Учебно-
методические
пособия
Учебно-научного
центра ОИЯИ
Дубна

УНЦ-2003-19

В. В. Красильников, Э. А. Кураев

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Часть II

Учебное пособие

2003

Учебно-научный центр ОИЯИ

В. В. Красильников, Э. А. Кураев

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Часть II

Учебное пособие

Дубна 2003

Учебное пособие составлено профессором базовой кафедры МИРЭА «Электроника физических установок» при УНЦ ОИЯИ Э. А. Кураевым (ОИЯИ) при участии профессора Белгородского университета В. В. Красильникова и рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом МИРЭА.

Красильников В. В., Кураев Э. А. Уравнения математической физики: Учебное пособие. — Дубна: ОИЯИ, 2003. — Ч. 2. — 41 с.

Учебное пособие написано на основе курса лекций, прочитанных студентам кафедры «Электроника физических установок» Московского государственного института радиотехники, электроники и автоматики, организованной в г. Дубне при Учебно-научном центре Объединенного института ядерных исследований. В дополнение к части I пособия (Дубна, 2002) рассмотрены физические принципы, используемые при выводе уравнений, приведены основные способы решения уравнений. Приведены примеры типичных задач с решениями.

Krasil'nikov V. V., Kuraev E. A. Mathematical Physics Equations: Textbook. — Dubna: JINR, 2003. — Pt. 2. — 41 p.

In this book the authors describe methods and typical problems used to study mathematical physics basic courses for students of the Department of Moscow State Institute for Radio Engineering, Electronics and Automation organized at the University Centre of the Joint Institute for Nuclear Research in Dubna. Examples of tasks and their solutions are introduced.

1. Функция Грина для одномерного уравнения теплопроводности

Функция Грина находится следующим способом. Умножая уравнение теплопроводности, записанное в форме

$$u_t(\zeta,t) = a^2 u_{\zeta\zeta}(\zeta,t), \quad u(\zeta,0) = f(\zeta); \tag{1}$$

на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-i\lambda\zeta)$, интегрируя по ζ в пределах $-\infty < \zeta < \infty$, для фурье-образа

$$\bar{u}(\lambda,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\zeta u(\zeta,t) e^{-i\zeta\lambda} \tag{2}$$

получаем обыкновенное дифференциальное уравнение и начальное условие

$$\bar{u}_t + a^2\lambda^2\bar{u} = 0; \tag{3}$$
$$\bar{u}(\lambda,0) = \bar{f}(\lambda).$$

Здесь $\bar{f}$ - фурье-образ f. Используя решение уравнения $\bar{u} = \bar{f} exp(-a^2\lambda^2 t)$ в обратном преобразовании Фурье, получим решение задачи теплопроводности в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \bar{u}(\lambda, t) e^{i\lambda t} \tag{4}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz f(z) \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda(x-z)} = \int_{-\infty}^{\infty} dz f(z) G(z, x; t),$$

где функция Грина имеет вид

$$G(z, x; t) = \frac{1}{\sqrt{4a^2\pi t}} e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2 t}}. \tag{5}$$

Решим задачу для случая $f(z) = exp(-b(z-c)^2)$, $b > 0$. Пользуясь алгебраическим соотношением

$$a(z-x_1)^2 + b(z-x_2)^2 = (a+b)(z - \frac{x_1 a + x_2 b}{a+b})^2 + \frac{ab}{a+b}(x_1 - x_2)^2, \tag{6}$$

получим решение

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+4a^2bt}} e^{-\frac{b(x-c)^2}{1+4a^2bt}}, \tag{7}$$

т.е. решение представляет собой оседающий со временем колокол с вершиной, расположенной в точке $x = c$.

Построим функцию Грина для стержня, контактирующего со средой при температуре $T = 0$ ([3], III, N67). Соответствующая краевая задача ставится так:

$$u_t = a^2 u_{xx} - hu; \quad u(x,0) = f(x); \quad -\infty < x < \infty; \quad 0 < t < \infty. \tag{8}$$

Уравнение для фурье-образа будет иметь вид

$$\bar{u}_t + a^2\lambda^2 \bar{u}(\lambda, t) + h\bar{u}(\lambda, t) = 0; \tag{9}$$
$$\bar{u}(\lambda, 0) = \bar{f}(\lambda); \quad \bar{u}(\lambda, t) = \bar{f}(\lambda) exp(-ht - a^2\lambda^2 t).$$

В результате функция Грина будет $e^{-ht}G(z, x; t)$, где $G(x, z, t)$ приведено в (5).

2. Колебания круговой мембраны, закрепленной на контуре

Колебания мембраны описываются следующей краевой задачей:

$$u_{tt} = c^2 \Delta u, \quad 0 < r < 1, \quad 0 < t < \infty; \tag{10}$$
$$u = 0, \quad r = 1, \quad 0 < t < \infty;$$
$$u(r, 0) = f(r), \quad u_t(r, 0) = g(r), \quad 0 < r < 1.$$

Ищем решение в виде (разделяем переменные) $u(r, \theta, t) = U(r, \theta)T(t)$. Подставляя в уравнение, получим

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{\Delta U}{U} = -\lambda^2; \tag{11}$$
$$T'' + \lambda^2 c^2 T = 0; \quad \Delta U + \lambda^2 U = 0.$$

Временная зависимость определяется решением одного из этих уравнений:

$$T(t) = A\sin(\lambda ct) + B\cos(\lambda ct). \tag{12}$$

Записывая лапласиан в полярных координатах:

$$\Delta U = U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta} \tag{13}$$

и применяя вновь процедуру разделения переменных $U(r, \theta) = R(r)\Phi(\theta)$, получаем

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -\frac{1}{R}[r^2 R'' + rR' + \lambda^2 r^2 R] = -n^2. \tag{14}$$

Причем мы должны выбрать целое число в качестве $n = 0, 1, 2, 3, ...$:

$$\Phi(\theta) = A\sin(n\theta) + B\cos(n\theta), \tag{15}$$

при другом выборе решение будет неоднозначной функцией θ. Вводя новую переменную $x = \lambda r$, уравнение для радиальной части запишем в виде

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2}R(x) + x\frac{d}{dx}R(x) + (x^2 - n^2)R(x) = 0, \tag{16}$$
$$R(0) \neq \infty; \quad R(\lambda) = 0,$$

где мы наложили физическое требование ограниченности отклонения мембраны от состояния равновесия и условие закрепления ее на границе. Последнее уравнение есть уравнение Бесселя. Для каждого целого n оно имеет два решения $J_n(x)$, $Y_n(x)$ - соответственно ограниченное и неограниченное при $x = 0$. Это пример неэлементарной функции. Ограниченная функция при малых значениях аргумента допускает разложение в ряд:

$$J_n(x) = \Sigma_0^\infty \frac{(x/2)^{n+2p}}{p!(n+p)!}. \tag{17}$$

При больших значениях аргумента

$$J_n(x) \approx (\frac{2}{\pi x})^{1/2} \cos(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}). \tag{18}$$

Приведем значения нескольких первых корней функции Бесселя с номером $n = 0$:

$$J_0(k_{0i}) = 0, \tag{19}$$

$$k_{01} = 2.4; \quad k_{02} = 5.52; \quad k_{03} = 8.65; \quad k_{04} = 11.79; \quad k_{05} = 14.93, \ldots$$

С точностью до выбора начала отсчета азимутального угла общее решение имеет вид

$$u(r,\theta,t) = \Sigma_{n=0}^\infty \Sigma_{m=1}^\infty J_n(k_{nm}r)\cos(n\theta)[A_n \sin(k_{nm}ct) + B_n \cos(k_{nm}ct)]. \tag{20}$$

Для примера рассмотрим краевую задачу о колебаниях закрепленной по краям мембраны единичного радиуса с нулевой начальной скоростью и начальным отклонением от положения равновесия, заданным функцией

$$u(r,\theta,0) = A_1 J_0(2.4r) + A_3 J_0(8.65r), \quad 0 < r < 1. \tag{21}$$

Решение краевой задачи будет

$$u(r,\theta,t) = A_1 J_0(2.4r)\cos(2.4ct) + A_3 J_0(8.65r)\cos(8.65ct). \tag{22}$$

Частоты колебаний соответственно равны $2\pi\nu_1 = 2.4c$, $2\pi\nu_2 = 8.65c$.

Для начальных условий, не зависящих от азимутального угла,

$$u(r,\theta,0) = f(r), \quad u_t(r,\theta,0) = 0, \quad 0 < r < 1, \tag{23}$$

решение имеет вид $u(r,t) = \Sigma_m A_m J_0(k_{0m}r)\cos(k_{0m}ct)$, где коэффициенты находятся по формуле

$$A_m = \frac{2}{J_1^2(k_{0m})} \int_0^1 r f(r) J_0(k_{0m}r) dr, \tag{24}$$

мы воспользовались соотношением ортогональности

$$\int_0^1 r J_0(k_{0m}r) J_0(k_{0n}r) dr = \frac{1}{2} J_1^2(k_{0n}) \delta_{mn}. \tag{25}$$

3. Минимизация функционалов. Элементы вариационного исчисления

Одним из способов получения дифференциальных уравнений в частных производных является метод минимизации функционалов с помощью уравнений Эйлера. Типичным функционалом является интеграл

$$J[y] = \int_a^b F(x,y,y') dx. \tag{26}$$

Рассмотрим задачу нахождения функции $y(x)$, которая минимизирует $J[y]$ в классе гладких функций, удовлетворяющих граничным условиям

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \tag{27}$$

Задача состоит в нахождении такой функции $\bar{y}(x)$, для которой числовое значение интеграла $J[\bar{y}]$ примет минимальное значение среди всех возможных функций $y(x)$ при заданных граничных условиях. Рассмотрим значение функционала для функции $y(x)$, отличающейся от $\bar{y}(x)$ на небольшую вариацию $\delta(x)$ -

произвольную численно малую функцию, удовлетворяющую условию $\delta(x_{a,b}) = 0$, т.е. мы рассматриваем вариацию функции y, фиксируя ее значения на концах интервала интегрирования:

$$\delta J[y] = \int_a^b dx[F(x, y+\delta, y'+\delta') - F(x,y,y')] = \int_a^b dx[Fy(x,y,y')\delta + F_{y'}\delta']. \quad (28)$$

Пользуясь перестановочным свойством взятия вариации и взятия производной:

$$\delta' = \frac{d}{dx}\delta \quad (29)$$

и проводя интегрирование по частям во втором слагаемом в квадратных скобках, получим

$$\int_a^b dx F_{y'}\delta'(x) = F_{y'}\delta(x)|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b dx\delta(x)\frac{d}{dx}F_{y'}. \quad (30)$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства обращается в нуль в силу нашего предположения о вариации. В результате для вариации функционала получим

$$\delta J[y] = \int_a^b dx\delta(x)[F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}]. \quad (31)$$

Минимизация состоит в приравнивании этой вариации нулю при произвольных $\delta(x)$, что приводит к уравнениям Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}, \quad y = \bar{y}(x), \quad \bar{y}_{x=a} = A, \quad \bar{y}_{x=b} = B. \quad (32)$$

В качестве примера рассмотрим две классические задачи.

Задачи

1. Найти плоскую кривую $y(x)$, $a < x < b$, площадь фигуры вращения которой вокруг оси абсцисс минимальна.

Эта площадь выражается интегралом

$$J[y] = 2\pi\int_a^b dsy(x), \quad (33)$$

где $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1+(y')^2}$ - элемент длины дуги кривой. Задача, таким образом, сводится к минимизации функционала $j[y]$ с подынтегральной функцией $F(x,y,y') = y\sqrt{1+(y')^2}$. Соответствующее уравнение Эйлера

$$\sqrt{1+(y')^2} = \frac{d}{dx}\frac{yy'}{\sqrt{1+(y')^2}} \quad (34)$$

может быть преобразовано к виду

$$1 + (y')^2 = yy'', \quad \frac{d}{dx}\ln(1+(y')^2) = 2\frac{d}{dx}\ln y. \quad (35)$$

Решением этого уравнения является цепная линия (катеноид)

$$y = \bar{y}(x) = c_1 ch(\frac{x-c_2}{c_1}),$$

постоянные интегрирования находятся из начальных условий.

2. Задача о брахистохроне. Найти такую форму кривой $y(x)$, чтобы время скатывания без трения по желобу с формой этой кривой было минимальным.

Предполагаем, что сила тяжести направлена вдоль оси y. Задача сводится к минимизации функционала

$$J[y] = \int_a^b \frac{ds}{\sqrt{y(x)}}, \quad (36)$$

поскольку время прохождения участка длины ds, отвечающего ординате y, есть $ds/v = ds/\sqrt{2gy}$. Соответствующее уравнение Эйлера имеет вид

$$-(1+(y')^2) = 2yy''. \quad (37)$$

Его решением $x/c_1 + c_2 = \arcsin z - z\sqrt{1-z}$, $z = \sqrt{y/c_1}$ является уравнение циклоиды - кривой, описывающей траекторию точки на ободе катящейся по горизонтальной прямой окружности.

Минимизация функционала действия $S = \int Ldx, L = U - T$, где U, T - потенциальная и кинетическая энергии, дает независимый способ вывода дифференциальных уравнений в частных производных.

Для примера рассмотрим колебания струны, находящейся в положении равновесия вдоль оси X. Две ее соседние точки M, M_1 с координатами $x, x+dx$ в процессе колебания перейдут в точки M, M_1 с (трехмерными) координатами $M(x+u, v, w)$; $M_1(x+dx+u+du, v+dv, w+dw)$. Расстояние между точками станет (в пренебрежении малыми второго порядка) $ds = dx(1+u_x)$. Потенциальная энергия есть сумма энергий продольных и поперечных деформаций, а также работы внешних сил:

$$U = \int_0^l dx[\frac{T_0}{2}(w_x^2 + v_x^2) + \frac{E}{2}u_x^2 + uF_u + vF_v + wF_w], \tag{38}$$

где T_0, E - натяжение струны и ее модуль упругости. Кинетическая энергия пропорциональна квадратам компонент скоростей:

$$T = \frac{1}{2}\rho \int_0^l dx(u_t^2 + v_t^2 + w_t^2). \tag{39}$$

Соответствующие уравнения Эйлера $(\partial L/\partial v) = (\partial/\partial t)(\partial L/\partial v_t) + (\partial/\partial x)(\partial L/\partial v_x)$ примут вид

$$\begin{aligned} -\rho u_{tt} + Eu_{xx} &= F_u; \\ -\rho v_{tt} + T_0 v_{xx} &= F_v; \\ -\rho w_{tt} + T_0 w_{xx} &= F_w. \end{aligned} \tag{40}$$

Заметим, что первое уравнение описывает продольные, а другие два - поперечные колебания мембраны.

4. Простейшие случаи уравнения Эйлера

а) Подынтегральная функция не зависит от производной искомой функции y'. При этом уравнение Эйлера $F_y(x,y) = 0$ не является дифференциальным. Если граничные условия не удовлетворяются, то экстремаль - функция, доставляющая минимум функционалу, - не существует.

б) В случае линейной зависимости от производной $F(x,y,y') = N(x,y) + y'M(x,y)$ вариационная задача теряет смысл. Действительно, в этом случае уравнение Эйлера имеет вид $\partial N/\partial y = \partial M/\partial x$ и подынтегральное выражение становится полным дифференциалом $Ndx + Mdy = d\Phi$, а интеграл есть разность функций от начальных и конечных значений, которые по постановке задачи не варьируются.

в) Если подынтегральная функция не зависит явно от x, $F = F(y,y')$, то уравнение Эйлера принимает вид

$$F_y - y'F_{yy'} - y''F_{y'y'} = 0. \tag{41}$$

После домножения левой части на y' это уравнение может быть записано в виде

$$\frac{d}{dx}[F - y'f_{y'}] = 0, F - y'F_{y'} = const. \tag{42}$$

г) В случае отсутствия явной зависимости от y порядок уравнения снова может быть понижен: $F = F(x,y'); F_{y'} = 0$.

5. Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления

1. Функционалы, зависящие от производных высшего порядка:

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y', y", ..., y^{(n)})dx, \tag{43}$$

где функция F предполагается дифференцируемой $n+2$ раза по своим аргументам, а граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} &y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad ..., \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}; \\ &y(x_1) = y_1, \quad y'(x_1) = y_1', \quad ..., \quad y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)}. \end{aligned} \tag{44}$$

Экстремалями являются решения уравнений Эйлера - Пуассона:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} - ... + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0 \tag{45}$$

с граничными условиями, приведенными выше.

2. Функционалы, зависящие от нескольких функций:

$$J[y_1, y_2, ..., y_n] = \int_{x_0}^{x_1} dx F(x, y_1(x), ..., y_n(x); y_1'(x), ..., y_n'(x)) \tag{46}$$

при граничных условиях

$$y_k(x_0) = y_k^0; \quad y_k(x_1) = y_k^{(1)}, \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{47}$$

Экстремали находятся решением системы уравнений Эйлера:

$$F_{y_k} = \frac{d}{dx}F_{y_k'}, \quad k = 1, 2, 3, ..., n. \tag{48}$$

3. Функционал, зависящий от функций нескольких переменных:

$$J[z(x_1, x_2, ...x_n)] = \int ... \int_D F(x_1, x_2, ...x_n; z; p_1, ...p_n) dx_1 ... dx_n, \tag{49}$$

где $p_k = \partial z / \partial x_k$. Необходимое условие экстремума выражается уравнением Эйлера - Остроградского

$$F_z = \Sigma_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F_{p_i}. \tag{50}$$

Решение этого уравнения - функция $z = z(x_1, x_2, ..., x_n)$ на границе области D - должно удовлетворять заданным граничным условиям.

6. Условный экстремум. Изопериметрическая задача

Рассмотрим задачу об отыскании экстремали функционала

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, ..., y_n; y_1', ..., y_n') \tag{51}$$

при наличии изопериметрических условий

$$\int_{x_0}^{x_1} G_i(x, y_1, ..., y_n; y_1', ..., y_n') = l_i, \quad i = 1, 2, ..., m, \tag{52}$$

где l_i - постоянные. Эта задача называется изопериметрической. Для ее решения составляют вспомогательный функционал

$$\Phi[y] = \int_{x_0}^{x_1} (F + \Sigma_1^m \lambda_i G_i). \tag{53}$$

Его решают с помощью уравнения Эйлера, а произвольные постоянные и параметры λ_i находят из граничных и изопериметрических условий.

7. Задачи по теме "Вариационное исчисление"

1. Существуют ли экстремали для функционалов

$$\text{а)} \quad J[y] = \int_0^1 [3x - y] y dx, \quad y(0) = 0; \quad y(1) = 1; \tag{54}$$

$$\text{б)} \quad J[y] = \int_0^{2\pi} [(y')^2 - y^2] dx, \quad y(0) = 1; \quad y(2\pi) = 1? \tag{55}$$

2. Найти экстремали функционалов

$$\text{а)}\ J[y] = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{y} dx \tag{56}$$

(модель Пуанкаре геометрии Лобачевского на плоскости семейства полуокружностей с центрами на оси x). Решение имеет вид $y\sqrt{1 + (y')^2} = c$, $y^2 + (x - c_1)2 = c^2$;

$$\text{б)}\ J[y] = \int_0^a \frac{y(y')^3}{1 + (y')^2} dx, \quad y(0) = 0; \quad y(a) = R \tag{57}$$

(задача Ньютона о форме поверхности минимального сопротивления потоку). Решение имеет вид $y/R = (x/a)^{3/4}$.

3. Найти экстремали функционалов

$$а)\ J[y] = \int_{-1}^{1} ((y')^2 - 2xy)dx, \quad y(-1) = -1, \quad y(1) = 1; \tag{58}$$

$$б)\ J[y] = \int_{1}^{e} (x(y')^2 + yy')dx, \quad y(1) = 0, \quad y(e) = 1;$$

$$в)\ J[y] = \int_{0}^{1} (y^2 + 2(y')^2 + (y'')^2)dx,$$

$$y(0) = y(1) = 0; \quad y'(0) = 1; \quad y'(1) = -sh1;$$

$$г)\ J[y] = \int_{-1}^{0} (240 - (y''')^2)dx, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0;$$

$$(-1) = 1, \quad y'(-1) = -9/2, \quad y''(-1) = 16.$$

4. Задачи на условный экстремум

а) Найти линию $y(x)$, $y(-a) = y(a) = 0$, которая при заданной длине $l > 2a$ ограничивает наибольшую площадь:

$$J[y] = \int_{-a}^{a} y(x)dx, \tag{59}$$

$$K[y] = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + (y')^2}dx = l.$$

б) Найти экстремали $J[y]$ при условии $K[y]$:

$$J[y] = \int_{0}^{1} (y')^2 dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1/4; \tag{60}$$

$$K[y] = \int_{0}^{1} (y - (y')^2))dx = 1/12.$$

в) Найти минимум функционала

$$I[\vec{v}] = \int_G [v_x^2 + v_y^2 + \frac{4v}{\sqrt{x^2 + y^2}}]dxdy, \tag{61}$$

$$v(x^2 + y^2 = 1) = v(x^2 + y^2 = 9) = 0.$$

Указание.

Переход к полярным координатам и минимизация функционала приводят к краевой задаче

$$\Delta u = \frac{2}{r}, \quad u(r = 1) = u(r = 3) = 0. \tag{62}$$

Решением является экстремаль $u = 2(r - 1) - \frac{4}{\ln 3}\ln r$. Вычисляя квадрат градиента $|\nabla u|^2 = (2 - \frac{4}{r\ln 3})^2$, подставляем эти величины в выражение для функционала, получаем

$$I[u] = -32\pi(1 - \frac{1}{\ln 3}). \tag{63}$$

8. Разделение переменных для уравнений Лапласа и Пуассона

Рассмотрим краевую задачу Дирихле для круга. Функция $u(r, \phi)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ внутри (вне) круга и принимающая заданное значение на его границе $u|_{r=R} = f(\phi)$, задается рядом

$$u(r, \phi) = C + \Sigma_1^\infty \frac{r^n}{R^n}(A_n \cos(n\phi) + B_n \sin(n\phi)), \quad r < R, \tag{64}$$

для внутренней задачи Дирихле и рядом

$$u(r, \phi) = C + \Sigma_1^\infty \frac{R^n}{r^n}(A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi), \quad r > R, \tag{65}$$

для внешней задачи Дирихле, где

$$C = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x); \quad A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x)\cos nx; \quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x)\sin nx. \tag{66}$$

Решение задачи Дирихле для области в виде кольца $R_1 < r < R_2$ с граничными условиями $u(R_1,\phi) = f_1(\phi), u(R_2,\phi) = f_2(\phi)$ имеет вид

$$u(r,\phi) = C + \Sigma_1^\infty [(A_n \frac{r^n}{R_2^n} + B_n \frac{R_1^n}{r^n}) \cos n\phi + (C_n \frac{r^n}{R_2^n} + D_n \frac{R_1^n}{r^n}) \sin n\phi] \qquad (67)$$
$$+ a \ln(r/R_1) + b.$$

Задача Неймана состоит в нахождении гармонической функции (удовлетворяющей уравнению Лапласа) вне или внутри некоторой области с заданием на границе нормальной производной (в случае круга это $\partial u/\partial r|_{r=R} = f(\phi)$. Решение задачи Неймана определено с точностью до постоянной, причем функция, заданная на границе, должна удовлетворять условию $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$.

Задачи

1) Найти функцию, гармоническую внутри единичного круга, принимающую на границе значение $u(r = 1, \phi) = f(\phi)$, где

$$а) f(\phi) = \sin^3 \phi; \qquad (68)$$
$$б) f(\phi) = \cos^4 \phi.$$

2) Найти функцию, гармоническую вне единичного круга, нормальная производная которой принимает на границе значение $u_к(r = 1, \phi) = f(\phi)$, где

$$а) f(\phi) = \sin^2 \phi; \qquad (69)$$
$$б) f(\phi) = \cos^5 \phi.$$

Решение задач Дирихле для сферы и шарового слоя $R_1 < r < R_2$ в случае, когда краевые условия не зависят от азимутального угла, имеет вид

$$u(r,\theta) = \Sigma_0^\infty [A_n (r/R_1)^n + B_n (R_2/r)^{n+1}] P_n(\cos\theta), \qquad (70)$$

где $P_n(z)$ - полиномы Лежандра:

$$P_0(z) = 1; \quad P_1(z) = z; \qquad (71)$$
$$P_2(z) = (3z^2 - 1)/2; \quad P_3(z) = (5z^3 - 3z)/2, ...,$$

а коэффициенты находятся из граничных условий $u(r = R_1, \theta) = f_1(\theta)$, $u(r = R_2, \theta) = f_2(\theta)$ по формулам

$$A_n(B_n) = \frac{2}{2n+1} \int_{-1}^{1} dz P_n(z) f_{1(2)}(z). \qquad (72)$$

Задачи

1) Найти функцию, гармоническую внутри шара радиуса R, такую, что $u(r = R, \theta) = f(\theta)$,

$$а) f(\theta) = \cos\theta; \quad б) f(\theta) = \sin\theta; \qquad (73)$$
$$в) f(\theta) = \cos(2\theta); \quad г) f(\theta) = \cos^2\theta;$$

2) Разрешима ли внутренняя задача Неймана для граничных условий

$$а) u_r|_{r=R} = A\cos\theta; \quad б) u_r|_{r=R} = A\sin\theta? \qquad (74)$$

3) Найти такую гармоническую внутри шарового слоя $1 < r < 2$ функцию, что $u_{r=1} = f_1(\theta)$; $u_{r=2} = f_2(\theta)$:

$$а) \quad f_1 = \cos^2\theta; \quad f_2 = \frac{1}{8}(1 + \cos^2\theta); \qquad (75)$$
$$б) \quad f_1 = \cos^2\theta; \quad f_2 = 4\cos^2\theta - \frac{4}{3};$$
$$в) \quad f_1 = 1 - \cos(2\theta); \quad f_2 = 2\cos\theta;$$
$$г) \quad f_1 = \frac{1}{2}\cos\theta; \quad f_2 = 1 + \cos(2\theta);$$
$$д) \quad f_1 = 9\cos(2\theta); \quad f_2 = 3(1 - 7\cos^2\theta).$$

Рассмотрим две задачи на нахождение потенциала скоростей при обтекании тел потоком несжимаемой жидкости [3] (гл.IV, N 73-75).

1)Бесконечно длинный цилиндр радиуса a обтекается перпендикулярно своей оси потоком неограниченной жидкости со скоростью v. Найти потенциал скоростей жидкости.

Решение.

Потенциал представим суммой потенциала невозмущенного движения жидкости (направление ее движения выберем за ось x): $u = vx + u_1$. Для второго слагаемого, вводя цилиндрическую систему координат с осью z, направленной вдоль оси цилиндра, имеем краевую задачу

$$\Delta u_1(\rho,\phi,z) = 0, \quad \rho > a; \qquad \frac{\partial u_1}{\partial \rho} = v\cos\phi, \quad \rho = a. \tag{76}$$

Второе условие означает невозможность втекания жидкости внутрь цилиндра. Мы имеем внешнюю задачу Неймана. Решение имеет вид

$$u(\rho,\phi) = -v(\rho + \frac{a^2}{\rho}\cos\phi). \tag{77}$$

2) Твердый шар радиуса a движется со скоростью v в несжимаемой жидкости. Найти потенциал скоростей жидкости.

Решение.

В системе покоя шара имеем краевую задачу

$$\Delta u = 0; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=a} = v\cos\theta. \tag{78}$$

Здесь мы выбрали ось z вдоль направления движения шара, n обозначает направление нормали к поверхности шара. Пользуясь общим видом решения для случая трехмерного пространства, приведенным выше, получим

$$u(r,\theta) = \frac{a^3}{2r^2}\cos\theta, \quad r > a. \tag{79}$$

Поле скоростей жидкости можно получить, вычислив градиент потенциала $\vec{v} = -\nabla u(r,\theta)$.

9. Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений с произвольной правой частью. Метод функций Грина

Решение краевой задачи

$$L_x u = f, \quad Bu|_{x\in S} = 0, \tag{80}$$

где L, B - линейные дифференциальные операторы, выражается интегралом Дюамеля

$$u(x) = \int G(x,z)f(z)dz, \tag{81}$$

где $G(x,z)$ - функция Грина краевой задачи, удовлетворяющая условиям

$$L_x G(x,z) = \delta(x-z), \qquad BG(x,z)|_{x\in S} = 0. \tag{82}$$

Рассмотрим для примера краевую задачу

$$L_x y = -y'' = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad y'(0) = y(0); \quad y(1) + y'(1) = 0. \tag{83}$$

Решение однородного уравнения, которому удовлетворяет функция Грина вне точки $x = z$, имеет вид $y = Ax + B$. Налагая граничные условия, получаем

$$G(x,z) = A(x+1), \quad x < z; \qquad G(x,z) = B(x-2), \quad x > z. \tag{84}$$

Чтобы найти постоянные A, B, воспользуемся непрерывностью функции Грина в точке $x = z$ и тем, что разность ее производных слева и справа от точки $x = z$ равна единице. Последнее следует из уравнения для функции Грина, проинтегрированного в окрестности этой точки:

$$A(z+1) = B(z-2); \quad A - B = 1. \tag{85}$$

Решая эту систему, получаем

$$G(x,z)=\frac{1}{3}(2-z)(x+1), \quad x<z, \qquad (86)$$
$$G(x,z)=\frac{1}{3}(2-x)(z+1), \quad x>z.$$

Решение краевой задачи имеет вид

$$y(x)=\frac{1}{3}(x+1)\int_x^1 f(z)(2-z)dz+\frac{1}{3}(2-x)\int_0^x f(z)(1+z)dz. \qquad (87)$$

Задачи

1) $Ly=-y'', \quad 0<x<1, \quad y(0)=y(1)=0;$ (88)

2) $Ly=-y'', \quad 0<x<1, \quad y(0)=hy'(0); \quad h>0; \quad y(1)=0;$

3) $Ly=-y''-y, \quad 0<x<1, \quad y(0)=y(1)=0;$

4) $Ly=-y'', \quad 0<x<1, \quad y(0)=y'(0); \quad y(1)=y'(1);$

5) $Ly=-y''+y, \quad 0<x<1, \quad y(0)=y(1)=0;$

6) $Ly=-y''+y, \quad 0<x<1, \quad y'(0)=y'(1)=0;$

7) $Ly=-x^2y''-2xy', \quad 1<x<2, \quad y'(1)=0; \quad y(2)=0;$

8) $Ly=-xy''-y', \quad 1<x<2, \quad y'(1)=0; \quad y(2)=0.$

10. Системы уравнений в частных производных

Уравнения 2-го и более высоких порядков могут быть приведены к системе уравнений первого порядка.

Рассмотрим краевую задачу $u_{tt}-16u_{xx}=0$, $-\infty<x<\infty$, $0<t<\infty$, с начальными условиями $u(x,0)=g(x)$; $u_t(x,0)=-f'(x)$. Она эквивалентна

задаче с системой дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+8\frac{\partial u_2}{\partial x}=0, \quad 0<t<\infty, \qquad (89)$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t}+2\frac{\partial u_1}{\partial x}=0, \quad -\infty<x<\infty,$$

с начальными условиями

$$u_1(x,0)=f(x), \quad u_2(x,0)=g(x), \quad -\infty<x<\infty. \qquad (90)$$

Эту систему можно записать в матричной форме, вводя вектор-столбец $U=(u_1,u_2)$ и квадратную двумерную матрицу A с элементами первой и второй строк соответственно $(0,8);(2,0)$:

$$U_t+AU_x=0. \qquad (91)$$

Собственные значения матрицы находятся из условия $det||A-\lambda E||=0$, они равны $-4;4$. Собственные векторы, им соответствующие: $(4,1);(4,-1)$. Вводя новый вектор-столбец $U=PV$, где матрица P составлена из вектор-столбцов собственных векторов, можно убедиться, что матричное уравнение

$$V_t+P^{-1}APv_x=0 \qquad (92)$$

есть два несвязанных уравнения

$$v_{1t}-4v_{1x}=0; \quad v_{2t}+4v_{2x}=0; \quad v_1(x,t)=\phi(x+4t); \quad v_2(x,t)=\psi(x-4t). \qquad (93)$$

Начальные условия позволяют найти функциональный вид произвольных функций ϕ,ψ:

$$u_1 = \frac{1}{2}[f(z_+)-4g(z_+)]+\frac{1}{2}[f(z_-)+4g(z_-)]; \qquad (94)$$
$$u_2 = -\frac{1}{8}[f(z_+)-4g(z_+)]+\frac{1}{8}[f(z_-)+4g(z_-)], \quad z_\pm=x+4\pm t.$$

Этот результат можно было бы получить и с помощью формулы Д'Аламбера.

Общего вида матричное уравнение первого порядка $U_t + AU_x = 0$ эквивалентно системе уравнений второго порядка $U_{tt} - A^2U_{xx} = 0$. Находя собственные значения матрицы $A, \lambda_{1,2}$ и ее собственные векторы, строим из них матрицу P и убеждаемся, что матрица $P^{-1}A^2P$ диагональна с диагональными матричными элементами λ_1^2, λ_2^2. Для нового вектор-столбца $v = P^{-1}u$ система уравнений распадается на два несвязанных уравнения $v_{itt} - \lambda_i^2 v_{ixx} = 0$, $i = 1, 2$.

Продемонстрируем сказанное на примере матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}. \tag{95}$$

Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$. Собственные векторы находятся из уравнений

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}. \tag{96}$$

Матрица P, построенная из собственных векторов, имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}. \tag{97}$$

Строим обратную матрицу по рецепту

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \tag{98}$$

следуя ему, получим

$$P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \tag{99}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

11. Уравнения первого порядка. Метод характеристик

Рассмотрим однородное линейное уравнение в частных производных первого порядка:

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \tag{100}$$

где (известные) функции a_i и неизвестная функция u зависят от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Введем дополнительный параметр t, зависимость от которого задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (уравнений характеристик):

$$\frac{d}{dt} x_i = a_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{101}$$

Решение системы есть произвольная функция интегралов этих уравнений F_i, $dF_i/dt = 0$:

$$u(x) = \Phi(F_1, F_2, \dots, F_n). \tag{102}$$

Действительно, подставляя это выражение в основное уравнение, получим

$$a_i \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial F_j} \frac{dF_j}{dt} = \frac{du}{dt} = 0. \tag{103}$$

Здесь принято соглашение: под повторяющимися индексами подразумевается суммирование. Мы видим, что решение постоянно на характеристиках.

Задачи

Решить системы уравнений

$$\begin{gathered} u_{1t} + au_{1x} + bu_{2x} = 0, \\ u_{2t} + cu_{1x} + du_{2x} = 0, \\ u_1(x,0) = f_1(x), \quad u_2(x,0) = f_2(x), \\ -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty, \end{gathered} \tag{104}$$

для следующих наборов:

$$\text{а)}\begin{pmatrix}4&2\\1&3\end{pmatrix},\quad \text{б)}\begin{pmatrix}6&-1\\3&2\end{pmatrix},\quad \text{в)}\begin{pmatrix}1&-2\\2&6\end{pmatrix},\tag{105}$$

$$\text{г)}\begin{pmatrix}7&4\\-2&1\end{pmatrix},\quad \text{д)}\begin{pmatrix}3&1\\12&7\end{pmatrix},\quad \text{е)}\begin{pmatrix}7&2\\3&6\end{pmatrix},\tag{106}$$

$$\text{ж)}\begin{pmatrix}2&2\\7&11\end{pmatrix},\quad \text{з)}\begin{pmatrix}0&8\\2&0\end{pmatrix},\quad \text{и)}\begin{pmatrix}0&4\\4&0\end{pmatrix}.\tag{107}$$

Найти характеристики однородных уравнений и решить задачу Коши:

$$\begin{aligned}
&1)\quad 2\frac{\partial u}{\partial x}-y^2\frac{\partial u}{\partial y}=0;\quad u(x,\infty)=\cos x;\\
&2)\quad 3\frac{\partial u}{\partial x}+2y\frac{\partial u}{\partial y}=0;\quad u(x,1)=x^2;\\
&3)\quad 3x\frac{\partial u}{\partial x}-4y\frac{\partial u}{\partial y}=0;\quad u(1,y)=y^2;\\
&4)\quad 2y\frac{\partial u}{\partial x}-3x\frac{\partial u}{\partial y}=0;\quad u(0,y)=\cos y;\\
&5)\quad \frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}=0;\quad u(0,y)=\cos y.
\end{aligned}\tag{108}$$

Решения:

$$u(x,y)=\tag{109}$$

$$\begin{aligned}
&1)\ \cos(x-\frac{2}{y});\\
&2)\ (x-\frac{3}{2}\ln y)^2;\\
&3)\ y^2x^{8/3};\\
&4)\ \cos(\sqrt{y^2+\frac{3}{2}x^2});\\
&5)\ \cos(ye^x)
\end{aligned}$$

соответственно.

12. Уравнение малых колебаний нити в поле тяжести

Предполагая движение нити плоским, выведем уравнение малых колебаний нити в поле тяжести, следуя [2].

Расстояние x до точек висящей тяжелой нити будем отсчитывать от ее конца. Точке подвеса отвечает $x = l$. Отклонение точки нити от положения равновесия обозначим неизвестной функцией $u(x,t)$, конец висящей нити полагаем свободным. Элемент длины нити между точками с координатами $M(x,u), M_1(x+dx, u+du)$ будет $ds = \sqrt{1+u_x{}^2}dx$. Далее мы будем предполагать отклонение малым и вследствие этого $u_x^2 \ll 1, ds = dx$. Натяжение, создаваемое весом нити в точке М, будет $\rho g x$, где ρ, g - плотность вещества нити и ускорение силы тяжести. Проекция силы натяжения на ось u будет $u_x \rho g x$. Разность проекций силы натяжения в соседних точках M, M_1 будет

$$(g\rho x\frac{\partial u}{\partial x})_M-(g\rho\frac{\partial u}{\partial x})_{M_1}=g\rho\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}(xu_x).\tag{110}$$

Результирующая компонента сил натяжения компенсируется силами инерции. Условие баланса этих сил дает уравнение поперечных колебаний тяжелой нити

$$\frac{\partial}{\partial x}(xu_x)=\frac{1}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.\tag{111}$$

В качестве граничного условия примем $u(x=l,t)=0$ - условие жесткого закрепления в точке подвеса. Разделяя переменные $u(x,t)=U(x)T(t)$ и переходя к переменной $z=\sqrt{x}$, решение уравнения можно выразить в терминах функций Бесселя.

13. Поперечные колебания вращающейся нити

Предполагаем, что нить вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, и не учитываем сил тяжести [2]. В точке M, находящейся на расстоянии

x от оси вращения, центробежные силы создают натяжение

$$T = \int_x^l (x\omega)^2 \rho(dx/x) = (\omega^2 \rho(l^2 - x^2)/2. \tag{112}$$

Здесь мы считаем, что плотность материала нити одинакова во всех ее сечениях, считаем также полную длину ее равной l, а ее дальний конец свободным. Эта сила направлена по касательной к нити в точке x. Проекция этой силы на направление, параллельное оси вращения, получится умножением на u_x, где $u(x,t)$ - отклонение нити от плоскости вращения. Приравнивая разность таких проекций в соседних точках $M(x), M_1(x+dx)$ проекции сил инерции:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \mathrm{d}x, \tag{113}$$

получим

$$\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{2}[\omega^2 \rho(l^2 - x^2)u_x]_{x+dx} - [\omega^2 \rho(l^2 - x^2)u_x]_x, \tag{114}$$

после перехода $dx \to 0$ получим дифференциальное уравнение поперечных колебаний

$$u_{tt} = \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial}{\partial x}[(l^2 - x^2)u_x] \tag{115}$$

с граничными и начальными условиями

$$u(t, x = l) < \infty; \quad u(t,0) = 0; \quad u(t = 0, x) = f(x); \quad u_t(t = 0, x) = F(x). \tag{116}$$

14. Продольные колебания стержня

Направим ось x вдоль стержня с началом отсчета в некоторой точке $x = 0$. Рассмотрим две соседние точки M, M_1 с координатами $x, x + dx$. В результате возмущения сечение стержня с координатой x перейдет в точку u, а соседняя точка - в $u + du = u + u_x dx$. Возникающее при этом натяжение выражается

по закону Гука через относительное удлинение стержня u_x: $T = Eu_x$, где E - модуль упругости стержня. Приравнивая разность сил натяжения в соседних точках силам инерции, действующим на этот участок, получаем уравнения движения для возмущения $u(x,t)$:

$$u_{tt} = \frac{E}{\rho} u_{xx}. \tag{117}$$

Граничные условия зависят от характера закрепления стержня. Для случая, когда один его конец $x = 0$ жестко закреплен, а другой свободен, граничные условия будут

$$u(x = 0, t) = 0; \quad u_x(x = l, t) = 0. \tag{118}$$

Начальные условия задаются деформацией и скоростью в начальный момент времени:

$$u(x, o) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < l. \tag{119}$$

Эти уравнения могут быть выведены также из принципа Гамильтона. Действительно, плотность потенциальной энергии, принимая также во внимание работу внешних сил, можно представить в виде $U = (E/2)u_x^2 + F(x,t)u$. Плотность кинетической энергии будет равной $\rho u_t^2/2$, где ρ - плотность вещества стержня, и мы предполагаем, что площадь сечения стержня одинакова во всех точках. Уравнения Эйлера имеют вид

$$u_{tt} = \frac{E}{\rho} u_{xx} + F(x,t). \tag{120}$$

Рассмотрим случай, когда поперечная площадь стержня меняется от точки к точке. Для стержня конической формы площадь сечения, расположенного на расстоянии x от более широкого конца с площадью поперечного сечения S_0, будет $S_x/S_0 = 1 - (x/h)^2$. Приравнивая разность натяжений на концах элемента

$M(x), M_1(x+dx)$ инерционным силам, действующим на этот участок, и переходя к пределу $dx \to 0$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}[(1-\frac{x^2}{h^2})\frac{\partial u}{\partial x}] = \frac{\rho}{E}(1-\frac{x^2}{h^2})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{121}$$

Заменой переменной $v = (h-x)u$ это уравнение приводится к виду $v_{tt}-(E/\rho)v_{xx} = 0$. Дальнейшие шаги стандартны.

15. Нелинейные уравнения первого порядка

Типичные краевые задачи, приводящие к нелинейным уравнениям первого порядка для двух переменных, имеют вид

$$u_t + g(u)u_x = 0, \quad -\infty < x < \infty; \quad 0 < t < \infty; \tag{122}$$
$$u(x,0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Прямой подстановкой можно убедиться, что решением является

$$u(x,t) = f(x - tu(x,t)). \tag{123}$$

Решение, таким образом, задано в неявной форме. Некоторую информацию можно получить, вычисляя частную производную по x:

$$u_x = f'(z)[1 - tu_x], \quad u_x = \frac{f'(z)}{1+tf'(z)}, \quad z = x - u(x,t)t. \tag{124}$$

По сравнению с линейными уравнениями здесь появились предельные значения времени и координат, при которых частные производные обращаются в бесконечность:

$$1 + t_c f'(z_c) = 0. \tag{125}$$

Для примера рассмотрим уравнение Хопфа, описывающее изменение скорости $u(x,t)$ скопления невзаимодействующих частиц, движущихся в направлении оси x:

$$u_t + uu_x = 0 \tag{126}$$

с начальным распределением $u(x,0) = u_0(1 - thx)$. Решение в неявной форме имеет вид

$$u(x,t) = u_0(1 - th(x - tu(x,t))). \tag{127}$$

Для производной получим

$$u_x = \frac{u_0}{u_0 t - ch^2(x - tu(x,t))}. \tag{128}$$

Момент опрокидывания волны отвечает обращению в нуль знаменателя. Физически он описывает укручение гребня волны, происходящее за счет отстающих частиц скопления, догоняющих более медленно движущиеся.

16. Нелинейные уравнения. Общий случай

Общих методов для решения нелинейных уравнений не существует [8, 9].

Иногда можно построить лагранжиан, минимизацией которого можно получить заданное интегральное уравнение. В качестве примера приведем модель Жабера - Шабата - Михайлова

$$L(x,t) = 1/2(U_x^2 + U_t^2) - \frac{m}{\gamma}(\exp[\gamma U] + 1/2\exp[-2\gamma U] - 3/2). \tag{129}$$

Этому лагранжиану можно поставить в соответствие следующее решение:

$$U_{tt} - U_{xx} + m^2(\exp[U\gamma] - \exp[-2U\gamma]) = 0. \tag{130}$$

Другой пример - уравнение "синус - гордона"

$$U_{tt} - U_{xx} + m^2\sin(\alpha U) = 0, \tag{131}$$

получающееся минимизацией лагранжиана

$$L(x,t) = 1/2(U_t^2 - U_x^2) - \frac{m}{\alpha}(1 - \cos[\alpha U]). \tag{132}$$

Найти же лагранжиан, уравнения Эйлера для которого приводили бы к уравнениям

$$U_t = U_{xx} + 2UU_x + U_{xxxx} \tag{133}$$

(уравнение Кортевега - де Вриза) или

$$U_t = U_{xx} + 2UU_x \tag{134}$$

(уравнение Бюргерса), не удается. Напомним, что добавление к лагранжиану слагаемых, представляющих собой полные производные вида $(f(U, U_x, U_t))_x$, $(f(U, U_x, U_t))_t$, не меняет вида уравнений Эйлера. Мы рассмотрим здесь два метода, которые позволяют в некоторых случаях свести нелинейные уравнения к обычным дифференциальным уравнениям.

Поиск решения в виде бегущей волны нами уже был описан для уравнений Кортевега - де Вриза и уравнения Бюргерса в первой части пособия. Мы покажем здесь еще один пример его применения для решения уравнения нелинейной струны ([6], с. 104).

Найти решение типа уединенной бегущей волны уравнения нелинейной струны

$$u_{tt} - u_{xx} + (u^2)_{xx} + u_{xxxx} = 0. \tag{135}$$

Ищем решение в виде $u(x,t) = f(x - Vt) = f(z)$. Подставляя это выражение в уравнение в частных производных, получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-f''(1 - V^2) + (f^2)'' + f^{(IV)} = 0. \tag{136}$$

После двукратного интегрирования получим

$$f'' + f^2 - f(1 - V^2) + C_1 z + C_2 = 0. \tag{137}$$

Поскольку функция $f(z)$ вместе со своими производными обращается в нуль на бесконечности, получаем $C_1 = C_2 = 0$. Умножая это уравнение на f' и еще раз

интегрируя, получаем

$$\frac{1}{2}(f')^2 + \frac{1}{3}f^3 - \frac{1}{2}(1 - V^2)f^2 = C_3. \tag{138}$$

По тем же причинам полагаем $C_3 = 0$. Решение полученного уравнения имеет физический смысл только для $V^2 < 1$ (что соответствует тому, что скорость распространения возмущения не превышает скорости звука):

$$f(z) = \frac{3}{2}\frac{1 - V^2}{\cosh^2(\frac{\sqrt{1-V^2}(z-z_0)}{2})}. \tag{139}$$

17. Решение уравнения Бюргерса методом подстановки Коула - Хопфа

Здесь мы покажем, следуя [7], способ, каким нелинейное уравнение, описывающее распространение слабых ударных волн, может быть сведено к линейному дифференциальному уравнению в частных производных. Уравнение имеет вид

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x. \tag{140}$$

Будем искать решение в виде

$$u = \frac{Z_x}{Z}, \quad u_x = \frac{Z_{xx}}{Z} - (\frac{Z_x}{Z})^2. \tag{141}$$

Записывая уравнение в виде

$$(\ln Z)_{xt} = [\frac{Z_{xx}}{Z} - (\frac{Z_x}{Z})^2]_x + [(\frac{Z_x}{Z})^2]_x \tag{142}$$

и проводя интегрирование по x, получаем линейное уравнение для $Z(x,t)$

$$Z_t = Z_{xx} + f(t). \tag{143}$$

18. Решение уравнения Лапласа на плоскости методом конформных отображений

Отображение $w = f(z)$ комплексной плоскости z на комплексную плоскость w называется конформным в точке z_0 плоскости z, если производная $f'(z_0) \neq 0$. Если отображение $w = f(z)$ является конформным в области, где задано уравнение $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0$, то новое уравнение также будет уравнением Лапласа в координатах u и v: $\Phi_{uu} + \Phi_{vv} = 0$. Так мы приходим к идее найти такое конформное отображение, которое переводит область со сложной границей в область с простой границей. Следуя [4], продемонстрируем сказанное на примере решения задачи Дирихле в верхней полуплоскости:

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0, \quad -\infty < x < \infty; \quad 0 < y < \infty; \tag{144}$$
$$\phi(x,0) = a, \quad |x| < 1; \quad \phi(x,0) = b, \quad |x| > 1.$$

К этой задаче сводится, в частности, задача об отыскании эквипотенциальных кривых для случая, когда часть границы - участок $y = 0; |x| < 1$ имеет потенциал a, а остальная ее часть - потенциал b.

Для этой цели проведем конформное преобразование, отображающее верхнюю полуплоскость на полосу:

$$w = \ln\frac{z-1}{z+1} = u + iv; \quad z = x + iy. \tag{145}$$

Переписывая преобразование в виде $e^{u+iv} = \frac{z-1}{z+1}$, можно убедиться, что участку $y = 0$, $x > 1$ в плоскости u, v соответствует часть границы полосы $v = 0$, $u < 0$, участку $y = 0$, $x < -1$ соответствует $v = 0$, $u > 0$ и, наконец, участку $y = 0$, $-1 < x < 1$ соответствует $v = \pi$, $-\infty < u < \infty$. Для полосы мы имеем задачу Дирихле

$$\phi_{uu} + \phi_{vv} = 0; \quad -\infty < u < \infty; \quad 0 < v < \pi; \tag{146}$$
$$\phi(u,0) = a; \quad \phi(u,\pi) = b.$$

Решение этой задачи в классе ограниченных функций: $\phi(u,v) = a + v(b-a)/\pi$. Теперь надо его выразить в переменных x, y. Имеем

$$u + iv = \ln\frac{z-1}{z+1} = \ln|\frac{z-1}{z+1}| + i arg\frac{z-1}{z+1}, \tag{147}$$
$$v = arg\frac{x+iy-1}{x+iy+1} = arg\frac{x^2+y^2-1+2iy}{(x+1)^2+y^2} = \arctan\frac{2y}{x^2+y^2-1}.$$

В качестве другого примера рассмотрим задачу Дирихле в области D между двумя неконцентрическими окружностями:

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \tag{148}$$

внутри области D с граничными условиями

$$\phi(x,y) = A \tag{149}$$

на кривой $x^2 + y^2 = 1$;

$$\phi(x,y) = B \tag{150}$$

на кривой $(x-1)^2 + y^2 = 9$. Пользуясь справочниками конформных отображений [1], находим, что преобразование

$$w = 2t\frac{z-s}{z-t}, \quad s = -0.146, \quad t = -6.85 \tag{151}$$

переводит область D во внутренность двух концентрических окружностей

$$u^2 + v^2 = 1; \quad u^2 + v^2 = 6.86\,. \tag{152}$$

Решение задачи Дирихле для этой области имеет вид $\phi(u,v) = a\ln(u^2+v^2) + b$. Постоянные a, b находятся из граничных условий, а переменные u, v выражаются следующим образом:

$$u + iv = 2t\frac{x+iy-s}{x+iy-t}; \tag{153}$$
$$u = 2t\frac{(x-s)(x-t)+y^2}{(x-t)^2+y^2}; \quad v = \frac{2ty}{(x-t)^2+y^2}.$$

19. Метод обратной задачи рассеяния

Одним из способов анализа нелинейных уравнений является их представление в виде коммутатора двух операторов и применение метода обратной задачи рассеяния. Продемонстрируем это на примере уравнения Кортевега - де Вриза (КдВ), описывающего распространение волн на поверхности в узких каналах:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad u(x,0) = \phi(x), \tag{154}$$

где $u(x,t)$ - отклонение поверхности воды от равновесного состояния, x, t - координата вдоль оси канала и время. Рассмотрим два линейных дифференциальных оператора L, A, определенных на комплекснозначных функциях $\Psi(x)$, $-\infty < x < \infty$:

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x,t), \tag{155}$$

$$A = -4i\frac{d^3}{dx^3} + 3i(u\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}u).$$

Можно убедиться, что справедливо соотношение

$$[L, A] = LA - AL = -i(6uu_x - u_{xxx}), \tag{156}$$

так что уравнение КдВ в операторном виде запишется

$$\frac{\partial L}{\partial t} = i[L, A]. \tag{157}$$

Рассмотрим задачу на собственные значения для оператора L:

$$L\Psi = -\frac{d^2\Psi}{dx^2} + u(x,t)\Psi = \lambda\Psi, \tag{158}$$

здесь время мы рассматриваем как параметр. Если $|u(x,t)| < \frac{c}{|x|^{2+a}}$, $a > 0$, $|x| \to \infty$, т.е. $u(x,t)$ достаточно быстро убывает на бесконечности, тогда оператор L имеет конечное число дискретных состояний $\lambda_n = -\kappa_n^2$ и непрерывный спектр.

Поведение волновой функции на бесконечности

$$\begin{aligned} \Psi_n(x) &\to e^{-\kappa_n x}, \quad x \to +\infty; \\ \Psi_n(x) &\to c_n e^{\kappa_n x}, \quad x \to -\infty; \\ \Psi(x,k) &\to e^{ikx}, \quad x \to +\infty; \\ \Psi(x,k) &\to a(k)e^{ikx} + b(k)e^{-ikx}, \quad x \to -\infty \end{aligned} \tag{159}$$

определяется данными рассеяния

$$\lambda_n, c_n, a(k), b(k). \tag{160}$$

Существует некоторый общий формализм, позволяющий найти решение нелинейного уравнения, если удается найти его представление в терминах LA-пары. Продемонстрируем его для уравнения КдВ. Продифференцируем по времени уравнение на собственные значения $L\Psi_n = \lambda_n\Psi_n$:

$$\frac{\partial L}{\partial t}\Psi_n + L\frac{\partial \Psi_n}{\partial t} = \frac{\partial \lambda_n}{\partial t}\Psi_n + \lambda_n\frac{\partial \Psi_n}{\partial t}, \tag{161}$$

пользуясь операторным уравнением и уравнением на собственные значения, результат можно переписать в виде

$$(L - \lambda_n)(\frac{\partial \Psi_n}{\partial t} + iA\Psi_n) = \frac{\partial \lambda_n}{\partial t}\Psi_n. \tag{162}$$

Покажем, что правая часть этого уравнения есть ноль, т.е. $\frac{\partial \lambda_n}{\partial t} = 0$. Для этого умножим обе части этого уравнения на $\Psi^*(x,t)$ и проинтегрируем по x. Утверждение следует из эрмитовости оператора L, поскольку $\Psi_n^*(L - \lambda_n)\phi = 0$. Таким образом, мы убедились, что λ_n - интегралы движения, и, кроме того, в том, что комбинация $\frac{\partial \Psi_n}{\partial t} + iA\Psi_n$ является собственной функцией оператора L:

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial t} + 4\Psi_n''' - 6u\Psi_n' - 3u'\Psi_n = r(t)\Psi_n \tag{163}$$

для любого $r(t)$.

Рассмотрим сначала дискретный спектр $\lambda_n = -\kappa_n^2 < 0$. Выберем $r(t)$ так, чтобы удовлетворялась асимптотика при $x \to +\infty$: $\Psi_n = exp(-\kappa_n x)$. Принимая во внимание

$$\frac{\partial \Psi_n(x,t)}{\partial t} = 0; \quad u(x) = 0, \quad x \to +\infty, \tag{164}$$

находим $r(t) = -4\kappa^3$. Предел $x \to -\infty, \Psi((x,t) = c_n(t)exp(x\kappa_n)$ дает уравнение для $c_n(t)$:

$$\frac{dc_n(t)}{dt} + 8c_n(t)\kappa_n^3 = 0, \quad c_n(t) = c_n(0)e^{-8\kappa_n^3 t}. \tag{165}$$

Для непрерывного спектра полагаем $\lambda = k^2 > 0$, $\Psi(x,k) = exp(ikx)$, $x \to +\infty$, получаем $r(t) = -ik^3$. Для асимптотики $x \to -\infty$ имеем прошедшую и отраженную волны: $\Psi(x,k) = a(k,t)exp(ikx) + b(k,t)exp(-ikx)$. Подстановка в уравнение для собственной функции дает

$$a(k,t) = a(k,0) = a(k); \quad b(k,t) = b(k)exp(-8ik^3 t). \tag{166}$$

Схема решения уравнения КдВ такова.

1) Сначала решается уравнение $L\Psi = \lambda\Psi$ для потенциала $u(x,0) = \phi(x)$. Находятся данные рассеяния $\lambda_n, c_n(0), a(k), b(k, 0 = b(k))$.

2) С помощью подбора LA - пары находятся данные рассеяния для любого момента времени t: $\lambda_n, c_n(t), a(k), b(k,t)$.

3) По этим данным рассеяния строится с помощью метода обратной задачи Марченко потенциал $u(x,t)$.

Мы приведем без доказательства рецепт нахождения потенциала в уравнении Шредингера в терминах данных рассеяния.

Рассмотрим уравнение Шредингера

$$-\frac{d^2}{dx^2}\Psi + u(x)\Psi = \lambda\Psi. \tag{167}$$

Предполагаем спектр состоящим из конечного числа дискретных уровней и непрерывного спектра:

$$\begin{aligned} \lambda = -\kappa^2, \quad \Psi_n(x) &= e^{-\kappa_n x}, \quad x \to +\infty; \\ \Psi_n(x) &= c_n e^{\kappa_n x}, \quad x \to -\infty; \\ \lambda = k^2, \quad \Psi(k,x) &= e^{ikx}, \quad x \to +\infty; \\ \Psi(k,x) &= a(k)e^{ikx} + b(k)e^{-ikx}, \quad x \to -\infty. \end{aligned} \tag{168}$$

Потенциал $u(x)$ находится из решения уравнения Марченко:

$$u(x) = -2\frac{d}{dx}K(x,x), \tag{169}$$

$$K(x,y) = F(x+y) + \int_x^\infty K(x,s)F(s+x)ds,$$

где функция $F(z)$ строится по данным рассеяния:

$$F(z,t) = -\Sigma_n M_n^2(t)e^{-\kappa_n z} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b^*(k,t)}{a(k)}e^{ikz}dk; \tag{170}$$

$$M_n^{-2} = 2\kappa_n \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^2(x,t)dx.$$

Для уравнения КдВ функция $F(z,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial t} + 8\frac{\partial^3 F}{\partial z^3} = 0. \tag{171}$$

Для случая $b(k) = 0$ (отсутствия отраженной волны при рассеянии плоской волны в потенциале $u(x)$) существуют солитонные решения уравнения КдВ. Рассмотрим случай, когда в дискретном спектре имеется один уровень. В этом случае $F(z,t) = -M_n^2(0)exp(-\kappa z + 8\kappa^3 t)$. Решение уравнения Марченко ищем в виде

$$K(x,y,t) = \phi(x,t)e^{-\kappa y}, \tag{172}$$

$$\phi(x,t) = -M_n^2(0)e^{8\kappa^3 t}[e^{-\kappa x} + \phi(x,t)\int_x^\infty e^{-2\kappa y}dy].$$

Уравнение легко решается, и для потенциала $u(x,t) = -2dK(x,x,t)/dx$ получим солитонное решение (движущийся "перевернутый колокол"):

$$u(x,t) = -\frac{2\kappa^2}{ch^2\kappa(x - vt - x_0)}, \tag{173}$$
$$v = 4\kappa^2, \quad e^{-x_0} = \frac{2\kappa}{M_n^2(0)}.$$

Рассмотрение случая отсутствия отраженной волны при наличии нескольких дискретных уровней позволяет проанализировать динамику и характер взаимодействия солитонов. Несмотря на большой прогресс последних лет в области нелинейных уравнений, здесь имеется большой простор для дальнейших исследований.

Список литературы

[1] Кноппельфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. М.: ИЛ, 1963.

[2] Кошляков Н.С. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М., 1936.

[3] Будак Б. М., Самарский Ф. Ф., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1980.

[4] Фарлоу С. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1985.

[5] Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1982.

[6] Колоколов И.В. и др. Задачи по математическим методам физики. Новосибирск, 2000;
Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. М.: Наука, 1973.

[7] Уизни Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.

[8] Кунин И. Теория упругих сред с микроструктурой. М., 1975. Гл. 5;
Додд Р. и др. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир,1988. Гл. 6.

[9] Бхатнагар П. Нелинейные волны в дисперсионных системах. М.: Мир, 1983.

Оглавление

Получено 7 июля 2003 г.

Учебное издание

В. В. Красильников, Э. А. Кураев

Уравнения математической физики
Часть II

Редактор *А. Н. Шабашова*
Корректор *Е. В. Сабаева*

Получено 07.07.2003 г. Подписано в печать 24.10.2003.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2,56. Уч.-изд. л. 2,22. Тираж 200 экз.
Заказ № 54152.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@pds.jinr.ru
www.jinr.ru/publish/