось вращения совпадает с осью шара.

Воспользуемся предыдущим результатом для вычисления момента шара относительно диаметральной оси:

$$I = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \int_{-R}^R dz \cdot \pi \frac{(R^2 - z^2)^2}{2} = \frac{2}{5} mR^2.$$

Задача 7.2. Найти ускорение грузов, связанных непроскальзывающей нитью через инерционный неподвижный блок (рис. 7.6).

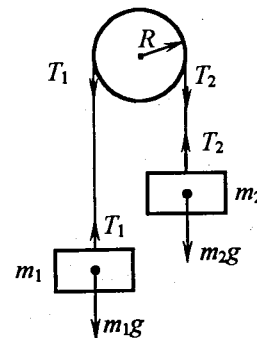


Рис. 7.5. Инерционный неподвижный блок с грузами

Система уравнений, дополненная кинематическими уравнениями, имеет вид

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= m_1 g - T_1, \\ m_2 a_2 &= -m_2 g + T_2, \\ I \frac{d\Omega}{dt} &= (T_1 - T_2)R, \\ a_1 = a_2 &\equiv a = R \frac{d\Omega}{dt}, \end{aligned}$$

где T_1, T_2 – натяжение нити слева и справа от блока; a_1, a_2 – ускорения грузов; m_1, m_2 – массы грузов; Ω – угловая скорость блока; I – его момент инерции; R – радиус. Ускорения здесь имеют один и тот же знак, так как направлены "вдоль нити". Из системы уравнений найдем

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \cdot a &= (m_1 - m_2) \cdot g - (T_1 + T_2), \\ I \frac{a}{R^2} &= T_1 - T_2, \end{aligned}$$

откуда

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} \cdot g.$$

Таким образом, инерционность блока увеличивает эффективную массу системы на величину I/R^2 .

Найдём теперь кинетическую энергию тела, совершающего плоское движение. Для этого просуммируем значения кинетической энергии частиц, составляющих тело,

$$W_\Omega = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i \xi_{Si}^2}{2} \cdot \Omega^2 = \frac{I\Omega^2}{2}. \quad (7.22)$$

Закон сохранения энергии в плоском движении, очевидно, имеет вид

$$W + W_\Omega + U = E, \quad (7.23)$$

где W, W_Ω – кинетическая энергия поступательного и вращательного движения тела соответственно; U – потенциальная энергия в поле внешних сил.

Задача 7.3. Диск свободно вращается вокруг закрепленной оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. По спице-радиусу скользит без трения бусинка массы m (рис. 7.6). Найти скорость бусинки в момент ее соскальзывания со спицы, если вначале бусинка находилась на расстоянии r_0 от оси. Масса диска m_0 , момент инерции I , угловая скорость диска Ω_0 , начальная радиальная скорость бусинки равна нулю.

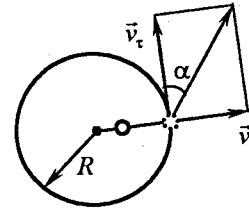


Рис. 7.6. К задаче 7.3

Так как момент импульса и кинетическая энергия E системы постоянны, то запишем

$$\begin{aligned} M &= (I + mr_0^2) \cdot \Omega_0 = (I + mR^2) \cdot \Omega, \\ E &= (I + mr_0^2) \frac{\Omega_0^2}{2} = I \frac{\Omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2}, \end{aligned}$$

где v – скорость бусинки, имеющая в момент отрыва от диска радиальную v_r и тангенциальную v_t компоненты (рис. 7.6). Очевидно,

$$\begin{aligned} v^2 &= v_r^2 + v_t^2, \\ v_t &= \Omega R. \end{aligned}$$

Отсюда найдем параметры системы в момент отрыва бусинки:

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{I + mr_0^2}{I + mR^2} \cdot \Omega_0, \\ v_r^2 &= v^2 - (\Omega R)^2 = \frac{I + mr_0^2}{I + mR^2} \cdot (R^2 - r_0^2) \cdot \Omega_0^2, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{v_r}{v_t} = \sqrt{\frac{I + mR^2}{I + mr_0^2} \cdot \left(1 - \frac{r_0^2}{R^2}\right)}. \end{aligned}$$

Угол вылета бусинки α не зависит от скорости вращения диска Ω_0 . Если бусинка легкая, так что $mR^2 \ll I$, и, кроме того, $R \gg r_0$, то

$$\operatorname{tg} \alpha \approx 1 + \frac{mR^2}{2I} - \frac{r_0^2}{2R^2},$$

т.е. угол α близок к 45° .

§ 7.3. Вращение тел вокруг закрепленной оси

Если сумма моментов сил, действующих на тело, равна нулю, т.е. $\vec{N} = 0$, то сохраняется момент импульса тела: $I\vec{\Omega} = \text{const}$. Этот интеграл движения существенно упрощает описание движения тела, вращающегося вокруг закреплённой оси (см. задачу 7.4).

Задача 7.4. Частица массы m перемещается из точки r_1 в точку r_2 по диску, свободно вращающемуся вокруг закрепленной оси ($\vec{N} = 0$). Найти изменение угловой скорости системы.

Из условия сохранения момента импульса системы частица-диск

$$(I_0 + mr_1^2) \cdot \Omega_1 = (I_0 + mr_2^2) \cdot \Omega_2$$

находим зависимость угловой скорости системы от положения частицы $\Omega_2(r_2)$.

Найдем теперь изменение момента инерции тела при параллельном переносе оси вращения (рис. 7.7). Пусть известен момент инерции тела относительно исходной оси O :

$$I = \sum_i m_i \xi_i^2$$

При параллельном переносе оси на расстояние \vec{a} ,

$$\vec{\xi}'_i = \vec{\xi}_i + \vec{a},$$

момент инерции принимает значение

$$I' = \sum_i m_i (\xi'_i)^2 = \sum_i m_i \xi_i^2 + 2 \sum_i m_i (\vec{\xi}_i, \vec{a}) + \sum_i m_i a^2 = I + 2 \cdot \left(\sum_i m_i \vec{\xi}_i, \vec{a} \right) + ma^2.$$

Учтем, что

$$\sum_i m_i \vec{\xi}_i = m \vec{\xi}_{\text{цм}}.$$

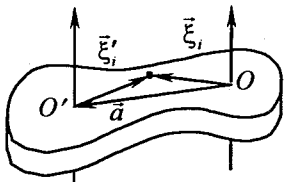


Рис. 7.7. К выводу "теоремы Штейнера"

Если исходная ось O проходила через центр масс тела, то $\vec{\xi}_{\text{цм}} = 0$. В результате получим

$$I = I_0 + ma^2. \quad (7.24)$$

Этот результат известен под названием "теорема Штейнера": момент инерции тела относительно произвольной оси отличается от момента инерции относительно оси, параллельной первой, но проходящей через центр масс, на величину ma^2 .

Задача 7.5. Вычислить момент инерции гантели из задачи 7.1, п. 1 в случае $R \sim \ell$ (рис. 7.8).

Указание: воспользоваться результатами задачи 7.1, п. 1 и теоремой Штейнера.

Решение:

$$I = 2 \times \left\{ \frac{2}{5} mR^2 + m \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 \right\} = m \left(\frac{4R^2}{5} + \frac{\ell^2}{2} \right).$$

Задача 7.6. То же для случая оси, проходящей через центр одного из шаров (рис. 7.8).

Решение:

$$I = \frac{2}{5} mR^2 + \left\{ \frac{2}{5} mR^2 + m \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 \right\} = m \left(\frac{4R^2}{5} + \frac{\ell^2}{4} \right).$$

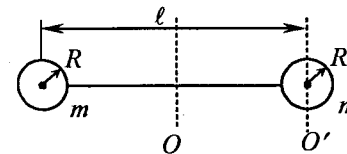


Рис. 7.8. К расчету момента инерции гантели

Задача 7.7. Тело массы m опирается о стол в одной точке (например, веретено, рис. 7.9). Потеряв равновесие, тело начинает падать. Найти закон движения центра масс тела (точки C, C' на рис. 7.9), считая, что трение о стол отсутствует, а момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс тела и перпендикулярной плоскости (x, y) на рис. 7.9, равен I_0 .

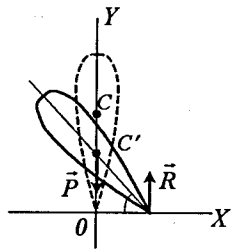


Рис. 7.9. Падение тела на пол
(трение отсутствует)

Первое уравнение можно записать сразу: так как трение отсутствует, полная энергия сохраняется, так что

$$\frac{m(\dot{y})^2}{2} + \frac{I_0(\dot{\phi})^2}{2} = mg(\ell - y), \quad (7.25)$$

где ℓ — расстояние от центра масс до точки касания стола в начальный момент, $y(t)$ — координата центра масс в момент t . Здесь учтено также, что в отсутствие трения сумма горизонтальных составляющих сил, действующих на тело, равна нулю, в результате центр масс падает по вертикали ($\ddot{x} = 0$, $\dot{x} = 0$). Теперь получим это уравнение из уравнений движения:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= -mg + R(\phi), \\ I_0\ddot{\phi} &= -R(\phi) \cdot \ell \cos \phi. \end{aligned}$$

Второе уравнение описывает вращение тела относительно его центра масс. Добавим сюда условия падения центра масс по вертикали:

$$y = \ell \sin \phi, \quad \dot{x}(t) = 0.$$

Из последнего уравнения следует

$$\dot{y} = \ell \cos \phi \cdot \dot{\phi}. \quad (7.26)$$

Исключив силу реакции опоры $R(\phi)$ из первых двух уравнений, получим

$$I_0\ddot{\phi} = -m(\ddot{y} + g) \cdot \ell \cos \phi.$$

Умножив обе части этого уравнения на $\dot{\phi}$ и учитывая (7.26), запишем

$$I_0\dot{\phi} \cdot \ddot{\phi} = -m(\dot{y} + g) \cdot \dot{y},$$

откуда

$$\frac{I_0}{2} \cdot (\dot{\phi})^2 = -\frac{m}{2} (\dot{y})^2 - mgy + C. \quad (7.27)$$

При $t=0$ имеем $\dot{\phi}(0)=0$, $\dot{y}(0)=0$, $y(0)=\ell$, что даст $C = mg\ell$, и мы приходим к уравнению (7.25). Чтобы найти закон падения $y(t)$, $\phi(t)$, подставим $\dot{\phi}$ из (7.26) в уравнение (7.25), записав предварительно

$$\dot{\phi} = \frac{\dot{y}}{\ell \cos \phi} = \frac{\dot{y}}{\ell \sqrt{1 - \frac{y^2}{\ell^2}}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\ell^2 - y^2}}.$$

Получим уравнение для $y(t)$:

$$\left(\frac{I}{\ell^2 - y^2} + m \right) \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = 2mg(\ell - y),$$

откуда

$$\sqrt{2mg} \cdot t = \int_{\ell}^y \sqrt{\frac{1}{\ell - \xi} \cdot \left(\frac{I_0}{\ell^2 - \xi^2} + m \right)} \cdot d\xi, \quad (7.28)$$

ξ — переменная интегрирования.

Вычисление интеграла позволяет найти функцию $t(y)$, а обратная ей функция дает $y(t)$. Мы не будем заниматься этим вычислением, которое достаточно трудоемко, а ограничимся оценками.

Прежде всего отметим, что вблизи верхнего предела, $\xi \rightarrow \ell$, подынтегральная функция стремится к бесконечности и интеграл расходится. Действительно,

$$\int_{\ell}^y \sqrt{\frac{1}{\ell - \xi} \left(\frac{I_0}{\ell^2 - \xi^2} \right)} \cdot d\xi \xrightarrow{y \rightarrow \ell} \sqrt{\frac{I_0}{2\ell}} \int_{\ell}^y \frac{1}{(\ell - \xi)} \cdot d\xi = \sqrt{\frac{I_0}{2\ell}} \cdot \ln(\ell - \xi) \Big|_{\ell}^y,$$

что дает бесконечность при $\xi = \ell$. Этот результат не случается, а отражает тот факт, что при $t=0$ тело находится в состоянии равновесия, хотя и неустойчивого, но сохраняющегося до момента воздействия какого-то возмущения. Пусть, например, при $t=0$ телу сообщена небольшая угловая скорость вращения относительно центра масс

$$\dot{\phi}(0) = \omega_0.$$

В этом случае константа C в (7.27) отлична от нуля:

$$C = \frac{I_0}{2} \omega_0^2 + mg\ell,$$

и, как нетрудно проследить, интеграл (7.28) принимает вид

$$\sqrt{2mg} \cdot t = \int_{\ell}^y \sqrt{\frac{1}{\ell + \ell_0 - \xi} \cdot \left(\frac{I_0}{\ell^2 - \xi^2} + m \right)} \cdot d\xi, \quad \ell_0 = \frac{I_0 \omega_0^2}{2mg}.$$

Теперь на верхнем пределе интеграл уже не расходится, хотя подынтегральная функция и стремится здесь к бесконечности. Действительно, приближенно можно записать

$$\sqrt{2mg} \cdot t \approx \sqrt{\frac{I_0}{2\ell_0 \ell}} \cdot \int_{\ell}^y \frac{d\xi}{\sqrt{\ell - \xi}} = \sqrt{\frac{2I_0}{\ell_0 \ell}} \cdot \sqrt{\ell - y} \sim \sqrt{\frac{2I_0}{\ell_0}}.$$

и время падения тела

$$\tau = \sqrt{\frac{I_0}{mgl_0}} = \frac{\sqrt{2}}{\omega_0}$$

Таким образом, время падения тела определяется, в основном, начальной угловой скоростью, что существенно отличает это движение от свободного падения.

Скорость центра масс V и скорость вращения ω при ударе тела о стол найдем, подставив в (7.25) $y = \ell$ и в (7.26) $\varphi = 0$. Получим:

$$V = \dot{y}(\varphi = 0) = \ell \dot{\varphi}(\varphi = 0) = \ell \omega,$$

$$\frac{I_0 \omega^2}{2} + \frac{mV^2}{2} = mgl,$$

откуда

$$V = \omega \ell = \sqrt{\frac{2g\ell}{1 + \frac{I_0}{m\ell^2}}} \quad (7.29)$$

Таким образом, вращение тела, вызванное влиянием опоры на стол, приводит к тому, что скорость тела, упавшего с высоты ℓ , уменьшается так, как будто ускорение свободного падения уменьшилось:

$$g \rightarrow \frac{g}{1 + \frac{I_0}{m\ell^2}}$$

На самом деле кинетическая энергия тела, упавшего с высоты ℓ , перераспределяется между движением тела как целого (движением центра масс) и его вращательным движением.

Задача 7.8. Рассмотреть ту же задачу в присутствии трения тела о пол (коэффициент трения k).

Легко понять, что в этом случае центр масс движется не по вертикали, а смещается в область $x < 0$ (рис. 7.10). Система уравнений движения в присутствии горизонтальной силы трения имеет вид

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= -mg + R(\varphi), \\ I_0 \ddot{\varphi} &= -R(\varphi) \cdot \ell \cos \varphi + F_{\text{тр}} \cdot \ell \sin \varphi, \\ m\ddot{x} &= F_{\text{тр}}(\varphi), \quad F_{\text{тр}}(\varphi) = -kR(\varphi), \\ y &= \ell \sin \varphi. \end{aligned} \quad (7.30)$$

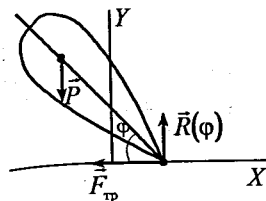


Рис. 7.10. Падение тела на пол (трение присутствует)

Исключив из первого, второго и третьего уравнений $R(\varphi)$ и подставив \ddot{y} из последнего уравнения, получим уравнение для $\varphi(t)$:

$$\begin{aligned} \left[I_0 + m\ell^2 \cdot \left(\cos^2 \varphi + \frac{k}{2} \cdot \sin 2\varphi \right) \right] \cdot \ddot{\varphi} - m\ell^2 \cdot \left(\frac{\sin \varphi}{2} + k \sin^2 \varphi \right) \cdot \dot{\varphi}^2 = \\ = -mgl(\cos \varphi + k \sin \varphi). \end{aligned}$$

Это нелинейное дифференциальное уравнение, которое не интегрируется в аналитических функциях, за исключением случая неограниченно большого коэффициента трения, когда точка опоры не проскальзывает вовсе (рис. 7.11). Рассмотрим этот крайний случай.

Если положение точки опоры фиксировано, центр масс движется по дуге радиуса ℓ , а угол φ изменяется во времени в соответствии с уравнением

$$I_0 \ddot{\varphi} = -mgl \cdot \cos \varphi, \quad I = I_0 + m\ell^2 \quad (7.31)$$

— момент инерции тела относительно точки опоры. Получим это уравнение из уравнений движения (7.30) при условии полного сцепления в точке опоры, когда x -координата центра тяжести связана с углом φ равенством

$$x = -\ell \cos \varphi. \quad (7.32)$$

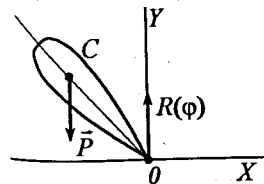


Рис. 7.11. Падение тела на пол (полное сцепление в точке опоры)

Четвертое уравнение в (7.30), связывающее $F_{\text{тр}}$ и $R(\varphi)$, теперь теряет смысл, так как коэффициент трения принимает такое значение, чтобы исключить проскальзывание (условие (7.32)).

Исключив из первых трех уравнений $R(\varphi)$ и $F_{\text{тр}}(\varphi)$, получим

$$I_0 \ddot{\varphi} = -m\ell(\ddot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi) - mgl \cdot \cos \varphi.$$

Из последнего уравнения в (7.30) и уравнения (7.31) получим

$$\ddot{x} \sin \varphi + \ddot{y} \cos \varphi = \ell \cdot \ddot{\varphi}.$$

Подставив этот результат в предыдущее уравнение, приходим к уравнению (7.31). Этот вывод приведен здесь, чтобы связать два подхода к решению этой задачи – через уравнение плоского вращения тела (7.19) и через систему уравнений движения центра масс и вращения вокруг него.

Задача 7.9. При каком ускорении ящик с песком, стоящий на полу автомобиля, перевернется (рис. 7.12)? Высота ящика h , длина ребра вдоль направления движения ℓ , песок заполняет ящик до крышки, проскальзывание ящика предотвращает брусок, закреплённый на полу автомобиля (точка O).

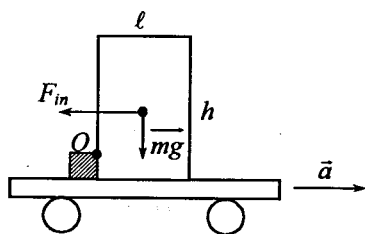


Рис. 7.12. К задаче 7.9

Очевидно, что ящик с трудом начнёт переворачиваться, если момент силы инерции относительно точки O (рис. 7.12) превысит момент силы тяжести относительно той же точки. Пренебрегая высотой бруска, запишем:

$$F_{in} \cdot \frac{h}{2} > mg \cdot \frac{\ell}{2}, \quad F_{in} = ma.$$

Но это необходимое условие. Оно же является и достаточным, т.к. по мере поворота ящика момент силы \vec{F}_{in} увеличивается (увеличивается плечо этой силы), а момент силы тяжести уменьшается (уменьшается плечо). Таким образом, при

$$a > \frac{\ell}{h} \cdot g$$

ящик переворачивается.

Спрашивается, какая сила совершает работу по подъёму центра тяжести ящика?

Очевидно, что это всё та же сила инерции, изменяющая величину и направление силы реакции опоры в точке O .

§ 7.4. Качение тел

В общем случае качение тела по поверхности другого тела представляет собой комбинацию поступательного и вращательного движений, причём последнее может совершаться так, что ось вращения меняет своё положение в пространстве. Здесь мы рассмотрим такой частный случай *качения цилиндрических тел*, при котором ось тела перемещается параллельно самой себе. В этом частном случае удобно ввести понятие *мгновенной оси вращения*. Это ось, выбранная так, что мгновенное движение всех точек тела можно представить как вращение вокруг неё.

Один из примеров такого движения – качение без проскальзывания (рис. 7.13, а). Мгновенная скорость любой точки тела в этом случае есть

$$\vec{v}(\vec{r}) = [\vec{\Omega} \times \vec{r}],$$

где \vec{r} – расстояние от мгновенной оси $O(t)$ до точки, $\vec{\Omega}$ – угловая скорость вращения. При этом $\vec{\Omega}$ одинакова, конечно, для всех точек. Например, для точек C и A на оси Y

$$\Omega(y) = \frac{v_x}{y} = \begin{cases} \frac{v}{R} = \Omega_0, & y = R, \\ \frac{2v}{2R} = \Omega_0, & y = 2R, \end{cases}$$

где Ω_0 – константа, одинаковая для любых y . Аналогично, для произвольного \vec{r} (точка B)

$$v_x = \Omega_0 r \cos \varphi = \Omega_0 y, \quad v_y = \Omega_0 r (-\sin \varphi) = \Omega_0 r (-x).$$

В точке B' имеем $\varphi = 0$ и, соответственно, $v_x = \Omega r$, $v_y = 0$.

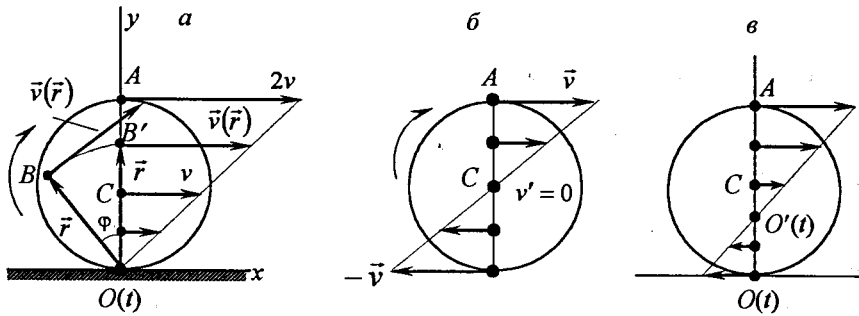


Рис. 7.13. Качение диска по столу: а – без проскальзывания, лабораторная система; б – то же – в системе диска; в – качение с проскальзыванием, лабораторная система

В системе диска (где его центр покоится), имеем вращение вокруг оси диска с угловой скоростью Ω_0 (рис. 7.13, б).

Если имеет место проскальзывание диска, мгновенная скорость в точке $O(t)$ не равна нулю и отрицательна. Точка, где мгновенная скорость равна нулю, сместится из положения $y=0$ вверх по радиусу в точку $O'(t)$ на рис. 7.13, в. Ясно, что при проскальзывании скорость поступательного движения падает (при заданной скорости вращения Ω_0). Действительно, скорости точек A и O в лабораторной системе равны

$$v_A = v_{\text{пост}} + \Omega_0 R \geq 0, \quad v_O = v_{\text{пост}} - \Omega_0 R \leq 0.$$

Отсюда

$$\tau = \frac{\Omega_0 R}{kg} \cdot \frac{I}{I + mR^2}.$$

Задача 7.10. На колесе автомобиля, движущегося с постоянной скоростью 90 км/ч, закреплен балансирующий грузик массой 50 г. Найти создаваемую им нагрузку на ось, расстояние до которой 20 см.

Поскольку при нормальном сцеплении колес с дорогой проскальзывания практически нет, угловая скорость вращения колес $\omega = v_0/R$, и сила, действующая на ось вследствие вращательного движения грузика, равна

$$F = \frac{mv_0^2}{R} = \frac{50 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot (90 \cdot 10^3 / 3600 \text{ м/с})^2}{0,2 \text{ м}} = 156,25 \text{ Н} = 15,9 \text{ кг}.$$

Трение играет существенную роль при качении – в его отсутствие качение вообще невозможно. Но теперь нужно понять, что такое *трение качения*. Дело в том, что *сила трения скольжения* – величина вполне определенная, она направлена против скорости и равна $F_{\text{мп}} = -kP$, где P – сила давления тела на опору. *Сила трения качения* в отсутствие проскальзывания величина менее определенная. Рассмотрим действие силы трения на следующем примере. Колесо раскрутили до скорости Ω_0 и поставили на стол. Коэффициент трения скольжения k . Найдем скорость, с которой покатится колесо.

Вначале, пока есть проскальзывание, действует сила трения, направленная против вращения. Она-то и ускоряет колесо вправо (рис. 7.14).

Запишем уравнения движения:

$$m\dot{v} = F_{\text{мп}} = kmg,$$

$$I\dot{\Omega} = -F_{\text{мп}} \cdot R = -kmg \cdot R,$$

где v – мгновенная скорость центра масс колеса; Ω – мгновенная скорость его вращения.

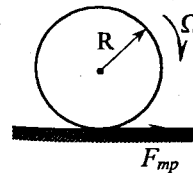


Рис. 7.14. Движение колеса по столу: качение с проскальзыванием

Отсюда найдём

$$v(t) = kgt,$$

$$\Omega(t) = \Omega_0 - k \frac{mgR}{I} \cdot t.$$

Момент $t = \tau$, когда исчезает проскальзывание, соответствует равенству

$$v(\tau) = \Omega(\tau)R,$$

т.е.

$$\tau = \frac{\Omega_0 R}{kg} \cdot \frac{I}{I + mR^2},$$

и, соответственно,

$$v_{\text{кач}} \equiv v(\tau) = \Omega_0 R \cdot \frac{I}{I + mR^2}.$$

Поскольку $0 \leq I \leq mR^2$, то, как легко убедиться, максимум скорости достигается при $I = mR^2$, т.е. когда масса колеса сосредоточена в ободе:

$$v_{\text{max}} = \frac{\Omega_0 R}{2} \quad \text{при} \quad I = mR^2.$$

Кинетическая энергия колеса уменьшается за время τ от величины

$$E(0) = \frac{I\Omega_0^2}{2} \quad \text{при} \quad t=0$$

до

$$E(\tau) = \frac{I\Omega^2(\tau)}{2} + \frac{mv^2(\tau)}{2} = \frac{(I + mR^2)\Omega^2(\tau)}{2} = \frac{I^2}{I + mR^2} \cdot \frac{\Omega_0^2}{2} = \frac{I}{I + mR^2} \cdot E(0) \quad \text{при} \quad t = \tau.$$

Потери энергии на трение за время τ составляют

$$\Delta E_{\text{потерь}} = \varepsilon(0) - \varepsilon(\tau) = \frac{mR^2}{I + mR^2} \cdot E(0).$$

Теперь вычислим "в лоб" работу сил трения в режиме проскальзывания:

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{трения}} &= \int_0^\tau (v(t) - \Omega(t) \cdot R) F_{\text{тр}} dt = \int_0^\tau \left(kgt - \Omega_0 R + kgt \frac{mR^2}{I} \right) dt \cdot kmg = \\ &= \left[kg \frac{\tau^2}{2} \left(1 + \frac{mR^2}{I} \right) - \Omega_0 R \tau \right] \cdot kmg. \end{aligned}$$

Подставив значение τ , полученное выше, найдем

$$\Delta E_{\text{трения}} = -\frac{mR^2 \Omega_0^2}{2} \cdot \frac{I}{I + mR^2} = -\frac{mR^2}{I + mR^2} \cdot E(0) = -\Delta E_{\text{потерь}},$$

т.е. сила трения гасит энергию вращения колеса на величину $\Delta E_{\text{потерь}}$.

Кинетическая энергия колеса, катящегося без проскальзывания, состоит из энергии поступательного движения $E_{\text{пост}}$ и энергии вращения $E_{\text{вращ}}$:

$$E_{\text{кин}} = E_{\text{пост}} + E_{\text{вращ}};$$

$$E_{\text{пост}} = \frac{mv^2(r)}{2} = \frac{m}{2} R^2 \Omega_0^2 \left(\frac{I}{I + mR^2} \right)^2 = \frac{mR^2 I}{(I + mR^2)^2} \cdot E(0),$$

$$E_{\text{вращ}} = \frac{I\Omega^2(r)}{2} = \frac{Iv^2(r)}{2R^2} = \frac{I}{mR^2} \cdot E_{\text{пост}} = \frac{I^2}{(I + mR^2)^2} \cdot E(0),$$

$$E_{\text{кин}} = \frac{I}{I + mR^2} \cdot E(0).$$

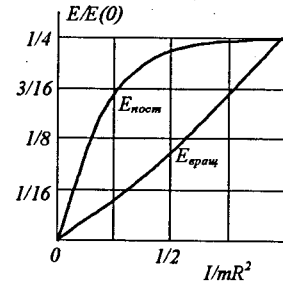


Рис. 7.15. Зависимость $E_{\text{пост}}$ и $E_{\text{вращ}}$ от конструкции колеса (отношение I/mR^2)

Отсюда видно, что их соотношение зависит от конструкции колеса, т.е. отношения I/mR^2 (рис. 7.15). При $I = mR^2$ (колесо представляет собой обруч без спиц и оси) обе величины достигают максимума, их сумма равна половине начальной энергии вращающегося колеса, а половина энергии расходуется на трение. Интересно, что при $I \ll mR$ (лёгкий обод и массивная ось) колесо останавливается за время

$$\tau \approx \frac{\Omega_0 R}{kg} \cdot \frac{I}{mR^2},$$

столь короткое, что сила трения буквально "не успевает" разогнать колесо до сколь-нибудь значительной скорости: $v(\tau)$ близко к нулю. При этом практически

вся кинетическая энергия раскрученного колеса гасится силой трения, т.е. уходит в тепло.

Рассмотренный пример позволяет понять механику передачи мощности от двигателя к колесам в "самодвижущихся экипажах" – автомобилях, паровозах (тепло- и электровозах) и т.п. устройствах, которые перемещаются благодаря сцеплению вращающихся колес с поверхностью опоры (рис. 7.16). Ускоряет экипаж, как и в примере с колесом выше, сила трения скольжения и качения, в зависимости от режима движения. В отсутствие скольжения ускорение экипажа a и угловое ускорение вращения колес Ω связаны уравнением $a = \Omega R$.

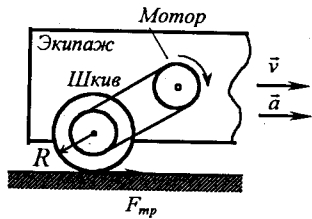


Рис. 7.16. Схема действия самодвижущегося экипажа

Уравнения движения экипажа имеют вид

$$ma = F_{тр}, \quad I\dot{\Omega} = -F_{тр}R + N_{двиг},$$

где $F_{тр}$ – сила трения; m – масса экипажа; $N_{двиг}$ – момент сил, развиваемый двигателем и передаваемый на оси вращения колес, имеющих радиус R . В случае движения без проскальзывания из этих трех уравнений найдем

$$a = \frac{N_{двиг}}{mR} \cdot \frac{I}{I + mR^2} \approx \frac{N_{двиг}}{mR},$$

т.к. обычно масса экипажа $m \gg I_{колес}/R^2$. Изменение энергии поступательного движения экипажа равно

$$\frac{dE}{dt} = mva \approx m\Omega R \cdot \frac{N_{двиг}}{mR} = \Omega N_{двиг} \equiv P_{двиг}.$$

Таким образом, мощность двигателя при движении экипажа с ускорением расходуется на компенсацию мощности силы трения качения. Сопротивлением воздуха и потерями в механизме (двигатель, передача и т.п.) мы здесь пренебрегли (сравни задачи 7.11 и 9.7 ниже).

Естественно, возникает вопрос: как при ускорении экипажа выполняется закон сохранения импульса? Ответ очевиден: самодвижущийся экипаж не является замкнутой системой, он взаимодействует с Землей, отталкиваясь от её поверхности с силой, равной и противоположной силе трения. Поэтому суммарный импульс системы "Земля – экипаж" сохраняется. Естественно, изменение скорости движения Земли Δv исчезающе мало:

$$M_{Земли} \cdot \Delta v_{Земли} + mv = 0, \quad \text{отсюда} \quad \Delta v_{Земли} = -\frac{m}{M_{Земли}} \cdot v.$$

К тому же усреднение по множеству экипажей, хаотически движущихся по нашей планете, сводит значение $\Delta v_{Земли}$ практически к нулю.

Сохранение момента импульса экипажа также проявляется при ускоренном движении: изменение скорости движения колес вызывает противоположное вращение экипажа как целого. Поэтому, например, при резком трогании с места автомобиль "приседает" на задние колеса (сжимаются задние амортизаторы) и, наоборот, на передние – при торможении, рискуя перевернуться.

Сила трения позволяет также управлять направлением движения автомобиля: при повороте колес сила трения, препятствуя их боковому проскальзыванию, заставляет автомобиль поворачивать – она изменяет направление вектора \vec{v} .

Задача 7.11. а) Найти максимальное значение ускорения экипажа, при котором он ещё движется без проскальзывания при заданном коэффициенте трения скольжения k . б) Оценить потери при движении автомобиля с постоянной скоростью на подъеме с углом наклона α .

а) При движении без проскальзывания величина силы трения качения не может превосходить значение силы трения скольжения:

$$F_{кач} \leq kmg,$$

где m – масса экипажа. При превышении этого предела начинается проскальзывание. Поэтому

$$a_{\max} = \frac{(F_{кач})_{\max}}{m} = kg.$$

Соответственно, водитель экипажа на скорости v не должен "разгонять" двигатель до мощности, превышающей величину

$$P_{\max} \approx mva_{\max} = kmgv.$$

Так, при коэффициенте трения $k=0,1$; $m=1t$ и $v=90 \text{ км/ч} \approx 25 \text{ м/с}$

$$P_{\max} = 0,1 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \cdot 25 \text{ м/с} \approx 25 \text{ кВт} \approx 34 \text{ л. с.}$$

б) Достигнув желаемой скорости, водитель, казалось бы, может выключить двигатель: сила трения качения направлена по скорости автомобиля, а не против неё (рис. 7.16). Однако даже в отсутствие сопротивления воздуха мощность расходуется на преодоление момента силы трения качения, тормозящего вращение колеса:

$$N_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} \cdot R = k^* \cdot mgR.$$

Но коэффициент трения скольжения (трения покоя) в отсутствие скольжения k^* есть величина неопределенная:

$$0 \leq k^* \leq k,$$

он принимает значения в этом интервале в зависимости от физической ситуации. Поэтому если автомобиль катится с постоянной скоростью и силы трения в осях, сопротивления воздуха и т.п. пренебрежимо малы, то $k^* \approx 0$ и расхода мощности нет. Стоит, однако, появиться такому сопротивлению, как двигатель начинает расходовать мощность.

Если угол наклона дороги α и автомобиль идет в подъем, двигатель должен развивать мощность

$$P = mg \cdot \sin \alpha \cdot v.$$

При этом $F_{\text{тр}} = k^* mg = mg \cdot \sin \alpha$, т.е. $k^* = \sin \alpha \leq k$. Так, если $\alpha \sim 0,05 \text{ рад}$ и масса автомобиля $m \sim 1,5 t$, расходуемая мощность двигателя на скорости 90 км/ч составляет

$$P \sim 1,5 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 \cdot 0,1 \cdot 25 \text{ м/с} \approx 37 \text{ кВт} \approx 50 \text{ л. с.}$$

Сопротивление воздуха вносит примерно такие же затраты мощности (см. задачу 9.7).

§ 7.5. Трехмерное движение

Рассмотрим трехмерное (произвольное) движение твердого тела, выбрав начало отсчета внутри него (рис. 7.17), r_i есть радиус-вектор i -й частицы тела.

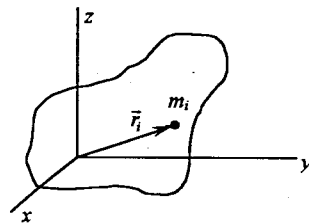


Рис. 7.17. Выбор системы координат

Момент импульса (7.15) тела есть векторная сумма моментов импульсов N частиц, образующих тело:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^N m_i [\vec{r}_i \times \vec{v}_i] = \sum_{i=1}^N m_i [\vec{r}_i \times [\vec{\Omega} \times \vec{r}_i]] = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{\Omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{\Omega} \cdot \vec{r}_i)), \quad (7.33)$$

где $\vec{\Omega}$ – мгновенная угловая скорость вращения тела вокруг оси, изменяющейся, вообще говоря, свое направление со временем. Компоненты \vec{M} , соответственно, равны

$$\begin{aligned} M_x &= \sum_i m_i \{ \Omega_x r_i^2 - x_i (\Omega_x x_i + \Omega_y y_i + \Omega_z z_i) \} = \\ &= \sum_i m_i \{ \Omega_x (y_i^2 + z_i^2) - \Omega_y x_i y_i - \Omega_z x_i z_i \}, \\ M_y &= \sum_i m_i \{ -\Omega_x y_i x_i + \Omega_y (x_i^2 + z_i^2) - \Omega_z z_i y_i \}, \\ M_z &= \sum_i m_i \{ -\Omega_x x_i z_i - \Omega_y y_i z_i - \Omega_z (x_i^2 + y_i^2) \}. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Этим соотношениям можно придать форму произведения некоторой матрицы на столбец, содержащий компоненты вектора $\vec{\Omega}$:

$$M_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 I_{\alpha\beta} \Omega_\beta, \quad (7.35)$$

где $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ – индексы x, y, z – компонент соответственно, а величина $I_{\alpha\beta}$ – матрица

$$(I_{\alpha\beta}) = \sum_{i=1}^N m_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i y_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix}. \quad (7.36)$$

Элементы матрицы $I_{\alpha\beta}$ можно записать в виде

$$I_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^3 \sum_{i=1}^N m_i \{ (x_{\gamma i})^2 \delta_{\alpha\beta} - x_{\alpha i} x_{\beta i} \} = \sum_{\gamma=1}^3 \int \rho dV (x_{\gamma}^2 \delta_{\alpha\beta} - x_{\alpha} x_{\beta}). \quad (7.37)$$

Здесь $\{x_{\alpha i}, x_{\beta i}, x_{\gamma i}\} = \{x_i, y_i, z_i\}$ — координаты i -й частицы, α, β, γ — номера координат, как и в (7.35). Второе интегральное выражение позволяет вычислить элементы матрицы для непрерывного распределения массы, т.е. для сплошного тела с плотностью $\rho(x, y, z)$.

Матрица $I_{\alpha\beta}$ является тензором второго ранга (матрица второго ранга), его называют *тензором моментов инерции* (коротко — *тензор инерции*). Этот тензор симметричный:

$$I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}. \quad (7.38)$$

Как известно, любую симметричную матрицу (симметричный тензор) можно привести к диагональному виду:

$$I_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta, \\ I_{\alpha\alpha}, & \alpha = \beta. \end{cases} \quad (7.39)$$

Оси координат, в которых тензор инерции диагонален, называют *главными осями*.

В главных осях момент импульса тела, как видно из (7.35), описывается выражением

$$\vec{M} = \vec{M}_x + \vec{M}_y + \vec{M}_z = I_x \vec{\Omega}_x + I_y \vec{\Omega}_y + I_z \vec{\Omega}_z, \quad (7.40)$$

где угловая скорость вращения тела есть

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_x + \vec{\Omega}_y + \vec{\Omega}_z. \quad (7.41)$$

Для тела, обладающего симметрией, его главные оси совпадают с осями симметрии. Подчеркнем, что в общем случае

$$\vec{M} \neq I \vec{\Omega}, \quad (7.42)$$

т.к. неизвестно, что такое I в трехмерном движении.

Задача 7.12. Легкий шарик массы m со скоростью \vec{v} неупруго соударяется с тяжелой коробкой.

Скорость \vec{v} параллельна самой короткой стороне коробки (рис. 7.18). Найти скорость вращения коробки после удара.

Запишем уравнения сохранения импульса и компонент момента импульса относительно осей, проходящих через центр масс коробки и параллельных сторонам коробки, считая, что после удара шарик "прилипает" к коробке:

$$\begin{aligned} mv &= m_0 V, \\ mva &= I_x \Omega_x, \\ mvb &= I_x \Omega_x. \end{aligned}$$

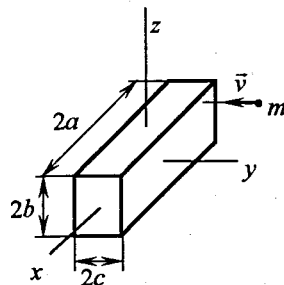


Рис. 7.18. Соударение шарика с коробкой

Здесь принято, что масса коробки $m_0 \gg m$, и введены обозначения: V — скорость центра масс после удара; I_x, Ω_x — моменты инерции и компоненты угловой скорости вращения относительно этих осей (см. задачу 7.1, п. 2):

$$I_x \approx \frac{m_0 b^2}{12}, \quad I_y \approx \frac{m_0 a^2}{12}, \quad a > b \gg c.$$

Величины Ω_x, Ω_y, V полностью описывают движение коробки после удара.

Оказывается, что из *трех главных осей только для двух вращение устойчиво*. Покажем, как это следует из законов сохранения энергии и момента импульса при свободном движении твердого тела:

$$\begin{aligned} E &= \frac{I_x \Omega_x^2}{2} + \frac{I_y \Omega_y^2}{2} + \frac{I_z \Omega_z^2}{2} = \text{const}, \\ M^2 &= M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = \text{const} \equiv M_0^2. \end{aligned} \quad (7.43)$$

Перепишем первое уравнение в виде

$$E = \frac{M_x^2}{2I_x} + \frac{M_y^2}{2I_y} + \frac{M_z^2}{2I_z} = \text{const}. \quad (7.44)$$

Пусть для определенности оси координат выбраны так, что

$$I_x < I_y < I_z \quad (7.45)$$

(как, например, для коробки на рис. 7.18). Запишем равенства (7.43), (7.44) в виде

$$2E = \frac{M_x^2}{I_x} + \frac{M_y^2}{I_y} + \frac{M_z^2}{I_z}, \quad M_x^2 = M_0^2 - (M_y^2 + M_z^2).$$

Если вначале $M_0 = M_x$, $M_{y0} = M_{z0} = 0$, то при перераспределении энергии по другим степеням свободы имеем

$$2E = \frac{M_0^2}{I_x} = \frac{M_0^2 - (M_y^2 + M_z^2)}{I_x} + \frac{M_y^2}{I_y} + \frac{M_z^2}{I_z}.$$

Отсюда

$$M_y^2 \left(\frac{1}{I_y} - \frac{1}{I_x} \right) + M_z^2 \left(\frac{1}{I_z} - \frac{1}{I_x} \right) = 0. \quad (7.46)$$

В этом равенстве M_y^2 и M_z^2 всегда положительны или равны нулю, а разности в скобках при выборе (7.45) всегда отрицательны. Поэтому равенство (7.46) выполняется только в одном случае – когда $M_y = M_z = 0$. Это означает, что вращение вокруг оси X устойчиво! Аналогично, повторяя выкладки для случая $M_0 = M_y$, $M_{x0} = M_{z0} = 0$ (или производя циклическую перестановку $x, y, z \rightarrow y, z, x$), приходим к равенству

$$M_z^2 \left(\frac{1}{I_z} - \frac{1}{I_y} \right) + M_x^2 \left(\frac{1}{I_x} - \frac{1}{I_y} \right) = 0,$$

которое допускает не равные нулю значения M_x и M_z . Отсюда следует, что при начальном вращении тела вокруг оси со *средним* значением момента инерции движение *неустойчиво* – при малых возмущениях возникает вращение вокруг одной или обеих других осей. Наконец, случай $M_0 = M_z$, $M_{x0} = M_{y0} = 0$ приведет к условию (перестановке $x, y, z \rightarrow z, x, y$)

$$M_x^2 \left(\frac{1}{I_x} - \frac{1}{I_z} \right) + M_y^2 \left(\frac{1}{I_y} - \frac{1}{I_z} \right) = 0, \quad (7.47)$$

аналогичному (7.46). Отсюда следует $M_x = M_y = 0$, что означает устойчивость вращения вокруг оси с наименьшим моментом инерции.

Устойчивость или неустойчивость вращения тела вокруг одной из трех главных осей легко продемонстрировать, закрутив и подкинув, например, коробку или книгу. При вращении вокруг осей x и z (рис. 7.18) коробка будет вращаться устойчиво, а при закручивании вокруг оси y – кувyrкаться.

§ 7.6. Гироскоп

Гироскопом называют симметричное твердое тело, вращающееся с большой скоростью вокруг оси симметрии (рис. 7.19) – от греч. *gyros* – вращаюсь и *skopeō* – смотрю. Пример гироскопа – известная игрушка-волчок.

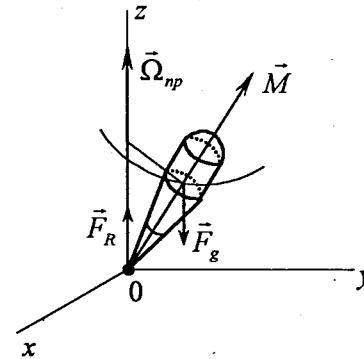


Рис. 7.19. Гироскоп

Рассмотрим движение гироскопа под действием сил веса \vec{F}_g и реакции опоры \vec{F}_R . Пусть 0 – закрепленная точка опоры гироскопа. Момент импульса гироскопа, вращающегося со скоростью $\vec{\omega}$ вокруг своей оси симметрии, $\vec{M} = I\vec{\omega}$, изменяется под действием момента силы в соответствии с уравнением (рис. 7.20)

$$d\vec{M} = -\vec{e}_\varphi \sin \theta \cdot d\varphi,$$

откуда

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -[\vec{M} \times \Omega_{np}], \quad (7.48)$$

где $\vec{\Omega}_{np} = \vec{e}_z \dot{\varphi}$ – угловая скорость медленного вращения гироскопа вокруг оси z . Такое вращение называется *прецессией* (от лат. *praecessio* – движение вперед). С другой стороны, из уравнения моментов (7.12) имеем

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = [\vec{\ell} \times \vec{F}], \quad (7.49)$$

где $\vec{\ell}$ – расстояние от точки опоры до центра тяжести. Очевидно, вектор $\vec{\ell}$ параллелен оси гироскопа и, стало быть, параллелен \vec{M} . Приравняв (7.48) и (7.49), имеем

$$\vec{\Omega}_{np} = -\frac{\ell}{M} \vec{F}. \quad (7.50)$$

Сделанный вывод справедлив в приближении медленной прецессии $\Omega_{np} \ll \omega$.

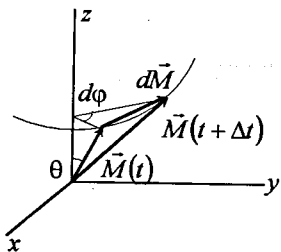


Рис. 7.20. К расчету приращения $d\vec{M}$ при прецессии

Существенно, что под действием силы веса волчок не опрокидывается (пока ω велика), а стремится сохранить свое положение в пространстве, медленно изменяя направление оси, так что она "катится" по поверхности конуса вокруг вертикали (рис. 7.20).

Свойство гироскопа сохранять положение своей оси в пространстве используется в навигационных приборах – гироскопах. В этих устройствах обычно горизонтально расположенный гироскоп крепится на подвеске, допускающей вращение вокруг вертикальной оси (рис. 7.21).

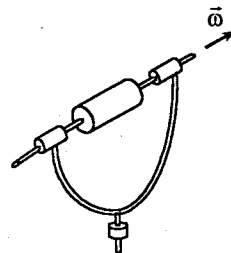


Рис. 7.21. Схематическое изображение гироскопа

§ 7.7. Равновесие и статика

Условия равновесия твердого тела (7.16) лежат в основе решения статических задач механики. Пример такого расчета приведен в задачах 7.12, 7.13.

Задача 7.12. Найти, при каком значении угла φ (рис. 7.22) палочка длины 2ℓ , опирающаяся о стену и пол, находится в состоянии покоя.

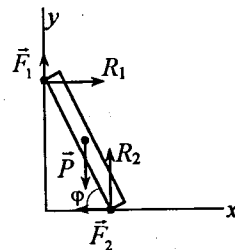


Рис. 7.22. К расчету условия равновесия палочки, поставленной в угол

Пусть максимальные значения коэффициентов трения о стену и пол равны k_1 и k_2 соответственно. Условия равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} R_1 - F_2 &= 0, \\ F_1 + R_2 - mg &= 0, \\ F_1 \ell \cos \varphi + R_1 \ell \sin \varphi - R_2 \ell \cos \varphi + F_2 \ell \sin \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (7.51)$$

Кроме того, значения сил трения не превышают величины, записанные в правых частях неравенств:

$$F_1 \leq k_1 R_1, \quad F_2 \leq k_2 R_2. \quad (7.52)$$

Исключая из уравнений (7.51) величины R_1, R_2, F_1, F_2 , с учетом (7.52), найдем

$$\varphi \leq \varphi_{\max} = \text{Arctg} \left(\frac{1 - k_1 k_2}{2k_2} \right).$$

Таким образом, значение угла φ не зависит от длины палочки. Подчеркнем, что неравенство $\varphi \leq \varphi_{\max}$ отражает важный физический эффект: коэффициент трения покоя может иметь значение между 0 и k_{\max} в зависимости от величины сил реакции опоры.

Обратим также внимание на тот факт, что в отсутствие трения о пол ($k_2 = 0$) палочка может оставаться в покое только в вертикальном положении ($\varphi = \pi/2$), а трение о стену позволяет лишь уменьшить угол наклона φ .

Задача 7.13. Найти значение коэффициента трения палочек длины 2ℓ каждая об опору (рис. 7.23), при котором система из двух палочек, связанных осью ("циркуль"), находится в равновесии. Трение в оси отсутствует.

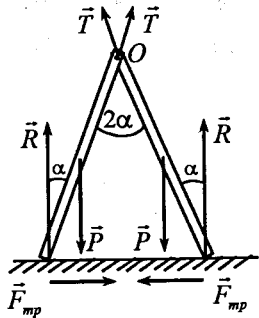


Рис. 7.23. К расчёту условия равновесия "циркуля"

Из-за наличия оси появляется сила T , действующая со стороны одной палочки на другую (рис. 7.23): $T = R \cdot \cos \alpha + F_{mp} \cdot \sin \alpha - P \cdot \cos \alpha$. Условия равновесия ножки "циркуля" имеют вид

$$\begin{aligned} R - P + T \cdot \cos \alpha &= 0, & -F_{mp} + T \cdot \sin \alpha &= 0, \\ R\ell \cdot \sin \alpha - F_{mp} \ell \cdot \cos \alpha - T\ell \cdot \sin 2\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Последнее уравнение содержит сумму моментов сил относительно центра масс ножки "циркуля". Подставив в эти уравнения $F_{mp} = kR$, из двух последних найдем условие равновесия:

$$k = \frac{\text{tg} \alpha}{3}.$$

Два первых уравнения нужны для нахождения значений T и R :

$$T = P \cdot \frac{\text{tg} \alpha \cdot \sin \alpha}{2(\cos^2 \alpha + 2)}, \quad R = \frac{3}{2} \cdot \frac{1 + \cos^2 \alpha}{2 + \cos^2 \alpha}.$$

§ 7.8. Деформации твердого тела

Основные виды деформации – растяжение (сжатие), сдвиг и кручение – схематически изображены на рис. 7.24.

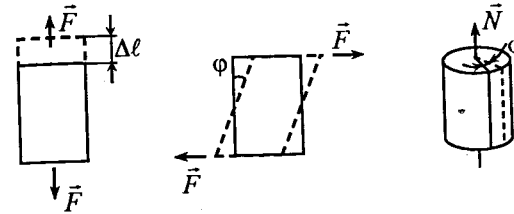


Рис. 7.24. Три вида деформаций:

- а) растяжение;
- б) сдвиг;
- в) кручение

Линейная деформация:

$$\Delta \ell = \varepsilon \ell_0, \quad \varepsilon = \text{const},$$

где ε – относительное удлинение (сжатие). Величина ε связана с натяжением (сжатием) образца эмпирическим законом Гука:

$$\varepsilon \equiv \frac{\Delta \ell}{\ell_0} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{S}, \quad (7.53)$$

где параметр E – модуль Юнга, характеризующий свойства материала, из которого изготовлено тело. Обычно (7.53) записывают через напряжение δ :

$$\varepsilon \equiv \frac{\delta}{E}, \quad \delta \equiv \frac{F}{S}. \quad (7.54)$$

Сжатие (растяжение) тела по одному направлению сопровождается растяжением (сжатием) по другому, ортогональному к первому. Связь между этими деформациями следует из изменения объема деформированного тела. Для прямоугольного параллелепипеда (рис. 7.25) найдём:

$$\begin{aligned} V &= ab\ell, \\ \frac{\Delta V}{V} &= \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta \ell}{\ell} = 2\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{\parallel}. \end{aligned} \quad (7.55)$$

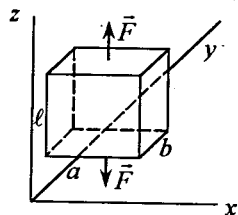


Рис. 7.25. К расчёту значения коэффициента Пуассона

Если тело несжимаемо, то $\Delta V = 0$ и $\epsilon_{\parallel} = -2\epsilon_{\perp}$.

Отношение

$$\mu = -\frac{\epsilon_{\perp}}{\epsilon_{\parallel}} \quad (7.56)$$

называют *коэффициентом Пуассона*. Ясно, что он имеет три возможные области значений:

$$\mu = \begin{cases} = 1/2 & \text{— "идеальное" твердое тело;} \\ < 1/2 & \text{— объем уменьшается;} \\ > 1/2 & \text{— объем увеличивается.} \end{cases}$$

Модуль сдвига G определяют как (см. рис. 7.26)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{G} \cdot \frac{F}{S} = \frac{\tau}{G}, \quad (7.57)$$

S — площадь поверхности, вдоль которой действует сила F ; $\tau = F/S$ — поверхностное натяжение.

Модуль сдвига, модуль Юнга и коэффициент Пуассона в изотропных телах связаны между собой соотношением, которое можно получить, рассматривая деформацию кубика при сдвиге (рис. 7.26, а).

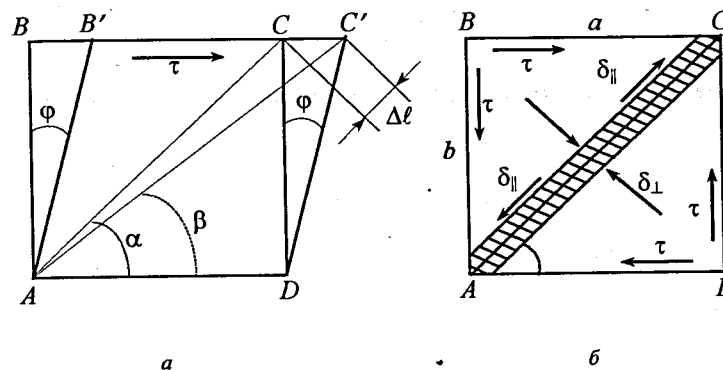


Рис. 7.26. К расчёту связи модуля Юнга, модуля сдвига и коэффициента Пуассона

Пусть под действием натяжения τ кубик с гранью $ABCD$ деформировался так, что угол сдвига равен некоторому φ . Рассмотрим вначале равновесие сил на треугольнике ABC (рис. 7.26, б), считая пока, что грани куба разные: $a \neq b$. Тогда, очевидно, равенство проекций сил натяжений на нормаль к диагонали AC и силы давления на диагональ $\delta_{\perp} \times AC$ дает

$$\tau a \cdot \sin \alpha + \tau b \cdot \cos \alpha = \delta_{\perp} \cdot AC = \delta_{\perp} (a \cdot \cos \alpha + b \cdot \sin \alpha).$$

При этом имеем $\alpha = 45^\circ$, так что

$$\tau = \delta_{\perp}. \quad (7.58)$$

Аналогично из равенства проекций сил на диагональ AC найдем

$$\tau a \cdot \cos \alpha + \tau b \cdot \sin \alpha = \delta_{\parallel} \cdot AC = \delta_{\parallel} (a \cdot \cos \alpha + b \cdot \sin \alpha),$$

откуда

$$\tau = \delta_{\parallel}. \quad (7.59)$$

Теперь рассмотрим деформацию "палочки" — диагонали AC под действием δ_{\parallel} и δ_{\perp} . Из геометрии (рис. 7.26, а) ясно, что удлинение диагонали при $\varphi \ll 1$ есть

$$\Delta l \approx CC' \cdot \cos \beta \approx CC' \cdot \cos \alpha \approx \varphi b \cdot \cos \alpha = \varphi \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad a = b, \quad \alpha = 45^\circ.$$

Это удлинение складывается из двух частей:

1) растяжение под действием δ_{\parallel} —

$$\frac{\Delta \ell_1}{\ell_0} = \frac{\delta_{\parallel}}{E} = \frac{\tau}{E}, \quad (7.60)$$

2) удлинение в результате сжатия $\Delta \perp$ поперечного размера "палочки" под действием δ_{\perp} —

$$\frac{\Delta \ell_2}{\ell_0} = -\frac{\Delta \perp}{\ell_0} \cdot (-\mu) = \mu \frac{\tau}{E}. \quad (7.61)$$

Два знака "минус" отражают направление сил (сжатие) и знак в (7.56). Суммируя (7.60) и (7.51), получим

$$\frac{\Delta \ell}{\ell} = (1 + \mu) \frac{\tau}{E}. \quad (7.62)$$

Подставив в (7.57) значение φ (см. выше) и $\Delta \ell$ из (7.62) и учитывая равенство $\ell_0 = \sqrt{2}a$, окончательно найдем

$$\frac{\tau}{G} = \varphi = \frac{\sqrt{2}\Delta \ell}{a} = \frac{\sqrt{2}\ell_0}{a} (1 + \mu) \frac{\tau}{E} = 2(1 + \mu) \frac{\tau}{E},$$

или

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (7.63)$$

Свойство твердых тел деформироваться вдоль направления, ортогонального направлению приложенной силы (см. 7.56), можно описать в форме некоторого матричного (тензорного) равенства. Пусть вначале напряжение $\bar{\delta}$ направлено вдоль оси x и деформирует прямоугольный параллелепипед $a \times b \times \ell$ (рис. 7.25). Тогда возникнут деформации:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta a}{a} \equiv \varepsilon_x &= \frac{\delta_x}{E}, \\ \frac{\Delta b}{b} \equiv \varepsilon_y &= \frac{\Delta \ell}{\ell} \equiv \varepsilon_z = -\mu \varepsilon_x. \end{aligned} \quad (7.64)$$

Если напряжение $\bar{\delta}$ имеет y - и z -компоненты, каждая из них вызовет соответствующие деформации аналогично (7.64). Например, деформация вдоль оси x будет складываться из растяжения под действием δ_x и сжатия под действием

поперечных к оси x напряжений δ_y и δ_z . В результате для *изотропного* тела получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\delta_x - \mu(\delta_y + \delta_z)], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\delta_y - \mu(\delta_x + \delta_z)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\delta_z - \mu(\delta_x + \delta_y)]. \end{aligned} \quad (7.65)$$

Но так просто обстоит дело, если напряжение $\bar{\delta}$ почему-то имеет только три составляющие, ортогональные плоскостям (x, y) , (x, z) и (y, z) . На самом же деле любое напряжение в среде создает, вообще говоря, не только сжимающие-растягивающие усилия, но и сдвигающие. Это означает, что, например, на грань $a \times b$ (рис. 7.25) может действовать сила давления вдоль оси Z и две составляющие "силы сдвига" — вдоль осей x и y , лежащие в плоскости грани $a \times b$. В общем случае можно определить *тензор напряжений*, действующих в среде, элементы которого

$$\delta_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial s_k} \quad (7.66)$$

— i -я компонента силы, действующей на единицу поверхности, перпендикулярную к оси " k " (x, y или z). Поэтому напряжения $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ в (7.66) следует писать с двумя индексами — это диагональные элементы тензора (матрица) напряжений. Аналогично обстоит дело и с деформациями.

Деформацию при *растяжении* принято характеризовать зависимостью натяжения от относительного удлинения $\delta(\varepsilon)$ (рис. 7.27). Величина $\varepsilon_{\text{упр}} = OA'$ называется предельным упругим напряжением. На всем участке AD после снятия напряжения $\delta > \delta_{\text{упр}}$ тело не возвращается к исходному размеру, а сокращается до пунктирной прямой CE , почти параллельной участку пропорциональности OA — имеет место *остаточная* деформация $\delta_{\text{ост}} = OE$. Для ее устранения нужно приложить напряжение обратного знака (сжатие). В результате зависимость $\delta(\varepsilon)$ будет изображаться замкнутой кривой, имеющей форму *петли гистерезиса* (пунктир со стрелками на рис. 7.27).

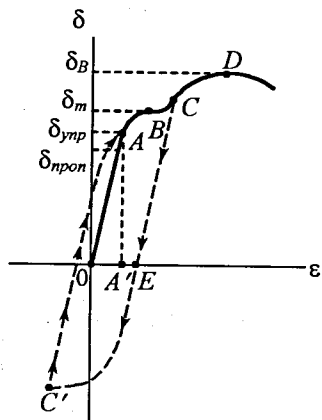


Рис. 7.27. Кривая зависимости деформации от натяжения.

$\delta_{\text{проп}}$ – предел пропорциональности: напряжение, до которого выполняется закон Гука (7.53);

$\delta_{\text{упр}}$ – предел упругости: максимальное напряжение, при котором тело сокращается до исходного размера после снятия напряжения

Условно принято считать, что размер после снятия $\delta_{\text{упр}}$ не превышает исходного значения в пределах $\epsilon_{\text{ост}} \leq 2 \div 5 \cdot 10^{-5}$; часто принимают $\delta_{\text{упр}} = \delta_{\text{проп}}$. AB – начало участка зависимости $\delta(\epsilon)$, где остаточные деформации уже значительны; для ряда материалов (например, для низкоуглеродистой стали) при достижении некоторого уровня напряжений деформация ϵ увеличивается даже при постоянном δ – это так называемая *площадка текучести*, горизонтальный участок кривой $\delta(\epsilon)$ вблизи точки В. Значение δ , соответствующее этой площадке, называют *пределом текучести* δ_m . Многие материалы не имеют площадки текучести. Для них δ_m определяют из условия равенства остаточной деформации $\epsilon_{\text{ост}} = 0,2\%$; условный предел текучести обозначают $\delta_{0,2}$.

Для увеличения ϵ за пределом текучести требуется опять увеличение напряжения, и при достижении некоторого максимального значения δ_B образец разрушается. Напряжение δ_B называют пределом прочности для различных сталей. Ниже в таблице 7.1 приведены прочностные характеристики некоторых материалов. Поскольку единица давления паскаль (Па) в СИ очень "мелкая", часто пользуются более крупными единицами мегапаскалями (МПа) и гигапаскалями (ГПа):

$$1 \text{ Па} \approx 1 \text{ Н/м}^2 \approx 10^{-5} \text{ атм} \approx 10^{-7} \text{ кг/мм}^2;$$

$$1 \text{ ГПа} \approx 10^9 \text{ Па} \approx 10^4 \text{ атм} \approx 10^2 \text{ кг/мм}^2;$$

$$1 \text{ МПа} \approx 10^6 \text{ Па} \approx 10^1 \text{ атм} \approx 10^{-1} \text{ кг/мм}^2;$$

Таблица 7.1. Прочностные характеристики некоторых материалов (ГПа)

Материал	E	G	δ_m	δ_B	μ
Сталь	200	80 ÷ 90	0,2 ÷ 1	0,3 ÷ 1,2	0,11 ÷ 0,25
Медь	90	40	–	0,12	0,125
Вольфрамовая проволока	42	–	–	3,8	–
Алюминий	75	27	2,0	0,05	0,39
Графит (нитевидный кристалл)	1000	–	16	24	–
Дуб	10	–	–	0,02	–
Нейлон	–	–	0,3	0,5	–

ГЛАВА 8. ГИДРО- И АЭРОСТАТИКА

Статика изучает покоящуюся жидкость (газ). Несжимаемая жидкость – достаточно хорошее приближение. Сжимаемость газа в задачах аэростатики существенной роли не играет.

§ 8.1. Закон Паскаля

Основной закон гидро- и аэростатики, гласящий, что давление на поверхность жидкости или газа передается по всем направлениям одинаково, был сформулирован французским естествоиспытателем Паскалем (*B. Pascal*) и опубликован в 1663 г. после его смерти. Действие этого закона иллюстрирует рис. 8.1: тело погружено в жидкость, находящуюся в цилиндре с подвижным

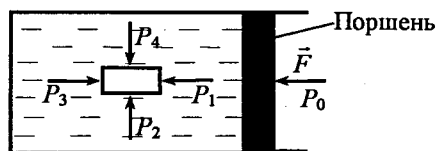


Рис. 8.1. Давление на тело, погруженное в жидкость

поршнем, на который действует внешняя сила. Давление на любую часть поверхности тела одинаково и равно

$$P_0 = \frac{dF}{dS} = P_1 = P_2 = P_3 = P_4. \quad (8.1)$$

§ 8.2. Гидростатика, аэростатика и закон Архимеда

Знаменитый закон Архимеда (*Archimēdēs*) был известен еще за 250 лет до н.э. Согласно этому закону на тело, погруженное в жидкость (газ), действует выталкивающая сила, равная весу жидкости (газа), вытесненной этим телом.

Интересно, как Архимед (287 – 212 гг. до н.э.) пришёл к своему закону. Согласно легенде, он задумался, почему тяжелогружённый корабль не тонет. И дальше рассуждал так: если мысленно удалить корабль из воды, пустое пространство будет заполнено водой до уровня моря, и этот объём воды "не утонет". А это значит, что со стороны окружающей воды на него действует вертикальная сила, равная весу этого объёма воды, т.е. объёма воды, вытесненного кораблём. Подобные "умозрительные эксперименты" были одними из главных методов античных физиков.

Теперь мы понимаем, что закон Архимеда является прямым следствием закона Паскаля (который Архимеду был неизвестен). Покажем это.

Выделим в жидкости, плотность которой ρ , элемент объема – прямоугольный параллелепипед высотой Δh с площадью горизонтальной грани S . Его вес $mg = \rho g \Delta h S$; давление столба жидкости высоты h на верхнюю и нижнюю грани равно соответственно

$$\begin{aligned} p &= \rho g h, \\ p + \Delta p &= \rho g (h + \Delta h). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Полная сила, действующая на элемент объема по вертикали, равна

$$F = S \cdot \{(p + \Delta p) - p\} = S \cdot \rho g \Delta h = \rho g V, \quad V = S \cdot \Delta h.$$

Обобщение на тело произвольной формы перенести просто – нужно заменить его набором достаточно малых кубиков, суммарный объем которых равен объему тела. Получим *силу Архимеда*:

$$F_{Archimedes} = \rho g V_{\text{тела}}. \quad (8.3)$$

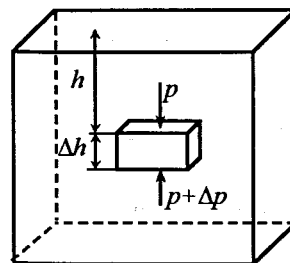


Рис. 8.2. К выводу закона Архимеда

Задача 8.1. Найти силу, необходимую для отрыва камня от дна водоёма и его подъёма на поверхность.

Если камень лежит на дне, его прижимает к грунту сила давления столба воды над камнем

$$F_1 = S \cdot \rho g h + mg > mg,$$

где h – глубина водоёма. После отрыва от грунта на камень действует сила

$$F_2 = mg - \rho g V < mg.$$

Поэтому, в частности, подводная лодка, опустившаяся на мягкий (илистый) грунт, рискует не всплыть ("исчезает" сила Архимеда!).

Задача 8.2. Парадокс Жуковского. Поместим в боковой стенке сосуда с водой (рис. 8.3) деревянный цилиндр, плотно подогнав его к стенке так, чтобы не вытекала вода (что технически несложно). Тогда, казалось бы, разность архимедовых сил, приложенных к центрам масс половинок цилиндра, создаст вращающий момент, т.к.

$$(F_{Арх})_{жидк} \gg (F_{Арх})_{газ}.$$

Почему такой "вечный двигатель", как и всякий другой, всё-таки не работает?

На самом деле (рис. 8.3, б) силы давления приложены по нормали к поверхности цилиндра и не создают вращающего момента! Нетрудно сообразить, что замена цилиндра колесом с лопастями ничего не дает.

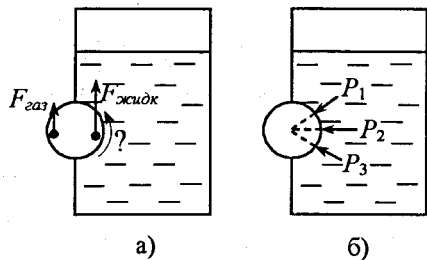


Рис. 8.3. Парадокс Жуковского

§ 8.3. Идеальный газ. Барометрическая формула

Найдем давление на стенке объема, заполненного газом, молекулы

которого имеют импульс

$$\vec{p}_v = m\vec{v}.$$

N молекул в результате упругого соударения с неподвижной стенкой передают ей импульс

$$\Delta p_v = 2\mu v_n N,$$

где v_n – компонента скорости, нормальная к стенке. В итоге сила, действующая на стенку от потока молекул, есть

$$F_n = \frac{\Delta p_v}{\Delta t} = 2\mu v_n \dot{N}, \quad \dot{N} = \frac{N}{\Delta t}. \quad (8.4)$$

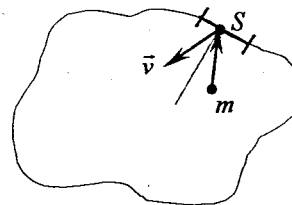


Рис. 8.4. Соударение молекулы газа со стенкой объема

Число соударений в единицу времени с площадкой S найдем, записав выражение для количества молекул, содержащихся в столбе газа длиной $v_n \Delta t$:

$$\Delta N = v_n \cdot \Delta t \cdot S \cdot n, \quad \dot{N} = n v_n S, \quad (8.5)$$

где n – число молекул в единице объема.

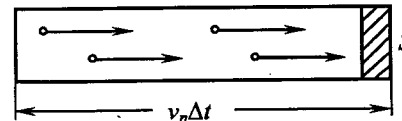


Рис. 8.5. К расчёту потока газа на стенку

Подставив (8.5) в (8.4), получим

$$F_n = 2\mu v_n S n v_n. \quad (8.6)$$

Отсюда давление газа на стенку сосуда равно

$$p = \frac{F_n}{S} = 2\mu n v_n^2. \quad (8.7)$$

Конечно, молекулы газа имеют разные скорости, и нужно усреднить силу F_n с учетом распределения молекул по скоростям. Для наших целей этого делать не требуется, т.к. уже достаточно того, что мы получили пропорциональность

давления плотности газа и кинетической энергии молекул, среднее значение которой равно температуре газа T :

$$p \propto nW \propto nT. \quad (8.8)$$

Строгий вывод с учетом распределения по скоростям дает

$$p = nkT, \quad (8.9)$$

где k – так называемая *постоянная Больцмана*, учитывающая фактически выбор единиц измерения и включающая численный коэффициент, возникающий при усреднении (8.7) по разбросу скоростей v_n . Число молекул в единице объема равно

$$n = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{N_A}{V},$$

где m , V , μ – масса, объем и молекулярный вес газа;

$$N_A = 6,0221367(36) \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

– постоянная, или, *число Авогадро (A. Avogadro)*, 1811 г. Современное значение N_A приведено по данным 1991 г.

С учетом выражения для n из (8.9) получим известное *уравнение состояния идеального газа*:

$$p = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{N_A k}{V} \cdot T.$$

Этому уравнению можно придать вид

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \quad R = kN_A, \quad (8.10)$$

где R – *постоянная Менделеева–Клапейрона*.

Из уравнения состояния (8.10) следует, что плотность газа пропорциональна давлению в нем:

$$\rho = \frac{m}{V} \propto p,$$

т.е.

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0}.$$

Но при выводе закона Архимеда было показано, что давление под столбом газа высоты h равно

$$\Delta p = \rho g h.$$

Значит

$$\frac{dp}{dh} = -\rho(h) \cdot g = -\rho_0 \frac{p}{p_0} \cdot g,$$

где индексом "0" отмечены значения параметров при $h = 0$. Отсюда

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} \cdot dh.$$

Интегрируя, найдём

$$\ln p = \ln C - \frac{\rho_0 g h}{p_0}.$$

Потенцируя и учитывая, что $C = p_0$, получаем *барометрическую формулу*

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-h/\lambda}, \quad \lambda = \frac{p_0}{\rho_0 g}. \quad (8.11)$$

Давление атмосферы Земли на ее поверхности составляет (в среднем по времени) 760 мм ртутного столба, т.е.

$$p_0 = 1 \text{ атм} = 0,760 \text{ м} \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 \cdot 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 \approx 1,014 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Плотность атмосферы у поверхности Земли $\rho_0 = 1,29 \text{ кг/м}^3$. Соответственно, из (8.11) получим

$$\lambda = \frac{1,14 \cdot 10^5 \text{ Па}}{1,29 \text{ кг/м}^3 \cdot 9,81 \text{ м/с}^2} \approx 8,013 \cdot 10^3 \text{ м},$$

так что давление с высотой убывает у поверхности Земли по закону

$$p = p_0 \cdot e^{-h/8 \text{ км}}.$$

§ 9.1. Поток жидкости (газа). Уравнение непрерывности

Стационарный поток жидкости (газа) – участок пространства, заполненный частицами, скорости которых в каждой заданной точке имеют одно и то же значение в любой момент времени. Иначе говоря, скорости разных частиц, проходящих в одну и ту же точку пространства в разные моменты времени, одинаковы и зависят только от положения этой точки. Траектории частиц образуют *линии тока* – пространственные кривые, в каждой точке которых вектор скорости частицы направлен по касательной к ней (рис. 9.1). Эта формулировка совпадает с определением траектории, но теперь существенно, что по ней движется непрерывная цепочка частиц.

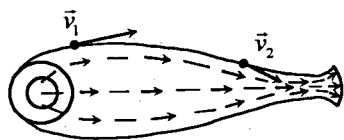


Рис. 9.1. Линии тока в стационарном потоке жидкости

Набор линий тока и образует поток. В потоке можно выделить *трубки тока* – области потока, ограниченные замкнутыми поверхностями, которые не пересекают частицы потока (рис. 9.2).

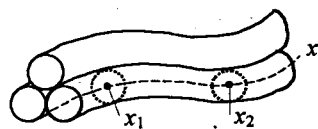


Рис. 9.2. Трубки тока в стационарном потоке жидкости

Масса жидкости, протекающая через поперечное сечение S трубки тока вблизи точки x за время Δt , очевидно, есть

$$\Delta m = \rho(x) \cdot S(x) \cdot v(x) \cdot \Delta t. \quad (9.1)$$

Если частицы не исчезают и не накапливаются, то

$$\Delta m(x_1) = \Delta m(x_2).$$

Отсюда и из (9.1) получим

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2. \quad (9.2)$$

Можно поэтому ввести понятие *потока* \dot{m} и *плотности потока* $j(x)$ жидкости (газа)

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= \rho(x) \cdot S(x) \cdot v(x), \\ j(x) &= \frac{1}{S(x)} \cdot \frac{dm}{dt} = \rho(x) \cdot v(x). \end{aligned} \quad (9.3)$$

Теперь снимем ограничение на отсутствие накопления (исчезновения частиц жидкости). Тогда общее количество жидкости, которая втекает в объем через охватывающую его поверхность S , есть

$$\frac{dm}{dt} = \iiint \rho v \cdot d\vec{S} = - \iiint (\vec{j}, d\vec{S}) \quad (9.4)$$

Знак минус связан с "договоренностью" выбора направления вектора $d\vec{S}$:

$$d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS, \quad (9.5)$$

где \vec{n} – единичный вектор нормали, направленный *наружу* из объема. От баланса по объему (9.4) перейдем к балансу в точке, стягивая объем к точке P (рис. 9.3).

При этом всегда можно заменить объем кубиком с гранями dx , dy , dz .

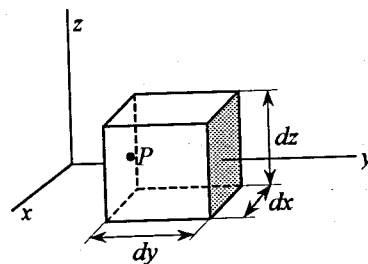


Рис. 9.3. К выводу уравнения непрерывности

Запишем полный поток через боковые грани кубика:

$$\begin{aligned}
 -\iint(\vec{j}, d\vec{S}) &= \iint(j_x(x) - j_x(x+dx)) \cdot dy \cdot dz + \iint(j_y(y) - j_y(y+dy)) \cdot dx \cdot dz + \\
 &+ \iint(j_z(z) - j_z(z+dz)) \cdot dx \cdot dy = \\
 &= -\iiint\left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}\right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz = -\iiint \operatorname{div} \vec{j} \cdot dV,
 \end{aligned}
 \tag{9.6}$$

где $\operatorname{div} \vec{j}$ – дивергенция вектора \vec{j} (см. ниже). Здесь знаки выбраны так, что компонента j_x , например, направлена вдоль оси x , т.е. втекает в "кубик" через грань x и вытекает через грань $x+dx$; аналогично j_y и j_z . Изменение массы внутри объема кубика есть

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho(x, y, z) \cdot dV. \tag{9.7}$$

Подставив (9.6) и (9.7) в (9.4), получим уравнение баланса массы в точке:

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{9.8}$$

Это есть *уравнение непрерывности*. Оно же поясняет смысл оператора дивергенции (от лат. *divergere* – расхождение) – баланс в точке "массы", переносимой вектором \vec{j} . Слово "масса" здесь взято в кавычки, т.к. понятие дивергенции может быть применено к любому вектору, в том числе никак не связанному, вообще говоря, с реальной массой (например, в электростатике уравнение $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$ дает баланс заряда плотности ρ и создаваемого им потока вектора поля \vec{E}). Запишем определение дивергенции вектора \vec{A} в декартовых координатах:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \tag{9.9}$$

Уравнение непрерывности для несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) дает

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad \iint(\vec{j}, d\vec{S}) = 0.$$

Отсюда для потока жидкости I (боковую поверхность которого не пересекают линии тока)

$$I_1 = \iint_{S_1}(\vec{j}, d\vec{S}) = \iint_{S_2}(\vec{j}, d\vec{S}) = I_2, \tag{9.10}$$

т.е. полный поток жидкости

$$I(x) = \text{const}$$

Отсюда следует связь между площадью сечения потока и скоростью жидкости:

т.к. $I(x) \approx \rho \cdot v(x) \cdot S(x)$, то для несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$)

$$v(x) \cdot S(x) = \text{const}, \tag{9.11}$$

или

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1} \tag{9.12}$$

– в местах сужений ($S_1 < S_2$) скорость потока больше ($v_1 > v_2$).

§ 9.2. Уравнение Бернулли

Закон сохранения энергии и уравнение непрерывности позволяют получить один из основных законов для потоков жидкости и газа.

Запишем закон сохранения энергии для элементов равной массы Δm , втекающих в трубку тока и вытекающих из нее, считая, что вход и выход трубки расположены на разных высотах (рис. 9.4). Считаем, что *трение в жидкости отсутствует*. Тогда

$$A + W + U = \text{const},$$

где A – работа давления по перемещению элемента Δm :

$$A = p_1 S_1 \cdot \Delta x_1 - p_2 S_2 \cdot \Delta x_2, \tag{9.13}$$

$U = \Delta m \cdot gh$ – потенциальная энергия элемента массы Δm , поднятого на высоту h .

Отсюда имеем

$$\frac{\Delta m \cdot v_1^2}{2} + \Delta m \cdot gh_1 + A = \frac{\Delta m \cdot v_2^2}{2} + \Delta m \cdot gh_2. \tag{9.14}$$

Кроме того,

$$\Delta m = \rho \cdot \Delta V = \rho_1 S_1 \cdot \Delta x_1 = \rho_2 S_2 \cdot \Delta x_2. \tag{9.15}$$

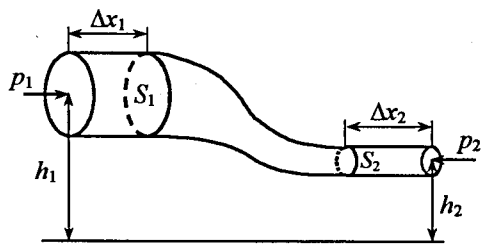


Рис. 9.4. К выводу уравнения Бернулли: трубка тока в жидкости

Подставив в (9.13) значения $(S \cdot \Delta x)_{1,2}$ из (9.15), т.е.

$$S_1 \cdot \Delta x_1 = \frac{\Delta m}{\rho_1}, \quad S_2 \cdot \Delta x_2 = \frac{\Delta m}{\rho_2},$$

получим

$$A = \Delta m \cdot \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right),$$

а подстановка этого выражения в (9.14) дает

$$\frac{v_1^2}{2} + gh_1 + \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + gh_2 + \frac{p_2}{\rho_2},$$

или

$$\frac{v^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} = \text{const.} \quad (9.16)$$

Это и есть уравнение Бернулли (1738 г.). Автор этого уравнения швейцарский ученый Даниил Бернулли (*D. Bernoulli*) в 1725–1733 гг. работал в России, член Санкт-Петербургской Академии наук.

Из уравнения Бернулли следует, что давление в потоке движущейся жидкости меньше давления в резервуаре, из которого вытекает жидкость (рис. 9.5, а). Действительно, давление на входе в трубу $p_0 = \rho gh_0$, а в потоке

жидкости $p = p_0 - \frac{\rho v^2}{2}$, откуда $h_1 < h_0$.

Это соотношение позволяет понять принцип действия пульверизатора (рис. 9.5, б), в котором струя воздуха, прокачиваемого из "груши" 1 через трубку 4, засасывает жидкость из сосуда 2 по трубке 3.

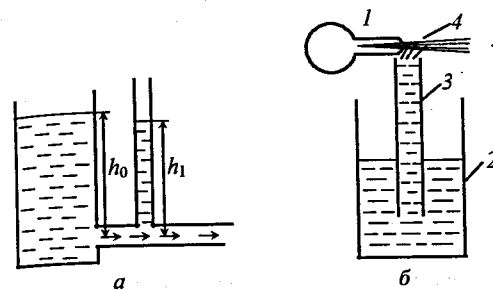


Рис. 9.5. Примеры действия уравнения Бернулли: давление в потоке жидкости, вытекающей из сосуда (а); пульверизатор (б)

"Эффект пульверизатора" приводит к тому, что в вагоне (автомобиле), окна которого открыты, при въезде в тоннель падает давление и у пассажиров "закладывает" уши. Тот же "эффект, пульверизатора", является причиной появления подъемной силы при движении тела в жидкости или газе — так называемый эффект Магнуса (см. § 9.6) и одной из причин возникновения тяги через печную трубу (задача 9.1).

Задача 9.1. Известно, что даже в холодной печи (рис. 9.6) существует тяга. Она возникает, если труба обдувается ветром. Оценить скорость ветра, при которой возникает тяга.

Если скорость v_0 , то давление над трубой p_2 меньше давления p_1 в холодной топке (1) и поддувале (2) на величину

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho v_0^2}{2}. \quad (9.17)$$

Запишем уравнение Бернулли (9.16) для печной трубы:

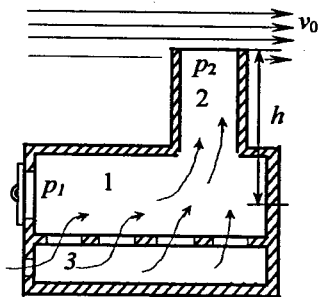


Рис. 9.6. Схема топки "русской печи".

1 – топка, 2 – труба, 3 – поддувало

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h,$$

где $p_{1,2}$, $v_{1,2}$ – давление и скорость воздуха в топке (1) и на выходе трубы (2) соответственно. Поскольку скорость воздуха в (широкой) топке много меньше, чем в (узкой) трубе, т.е. $v_1 \ll v_2$, из (9.17) и (9.18) найдем

$$\frac{\rho v_2^2}{2} \approx p_1 - p_2 - \rho g h = \rho \left(\frac{v_0^2}{2} - g h \right). \quad (9.18)$$

Отсюда следует, что холодная тяга появляется уже при

$$v_0 > \sqrt{2gh}. \quad (9.19)$$

Для типичных размеров "русской печи" ($h \sim 5$ м) найдём $v_0 > 10$ м/с. Конечно, это высокая скорость и из (9.19) следует, что выгоднее строить низкие трубы. На самом деле гораздо большую роль играет эффект нагрева воздуха, и его можно понять (задача 9.2), воспользовавшись полученным выше уравнением состояния (8.10).

Задача 9.2. Оценить скорость потока в печной трубе при сжигании в печи топлива.

Поскольку газ из топки уходит в трубу (а не в комнату!), естественно заключить, что давление в топке равно атмосферному, а плотность газа, в соответствии с (8.10), падает обратно пропорционально температуре:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu p}{RT} = \rho_0 \frac{T_0}{T}. \quad (9.20)$$

Разность давлений в топке и на выходе трубы создается весом столба воздуха вне трубы:

$p_1 - p_2 = \rho_0 g h$. Считая по-прежнему $v_1 \ll v_2$, из (9.18) получим

$$\frac{\rho v_2^2}{2} \approx p_1 - p_2 - \rho g h = (\rho_0 - \rho) g h = \rho g h \left(1 - \frac{T_0}{T} \right).$$

Отсюда

$$v_2 \approx \sqrt{2gh \left(1 - \frac{T_0}{T} \right)}, \quad (9.21)$$

т.е. скорость потока сквозь печь растёт как \sqrt{h} и высокая труба обеспечивает большую тягу. Приняв температуру воздуха в топке $T = 500^\circ\text{C}$, для $h = 5$ м найдем

$$v_2 \sim \sqrt{2 \cdot 9,81 \left(1 - \frac{303}{773} \right)} \approx 8 \text{ м/с}.$$

Обратим внимание, что перепады давления, обеспечивающие печную тягу, очень малы:

$$\Delta p = \rho g h \sim 1,29 \text{ кг/м}^3 \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 \cdot 5 \text{ м} = 63 \text{ Па} = 6,3 \cdot 10^{-4} \text{ атм}.$$

Чтобы "покончить" с печкой, вернемся еще раз к "холодной" тяге. Считается, что разжигать печку в теплую погоду гораздо труднее, чем в холодную. На самом деле это так, если в комнате тепло и работает разность температур (9.21), которая усиливает "эффект пульверизатора" (9.19). Когда, например, в комнате $+15^\circ\text{C}$, а на улице -15°C , то для v_2 из (9.21) и $h = 5$ м получим $v_2 \approx 3,2$ м/с. Когда же кухня и улица прогреты (или охлаждены) до близких температур, тяга (9.21) исчезает ($v_2 \rightarrow 0$).

Задача 9.3. Две трубки – первая (1) с боковым, вторая (2) с торцевым отверстием – подсоединены к манометрам и помещены в поток жидкости или газа, частицы которого имеют скорость v_0 (рис. 9.7). Найти разность показаний манометров.

Манометр 1 показывает статическое давление в струе газа p_0 , а манометр 2 – полное давление, которое согласно уравнению Бернулли равно

$$p = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2}.$$



Рис. 9.7. Схема трубки Пито-Прандтля

Отсюда видно, что по разности показаний манометра можно определить скорость потока. Такое устройство называется *трубкой Пито-Прандтля* по имени их изобретателей. Оно служит для

определения скорости движущегося потока жидкости, газа или объекта относительно окружающей среды – жидкой или газообразной, например самолета, подводной лодки и т.п. Для самолета характерная разность показаний манометров на скорости порядка $1000 \text{ км/ч} \approx 300 \text{ м/с}$ составляет

$$\Delta p \sim \frac{1}{2} \cdot 1,29 \cdot (300)^2 \approx 5,8 \cdot 10^4 \text{ Па} \approx 0,6 \text{ атм.}$$

Для атомной подводной лодки, движущейся со скоростью $50 \text{ км/ч} \approx 15 \text{ м/с}$,

$$\Delta p \sim \frac{1}{2} \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 \cdot (15)^2 \approx 1 \cdot 10^5 \text{ Па} \approx 1 \text{ атм.},$$

что эквивалентно погружению на глубину 10 м.

Из уравнения Бернулли следует также оценка критической скорости, при которой становится существенным сжатие газа:

$$\frac{\rho v^2}{2} \sim p, \quad v_{\text{крит}} \sim \sqrt{\frac{p}{\rho}}. \quad (9.22)$$

Далее мы увидим, что это не что иное, как скорость звука в газе (см. (10.32)).

§ 9.3. Вязкость. Вязкое течение

Движению пластинки по воде препятствует некоторая сила, возникающая из-за того, что пластинка увлекает за собой прилегающий к ней слой воды, тот, в свою очередь, сдвигает следующий, нижележащий слой, и т.д. (Конечно, понятие слой здесь достаточно условно). В результате в жидкости возникает смещение, аналогичное деформации сдвига (рис. 9.8). Поэтому, как и для сдвига, можно записать

$$\frac{\Delta \ell}{h} = \text{tg} \phi = \frac{F}{G \cdot S}, \quad (9.23)$$

где F – сила, приводящая пластинку в движение с постоянной скоростью $v = \Delta \ell / \Delta t$.

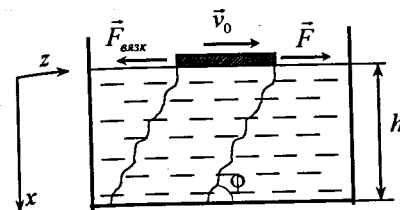


Рис. 9.8. Движение пластинки по поверхности воды

Переписав (9.23) в виде

$$\frac{F}{S} \equiv \sigma = G \cdot \Delta t \cdot \frac{v}{h} \propto \frac{dv}{dx},$$

приходим к коэффициенту вязкости η , введенному Ньютоном:

$$\sigma = \eta \frac{dv}{dx}. \quad (9.24)$$

Здесь dv/dx – компонента градиента скорости жидкости, поперечная направлению движения пластинки. Из приведенного рассуждения ясно, что такое же вязкое напряжение возникает между слоями жидкости.

Коэффициент вязкости (табл. 9.1), как следует из (9.24), имеет размерность $FT/L^2 = m/LT$ и измеряется в паскалях в секунду в системе СИ, в пуазах в системе СГС:

$$1 \text{ Пуаз} = 1 \text{ дина} \cdot \text{с/см}^2 = 0,1 \text{ Па} \cdot \text{с} = 0,1 \text{ кг/м} \cdot \text{с}.$$

Под действием сил вязкости в жидкости устанавливается ламинарный режим течения (от лат. *lamina* – пластина): слои жидкости скользят один по другому, не перемешиваясь. Например, для ламинарного потока жидкости в трубе скорость частиц монотонно спадает от оси к стенке трубы.

Таблица 9.1. Вязкость жидкостей и газов

Температура, °С	0	15	99
	Вязкость		
Вещество	Жидкость (мПа·с)		
Вода	1,8	1,1	—
Глицерин	4600	1500	—
Ртуть	1,7	1,6	1,2
	Газ (мкПа·с)		
Воздух	17,1	18,1	22
Водяной пар	9,0	9,7	13,1
Водород	8,6	8,9	10,6

Найдем это распределение скорости $v(r)$. Для этого выделим в цилиндрическом потоке слой (r, dr) длины ℓ и запишем баланс сил вязкости $F(r)$ и давления p , действующих на этот слой (рис. 9.9):

$$F(r+dr) + F(r) + (p_1 - p_2) \cdot S_{\text{торца}} = 0,$$

$$F(r) = \eta \left| \frac{dv}{dr} \right| \cdot S_{\text{бок}}, \quad (9.25)$$

$$S_{\text{торца}} = 2\pi r \cdot dr, \quad S_{\text{бок}} = 2\pi r \ell.$$

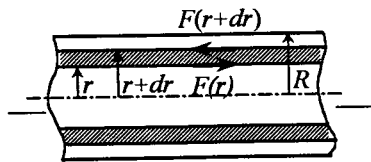


Рис. 9.9. К расчёту распределения скорости частицы в ламинарном потоке

Знак dv/dr выбираем из физических соображений:

$$v(r=0) \equiv v_0 > 0, \text{ отсюда } \frac{dv}{dr} < 0.$$

Поэтому (9.25) можно записать в виде

$$F(r+dr) = -\eta \left| \frac{dv}{dr} \right| \cdot S_{\text{бок}}|_{r+dr} = \eta \left(\frac{dv}{dr} \right)_{r+dr} \cdot 2\pi(r+dr) \cdot \ell, \quad (9.26)$$

$$F(r) = \eta \left| \frac{dv}{dr} \right| \cdot S_{\text{бок}}|_r = -\eta \left(\frac{dv}{dr} \right)_r \cdot 2\pi r \ell.$$

Учитывая, что

$$\left(\frac{dv}{dr} \right)_{r+dr} = \left(\frac{dv}{dr} \right)_r + \left(\frac{d^2v}{dr^2} \right) \cdot dr,$$

подставим (9.26) в (9.25) и найдем

$$2\pi\eta\ell \left\{ \left(\frac{dv}{dr} + \frac{d^2v}{dr^2} \cdot dr \right) \cdot (r+dr) - \frac{dv}{dr} \cdot r \right\} + \Delta p \cdot 2\pi r \cdot dr = 0.$$

С точностью до $(dr)^2$ отсюда получим

$$rv'' + v' + \frac{\Delta p}{\eta\ell} \cdot r = 0. \quad (9.27)$$

Перепишав это уравнение в виде

$$\frac{d}{dr}(rv') = -\frac{\Delta p}{\eta\ell} \cdot r$$

и дважды проинтегрировав, найдем

$$v = -\frac{\Delta p}{\eta\ell} \cdot \frac{r^2}{4} + A \ln r + B. \quad (9.28)$$

Скорость течения жидкости конечна ($v < \infty$), поэтому постоянную A следует положить равной нулю (иначе при $r \rightarrow 0$ получим $\ln r \rightarrow \infty$, т.е. $v \rightarrow \infty$). Поэтому из (9.28) следует

$$A = 0, \quad v(r) = B - \frac{\Delta p}{\eta\ell} \cdot \frac{r^2}{4}.$$

Поскольку у стенки трубы скорость жидкости по определению равна нулю, получим

$$v(R) = B - \frac{\Delta p}{4\eta l} R^2 = 0, \text{ т.е. } B = \frac{\Delta p}{4\eta l} R^2.$$

Окончательно имеем

$$v(r) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad v_0 = \frac{\Delta p}{4\eta l} R^2. \quad (9.29)$$

Таким образом, скорость жидкости убывает по закону параболы (9.29) от значения v_0 на оси трубы до нуля у её стенки.

Рассмотрим теперь *баланс энергии в вязком течении*. Поскольку скорость постоянна во времени, работа сил давления расходуется на преодоление трения. На длине трубы эта работа по перемещению цилиндрического слоя (r, dr) есть

$$dA = \Delta p \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot l. \quad (9.30)$$

Кинетическая энергия этого слоя равна

$$dW = \rho \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot l \cdot \frac{v^2(r)}{2}. \quad (9.31)$$

Из сравнения (9.30) и (9.31) следует, что потери мощности сил давления на преодоление силы трения малы, если

$$dW \gg dA, \text{ или } v^2 \gg \frac{\Delta p}{\rho}.$$

Поскольку $v^2(r) \leq v_0^2$, то условие малой вязкости для потока жидкости в трубе можно представить, с учетом значения v_0 из (9.29), в виде

$$\frac{\rho v_0 R^2}{\eta l} \gg 1. \quad (9.32)$$

Этот критерий можно записать через безразмерный параметр — *число Рейнольдса* (*O. Reynolds*, 1885 г., англ.):

$$Re = \frac{\rho v L}{\eta}, \quad (9.33)$$

где L — характерный линейный размер потока. Число Рейнольдса — безразмерный параметр, позволяющий оценить режим течения жидкости:

$Re \sim 1$ — вязкое течение;

$Re \gg 1$ — течение без потерь (вязкость пренебрежимо мала), (9.34)

справедливо уравнение Бернулли.

Этот параметр служит критерием подобия при сравнении режимов течения потоков с различными параметрами ρ, η, v, L (см. § 9.5).

Задача 9.4. Оценить число Рейнольдса для потока воды из водопровода.

Вода в водопроводной трубе диаметром 1 см, течет со скоростью 0,1 л/с (в чем легко убедиться, открыв водопроводный кран), т.е. около 1 м/с. Для этого потока

$$Re \sim \frac{10^3 \text{ кг/м}^3 \cdot 1 \text{ м/с} \cdot 10^{-2} \text{ м}}{10^{-3} \text{ кг/м} \cdot \text{с}} = 10^4,$$

т.е. в таком течении вязкость существенно не влияет на скорость потока. Ниже мы увидим, что это так называемый *турбулентный режим*. Если же воду заменить глицерином, получим $Re \approx 6$ — почти вязкое течение.

Вернемся к вязкому течению и найдем *скорость истечения жидкости из трубы*, т.е. объем жидкости, вытекающей в единицу времени через трубу радиуса R . С учетом (9.29) запишем

$$\frac{dV}{dt} = \int_{S_{\text{горла}}} v(r) \cdot dS_{\text{горла}} = \int_0^R v(r) \cdot 2\pi r dr = 2\pi v_0 \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot r dr = \pi R^2 \cdot \frac{v_0}{2},$$

или

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\Delta p}{\ell} \cdot \frac{\pi R^4}{8\eta}. \quad (9.35)$$

Это есть *закон Пуазейля* (*Gan Luis Poiseulle*, 1799–1869 гг.) для ламинарного потока жидкости через трубу.

По аналогии с законом Ома для электрической цепи можно ввести в гидродинамике понятие *гидравлического сопротивления*. Слово *гидравлика* происходит от греч. *hydor* — вода и *aulos* — трубка. Так называют раздел механики, изучающий течение жидкостей по трубам. Выпишем аналогичные выражения применительно к электричеству и гидравлике

	Электричество	Гидравлика
Ток (поток)	$I = dq/dt$	$\dot{V} = dV/dt$
Закон Ома	$U = RI$	$\Delta p = R\dot{V}$
Сопротивление	$R = \frac{\rho_{за} \ell}{S}$	$R = \frac{\eta \ell}{\pi R^4/8}$

Из (9.34) следует, что жидкость истекает из трубы в ламинарном потоке со средней скоростью \bar{v} :

$$\dot{V} = S \cdot \bar{v}, \quad \bar{v} = \frac{v_0}{2}. \quad (9.36)$$

Задача 9.5. В задаче 9.4 закон Пуазейля применим только для глицерина (вязкое течение). Для воды же течение станет вязким, если уменьшить диаметр трубы. Оценить, при каком значении диаметра трубы и перепаде давления $\Delta p/\ell \sim 1 \text{ атм}/\text{м} \approx 10^5 \text{ Па}/\text{м}$ течение будет вязким.

Подставив в (9.33) значение скорости вязкого течения (9.29) и положив $Re=1$, найдем условие вязкого течения в виде

$$\frac{\rho R^3}{4\eta^2} \cdot \frac{\Delta p}{\ell} \sim 1. \quad (9.37)$$

Для воды ($\eta \approx 1 \text{ мПа}\cdot\text{с}$) при $\Delta p/\ell = 10^5 \text{ Па}/\text{м}$ найдем

$$R_{\text{вязк}} \sim \left(\frac{4 \cdot (10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с})^2}{10^3 \text{ кг}/\text{м}^3 \cdot 10^5 \text{ Па}/\text{м}} \right)^{1/3} = 34 \text{ мкм}.$$

Отсюда можно заключить, что режим вязкого течения воды устанавливается в капиллярных трубках. Для глицерина радиус "вязкого трубопровода" возрастает в $\eta^{2/3} \sim 10^2$ раз.

Таким образом, закон Пуазейля справедлив для вязких жидкостей в трубках малого диаметра.

§ 9.4. Уравнение Навье–Стокса*

Полученные в § 9.3 соотношения для вязкого течения справедливы, как видно из вывода (9.29), в достаточно гладких трубках с медленно меняющимися

параметрами потока по длине трубы. Снимем это ограничение и рассмотрим элемент dV объема несжимаемой жидкости, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда и массу

$$dm = \rho \cdot dV$$

и движущийся вдоль оси z (так выберем направления осей). Сумма сил, действующих на этот элемент (рис. 9.10), вдоль оси z , есть

$$\sum \vec{F} = \Delta \bar{p} \cdot dS + \vec{F}_{mp} + \vec{F}_{\text{внеш}}, \quad (9.38)$$

$$dS = dx \cdot dy.$$

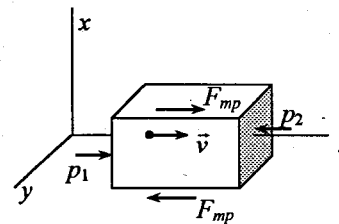


Рис. 9.10. Силы, действующие на элемент объема вдоль направления его движения

Записав

$$\Delta p \cdot dS = (p(z) - p(z+dz)) \cdot dS = -\frac{\partial p}{\partial z} \cdot dV, \quad (9.39)$$

$$F_{mp} = \eta \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x+dz} - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_x \right] \cdot dy \cdot dz = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot dV,$$

из уравнения движения

$$dm \cdot \frac{d\bar{v}}{dt} = \sum \vec{F}$$

с учетом (9.38), (9.39) найдем

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{1}{\rho} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{\text{внеш}}}{\partial V} \right). \quad (9.40)$$

Поскольку при произвольном направлении вектора скорости \bar{v} такие же уравнения имеют место для x - и y -компонент скорости, в общем трехмерном получим

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v} + \vec{f}. \quad (9.41)$$

Здесь ∇ , Δ – операторы градиента и Лапласа:

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z};$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$\vec{f} = \partial \vec{F}_{\text{внеш}} / \partial t$ – внешняя сила, действующая на единицу массы жидкости. Это уравнение еще усложняется, если учесть, что плотность и вязкость жидкости (газа) зависят от температуры. Уравнение (9.41) есть так называемое *уравнение Навье–Стокса* (A. Navier, 1827 г., J.G. Stokes, 1845 г.), являющееся основным уравнением гидродинамики.^{*)}

В отсутствие вязкости ($\eta=0$) первый интеграл одномерного уравнения (9.40) дает закон Бернулли. Действительно, так как $v=v(z, t)$ и поток стационарный, то $\partial v / \partial t = 0$. Имеем

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{\partial v}{\partial z} \cdot v = \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial z}.$$

Если к тому же $F_{\text{внеш}} = 0$, из (9.40) имеем

$$\rho \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0,$$

что при интегрировании по z дает (9.16) при $h = \text{const}$. Вязкостью можно пренебречь, если

$$|\nabla p| \gg \eta |\Delta v|, \text{ или } |p_1 - p_2| \gg \frac{\eta v}{L}; \quad (9.42)$$

L – протяженность потока. Поскольку (см. (9.16)) в этом случае для элемента объема $dV = S \cdot \ell$ можно записать

^{*)} Приведенный вывод не учитывает члены порядка градиента квадрата скорости жидкости, связанные с передачей импульса от набегающего потока элементу объема (см. § 9.6). Их учёт приводит к появлению в правой части уравнения (9.41) члена $-(\vec{v}, \nabla) \cdot \vec{v}$. При течении с малым числом Рейнольдса этим членом можно пренебречь.

$$(p_1 - p_2) \cdot S \ell \sim \rho S \ell v^2 / 2, \text{ т.е. } |p_1 - p_2| \sim \rho v^2,$$

то (9.40) опять приводит к условию малой вязкости (9.34):

$$\frac{\rho v L}{\eta} \equiv \text{Re} \gg 1. \quad (9.43)$$

§ 9.5. Турбулентное течение*

Турбулентным (от лат. *turbulentus* – бурный) называется течение, при котором в жидкости возникают *вихри*, ламинарное движение разрушается, а движение частиц жидкости приобретает беспорядочный (хаотический) характер. В турбулентном режиме течения распределение скорости по сечению трубы становится более однородным (рис. 9.11). Средняя по сечению скорость жидкости в цилиндрической трубе равна

$$\bar{v} = \begin{cases} \frac{v_0}{2} - \text{ламинарное течение (9.35)}, \\ \sim 0,8v_0 - \text{турбулентное течение.} \end{cases} \quad (9.44)$$

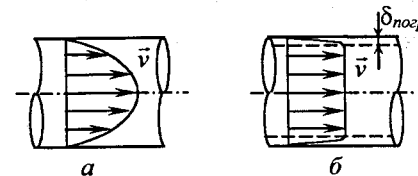


Рис. 9.11. Распределение скорости по сечению трубы:
а – $\text{Re} < \text{Re}_{\text{крит}}$, б – $\text{Re} > \text{Re}_{\text{крит}}$

В турбулентном режиме течения вблизи стенки трубы образуется ламинарный пограничный слой, в котором скорость нарастает по мере продвижения внутрь трубы от 0 до $v \approx v_0$ (рис. 9.11, б). Толщина этого слоя

$$\delta_{\text{позр}} \sim 100 \frac{R}{\text{Re}}. \quad (9.45)$$

Это эмпирическая формула, т. к. расчеты здесь весьма сложны. Переход от ламинарного движения к турбулентному происходит, когда число Рейнольдса достигает некоторого критического значения

$$Re_{крит} \approx 1300. \quad (9.46)$$

Это приближенный критерий. Иногда удается получить ламинарный режим течения вплоть до $Re=50000$. При этом режим течения неустойчив, очень чувствителен к возмущениям потока на входе в трубу.

Математический критерий турбулентного течения позволяет одновременно дать наглядное толкование важному понятию: если течение *турбулентно*, то^{*)}

$$\text{rot } \vec{v} \neq 0, \quad (9.47)$$

где rot – векторный оператор, называемый ротором (от лат. *roto* – вращаюсь) и определяемый в декартовых координатах как

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}. \quad (9.48)$$

Например, скорость частицы, движущейся по окружности, равна $v = \omega R$, а компоненты скорости (рис. 9.12), выраженные через координаты частицы (x, y) , есть

$$v_x = v \sin \varphi = -\frac{v}{R} \cdot y = -\omega \cdot y,$$

$$v_y = v \cos \varphi = \frac{v}{R} \cdot x = \omega \cdot x,$$

$$v_z = 0.$$

^{*)} Условие (9.47) является необходимым, но не достаточным условием турбулентности, т.е. не всякий поток, в котором это условие выполнено, является турбулентным, нужно ещё удовлетворить условию (9.46).

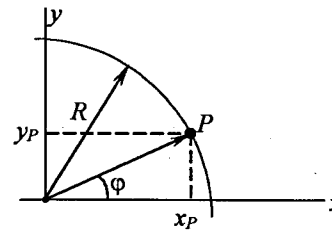


Рис. 9.12. К вычислению ротора скорости частицы, движущейся по окружности

Для этого случая

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_z \left(\frac{\partial \omega x}{\partial x} - \frac{\partial (-\omega y)}{\partial y} \right) = 2\vec{e}_z \omega = 2\vec{\omega}.$$

Таким образом, ротор скорости частицы, вращающейся по окружности, равен ее удвоенной угловой скорости. Отсюда ясен смысл условия (9.47): ротор скорости не равен нулю, если частица движется по криволинейной траектории.

При турбулентном течении, как и при ламинарном, можно ввести понятие гидравлического сопротивления. Однако в гидравлике его принято вводить несколько иначе, чем это сделано выше. Как связано сопротивление со скоростью, подсказывает закон Бернулли. Из (9.16) можно записать уравнение, связывающее параметры потока перед входом в трубу, по которой течет поток, и в трубе:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho}.$$

Приняв $v_1 \ll v_2 \equiv v$, получим

$$p_1 - p_2 \equiv \Delta p = \frac{\rho v^2}{2}. \quad (9.49)$$

Перепад высот можно считать включенным в Δp , для чего достаточно Δp заменить на $\Delta p + \rho g \Delta h$. Однако закон Бернулли – закон сохранения энергии для потока жидкости. В турбулентном режиме часть энергии расходуется на создание вихрей, поэтому в (9.49) следует добавить безразмерный коэффициент и заменить v на среднюю по сечению потока скорость $\langle v \rangle$:

$$\Delta p = J \frac{\rho \langle v \rangle^2}{2}$$

Дальше работают принципы подобия и размерностей: вводят еще один параметр ψ , такой, что

$$J = \psi \frac{\ell}{R}, \quad \Delta p = \psi \frac{\ell}{R} \cdot \frac{\rho \langle v \rangle^2}{2}, \quad (9.50)$$

где ℓ , R – длина и так называемый гидравлический радиус канала. Для цилиндрической трубы это просто ее радиус, для коробчатой – наименьший из двух поперечных размеров и т.д. (Вообще следует сказать, что гидравлические расчеты всегда достаточно приближительны: соотношение (9.50) – скорее отражение экспериментальных фактов, нежели глубоко теоретический вывод).

Безразмерный параметр ψ называют также *сопротивлением канала*. Его значение зависит от формы сечения канала, шероховатости стенок и, главное, от числа Рейнольдса (рис. 9.13).

Шероховатость трубы обычно характеризуют безразмерным параметром

$$\varepsilon = \frac{\delta}{R},$$

где δ – средний размер шероховатости, R – радиус трубы. Трубы считаются гидравлически *гладкими*, если $\delta < \delta_{\text{доп}}$, см. (9.45).

На рис. 9.13 отчетливо видны две области разных режимов течения:

ламинарное течение – $Re < 1000$ ($\lg Re < 3$);

турбулентное течение – $Re > 1000$.

Для ламинарного течения ψ быстро падает с Re , тогда как в области турбулентного ψ почти постоянно. Существует область переходного режима, где ψ минимально. В области $2 \cdot 10^3 < Re < 1 \cdot 10^4$ можно пользоваться приближенной формулой Блазиуса:

$$2\psi \approx 0,3(Re)^{-1/4}, \quad 2 \cdot 10^3 < Re < 1 \cdot 10^4. \quad (9.51)$$

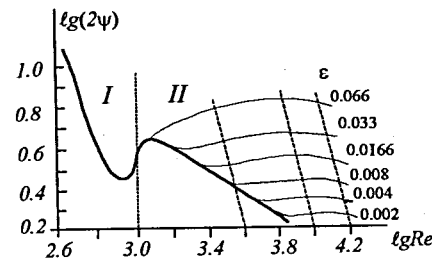


Рис. 9.13. Зависимость сопротивления канала от числа Рейнольдса (логарифмический масштаб):
I – область ламинарного течения;
II – турбулентного

Задача 9.6. При расчете водопровода обычно заданы расход воды \dot{V} , длина водопровода ℓ , перепад давления, которым может располагать конструктор. Требуется найти диаметр водопроводной трубы.

Вначале выпишем все необходимые соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \pi R^2 \bar{v}, \\ \Delta p &= \psi(x) \cdot \frac{\ell}{R} \cdot \frac{\rho \langle v \rangle^2}{2}, \\ x \equiv Re &= \frac{\rho \langle v \rangle \ell}{\eta}, \end{aligned} \quad (9.52)$$

$\psi(x)$ – известная функция (рис. 9.13). Из первого и третьего уравнений найдем

$$R = \frac{\dot{V}}{x} \cdot \frac{\rho}{\pi \eta}, \quad \bar{v} = \frac{\pi \eta^2}{\dot{V} \rho^2} \cdot x^2.$$

Подставив эти выражения во второе уравнение, получим трансцендентное уравнение для числа Рейнольдса x :

$$\psi(x) = \frac{C}{x^5}, \quad C = \frac{2}{\pi^3} \cdot \frac{\dot{V}^3 \rho^4}{\eta^5 \ell} \cdot \Delta p. \quad (9.53)$$

Это трансцендентное уравнение можно решить, например, графически, используя график $\psi(x)$, рис. 9.13, или формулу (9.51). Например, выбрав типичные значения параметров водопровода

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 100 \text{ л/с} = 0,1 \text{ м}^3/\text{с}, \\ \eta &= 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad \rho = 10^3 \text{ кг/м}^3 \text{ (вода)}, \\ \Delta p &= 5 \text{ атм} \approx 5 \cdot 10^5 \text{ Па}, \\ \ell &= 100 \text{ м}, \end{aligned}$$

найдем

$$C = \frac{2}{\pi^3} \cdot \frac{(0,1 \text{ м}^3/\text{с})^3 \cdot (10^3 \text{ кг/м}^3)^4}{(10^{-3} \text{ кг/м} \cdot \text{с})^5 \cdot 10^2 \text{ м}} \cdot 5 \cdot 10^5 \text{ кг/м} \cdot \text{с}^2 \approx 3 \cdot 10^{26}.$$

Уравнение $\psi(x) = 3 \cdot 10^{26} x^{-5}$ имеет решение $x \approx Re \approx 4 \cdot 10^5$. Тогда из третьего уравнения в (9.52) найдем $\bar{v} \approx 5$ м/с и, подставив в первое, получим $R \approx 8$ см.

Конечно, расчёт, приведенный в задаче 9.6, – физический. Для инженерных расчетов обычно используются более точные эмпирические таблицы и формулы. Пример такой приближенной формулы, применимой в ограниченном диапазоне значений Re , приведен выше – это соотношения (9.51). Пользоваться ими удобнее, нежели графическим решением уравнения. Так, в приведенном примере формула (9.51) дает близкое значение $x = 5,58 \cdot 10^5$, хотя эта формула, строго говоря, для заданных значений Re уже неприменима, т.к. $Re > 10^4$.

§ 9.6. Движение тел в жидкости и газе

При движении тела в жидкости возникает, прежде всего, сила лобового сопротивления. Ее можно оценить, перейдя в систему движущегося тела, где импульс p_v , передаваемый набегающим потоком в единицу времени, создает силу

$$F_{\text{сопр}} = \frac{dp_v}{dt} = v \frac{dm}{dt} \sim v \cdot \rho v S = \rho v^2 S, \quad (9.54)$$

где S – площадь поперечного сечения тела. Сюда следует добавить еще силу трения потока о боковую поверхность и силу, возникающую из-за перераспределения давления среды в окрестности движущегося тела. Из (9.24) для малых скоростей ($Re \sim 1$) имеем

$$F_{\text{тр}} = \sigma S_{\text{бок}}, \quad \sigma = \eta \frac{\partial v}{\partial x} \sim \eta \frac{v}{R}, \quad (9.55)$$

где $R \ll \ell$ – характерный поперечный размер тела (рис. 9.14). Тогда, приняв $S_{\text{бок}} \sim 2\pi R \ell$, получим

$$F_{\text{тр}} \sim 2\pi \eta \ell v.$$

Силу, связанную с возникновением градиента давления, можно оценить в системе движущегося тела. Она, по порядку величины, составляет

$$F_p \sim \delta p \cdot S.$$

Здесь δp – перепад давления на размере тела ℓ . Его можно найти, воспользовавшись уравнением Навье–Стокса (9.41). При постоянной скорости тела (т.е. скорости потока в системе тела) имеем

$$\delta p \sim |\nabla p| \cdot \ell \sim \eta |\Delta \bar{v}| \cdot \ell \sim \eta \frac{v}{\ell}.$$

В результате найдём

$$F_p \sim \pi \eta \frac{R^2}{\ell} \cdot v. \quad (9.56)$$

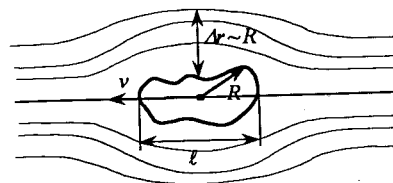


Рис. 9.14. Обтекание тела потоком жидкости или газа

Для шара $\ell = R$, $S_{\text{бок}} = 4\pi R^2$, $S = \pi R^2$ и такой подход дает

$$(F_{\text{тр}})_{\text{шара}} \sim 5\pi \eta R v,$$

тогда как точная формула Стокса (G.G. Stokes, 1851 г.) содержит множитель 6π (см. Задачу 9.9 ниже):

$$F_{\text{Стокса}} = 6\pi \eta R v. \quad (9.57)$$

Если тело имеет несимметричную форму, возникает подъемная сила. Ее происхождение – следствие закона Бернулли: если тело имеет асимметричную форму, как в примере на рис. 9.15, скорость потока над и под ним существенно разная, это следует из уравнения непрерывности: $(v \cdot S = \text{const})$, площадь трубок тока между точками AB на рис. 9.15 уменьшается при обтекании потоком тела, поэтому здесь скорость возрастает – $v_2 > v_0$, тогда как площадь трубок тока между точками B и C почти неизменна, так что $v_2 \approx v_0$. Крайний случай, когда скорость $v_0 = 0$, имеет место в пульверизаторе (рис. 9.5).

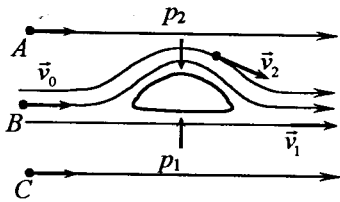


Рис. 9.15. Возникновение подъемной силы при обтекании тела потоком жидкости или газа

Записав из уравнения Бернулли равенства

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2},$$

с учётом неравенства $v_2 > v_1$ имеем

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2) > 0.$$

Задача 9.7. Оценить мощность, расходуемую легковым автомобилем на преодоление силы лобового сопротивления.

Площадь поперечного сечения легкового автомобиля $S \sim 2,5 \text{ м}^2$. На скорости $90 \text{ км/час} = 25 \text{ м/с}$ искомая мощность равна

$$P = F_{\text{сопр}} \cdot v \sim 1,29 \text{ кг/м}^3 \cdot (25 \text{ м/с})^3 \cdot 2,5 \text{ м}^2 \approx 50 \text{ кВт} \approx 68 \text{ л.с.}$$

(Сравни с задачей 7.11).

Задача 9.8. Оценить, при каких размерах маятника "шарик на нити" (рис. 6.2) лобовое сопротивление воздуха превышает вязкое трение о воздух.

Полагая $(F_{\text{тр}})_{\text{шарика}} \sim F_{\text{сопр}}$ и воспользовавшись формулами (9.54), (9.56), найдём

$$vR \approx \frac{6\eta}{\rho}.$$

Подставляя сюда (см. задачу 6.1)

$$v_{\text{max}} = \omega_0 \Phi_0 \cdot \ell = \sqrt{g\ell} \cdot \Phi_0,$$

где ℓ – длина нити. Подставив в предыдущую формулу, получим соотношение между R и ℓ :

$$\ell \geq \left(\frac{6\eta}{\rho\Phi_0} \right)^2 \cdot \frac{1}{gR^2}.$$

Вязкость воздуха при 15°C $\eta = 18 \text{ мПа}\cdot\text{с}$ ($1 \text{ мПа} = 10^{-2} \text{ дин/см}^2$). Полагая $\Phi_0 = 0,2$ (малые колебания), для шарика радиусом 5 см найдём

$$\ell \geq 7,14 \text{ м.}$$

Наиболее яркой демонстрацией действия подъемной силы является эффект Магнуса (*H.G. Magnus*, 1852 г.): вращающийся цилиндр (рис. 9.16), движущийся горизонтально со скоростью, перпендикулярной его оси, испытывает действие вертикальной силы. Она возникает из-за того, что воздух, обтекающий цилиндр, увлекается его вращающейся поверхностью. Аналогичный эффект проявляется в играх с мячом – резаный удар в теннисе, удар "сухой лист" в футболе и т.д.

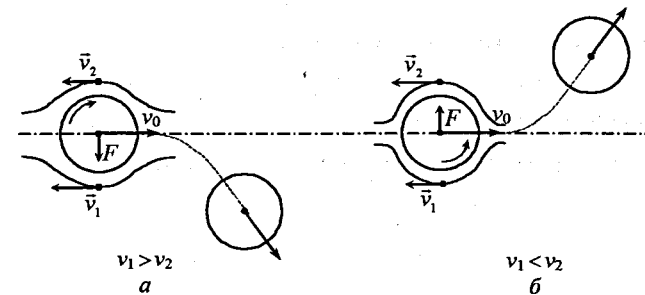


Рис. 9.16. Эффект Магнуса: вращающийся цилиндр движется с поступательной скоростью v_0 ; в зависимости от направления вращения цилиндр падает вниз (а) или взлетает вверх (б)

В эффектах с вращающимися телами существенную роль играет вязкость обтекающей среды. В случае асимметричного тела, движущегося только поступательно, подъемная сила появляется и в отсутствие вязкости.

Аналогичны причины проявления "подъемной" силы при движении в жидкости. Например, два корабля, движущиеся параллельными курсами, "притягиваются" друг к другу, если расстояние между ними достаточно мало

(порядка их поперечного сечения), что известно, к сожалению, из истории кораблекрушений.

Задача 9.9. Получить формулу Стокса (9.57) для силы, действующей на шар, движущийся в вязкой среде (жидкость, газ) с постоянной скоростью \vec{v}_0 .

Указание: воспользоваться уравнениями непрерывности (9.8) и Навье–Стокса (9.41).

В системе шара скорость налетающего потока постоянна по времени, поэтому уравнения (9.8) и (9.41) принимают вид

$$\begin{aligned} \nabla p - \eta \Delta \vec{v} &= 0, \\ \text{div} \vec{v} &= 0. \end{aligned} \quad (9.58)$$

Здесь принято также, что внешние силы \vec{f} отсутствуют или их действие пренебрежимо мало. Кроме того, скорость потока и давление в среде на бесконечном удалении от шара равны

$$\vec{v}(\vec{r} \rightarrow \infty) = -\vec{v}_0, \quad p(\vec{r} \rightarrow \infty) = p_0. \quad (9.59)$$

Скорость потока обращается в нуль на поверхности шара:

$$\vec{v}(\vec{r} = \vec{R}) = 0. \quad (9.60)$$

Обратим внимание на то, что давление – скаляр в соответствии с законом Паскаля.

Запишем покомпонентно уравнения (9.58) в сферической системе координат с центром в центре шара и полярной осью вдоль вектора \vec{v}_0 (рис. 9.17). Учтём, что при таком выборе осей задача аксиально-симметрична, т.е. функции $\vec{v}(\vec{r})$ и $p(\vec{r})$ не зависят от азимутального угла φ .

Получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot v_\theta) &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial r} - \eta (\Delta \vec{v})_r &= 0, \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} - \eta (\Delta \vec{v})_\theta &= 0. \end{aligned} \quad (9.61)$$

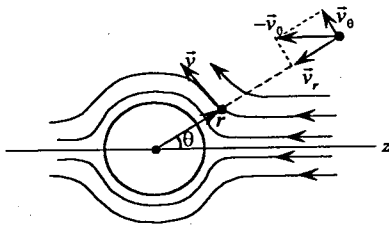


Рис. 9.17. В системе движущегося шара поток жидкости (газа) омывает его со скоростью $\vec{v}(\vec{r}, \theta)$

Здесь и начинаются основные математические трудности – вычисление r - и θ -компонент вектора $\Delta \vec{v}$ (результат действия лапласиана на векторную функцию). Чтобы произвести эти действия, следует записать скорость частиц потока в виде

$$\vec{v} = \vec{e}_r v_r + \vec{e}_\theta v_\theta$$

и произвести дифференцирование в сферических координатах:

$$\Delta \vec{v} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta} \right).$$

Здесь мы учли уже аксиальную симметрию вектора \vec{v} , положив $v_\varphi = 0$. Кроме того, нужно ещё учесть, что векторы \vec{e}_r и \vec{e}_θ также подлежат дифференцированию в сферических координатах (аналогично тому, как мы это делали в § 1.1. – см. (1.4), (1.5)):

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta, \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r,$$

и т.д.^{*)} В результате вторые и третьи уравнения в (9.61) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) - \frac{2}{r^2} \cdot v_r - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot v_\theta) &= \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial r}, \\ \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \theta} &= \frac{1}{\eta r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (9.62)$$

Будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} \vec{v}_r(r, \theta) &= Ar^n \cdot \cos \theta, \\ v_\theta(r, \theta) &= Br^m \cdot \sin \theta, \\ p(r, \theta) &= p_0 + Cr^k \cdot f(\theta), \end{aligned} \quad (9.63)$$

где p_0 – постоянное давление в среде (в том числе и в отсутствие движения шара), $f(\theta)$ – неизвестная пока скалярная функция. Следует отметить, что зависимость скорости от угла θ легко угадывается: в системе шара скорость частиц в набегающем потоке теряет свою радиальную компоненту, когда поток "разбивается" о шар, а появляется θ -компонента скорости, касательная к поверхности шара (или концентрическим с ним сферическим поверхностям). Компонента v_θ достигает максимума при $\theta = \pi/2$ и вновь убывает до нуля по мере приближения θ к π . Радиальная компонента, наоборот, максимальна по модулю при $\theta = 0, \pi$.

Подставим решения (9.63) в первое из уравнений (9.61) и в уравнения (9.62). Найдём

^{*)} См. подробнее: В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин. Сб. задач по электродинамике, М.: Наука, 1976, задача № 47.

$$\begin{aligned} \{(n+2)Ar^{n-1} + 2Br^{n-1}\} \cdot \cos \theta &= 0, \\ \{n(n+1) - 4\}Ar^{n-2} + 4Br^{n-2}\} \cdot \cos \theta &= \frac{k}{\eta} \cdot Cr^{k-1} \cdot f(\theta), \\ \{m(m+1) - 2\}Br^{m-2} - 2Ar^{n-2}\} \cdot \sin \theta &= \frac{1}{\eta} Cr^{k-1} \frac{\partial f}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что из этой системы уравнений следует

$$\begin{aligned} n &= m = k + 1, \\ f(\theta) &= \cos \theta. \end{aligned}$$

С учётом этого обстоятельства приходим к системе алгебраических уравнений для коэффициентов A, B, C :

$$\begin{aligned} (n+2)A + 2B &= 0, \\ (n(n+1) - 4)A - 4B - \frac{k}{\eta} \cdot C &= 0, \\ 2A - (n(n+1) - 2) \cdot B - \frac{1}{\eta} \cdot C &= 0, \end{aligned} \quad (9.64)$$

которая, как известно, имеет ненулевое решение, если её определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} n+2 & 2 & 0 \\ n(n+1)-4 & -4 & -\frac{k}{\eta} \\ 2 & -n(n+1)+2 & -\frac{1}{\eta} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем уравнение для показателя n :

$$n(n+3) \cdot (n^2 - n - 2) = 0.$$

Его корни:

$$n = \begin{cases} 1, \\ 0, \\ -1, \\ -3, \end{cases}$$

В случае $n = 1$ решение (9.63) неограниченно возрастает с ростом радиуса r , что физически бессмысленно, поэтому этот корень следует отбросить. В результате решение (9.63) принимает вид

$$\begin{aligned} v_r(r, \theta) &= \left(A_0 + \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^3} \right) \cdot \cos \theta, \\ v_\theta(r, \theta) &= \left(B_0 + \frac{B_1}{r} + \frac{B_2}{r^3} \right) \cdot \sin \theta, \\ p(r, \theta) &= p_0 + \left(\frac{C_0}{r} + \frac{C_1}{r^2} + \frac{C_2}{r^4} \right) \cdot \cos \theta. \end{aligned} \quad (9.65)$$

Число коэффициентов уменьшим, подставив поочередно значения n в систему уравнений (9.64).

Для $n = 0$ найдём

$$A_0 = -B_0, \quad C_0 = 0,$$

для $n = -1$

$$A_1 = -2B_1 = \frac{1}{\eta} C_1,$$

для $n = -3$

$$A_2 = 2B_2, \quad C_2 = 0.$$

Соответственно, решение (9.65) принимает вид

$$\begin{aligned} v_r(r, \theta) &= \left(A_0 + \frac{A_1}{r} + \frac{A_2}{r^3} \right) \cdot \cos \theta, \\ v_\theta(r, \theta) &= \left(A_0 + \frac{A_1}{2r} - \frac{A_2}{2r^3} \right) \cdot \sin \theta, \\ p(r, \theta) &= p_0 + \eta \frac{A_1}{r^2} \cdot \cos \theta. \end{aligned} \quad (9.66)$$

Из условия (9.59) находим (см. рис. 9.17):

$$\begin{aligned} v_r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} v_0 \cdot \cos \theta &= A_0 \cdot \cos \theta, \\ v_\theta \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -v_0 \cdot \sin \theta &= -A_0 \cdot \sin \theta, \end{aligned}$$

откуда

$$A_0 = v_0.$$

Осталось воспользоваться условием (9.60), что даёт

$$\begin{aligned} v_0 + \frac{A_1}{R} + \frac{A_2}{R^3} &= 0, \\ v_0 + \frac{A_1}{2R} - \frac{A_2}{2R^3} &= 0, \end{aligned}$$

и, соответственно,

$$A_1 = -\frac{3}{2} \cdot v_0 R, \quad A_2 = \frac{1}{2} \cdot v_0 R^3.$$

Окончательно запишем

$$\begin{aligned} v_r(r, \theta) &= v_0 \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{r} + \frac{R^3}{2r^3} \right) \cdot \cos \theta, \\ v_\theta(r, \theta) &= -v_0 \left(1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{R}{r} - \frac{R^3}{4r^3} \right) \cdot \sin \theta, \\ p(r, \theta) &= p_0 - \frac{3}{2} \cdot \eta v_0 \frac{R}{r^2} \cdot \cos \theta. \end{aligned} \quad (9.67)$$

Осталось вычислить силу, действующую на шар. Она, как уже сказано (см. (9.55), (9.56)) имеет две составляющих – силу трения

$$F_{mp} = -\eta \oint_S \left. \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right|_{r=R} \cdot \sin \theta \cdot dS$$

и силу, возникающую из-за перепада давления:

$$F_p = \oint_S p(R, \theta) \cdot \cos \theta \cdot dS,$$

где S – поверхность шара. Подставляя сюда значения v_θ и p из (9.67), найдём силу, направленную против скорости шара:

$$F_x = -p^2 \int_0^\pi \sin \theta \cdot d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \frac{3}{2} \frac{\eta v_0}{R} \sin^2 \theta + p_0 \cdot \cos \theta + \frac{3}{2} \frac{\eta v_0}{R} \cdot \cos^2 \theta \right\} = -6\pi \eta v_0 R.$$

Таким образом, мы пришли к выражению для силы Стокса (9.57).

Отметим несколько важных обстоятельств.

Во-первых, вклад постоянного (статического) давления в явном виде в формуле (9.57) отсутствует. Тем не менее оно оказывает влияние через динамическое давление (второе слагаемое в формуле $p(r, \theta)$), которое усиливает суммарное давление "на входе", т.е. справа от шара (рис. 9.17), и ослабляет его "на выходе", слева от шара.

Во-вторых, хотя скорость потока и обращается в нуль на поверхности шара, её производная здесь отлична от нуля, что и создаёт силу трения (см. (9.55)).

И, в-третьих, уже из приведённого вывода следует одно из условий применимости формулы Стокса: давление p_0 постоянно на размере шара, т.е.

$$p_0 \gg \rho g \cdot 2R.$$

ГЛАВА 10. ВОЛНЫ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Волной в физике называют изменение состояния физической системы ("возмущение"), перемещающееся в пространстве. Примеры волны: скачок плотности в среде, отклонение элемента струны, электромагнитные волны, распространяющиеся в пространстве.

Для *одномерной волны* это перемещающееся возмущение зависит от координат и времени как функция

$$f(x, t) = f(x - vt) \quad (10.1)$$

Величина

$$\varphi = x - vt \quad (10.2)$$

называется *фазой волны*. Из условия постоянства фазы $\varphi = const$ следует выражение для *фазовой скорости волны*:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (10.3)$$

Подчеркнем, что здесь x – координаты точек пространства (так называемые эйлеровы координаты), а v – скорость, с которой перемещается точка постоянной фазы. Это особенно понятно на примере *гармонических (монохроматических) волн*:

$$f(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \varphi_0) \quad (10.4)$$

Это название произошло от гармонических функций, которыми такие волны описываются. В этом случае из (10.4) имеем

$$\varphi = kx - \omega t + \varphi_0, \text{ и для } \dot{\varphi} = 0 \text{ получим } \dot{x}|_{\varphi=0} \equiv v = \frac{\omega}{k}. \quad (10.5)$$

Длиной волны называют расстояние между её точками, в которых фаза в данный момент времени отличается на 2π :

$$\begin{aligned} \varphi(x_1) - \varphi(x_2) &= k(x_1 - x_2)_{2\pi} = 2\pi, \\ (x_1 - x_2)_{2\pi} &\equiv \lambda = 2\pi/k, \end{aligned} \quad (10.6)$$

где λ – *длина волны*. Отрезок времени, за который фаза волны в данной (любой!) фиксированной точке пространства изменяется на 2π , называется *периодом колебаний волны*.

$$\begin{aligned} \varphi(t_2) - \varphi(t_1) &= \omega(t_2 - t_1)_{2\pi} = 2\pi, \\ (t_2 - t_1)_{2\pi} &\equiv T = \frac{2\pi}{\omega}. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Величина ω есть частота этих колебаний. Параметр k называется волновым числом.

Из (10.5) и (10.6) получим формулы, связывающие длину волны, фазовую скорость, частоту и период колебаний:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega} \cdot v = vT. \quad (10.8)$$

Все эти соотношения нужны при анализе волновых процессов.

Частота и длина гармонической волны фиксированы, отсюда второе название такой волны – монохроматическая, т.е. "одноцветная" (лат.).

Важной разновидностью волн в сплошной среде (твердом теле, жидкости, газе) являются волны упругой деформации, или звуковые волны.

§ 10.1. Продольные волны в твердом теле

Рассмотрим вначале движение скачка плотности в длинном и тонком цилиндре (стержне). Пусть, например, на конце такого неподвижного (закрепленного) стержня элемент длины Δx подвергается мгновенному растяжению

$$\Delta x \rightarrow \Delta x + \delta x.$$

Возникающее в стержне напряжение передается от одной точки к другой с некоторой конечной скоростью c , в результате чего участок деформации перемещается по стержню с такой же скоростью c (рис. 10.1) и за время

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{c} \quad (10.9)$$

через сечение AA "протекает" масса

$$\delta m = (\rho - \rho_0) S \cdot \Delta x, \quad (10.10)$$

где ρ_0 и ρ – начальная (невозмущенная) и возмущенная плотности стержня:

$$\rho_0 = \frac{\Delta m}{S \cdot \Delta x}, \quad \rho = \frac{\Delta m}{S(\Delta x + \delta x)}.$$

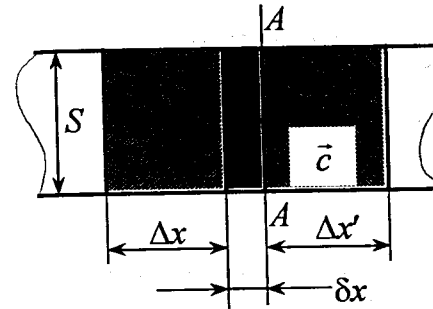


Рис. 10.1. Движение скачка плотности по стержню

Существенно, что, если первоначально элемент Δx растянут, то, сжимаясь, он тянет массу "на себя", и на рис. 10.1 масса "течет" справа налево, поэтому $\delta m < 0$ при положительном δx , что и следует из (10.10) при малом δx :

$$\delta m \approx -\frac{\Delta m}{S \cdot \Delta x} \cdot \delta x = -\rho_0 \cdot \frac{\delta x}{\Delta x}.$$

С этой движущейся массой δm связан импульс

$$\delta p = \delta m \cdot c = -\rho_0 c \cdot \frac{\delta x}{\Delta x}, \quad (10.11)$$

который передается вдоль стержня из-за разности сил, действующих на недеформированный элемент $\Delta x'$ справа от сечения AA :

$$\Delta F = -\sigma S = -E \varepsilon_x S = -ES \frac{\delta x}{\Delta x}. \quad (10.12)$$

Знак минус как раз и отражает тот факт, что сила, приложенная к $\Delta x'$, направлена против скорости: чтобы скачок уменьшенной плотности бежал направо, нужно стержень тянуть налево. Это можно продемонстрировать на цепочке шариков, соединенных одинаковыми пружинами (рис. 10.2). Если в нерастянутой цепочке (1) мгновенно (т.е. быстро по сравнению с периодом колебаний осциллятора "шарик-пружинка") растянуть крайнюю левую пружинку (2) и отпустить, по цепочке побежит волна деформации (3, 4).

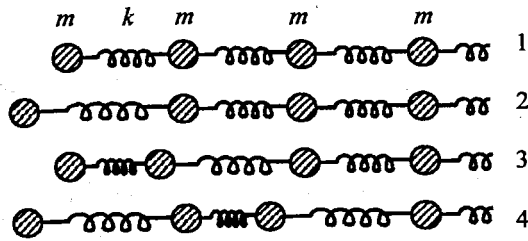


Рис. 10.2. Модель распространения скачка плотности в стержне

Вернемся к задаче о волне в стержне. Записав уравнение движения для массы δm

$$\frac{\delta p}{\Delta t} = \Delta F \quad (10.13)$$

и подставив в него δp из (10.11), Δt (10.9) и ΔF (10.12), найдем

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \quad (10.14)$$

Таким образом, скачок деформации перемещается в стержне со скоростью c (10.14).

Что же изменится, если стержень толстый? В этом случае следует учесть изменение поперечного размера стержня при растяжении-сжатии, что в свою очередь скажется на продольном движении элемента. Проще всего эту связь продемонстрировать на примере тела неограниченных размеров, в котором по одному из направлений (направим вдоль него ось x) движется слой деформации толщиной $\Delta x + \delta x$, размеры которого не ограничены по y и z . Это пример *одномерной задачи*. В этом случае при растяжении элемента $\Delta x \rightarrow \Delta x + \delta x$ возникающий дефицит плотности заполняется массой, "втекающей" по y - и z -направлениям. Однако из-за безграничности поперечных размеров должны отсутствовать поперечные деформации, для чего необходимы дополнительные поперечные напряжения σ_y, σ_z . Они, в свою очередь, вызывают дополнительные деформации вдоль поперечного к ним x -направления (см. 7.56) и (7.65)). Баланс деформаций и напряжений в общем случае описывается соотношениями (7.65).

Положив в (7.65) $\epsilon_y = \epsilon_z = 0$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} E\epsilon_x &= \sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z), \\ 0 &= \sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z), \\ 0 &= \sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned} \quad (10.15)$$

которую разрешим относительно напряжений. Найдем

$$\begin{aligned} \sigma_y = \sigma_z &= \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_x, \\ \epsilon_x &= \frac{(1+\mu) \cdot (1-2\mu)}{1-\mu} \cdot \frac{\sigma_x}{E}. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Теперь можно повторить вывод формулы для скорости, аналогичный (10.9) – (10.14):

$$\begin{aligned} \frac{\delta p}{\Delta t} = \frac{\delta m}{\Delta x} \cdot c_{\parallel}^2 &\approx -\frac{\Delta m}{\Delta x} \cdot c_{\parallel}^2 \cdot \epsilon_x = -\rho_0 S c_{\parallel}^2 \frac{(1+\mu) \cdot (1-2\mu)}{1-\mu} \cdot \frac{\delta x}{E}, \\ \Delta F &= -\sigma_x S. \end{aligned} \quad (10.17)$$

Приравняв согласно (10.13) оба полученных уравнения, найдем

$$c_{\parallel} = \sqrt{\frac{1-\mu}{(1+\mu) \cdot (1-2\mu)} \cdot \frac{E}{\rho_0}} \quad (10.18)$$

Значок " \parallel " подчеркивает, что c – скорость распространения деформации, параллельная деформации.

Выше в обоих случаях был использован термин "скачок деформации", а как же быть с волнами? Нетрудно убедиться, что скорости (10.14, 10.18) те же и для деформаций, произвольно зависящих от времени, так как последние можно представить в виде суперпозиции (наложения) сколь угодно малых элементов Δx . Тем не менее покажем, как в случае *одномерной и продольной деформации* прийти к волновому уравнению. Для этого достаточно привести уравнение (10.17) в дифференциальной форме и учесть уравнение непрерывности (9.8).

Проще начать с уравнения движения (10.13), поделив его на объем элемента $\Delta V = \Delta x S$. То, что $S = \infty$ в рассматриваемом случае, не должно смущать, так как в плоской одномерной деформации от значения S величины не зависят, к тому же в дальнейшем параметр S просто сократится. Кроме того, учтем, что на элемент Δx действуют силы, растягивающие его направо и налево, так что

$\Delta F = F_+ - F_-$. Это обстоятельство отмечалось выше (см. (10.12)), но теперь, при переходе к предельно малым (дифференциальным) равенствам, сила меняется вдоль оси x монотонно, а не скачками, как в примере на рис. 10.2.

Итак, запишем выражения для величин, входящих в уравнение (10.13), разделив их на ΔV :

$$\frac{1}{\Delta V} \cdot \frac{\delta p}{\Delta t} = \frac{\delta \left(\frac{\Delta m}{\Delta V} \cdot v \right)}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t}, \quad (10.19)$$

$$\frac{\Delta F}{\Delta V} = \frac{\Delta F}{S \cdot \Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}.$$

Здесь v – мгновенная скорость элемента Δx . Второе из равенств (10.16) с учётом (10.18) представим в виде

$$\Delta \sigma_x = \rho_0 c_{\parallel}^2 \epsilon_x = \rho_0 c_{\parallel}^2 \frac{\delta x}{\Delta x} \quad (10.20)$$

и выразим приращение длины δx через приращение плотности элемента Δx :

$$\Delta m = \rho_0 S \Delta x = (\rho_0 + \delta \rho) \cdot S \cdot (\Delta x + \delta x).$$

Отсюда в линейном по δx , $\delta \rho$ приближении найдем:

$$\frac{\delta x}{\Delta x} = -\frac{\delta \rho}{\rho_0}. \quad (10.21)$$

Подстановка этого результата в (10.20) дает

$$\Delta \sigma_x = -c_{\parallel}^2 \cdot \delta \rho.$$

Наконец, поделив это равенство на Δx , в пределе при $\Delta x \rightarrow 0$ получим

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -c_{\parallel}^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (10.22)$$

Осталось собрать полученные выражения вместе. Начнём опять с равенства (10.13), делённого на ΔV :

$$\frac{1}{\Delta V} \cdot \frac{\delta p}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta V} \cdot \Delta F.$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ левая часть стремится к $\partial(\rho v)/\partial t$ (10.19), а правая – к $\partial \sigma_x / \partial x$ (10.19):

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}.$$

Подставив сюда значение $\partial \sigma_x / \partial x$ из (10.22), окончательно запишем

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + c_{\parallel}^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (10.23)$$

Вместе с уравнением непрерывности (9.8), которое в рассматриваемом одномерном случае можно записать в виде

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (10.24)$$

получаем систему так называемых *телеграфных уравнений* (название пришло из теории электромагнитных волн, где эти уравнения впервые были получены для волн, распространяющихся по проводам).

Система телеграфных уравнений первого порядка может быть сведена к уравнению второго порядка для одной из неизвестных ρv или ρ . Для этого продифференцируем, например, (10.23) по x , а (10.24) по t и вычтем одно уравнение из другого. Получим *одномерное волновое уравнение для плотности ρ* .

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{c_{\parallel}^2} \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = 0. \quad (10.25)$$

Совершенно аналогичный вид это уравнение имеет и для плотности потока ρv .

Анализ волнового уравнения отложим до § 10.4. Подчеркнем, что такой простой вид уравнение имеет только благодаря одномерности задачи – плоская деформация в безграничном твердом теле. В общем трехмерном случае получается гораздо более сложное уравнение.

Выясним условия применимости формул (10.14) и (10.18). Очевидно, влиянием поперечных размеров стержня можно пренебречь, если толщина стержня много меньше характерной длины деформированного элемента, которая по порядку величины равна длине волны (10.6), т.е.

$$l_1 \sim \sqrt{S} \ll \lambda. \quad (10.26)$$

§ 10.2. Поперечные волны в твердом теле

Как в случае продольных волн, начнем обсуждение с простого — с распространения короткого поперечного отклонения в тонкой струне, закрепленной на концах (рис. 10.3).

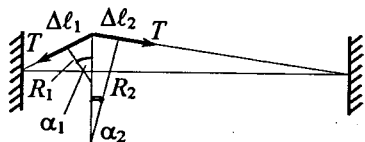


Рис. 10.3. Распространение отклонения струны

При отклонении участка струны сила натяжения T возвращает его обратно. Можно считать, что элементы струны Δl_1 , Δl_2 движутся по криволинейной траектории, радиус кривизны которой R_1 на участке Δl_1 , R_2 — на участке Δl_2 . Если скорость движения этих элементов равна c , то сумма произведений массы элемента $\rho_0 \cdot S \cdot \Delta l_{1,2}$ на центростремительное ускорение $c^2/R_{1,2}$ равняется сумме радиальных компонент силы натяжения:

$$\rho_0 S \cdot \Delta l_1 \cdot \frac{c^2}{R_1} + \rho_0 S \cdot \Delta l_2 \cdot \frac{c^2}{R_2} = T(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2).$$

Здесь S — площадь поперечного сечения струны. Поскольку $\sin \alpha_1 \approx \alpha_{1,2} = (\Delta l/R)_{1,2}$, получим

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho_0 S}}. \quad (10.27)$$

Существенно, что выбор значений длин элементов и радиусов кривизны не влияет на окончательный результат.

Рассмотренный пример позволяет понять механизм распространения в твердом теле скачка поперечной деформации. Как и в § 10.1, будем считать среду безграничной, а созданное в ней возмущение плоским (рис. 10.4): слой Δx смещен в направлении оси y на величину δy . По своему характеру это деформация

сдвига, поэтому угол сдвига φ и напряжение в теле τ связаны между собой через модуль сдвига G (7.57). При сдвиге плотность тела не изменяется (для малых φ), что видно уже из геометрии рис. 10.4: площадь деформированного элемента равна $\Delta x \cdot \Delta y$.

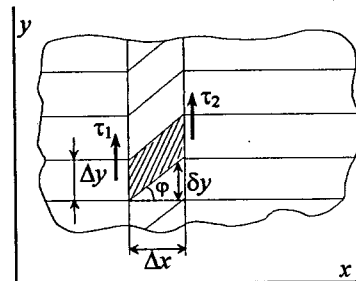


Рис. 10.4. Распространение деформации сдвига в твердом теле: сдвиг слоя в направлении оси y

Строгий вывод уравнения для сдвиговых волн достаточно сложен, поэтому, как и в примере со струной, дадим упрощенное (качественное) рассмотрение. Для элемента $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ можно записать уравнение движения — уравнение плоского вращения (7.19) вокруг оси, проходящей через центр тяжести элемента и параллельной оси z :

$$I \ddot{\varphi} = N.$$

Для случая $\Delta y \sim \Delta x$ имеем (рис. 10.4)

$$I \sim \Delta m \cdot \frac{(\Delta x)^2}{2} = \rho_0 \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \frac{(\Delta x)^2}{2},$$

$$N = (\tau_2 - \tau_1) \cdot S_1 \cdot \frac{\Delta x}{2} \approx \Delta \tau \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \frac{\Delta x}{2}.$$

Подставив значения I и N в уравнение движения, получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\Delta \tau}{\Delta x^2} = \frac{G}{\rho} \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta x^2} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

Конечно, предельный переход здесь сделан скорее из соображений размерности и выглядит как "подгонка под ответ", т.к. нужно обосновать появление второго дифференциала $\partial^2 \varphi$. Тем не менее физическая картина явления дана достаточно ясно: сдвиг одного элемента "тянет" (в прямом смысле слова) за собой сдвиг

другого элемента и т. д. Окончательно волновое уравнение для одномерных поперечных (сдвиговых) волн имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_1^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad c_1 = \sqrt{\frac{G}{\rho_0}}. \quad (10.28)$$

§ 10.3. Волны в газе и жидкости

Как и в твердом теле, для газа можно записать соотношения, аналогичные (10.9)–(10.13). Чтобы различать давление и импульс (одинаковые обозначения), последний обозначим p_v . Имеем

$$\frac{dp_v}{dt} = \frac{\delta p}{\rho_0} \cdot \rho_0 S c^2 = F = \delta p \cdot S; \quad (10.29)$$

S – площадь поперечного сечения столба газа; δp – отклонение давления от равновесного значения. В идеальном газе для быстропотекающих процессов (в которых теплопередача не успевает "срабатывать") давление и объем элемента массы связаны между собой уравнением адиабаты

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad (10.30)$$

где γ – показатель адиабаты, значение которого зависит от вида газа. Для идеального газа двухатомных молекул $\gamma = 7/5$ (эти сведения из статистической физики и термодинамики здесь можно принять как опытный факт, отложив его понимание до соответствующего курса). Из (10.30) следует

$$(p_0 + \delta p) \cdot (V_0 + \delta V)^\gamma = p_0 V_0^\gamma,$$

или

$$\frac{\delta p}{p} \approx -\gamma \frac{\delta V}{V_0} = \gamma \frac{\delta p}{\rho_0}. \quad (10.31)$$

Подставив δp из (10.31) в (10.29), найдем скорость волны в газе:

$$c_\gamma = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}. \quad (10.32)$$

Для воздуха при атмосферном давлении ($p_0 \approx 10^5 \text{ Па}$, $\rho_0 = 1.29 \text{ кг/м}^3$, $\gamma = 1.4$) $c_\gamma = 334 \text{ м/с}$.

Подчеркнем, что это – продольные волны сжатия-разрежения, аналогичные рассмотренным в § 10.1.

В реальных газах при повышении плотности и температуры наблюдаются отклонения от закона (10.32). В этом случае произведение параметров γp_0 нужно заменить на так называемый адиабатический модуль объемного сжатия $K_{ад}$. В этом виде формула справедлива и для жидкости:

$$c_K = \sqrt{\frac{K_{ад}}{\rho_0}}. \quad (10.33)$$

Поперечные (сдвиговые) волны в газе и жидкости не существуют, т.к. этот вид вещества не обладает сдвиговой упругостью.

§ 10.4. Плоские волны. Звук

Одномерная волна, как уже говорилось выше, называется плоской, если ее параметры – амплитуда, частота, длина волны – не зависят от координат и времени (например, сферическая волна может быть одномерной – зависеть только от радиальной координаты, но она не плоская, т.к. ее амплитуда убывает как корень квадратный из радиуса). Уравнение плоской волны (10.25, 10.28) запишем для произвольного параметра волны (плотность ρ , плотность потока j и др.):

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0, \quad (10.34)$$

где c – скорость волны, разная для разных сред – см. (10.14), (10.18), (10.28) и (10.32). В то же время форма уравнения плоских волн одна и та же – (10.34). Решение этого уравнения является функцией одной переменной – фазы (10.2):

$$\xi(x, t) = \xi(\varphi), \quad \varphi = x - vt. \quad (10.35)$$

Действительно,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2}, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2}. \quad (10.36)$$

Подставляя (10.36) в (10.34), имеем

$$v = \pm c, \quad (10.37)$$

т.е. два значения фазовой скорости для волн, распространяющихся в положительном (+c) и отрицательном (-c) направлениях оси x. Почему так? Из условия $\varphi = \text{const}$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \dot{x} - (\pm c) = 0, \\ \dot{x} &= c > 0, \text{ если } \varphi = x - ct, \\ \dot{x} &= -c < 0, \text{ если } \varphi = x + ct. \end{aligned} \quad (10.38)$$

Для монохроматической волны (10.4) фазовая скорость однозначно связана с волновым числом и частотой (см. (10.5)–(10.8)):

$$v = \frac{\omega}{k} = \pm c. \quad (10.39)$$

При наложении нескольких волн, движущихся с разными фазовыми скоростями, возникает группа волн – *волновой пакет*. Покажем это на примере двух монохроматических волн с одинаковой амплитудой:

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= \xi_0 \cdot \cos(k_1 x - \omega_1 t) + \xi_0 \cdot \cos(k_2 x - \omega_2 t) = \\ &= 2\xi_0 \cdot \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2} x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right). \end{aligned}$$

Если k_1, k_2 и ω_1, ω_2 близки по величине, т.е.

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &\approx 2k, \quad k_1 - k_2 = \Delta k \ll k, \\ \omega_1 + \omega_2 &\approx 2\omega, \quad \omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega \ll \omega, \end{aligned}$$

имеем

$$\xi(x, t) = 2\xi_0 \cdot \cos\left(\frac{\Delta k}{2} \cdot x - \frac{\Delta\omega}{2} \cdot t\right) \cdot \cos(kx - \omega t). \quad (10.40)$$

В результате суммарная волна имеет "волновую" амплитуду, которая передвигается по волне с собственной скоростью (рис. 10.5).

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}. \quad (10.41)$$

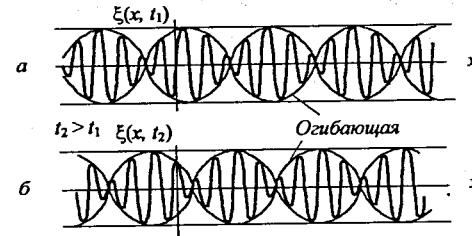


Рис. 10.5. Движение пакета, состоящего из двух монохроматических волн (10.40), моменты времени t_1 (а) и t_2 (б), $t_2 > t_1$

В волновом пакете, состоящем из большого числа волн, их амплитуды должны убывать по мере увеличения отклонения параметров ω, k волны от средних значений ω_0, k_0 . Например, в момент времени $t = t_1$ функция $\xi(x, t)$ имеет вид, показанный на рис. 10.6, а. Спустя некоторое время этот пакет сместится на расстояние $\Delta x = v_g \cdot (t_2 - t_1)$, где

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (10.42)$$

– *групповая скорость волны*. Это выражение получается из (10.41) при переходе к пакету с большим числом волн.

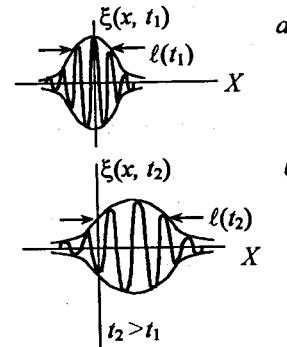


Рис. 10.6. Движение пакета, состоящего из набора монохроматических волн разной амплитуды, моменты времени t_1 (а) и t_2 (б), $t_2 > t_1$

Спрашивается – что же такое функция $\omega(k)$, которую надлежит продифференцировать, чтобы найти v_g ? Эта функция задается свойствами среды: скорость звука в среде зависит от длины волны звукового сигнала – это явление называется *дисперсией скорости звука* (от лат. *dispersus* – рассеяние, разброс, в

данном случае – разброс по длинам волн). Зная функцию $c(\lambda)$, из (10.39) с учётом (10.8) имеем

$$\begin{aligned}\omega &= c(\lambda) \cdot k = c(k) \cdot k, \\ k &= 2\pi/\lambda, \\ v_g &= c + k \frac{dc}{dk} = c - \lambda \cdot \frac{dc}{d\lambda}.\end{aligned}\quad (10.43)$$

(Здесь мы учли, что $dk/d\lambda = -2\pi/\lambda^2$).

Из (10.43) следует, что v_g также является функцией k . Повторяя предыдущее рассуждение, приходим к выводу, что в пакете можно выделить группы волн, движущиеся с разными групповыми скоростями. А это означает, что размер (протяженность по x) пакета $\ell(t)$ будет изменяться со временем. В зависимости от начальных условий пакет сразу расширяется или, сжавшись вначале до некоторого ℓ_{min} , начинает расширяться. При расширении

$$\ell(t) \sim \ell_0 + \frac{dv_g}{dk} \cdot \Delta k \cdot t. \quad (10.44)$$

Здесь картина полностью аналогична той, что имеет место в забеге на длинную дистанцию: при общем старте "пакет" бегунов начинает растягиваться сразу же после старта; при раздельном "старте с гандикапом", когда раньше стартуют слабые бегуны, пакет вначале сжимается, а затем растягивается.

Рассмотренные закономерности распространения плоских волн полностью приложимы ко всем видам волн упругой деформации в сплошной среде – такие волны и называются *звуковыми* или *звуком*. Область физики, изучающая звуковые волны, называется *акустикой* (от греч. *akustikós* – слуховой, слышимый). Диапазон частот звуковых волн принято разделять на четыре области:

- 0 – 16 Гц – инфразвук (лат. *infra* – ниже, под);
- 16 Гц – 20 кГц – акустический диапазон;
- 20 кГц – 1 ГГц – ультразвук (лат. *ultra* – более, сверх);
- 1 ГГц – 10 ТГц – гиперзвук (лат. *hyper* – более, сверх).

Человеческое ухо способно воспринимать только звук акустического диапазона. Почему же мы слышим одиночные сигналы (удары, взрывы и т.п.) или

периодические, следующие с частотой ниже 16 Гц? Все дело в том, что периодические сигналы не всегда (вернее, всегда не-) гармонические. Так, последовательность строго периодических звуковых сигналов, таких, например, как изображенные на рис. 10.12 ниже, может быть представлена в виде суперпозиции гармонических сигналов – ряда Фурье по гармоникам основной частоты

$$\begin{aligned}f(x_0, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cos(\omega_n t + \varphi_n), \\ \omega_n &= n\omega_0, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,\end{aligned}$$

где T_0 – период следования звуковых сигналов (импульсов). Набор амплитуд f_n и фаз φ_n образует *амплитудный и фазовый спектры сигнала*, а функции $f_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$ называются *гармониками* или (только в акустике) *обертонами* (нем. *ober* – над). Те из гармоник, частота которых ω_n попадает в акустический диапазон, и воспринимаются на слух. Одиночные сигналы (импульсы) имеют непрерывный спектр (интеграл Фурье).

Скорость звука в различных средах, описываемая формулами (10.14), (10.18), (10.28), (10.32), имеет существенно разные значения, некоторые наиболее характерные из которых представлены в табл. 10.1.

Немаловажный вопрос – чем определяется длина волны звука? Из выражений для скорости звука следует, что скорость звука в первом приближении не зависит от частоты (длины волны). Поэтому в дисперсионном соотношении (10.39) можно считать скорость c заданной табличной константой, так что

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{f},$$

где $f = 1/T$ – *линейная частота*. Так, например, длина звуковых волн в воздухе в акустическом диапазоне лежит в интервале 1,5 см (20 кГц) – 200 м (16 Гц), ультразвук в железе имеет длины волн от 6 мкм (1 ГГц) до 30 см (20 кГц), а самая короткая длина волны гиперзвука в железе сравнима с межатомным расстоянием $\sim 5 \cdot 10^{-8}$ см.

Таблица 10.1. Значение скорости звука в различных средах (км/с)

Материал	$c_{ }$	c_{\perp}	c
Твердые вещества			
Железо	5,83 – 5,5	3,4	5,03
Медь	4,5	2,1	3,45
Алюминий	6,3	3,2	5,2
Бетон	4,2 – 5,3	–	–
Оргстекло	2,7	1,1	1,8 – 2,0
Стекло	3,76 – 4,8	2,38 – 2,56	3,5 – 4,0
Жидкости (20°C)			
Вода	1,49		
Спирт этиловый	1,18		
Ртуть	1,45		
Глицерин	1,92		
Газы (0°C, 1 атм)			
Воздух	0,331		
Азот	0,334		
Водород	1,281		
Аммиак	0,415		

§ 10.5. Энергия продольной волны в твердом теле. Вектор Умова

Для описания энергии длинной плоской волны в твердом теле проще всего воспользоваться представлениями о колебаниях элемента объема $S \cdot \Delta x$ под действием волны упругой деформации $\xi(x, t)$ относительно некоторого невозмущенного положения (положения равновесия). Кинетическая энергия элемента объема есть

$$\Delta W = \rho_0 S \cdot \Delta x \cdot \frac{\xi^2}{2}. \quad (10.45)$$

Для вычисления потенциальной энергии воспользуемся законом Гука, подставив в (7.53) $l_0 = \Delta x$, $\Delta l = \xi$:

$$F = -ES \frac{\xi}{\Delta x}. \quad (10.46)$$

Здесь знак "-" учитывает направление силы, действующей на частицу в волне со стороны деформируемой среды – полная аналогия растягиваемой пружины (сравни (10.12) и пояснение в примере к ней). Тогда, как и для потенциальной энергии осциллятора, можем записать

$$\Delta U = -\int_0^{\xi} F(\xi') \cdot d\xi' = ES \frac{\xi^2}{2\Delta x}. \quad (10.47)$$

Далее учтем, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \xi_0 k \cdot \cos(kx - \omega t + \varphi_0), \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} &= -\xi_0 \omega \cdot \cos(kx - \omega t + \varphi_0). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (10.45), (10.47) и учитывая, что $\omega/k = c_{||}$, (см. (10.39)), найдем

$$\Delta W + \Delta U = \rho_0 \omega^2 \xi_0^2 S \cdot \Delta x \cdot \cos^2(kx - \omega t + \varphi_0).$$

Соответственно, плотность полной энергии в плоской упругой волне есть

$$w = \frac{\Delta W + \Delta U}{S \cdot \Delta x} = \rho_0 \xi_0^2 \omega^2 \cdot \cos^2(kx - \omega t + \varphi_0). \quad (10.48)$$

Как видим, в отличие от осциллятора плотность полной энергии волны непостоянна. Это объясняется тем, что энергия "бежит" с волной, точнее, волна переносит энергию. За время Δt через поперечное сечение S волнового потока протекает энергия

$$\Delta \mathcal{E} = w(x, t) \cdot S v \cdot \Delta t.$$

Отсюда плотность потока энергии в плоской упругой волне равна

$$j_w = \frac{\Delta \varepsilon}{S \cdot \Delta t} = w \cdot v. \quad (10.49)$$

Величина $\vec{j}_w = w\vec{v}$ называется *вектором Умова* (Н.А. Умов, 1874 г.). Для плоской продольной волны $v = c_{||}$ (10.18).

§ 10.6. Стоячая волна

При распространении волн в ограниченном пространстве может происходить их отражение от границ пространства и наложение прямой и отраженной волны с частичным ослаблением или усилением – *интерференция волн* (от лат. *inter* – между, *feren* – несущий). В результате такого наложения может образоваться особый тип волны – стоячая волна. Такая волна возникает, например, в стержне, зажатом между двумя недеформируемыми опорами (рис. 10.7, а).

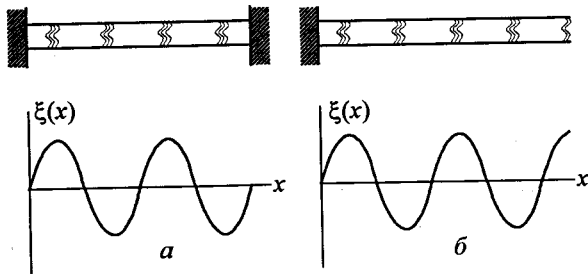


Рис. 10.7. Образование стоячей волны в стержне:
а – оба торца закреплены,
б – один торец свободен

Покажем образование стоячей при наложении двух монохроматических волн – прямой и отраженной. Сумма параметров $\xi(x, t)$ для этих волн равна

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= \xi_0 \cos(kx - \omega t + \varphi_1) + \xi_0 \cos(kx - \omega t + \varphi_2) = \\ &= 2\xi_0 \cos\left(kx + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right). \end{aligned}$$

Фазы φ_1, φ_2 зависят от граничных условий. Так, в случае рис. 10.7, а деформации стержня равны нулю на его концах:

$$\xi(0, t) = 2\xi_0 \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) = 0.$$

Отсюда

$$\varphi_1 + \varphi_2 = (2n + 1)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\xi(L, t) = 2\xi_0 \cos\left(kL + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) = 0.$$

Соответственно,

$$kL + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = (2m + 1)\pi, \quad kL = (m - n)\pi, \quad m = 1, 2, \dots$$

В случае, когда один торец стержня свободен (рис. 10.7, б), аналогично имеем:

$$\xi(0, t) = 0, \quad \varphi_1 + \varphi_2 = (2n + 1)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\xi(L, t) = \xi_{\max}, \quad \text{откуда} \quad \cos\left(kL + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) = 1,$$

что дает

$$kL + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = 2\pi m, \quad kL = 2\pi m - (2n + 1)\frac{\pi}{2}, \quad m = 1, 2, \dots$$

В результате структура стоячей волны в стержне зависит от того, как закреплены его торцы.

а) Оба конца закреплены.

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= \xi_0 \cdot \sin kx \cdot \cos(\omega t + \Delta\varphi), \\ kL &= \ell\pi, \quad \ell = 1, 2, \dots, \quad L = \frac{\ell\pi}{k} = \ell \frac{\lambda}{2}. \end{aligned}$$

Постоянный сдвиг фазы $\Delta\varphi = \text{const}$ определяется выбором начала отсчета времени. На длине стержня в случае "а" укладывается целое число полуволин.

б) Один торец свободен.

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= \xi_0 \cdot \sin kx \cdot \cos(\omega t + \Delta\varphi), \\ kL &= \ell\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, \quad L = \left(\ell + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{k} = \left(\ell + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}, \quad \Delta\varphi = \text{const}. \end{aligned}$$

На длине стержня укладывается целое число полувольт плюс четверть волны.

Если сделать мгновенные "снимки" распределения деформаций по длине стержня, то в случае "а" получим синусоиду $\sin kx$ с амплитудой $\xi_0 \cdot \cos(\omega t + \Delta\phi)$ (рис. 10.8).

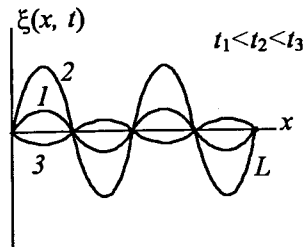


Рис. 10.8. Стоячая волна деформации в стержне с закрепленными торцами (моменты времени $t_1 < t_2 < t_3$)

Теперь можно сформулировать основное различие между бегущей и стоячей волнами:

- в бегущей волне амплитуды колебаний разных точек стержня одинаковы, а фазы в каждый момент времени различны;
- в стоячей волне амплитуды колебаний разных точек стержня различны, а фазы в каждый момент времени одинаковы.

Нетрудно видеть, что в стоячей волне не происходит передачи энергии от точки к точке вдоль оси x .

§ 10.7. Волны на воде

В этом разделе мы ограничимся оценками, используя *метод размерностей*.

Волны на поверхности глубокой воды можно разделить на два существенно разных вида - с большой и малой длинами волн.

Волны большой длины, или *гравитационные*, формируются под действием силы тяготения. На элемент объема ΔV действует сила

$$F_{\perp} = -\rho g \cdot \Delta V, \quad (10.50)$$

поэтому для элемента массы Δm имеем

$$\Delta m \cdot \ddot{x} = F_{\perp} = \text{const}, \quad (10.51)$$

что дает просто свободное падение с ускорением g :

$$\frac{g\tau^2}{2} \sim h, \quad (10.52)$$

где τ - характерное время спада высоты h волн. Принимая $h \sim \lambda$, имеем

$$\tau \sim \sqrt{\frac{\lambda}{g}}, \quad \omega \sim \frac{1}{\tau} \sim \sqrt{gk}, \quad \text{где } k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (10.53)$$

Закон дисперсии $\omega(k)$ (10.53) для гравитационных волн позволяет определить их фазовую скорость:

$$c = \frac{\omega}{k} \sim \sqrt{\frac{g}{k}} \sim \sqrt{g\lambda}. \quad (10.54)$$

Для $\lambda \sim 10$ м эта оценка дает $c \sim 10$ м/с.

Волны малой длины существенно подвержены действию сил поверхностного натяжения. Если принять волну в виде среза цилиндра длины L (рис. 10.9), то можно считать $F_{\perp} = 2\sigma L \approx \text{const}$, и аналогично (10.52) имеем

$$\frac{a\tau^2}{2} \sim h \sim \lambda,$$

где

$$a \sim \frac{F_{\perp}}{\rho h L} \sim \frac{\sigma}{\rho \lambda^2}.$$

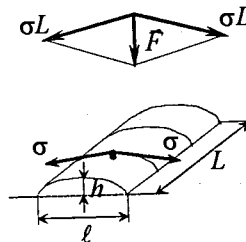


Рис. 10.9. Влияние натяжения на формирование волн малой длины на поверхности воды

В результате получим

$$\tau \sim \sqrt{\frac{\rho \lambda^3}{\sigma}}, \quad \omega \sim \frac{1}{\tau} \sim \sqrt{\frac{\sigma k^3}{\rho}}, \quad (10.55)$$

$$c \sim \sqrt{\frac{\sigma k}{\rho}} \sim \sqrt{\frac{\sigma}{\lambda \rho}}$$

В общем случае волн произвольной длины можно записать

$$\omega(k) \sim \sqrt{gk + \frac{\sigma k^3}{\rho}}. \quad (10.56)$$

Отсюда следует критерий малой длины волны

$$k^2 \gg \frac{\rho g}{\sigma}, \quad \text{или} \quad \lambda \ll \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}. \quad (10.57)$$

Для воды ($\sigma = 72 \text{ Н/м}$) критерий (10.57) дает $\lambda \ll 0,27 \text{ см}$. Таким образом, короткие волны – миллиметровые, а их скорость (10.55) $c \sim 30 \text{ см/с}$ для $\lambda \sim 1 \text{ мм}$.

Для волн на мелкой воде появляются особенности, связанные с влиянием дна.

§ 10.8. Ударные волны

При движении тела в жидкости или газе со сверхзвуковой скоростью $v > c$ в среде могут возникать ударные волны. Их формирование поясняет рис. 10.10: каждая точка траектории сверхзвукового объекта является центром расходящейся сферической волны; интерферируя, эти волны образуют фронт плоской волны, распространяющейся под некоторым углом θ к скорости объекта. Значение θ найдем, записав очевидные соотношения (рис. 10.10).

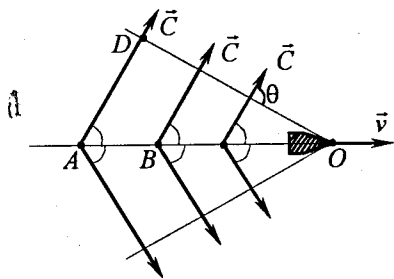


Рис. 10.10. Образование ударной волны в жидкости или газе при движении тела со сверхзвуковой скоростью

$$AD = c \cdot \Delta t = AO \cdot \cos \theta = v \cdot \Delta t \cdot \cos \theta, \quad \cos \theta = \frac{c}{v} < 1. \quad (10.58)$$

Ударная волна возникает, например, при полете самолета со сверхзвуковой скоростью. Покоящийся наблюдатель воспринимает ее приход в точку, где он находится, как взрыв или хлопок – это действие скачка давления на фронте волны. (Отметим, что совершенно по той же интерференционной схеме формируется ударная световая волна при движении заряженной частицы в среде со скоростью, превышающей фазовую скорость в среде – это так называемое излучение Вавилова–Черенкова).

Ударные волны могут возникать и в ограниченном пространстве, например, в трубах с газом или жидкостью. Если сообщить слою вещества, заполняющему трубу, сверхзвуковую скорость, образуется ударная волна (рис. 10.11) – скачок давления, плотности и температуры, движущейся со сверхзвуковой скоростью. Проще всего это сделать, достаточно быстро разрушив перегородку, разделяющую трубу на две части с разными давлениями $p_2 > p_1$. При этом толщина переходного слоя δ на фронте ударной волны обратно пропорциональна разности давлений: $p_2 - p_1$ – и прямо пропорциональна вязкости среды.

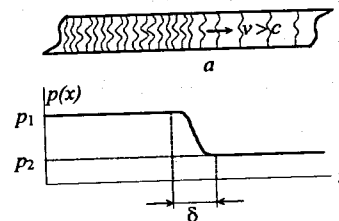


Рис. 10.11. Распространение ударной волны в трубе, заполненной газом

§ 10.9. Нелинейные волны

С ростом амплитуды волна становится *нелинейной* – ее свойства зависят от амплитуды. Если линейная волна монохроматическая (10.4), то в волне с большой

амплитудой появляются волны-"добавки" с двойной, тройной и т.д. n -кратными частотами и, соответственно, в n раз более короткими длинами волн – так называемые *моды*. Они возбуждаются в результате нелинейности колебаний частиц среды при большой амплитуде так же, как и в нелинейном осцилляторе. Ударная волна – крайний случай нелинейной волны. По мере роста амплитуды волны все сильнее проявляются коротковолновые моды и синусоида гармонической волны обостряется (рис. 10.12), превращается в последовательность коротких импульсов, бегущих с частотой основной моды ω .



Рис. 10.12. Нелинейная волна давления в газе

Если основная частота очень низкая ($\omega \rightarrow 0$, $T \rightarrow \infty$), возникающие нелинейные волны состоят из последовательности далеко отстоящих импульсов – *солитонов* (от англ. *solitary* – одинокий).

Для нелинейных волн возможен также режим с модуляцией амплитуды низкочастотной функцией $A(t) = A \sin \Omega t$, $\Omega < \omega$: волна, "накатывающаяся" на наблюдателя, имеет переменную во времени амплитуду. Это явление хорошо известно для морских волн – отсюда так называемый "девятый вал": периодически в последовательности набегающих волн появляется волна повышенной амплитуды (но не обязательно каждая девятая!).

ГЛАВА 11. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

В этом разделе излагаются начала *теоретической механики*. Традиционно изложение теоретической механики начинают с постулирования *принципа наименьшего действия*, на основе которого затем изучают уравнения движения.^{*)} Выше мы уже обсуждали вопросы построения физических теорий (см. Введение) и механики в частности (§ 1.4). Здесь мы покажем, как можно придти к тем же уравнениям теоретической механики на основе второго закона Ньютона, являющегося обобщением наблюдений и экспериментов.

§ 11.1. Принцип наименьшего действия и функция Лагранжа*

Движение частицы, как мы уже знаем, удобно описывать с помощью радиуса-вектора ее мгновенного положения:

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3), \quad (11.1)$$

где q_1, q_2, q_3 – координаты частицы в трехмерном пространстве. Система этих координат не обязательно декартова, но ортогональная. Примерами таких систем координат являются сферическая и цилиндрическая. Система N частиц имеет $3N$ степеней свободы или меньше, если есть связи. Так, твердое тело, как система частиц, имеет, вообще говоря, 9 степеней свободы: 3 поступательные, 3 вращательные и 3 колебательные. Рассмотрим систему из N частиц, которые взаимодействуют друг с другом, и находятся, кроме того, под действием некоторой внешней силы, зависящей от координат. Силы, с которыми частицы взаимодействуют друг с другом, зависят от расстояния между ними – этим случаем мы и ограничимся:

$$\vec{F}_{kn}(\vec{r}_{kn}) = -\vec{F}_{nk}(\vec{r}_{nk}). \quad (11.2)$$

Таким образом, полная сила, действующая на данную частицу (обозначим её номером k), зависит от положения всех частиц в системе:

^{*)} См., например: Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика, Механика, М.: Наука, т. 1, 1975

Очевидно, эта функция должна содержать комбинацию кинетической W и потенциальной V энергий. Действительно, из (11.12) следует

$$\frac{dp_n}{dt} = m_n \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial E}{\partial p_n} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_n}.$$

Подставив это выражение и формулу (11.7) для F_n в первое из уравнений (11.9), запишем

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_n} = - \frac{\partial V}{\partial q_n}. \quad (11.13)$$

Тогда можно ввести функцию, содержащую линейную комбинацию W и V , которая удовлетворяла бы уравнению (11.13). Очевидно, такой функцией является разность W и V :

$$L = W - V, \quad (11.14)$$

поскольку она удовлетворяет уравнению (11.13), принимающему теперь вид

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial L}{\partial q_n}. \quad (11.15)$$

Эта функция называется *функцией Лагранжа* (*J.L. Lagrange*, 1788 г.), а уравнения (11.15) – *уравнениями Лагранжа*.

Задача 11.1. Записать функцию Лагранжа для шарика массы m , лежащего на столе и прикрепленного к пружине жесткости k . Получить из функции Лагранжа уравнение движения шарика.

В данном случае движение одномерное, координата одна – x – и одна частица. Запишем

$$W = \frac{m\dot{x}^2}{2}, \quad V = \frac{kx^2}{2}, \quad \text{отсюда} \quad L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2},$$

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx,$$

и уравнение (11.15) дает хорошо известный результат

$$m\ddot{x} = -kx.$$

К тому же уравнению (11.15) приводит *принцип наименьшего действия*, или *принцип Гамильтона* (*W.R. Hamilton*, 1834 г.), который гласит, что *действие* $S(t_1, t_2)$, определенное как

$$S(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_n, \dot{q}_n, t) \cdot dt, \quad (11.16)$$

имеет наименьшее из возможных значений вдоль траектории частицы:

$$S(t_1, t_2) = \min. \quad (11.17)$$

Покажем, что принцип Гамильтона приводит к уравнениям Лагранжа (11.15). Пусть частица перемещается из точки $q_n(t_1)$ в точку $q_n(t_2)$ (рис. 11.1). Допустим, что на истинной траектории $q_n(t)$ действие $S(t_1, t_2) = \min$. Тогда при переходе на кривую $q_n(t) + \delta q_n(t)$ функция S только возрастает. Считаем отклонения $\delta q_n(t)$ от истинной траектории малыми. Кроме того, в точках t_1 и t_2 они, очевидно, равны нулю (см. рис. 11.1):

$$\delta q_n(t_1) = \delta q_n(t_2) = 0. \quad (11.18)$$

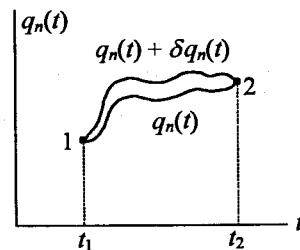


Рис. 11.1. Возможные траектории частиц системы при переходе из точки 1 в точку 2; на кривой $q_n(t)$ действие минимально. Показана одна из $3N$ кривых

Известно, что условие минимума в точке x^* для произвольной (дифференцируемой) функции $f(x)$ есть

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x^*} = 0.$$

Совершенно аналогично равно нулю приращение действия δS при сдвиге на δq_n от кривой, на которой $S = S(q_n(t)) = \min$, т.е.

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_n} \cdot \delta q_n + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \cdot \delta \dot{q}_n \right) dt = 0.$$

Величина δS называется *вариацией функции S*. Фактически это есть полный дифференциал функции $S(q_1, \dots, q_{3N}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N})$, здесь только дифференциалы координат заменены их приращениями $\delta q_n, \delta \dot{q}_n$. Смещения $\delta q_n, \delta \dot{q}_n$ независимы.

Возьмём интеграл от второго слагаемого по частям, интегрируя $\delta \dot{q}_n \cdot dt = \delta q$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \cdot \delta \dot{q}_n \cdot dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \cdot \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta q \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \cdot dt.$$

Первый член обращается в нуль при подстановке пределов в соответствии с условием (11.18). В результате имеем

$$0 = \delta S = \sum_{n=1}^{3N} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) \delta q_n \cdot dt.$$

Из равенства интеграла нулю следует, что и подинтегральное выражение равно нулю. Поскольку δq_n независимы, то отсюда следует равенство нулю каждого члена суммы. Тем самым мы пришли к уравнениям Лагранжа (11.15).

Функция Лагранжа позволяет получить уравнения движения частицы достаточно простым путем, только дифференцированием, что существенно облегчает задачу записи этих уравнений в случае сложных систем с большим числом степеней свободы. Это иллюстрирует задача 11.2.

Задача 11.2. Пользуясь методом функции Лагранжа, получить уравнения движения "двойного плоского маятника" (рис. 11.2) и найти их решения для случая малых колебаний.

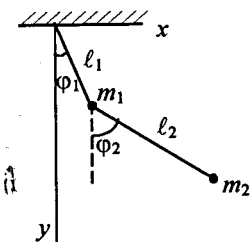


Рис. 11.2. Двойной плоский математический маятник

Выберем для описания движения маятника координаты $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ в соответствии с рис. 11.2. Тогда кинетическую и потенциальную энергии грузиков m_1 и m_2 маятника можно представить в виде

$$W_1 = \frac{m_1 \ell_1^2 \dot{\varphi}_1^2}{2}, \quad V_1 = -m_1 g \ell_1 \cos \varphi_1,$$

$$W_2 = \frac{m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)}{2}, \quad V_2 = m_2 g y_2,$$

$$x_2 = \ell_1 \sin \varphi_1 + \ell_2 \sin \varphi_2,$$

$$y_2 = \ell_1 \cos \varphi_1 + \ell_2 \cos \varphi_2.$$

Теперь функция Лагранжа описывается выражением

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \ell_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} \ell_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + (m_1 + m_2) g \ell_1 \cos \varphi_1 + m_2 g \ell_2 \cos \varphi_2.$$

Уравнения движения (11.11) для малых колебаний плоского маятника ($\varphi_{1,2} \ll 1$) имеют вид

$$(m_1 + m_2) \ell_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 \ell_2 \ddot{\varphi}_2 + (m_1 + m_2) g \varphi_1 = 0,$$

$$\ell_1 \ddot{\varphi}_1 + \ell_2 \ddot{\varphi}_2 + g \varphi_2 = 0.$$

Умножив второе уравнение на m_2 и вычитая его из первого, приведем систему уравнений к виду

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 (1 + \alpha) \varphi_1 - \omega_0^2 \alpha \varphi_2 = 0,$$

$$\ddot{\varphi}_1 + \beta \ddot{\varphi}_2 + \omega_0^2 \varphi_2 = 0, \tag{11.19}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell_1}}, \quad \alpha = \frac{m_2}{m_1}, \quad \beta = \frac{\ell_2}{\ell_1}.$$

Подставив сюда решение в виде

$$\varphi_{1,2} = a_{1,2} \cos \omega t + b_{1,2} \sin \omega t,$$

получим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + \omega_0^2(1 + \alpha) & -\alpha \omega_0^2 \\ -\omega^2 & -\beta \omega^2 + \omega_0^2 \end{vmatrix} = \beta \omega^4 - \omega^2 \omega_0^2 (1 + \alpha) \cdot (1 + \beta) + \omega_0^4 (1 + \alpha) = 0.$$

Отсюда

$$\omega = \pm \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{(1 + \alpha) \cdot (1 + \beta) \pm \sqrt{(1 + \alpha)^2 (1 + \beta)^2 - 4\beta(1 + \alpha)}}{2\beta}}.$$

Наличие четырех корней – признак связанных колебаний (см. п. 6.3). В частности, если нижний шарик очень легкий ($\alpha \ll 1$), набор частот совпадает с частотами двух независимых осцилляторов:

$$\omega \approx \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1 + \beta \pm (1 - \beta)}{2\beta}} = \pm \left\{ \sqrt{g/\ell_1}, \sqrt{g/\ell_2} \right\}.$$

Если же нижний шарик очень тяжелый ($\alpha \gg 1$), то набор частот содержит частоту маятника длины $\ell_1 + \ell_2$ и высокую частоту "дрожания" маятника с приведенной длиной $\ell_{прив} = \ell_1 \ell_2 / (\ell_1 + \ell_2)$:

$$\omega \approx \pm \omega_0 \sqrt{\frac{\alpha(1+\beta)}{2\beta} \left[1 \pm \left(1 - \frac{2\beta}{\alpha(1+\beta)^2} \right) \right]} = \pm \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{g}{\ell_1 + \ell_2}}, \\ \sqrt{\frac{m_2 \cdot g(\ell_1 + \ell_2)}{m_1 \ell_1 \ell_2}} \end{array} \right.$$

Для сравнения дадим вывод уравнений (11.19) из "привычных" уравнений движения. В приближении малых колебаний $\varphi_1, \varphi_2 \ll 1$ имеем

$$m_1 \ell_1^2 \ddot{\varphi}_1 = -m_1 g \ell_1 \varphi_1 + T_2 \ell_1 (\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$m_2 \ddot{x}_2 \approx m_2 \frac{d^2}{dt^2} (\ell_1 \varphi_1 + \ell_2 \varphi_2) = -T_2 \varphi_2,$$

$$T_2 = -m_2 g.$$

Исключив T_2 , получим систему уравнений (11.19).

§ 11.2. Лагранжиан и обобщенные импульсы*

Из (11.12) и (11.14) следует связь импульса частицы, входящей в состав системы, с ее функцией Лагранжа:

$$p_n = \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}. \quad (11.20)$$

Но тогда из (11.15) следует

$$\frac{d p_n}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_n}.$$

Это означает, что если функция Лагранжа не зависит от обобщенной координаты q_n , то соответствующий обобщенный импульс является интегралом движения:

$$\text{если } \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0, \text{ то } p_n = \text{const}. \quad (11.21)$$

Например, лагранжиан частицы в центральном поле есть

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{m(r\dot{\phi})^2}{2} - V(r). \quad (11.22)$$

Ясно, что $\partial L / \partial \phi = 0$, значит обобщенный импульс p_ϕ , соответствующий ϕ -координате, — интеграл движения. Что такое p_ϕ ? Согласно (11.20) из (11.22) найдем

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \dot{\phi} \equiv M = \text{const}.$$

Таким образом, момент частицы является обобщенным ϕ -импульсом, то есть и он сохраняется в поле сил, не зависящих от ϕ -координаты. Это и есть закон сохранения момента в центральном поле.

§ 11.3. Законы сохранения энергии и импульса*

Однородность времени означает, что функция Лагранжа замкнутой системы не зависит явно от времени, т.е.

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0. \quad (11.23)$$

Тогда ее полная производная по времени есть

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \cdot \ddot{q}_n \right). \quad (11.24)$$

Подставив в (11.24) значения $\partial L / \partial q_n$ из уравнений Лагранжа (11.15):

$$\frac{\partial L}{\partial q_n} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n},$$

получим

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{n=1}^N \left\{ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) \cdot \dot{q}_n + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \cdot \ddot{q}_n \right\} = \sum_{n=1}^N \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \cdot \dot{q}_n \right).$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt} \left(L - \sum_{n=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \cdot \dot{q}_n \right) = 0. \quad (11.25)$$

Но

$$L = W - V = \sum_{n=1}^{3N} \frac{m_n \dot{q}_n^2}{2} - V(q_n).$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \cdot \dot{q}_n = \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^N m_i \dot{q}_n^2.$$

Подставив этот результат в (11.25), получим

$$0 = \frac{d}{dt} \left(L - \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \cdot \dot{q}_n \right) = \frac{d}{dt} \left(-V - \sum_{i,n} \frac{m_i \dot{q}_n^2}{2} \right),$$

т.е.

$$\frac{d}{dt} (W + V) \equiv \frac{dE}{dt} = 0, \quad E = \text{const.} \quad (11.26)$$

Таким образом, *однородность времени приводит к закону сохранения энергии замкнутой системы.*

Аналогично из однородности пространства следует, что свойства замкнутой системы не изменяются при произвольном параллельном переносе ее в пространстве, т.е. при преобразовании

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i + \vec{a};$$

i – номер частицы, входящей в систему. Такое преобразование не должно изменять вид функции Лагранжа замкнутой системы, т.е.

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial L}{\partial r_{i\alpha}} \cdot \delta r_{i\alpha} = \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial L}{\partial r_{i\alpha}} \cdot a_\alpha = 0.$$

Здесь $\alpha = 1, 2, 3$ – номер координаты (x, y, z); $i = 1, 2, \dots$; N – номер частицы.

Отсюда, поскольку вектор \vec{a} – произвольный, имеем

$$\sum_{i=1}^{N_i} \frac{\partial L}{\partial r_{i\alpha}} = 0. \quad (11.27)$$

Но, используя уравнения Лагранжа (11.15), можно записать

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial r_{i\alpha}} = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_{i\alpha}} \right) = \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_{i\alpha}}. \quad (11.28)$$

С другой стороны, поскольку $L = W - V$ (11.14), то

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_{i\alpha}} = \frac{\partial W}{\partial \dot{r}_{i\alpha}} = m_i \dot{r}_{i\alpha} = p_{i\alpha}, \quad (11.29)$$

где $p_{i\alpha}$ есть α -компонента импульса i -й частицы. Подставив (11.29) в (11.28) и затем учтя (11.27), имеем

$$\sum_{i=1}^{N_i} p_{i\alpha} = \text{const.},$$

т.е. α -компонента полного импульса замкнутой системы сохраняется. Поскольку предлагаемый вывод справедлив для любой из трех компонент импульса, приходим к закону сохранения импульса замкнутой системы:

$$\sum_{i=1}^{N_i} \vec{p}_i = \overline{\text{const.}} \quad (11.30)$$

Таким образом, *из условия однородности пространства получен закон сохранения полного импульса замкнутой системы.*

§ 11.4. Функция Гамильтона*

Полную энергию системы можно рассматривать как функцию координат и импульсов входящих в нее частиц:

$$E = \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{\alpha=1}^3 \frac{p_{i\alpha}^2}{2m_i} + V(r_i) = W + V \equiv H(p_n, q_n, t), \quad (11.31)$$

где $n = 1, 2, \dots, 3N$ – полное число степеней свободы системы из N частиц. Функция $H(p_n, q_n, t)$ называется *функцией Гамильтона* системы, или, кратко, *гамильтонианом*.

Из (11.31) следуют равенства

$$\frac{\partial H}{\partial p_n} = \frac{p_n}{m} = \frac{dq_n}{dt} \quad (11.32)$$

Поскольку $L = W - V$, то отсюда и из (11.31) имеем

$$L = 2W - H, \quad (11.33)$$

а т.к. W не зависит от координат q_n , то

$$\frac{\partial L}{\partial q_n} = -\frac{\partial H}{\partial q_n} \quad (11.34)$$

Но из уравнения Лагранжа (11.15) и соотношения (11.29) следует, что

$$\frac{\partial L}{\partial q_n} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) = \frac{dp_n}{dt} \quad (11.35)$$

Подставив последнее выражение в (11.34), получим

$$\frac{dp_n}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_n} \quad (11.36)$$

Уравнения (11.32) и (11.36) образуют систему, которую называют *уравнениями Гамильтона* или *каноническими уравнениями*:

$$\begin{aligned} \frac{dp_n}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_n}, \\ \frac{dq_n}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_n}. \end{aligned} \quad (11.37)$$

Как и уравнения Лагранжа, они расширяют возможности решения задач механики и позволяют, в частности, делать определенные выводы о характере движения системы (интегралах движения и т.п.), не анализируя детально движение отдельных ее частей. Пример такого "интегрального" подхода к анализу движения – *скобки Пуассона*, которые мы рассмотрим в заключение курса.

Пусть $f(p_n, q_n, t)$ – некоторая функция импульсов, координат и времени, описывающая какую-то характеристику системы (например, скорость одной из ее частиц). Запишем полную производную этой функции по времени с учетом уравнений Гамильтона (11.37):

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{n=1}^{3N} \left\{ \frac{\partial f}{\partial p_n} \cdot \dot{p}_n + \frac{\partial f}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n \right\} = \\ &= \frac{df}{dt} + \sum_n \left\{ -\frac{\partial f}{\partial p_n} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_n} + \frac{\partial f}{\partial q_n} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_n} \right\} \equiv \\ &\equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}. \end{aligned} \quad (11.38)$$

где

$$\{H, f\} = \sum_{n=1}^{3N} \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_n} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_n} - \frac{\partial H}{\partial q_n} \cdot \frac{\partial f}{\partial p_n} \right\} \quad (11.39)$$

– *скобки Пуассона*. Если функция f явно не зависит от времени и для нее скобки Пуассона равны нулю, то такая функция, очевидно, является интегралом движения:

$$\frac{df}{dt} = 0, \quad f = \text{const.}$$

Таким образом, одно лишь знание вида функции и гамильтониана системы позволяют определить, является ли эта функция интегралом движения. В частности, для самой функции Гамильтона $\{H, H\} = 0$. Поэтому если H явно не зависит от времени (поле консервативных сил или замкнутая система), то $H = \text{const}$, т.е. энергия системы сохраняется.

Предметный указатель

Адиабатический инвариант, 153
Акустика, 250
Аксиомы механики, 23

Баланс энергии
в вязком течении, 218
в затухающих колебаниях, 96
Близкодействие, 16

Вариация функции, 266
Вихри, 223
Вектор Умова, 254
Взаимодействие, 15
фундаментальное, 17

Волны
большой длины (гравитационные),
256
гармонические, 237
длина, 237
звуковые, 238, 250
малой длины, 257, 258
монокроматические, 238
на глубокой воде, 256
на мелкой воде, 258
нелинейные, 259
одномерные, 237
период колебаний, 237
продольные сжатия-растяжения,
247
скорость фазовая, 237
групповая, 249
ударные, 258
упругой деформации, 238
частота колебаний, 238
фаза, 237

Волновое число, 238
Волновой пакет, 248
Время релаксации, 96
Встречные пучки, 42
Вязкое
напряжение, 215
течение, 218, 219

Гамильтониан, 271
Гармоники (обертон), 108, 251
Гидравлический радиус канала, 226
Гистерезис, 132, 197
Главные оси, 186, 187

Дальнодействие, 15
Движение
в центральном поле, 62
инфинитное, 55, 64, 65
криволинейное, 12
одномерное, 88
плоское, 164, 166
прямолинейное, 12
тела со сверхзвуковой скоростью,
258
финитное, 55, 64, 65

Декремент затухания колебаний, 96
Деформация
линейная, 193
одномерная и продольная, 241
остаточная, 197

Дивергенция, 208
Дисперсия скорости звука, 249
Длина свободного пробега, 87

Жесткая фокусировка, 116

Задача
о взаимодействии двух
заряженных тел, 60
о движении твердого тела, 163
Зависимость амплитуды колебаний
от расстройки, 127–133

Закон
Бэра, 52
Гаука, 193
2-й Кеплера, 62
преобразования компонент силы в
СТО, 44
Пуазейля, 219, 220
сложения скоростей в СТО, 36
сохранения импульса, 19
сохранения импульса замкнутой
системы, 18, 271
сохранения момента импульса, 21,

сохранения момента в
центральной поле, 61, 269
сохранения энергии, 20, 270
Запаздывание взаимодействий, 16
Захват осциллятора в нелинейный
резонанс, 146
Звук, 250

Идеальный газ, 246
Излучение Вавилова–Черенкова, 259
Импульс
движущейся частицы, 18
замкнутой системы, 57, 58
Инерциальная система, 23
Инкремент нарастания амплитуды
колебаний, 113
Интеграл Фурье, 108
Интегралы движения, 22, 54, 55, 57,
61, 268
Интервал
временноподобный, 33
пространственноподобный, 33
четырёхмерный, 32
Интерференция волн, 254

Качение цилиндрических тел, 177
Колебаний
амплитуда, 93
период, 88, 93
частота, 91, 93,
фаза, 93

Колебания
ангармонические, 117
гармонические, 91
изохронные, 91
малые, 91
неизохронные, 117
релаксационные, 152
установившиеся, 125
Кориолисово ускорение, 50
Космоплавание, 68
Космические скорости, 69, 70
Коэффициент
вязкости, 215
Пуассона, 194
Критерий малости длины волн, 258

Ламинарный режим, 215
Линии тока, 206
Лоренц-фактор, 29

Масса, 15,
гравитационная, 17
инертная, 17
приведённая, 59
собственная, 42
Материальная точка, 11
Маятник Боголюбова–Капицы, 116
Метод размерностей, 256
Метрика комплексная, 38
Мгновенная ось вращения, 177
Мгновенно-сопутствующая
инерциальная система, 47
Модуль
сдвига, 194
Юнга, 193
Момент
импульса тела относительно
центра масс, 164
импульса частицы, 21
импульса частицы в центральном
поле, 61
инерции тела, 166
силы, 22
Мощность силы трения, 97

Начальные условия, 59
Неизохронность нелинейного
осциллятора, 124
Неинвариантность времени в СТО, 29
Нелинейности силы (квадратичная и
кубическая), 117
Неустойчивость фазовой
траектории локальная, 151

Область нелинейного резонанса, 142
Обобщённые
импульсы, 262, 268
координаты, 262, 268
Ограниченность отклонения, 88
Однородность
времени, 21, 269, 270
пространства, 20, 271

Осциллятор
линейный, 89
линейный с трением, 126
нелинейный, 117–152
Осциллятора
добротность, 106
жесткость, 89
Оценки по порядку величины, 9
Параметр фокальный, 66
Параметры
гиперболы, 67
критической кривой, 132
эллипса, 67
Переход к резонансу, 103
Петля гистерезиса, 197
Плотность
потока, 207
полной энергии в плоской упругой волне, 253
потока энергии в плоской упругой волне, 253
Площадка текучести, 198
Поле сил, 16
кулоновских, 64
тяготения, 64
центральных, 80
Полуширина резонансной кривой, 106, 126
Постоянная
Больцмана, 204
Менделеева–Клапейрона, 204
Потенциальная яма, 55
Поток, 207
Правило размерности, 9
Предел текучести, 198
Преобразования
Галилея, 24
Лоренца, 29, 38
Прецессия, 190
Принцип
Гамильтона, 264
наименьшего действия, 261, 264
относительности Галилея, 24
относительности Эйнштейна, 26

причинности, 24
соответствия, 10, 26, 29
эквивалентности, 17
Приращение радиуса-вектора, 11
Прицельный параметр, 63, 81
Причинно-следственная связь, 33
Работа силы, 20
Равновесие
неустойчивое, 90
устойчивое, 90
Разложение по малому параметру, 114
Размах сепаратрисы по амплитуде, 141
Рассеяние частиц, 80
Расстройка частоты, 113, 127, 146
Растяжение, 197
Резонанс,
внешний, 103
внутренний (резонанс связи), 99
главный, 149
нелинейный, 146,
параметрический, 111, 114
Резонанса
порядок, 151
ширина, 113, 142
Резонансная кривая, 106, 126
Резонансные частоты нелинейного осциллятора, 149
Релятивистские инварианты, 33
Световой конус, 33
Сепаратриса, 119, 139–142,
Сечение рассеяния
дифференциальное, 81, 82
интегральное (полное), 83
Сила, 15
Архимеда, 201
гармоническая, 108
инерции (инерционная), 48
инерции центробежная, 50
консервативная, 20, 21
лобового сопротивления, 228
подъемная, 229
потенциальная, 20, 262

Стокса, 229
трения качения, 179
трения скольжения, 179
тяготения (гравитации), 16
Синхронизация наблюдений, 29
Система
вращающаяся, 50
замкнутая, 19, 57, 58
мгновенно-сопутствующая, 47
инерциальная, 23
неинерциальная, 25
центра масс, 75
Скобки Пуассона, 272, 273
Скорость,
волны в газе, 246
истечения жидкости из трубы, 219
частицы, 11,
света, 26
сверхзвуковая, 258
центра масс замкнутой системы, 58, 60
Собственное время, 34
Собственная длина, 30, 34
Собственная масса, 42
Событие, 34
Сокращение длины, 30
Солитоны, 260
Сопротивление
гидравлическое, 219
канала, 226
Спектр сигнала
амплитудный, 251
фазовый, 251
Стохастический режим, 151
Тахионы, 37
Тензор
моментов инерции, 186
метрический, 39
напряжений, 197
Теорема Штейнера, 171
Теоретическая механика, 261

Течение
без потерь, 219
ламинарное, 223, 225
турбулентное, 223–228
"Точное" и приближенное решение, 9
Трение
качения, 179
сильное, 126
слабое, 96, 629
скольжения, 179
Трубка Пито–Прандтля, 213
Трубки тока, 206
Турбулентный режим, 219
Уравнение
адиабаты, 246
волновое для одномерных поперечных (сдвиговых) волн, 246
волновое одномерное для плотности, 243
линейного осциллятора, 90, 95
Маттье, 109, 111
моментов, 163
Навье–Стокса, 222
непрерывности, 208, 243
плоских волн, 247
состояния идеального газа, 204
Уравнения
Гамильтона, 272
движения по плоской траектории, 61
канонические, 272
Лагранжа, 264
Максвелла, 27
телеграфные, 243
Ускорение, 12, 13, 15
центростремительное, 14, 49, 61
Условие
вязкого течения, 219
равновесия тела, 164

- Фаза колебаний, 93
- Фазовая
 плоскость, 118
 скорость, 237
 траектория, 118, 119
- Фазовое пространство, 155
- Фазовый эллипс, 155
- Флуктуации, 95
- Формула
 барометрическая, 205
 Резерфорда, 84, 86
 Стокса, 229
- Функция
 амплитудная (спектральная), 108
 Гамильтона, 271, 273
 Лагранжа, 264, 268
- Функции среднее значение, 112
- Фурье
 интеграл, 108
 ряд, 108
- Центр масс, 58, 161
- Центральное поле, 60, 61
- Частица
 безмассовая, 37
 нерелятивистская, 11,
 нерелятивистская в центральном
 поле, 60
 релятивистская, 45
- Частота
 колебаний, 91, 93
 линейная, 251
 резонансная, 106
 фазовых колебаний, 138
- Четырехвектор (4-вектор), 38, 39
- Число
 Авогадро, 204
 Рейнольдса, 218
- Шероховатость трубы, 226
- Электрон-вольт, 16
- Энергия
 кинетическая нерелятивистской
 частицы, 20
 кинетическая релятивистской
 частицы, 42
 осциллятора, 93
 покоя частицы, 42
 потенциальная частицы, 45, 262
 релятивистская частицы, 45
- Эффект
 близнецов, 30, 31, 32, 47
 Магнуса, 211, 231
 пульверизатора, 211