С 321(07)
П -175

Учебно-
методические
пособия
Учебно-научного
центра ОИЯИ
Дубна

УНЦ-2002-16

В. В. Папоян

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ЛЕКЦИИ, ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

2002

Учебно-научный центр ОИЯИ

С321(07)
П-175

В. В. Папоян

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ЛЕКЦИИ, ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Объединенный институт ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Дубна 2002

Папоян В. В.

П17 Классическая механика. Лекции, задачи и решения: Учебно-методическое пособие. — Дубна: ОИЯИ, 2002. — 270 с.

Настоящее издание является изложением курса «Классическая механика», который на протяжении многих лет читается студентам физического факультета Ереванского государственного университета. Программа курса стандартная университетская с небольшими дополнениями. Подробнее обычного излагается принцип наименьшего действия, доказана теорема Нетер, одномерное движение рассматривается на примере задачи о движении частицы в поле с потенциалом Эккарта. В главе о движении в центральном поле рассмотрена формула Бине для траектории частицы, продемонстрированы преимущества использования сохраняющегося вектора Лапласа–Рунге–Ленца. Обстоятельнее обычного рассмотрены гамильтонов формализм, канонические преобразования и уравнение Гамильтона–Якоби. На примере механических колебаний изложены основы использования функций Грина при решении неоднородных дифференциальных уравнений. Отдельная глава посвящена основам теории нелинейных колебаний. Курс иллюстрируется большим количеством задач разной степени сложности, которые снабжены подробными решениями.

Papoyan V. V.

Classical Mechanics. Lectures, Tasks and Solutions: Handbook. — Dubna: JINR, 2002. — 270 p.

This issue represents the course on classical mechanics that has been delivered to the students of the Physics Department of Yerevan State University for many years. The program of the course is a standard university program with minor changes. The principle of least action is expounded in more details, and the Neter theorem is proved. One-dimensional motion is considered for the problem of motion of a particle in the field with Eckart potential. The chapter devoted to the motion in a central field includes the Binet formula for the trajectory of a particle and displays the advantages of the conserved Laplace vector usage. The Hamiltonian formalism, canonical transformations, and the Hamilton–Jacobi equation are considered more thoroughly as compared to the standard consideration. The application of Green functions for solving inhomogeneous differential equations is expounded for mechanical vibrations. A separate chapter is devoted to the basics of the theory of nonlinear vibrations. The course is illustrated by a considerable quantity of tasks supplied by detailed solutions.

© Объединенный институт ядерных исследований, 2002

I. ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПРИНЦИПЫ

Разум, несомненно, кажется слабым, когда мы думаем о стоящих перед ним задачах, действительно слабым, когда мы противопоставляем его безумству и страстям человечества, которые, надо признать, руководят почти полностью судьбами человеческими, как в малом, так и в большом. Но творения интеллекта переживают шумную суету поколений и на протяжении веков озаряют мир светом и теплом.

А. Эйнштейн

(статья для "Manchester Guardian", 1927 г.)

Целью всей деятельности интеллекта является превращение некоторого чу́да в нечто постигаемое.

А. Эйнштейн

Классическая механика занимается изучением движения макроскопических тел, скорости которых много меньше световой, а линейные размеры много больше атомных. Исторически это первый из разделов теоретической физики, которая возникла как часть физической науки во многом благодаря гению И. Ньютона. Само название "теоретическая физика" дает лишь примерное представление о характере предмета. Существенной для исследований физика-теоретика является работа в двух следующих направлениях:

- основываясь на результатах экспериментов в определенной области физических явлений, устанавливать общие закономерности для этой области;
- исходя из общих законов, предсказывать поведение тех или иных физических систем.

При решении таких задач, вообще говоря, приходится строить довольно длинные и сложные цепочки логических умозаключений. На этом пути вряд ли можно было бы продвинуться достаточно далеко, если бы не было возможности формализовать процесс, используя математику как основной метод теоретической физики. Такая математизация оказывается наиболее простым путем осознания природы физических явлений. Однако необходимо признать, что характер рассуждений физика-теоретика весьма специфичен и не всегда используемые им методы приемлемы с точки зрения математика. Такое расхождение в отношении к предмету исследований, которое наглядно, но грубо отражено в известном афоризме "математик доказывает, а физик убеждает", поддается объяснению. Действительно, математик сам конструирует объекты исследований и ограничен лишь требованием строгости и логической непротиворечивости своих умозаключений. Физик же изучает Природу – объект, существующий независимо от нас, и к тому же данный в единственном экземпляре. Поэтому приходится заботиться не столько о логической стройности рассуждений и удобстве рассмотрения, сколько о соответствии введенных представлений этому уникальному объекту. Для физика-теоретика математика – вспомогательное средство (справедливости ради заметим - необходимое), выражаясь образно, математика для него подобна жернову, который перемалывает все, что под него закладывают.

В чем состоит искусство физика? На наш взгляд, на этот риторический вопрос можно ответить лишь весьма схематично: искусство физика состоит

- в способности рассмотреть ситуацию, составить мысленную картинку происходящего и мысленно же "повертеть" этой картинкой;
- в умении подобрать адекватную этой ситуации математическую модель, т.е. в умении перевести физические закономерности на язык математических объектов и операций над ними;
- в умении работать в рамках сконструированной модели, что требует достаточной технической подготовки.

Процесс математического моделирования той или иной физической ситуации назовем построением **представления**. Обратный процесс, в результате которого той или иной математической структуре ставится в соответствие описываемая ею физическая ситуация, назовем **реализацией математической структуры** (см. рис. 1). Чтобы эффективно

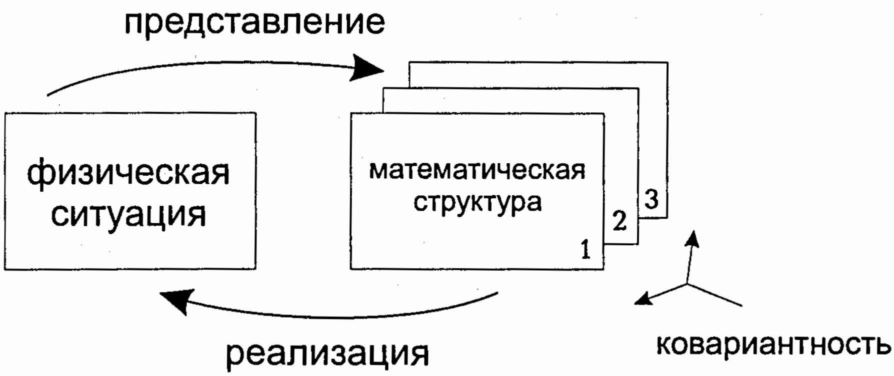

Рис. 1

работать с объектами физического мира, обычно находят адекватное математическое представление. Заметим, что математические объекты, в свою очередь, также обладают представлениями, и в таком случае становится важной степень различия между объектом и его представлениями. Например, квадратную матрицу можно использовать для того, чтобы задать линейное преобразование, а ее детерминант рассматривать или как набор определенных операций над элементами матрицы, или как число, показывающее, во сколько раз линейное преобразование изменяет объем. В первом случае утверждение о том, что детерминант произведения равен произведению детерминантов, доказывается путем довольно запутанных вычислений, а во втором является очевидным.

Измерение - основа физической науки. Не существует опытов, которые позволили бы измерить положение тела в пространстве или момент времени, когда произошло некоторое событие. **Экспериментально измеримы лишь расстояния между телами и промежутки времени между событиями**, что и будет принято в качестве одного из постулатов.

Физические явления достаточно сложны и довольно тесно взаимосвязаны, что делает полное рассмотрение всех сторон и особенностей этих явлений практически неосуществимым. Поэтому теоретическая физика занимается непосредственно не столько самими объектами Природы, сколько искусственно сконструированными моделями, сохраняющими те или иные особенности данного объекта (например, материальная точка, абсолютно твердое тело, несжимаемая жидкость и т.д.). Построение любой модели в конечном итоге сводится к пренебрежению второстепенными свойствами, несущественными для рассматриваемого класса явлений деталями, т.е. к крупномасштабному усреднению; разумеется, для различных моделей степень этого усреднения различна.

В любой физической теории наличествуют элементарные представления (или первичные понятия), которые усваиваются в результате наглядной демонстрации либо предполагаются известными из более фундаментальной теории. Ограничиваясь этим замечанием, перейдем к определениям некоторых основных понятий.

Материальная точка (в дальнейшем точка, частица) - тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с размерами, характеризующими движение этого тела. Избитый, но яркий пример – при рассмотрении движения Земли вокруг Солнца как Землю, так и Солнце можно считать материальными точками ввиду того, что расстояние Земля - Солнце много больше размеров и Земли, и Солнца. В то же время в задачах, связанных с вращением Земли вокруг собственной оси, Землю нельзя полагать материальной точкой.

Положение материальной точки в пространстве естественно задать в подходящей системе координат. Но прежде необходимо уточнить, каковы геометрические свойства пространства, в котором развиваются события классической механики. Постулируем: **пространство классической механики трехмерно и евклидово**. Это, в частности, означает, что векторы в классической механике складываются по правилу параллелограмма, кроме того, это означает, что для определения положения в пространстве естественно введение декартовой системы координат, в которой с частицей (материальной точкой) связывают координаты x, y, z или радиус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$.

Введем также понятие **события**. Событие определяется местом, где оно произошло, и моментом времени, когда оно произошло. Совокупность событий классической механики образует 4-мерное пространство, которое назовем **галилеевым**. Галилеево пространство естественно расщепляется на 3-мерное евклидово пространство и ось времени. Причем в качестве еще одного постулата примем: **время в классической механике однородно**. Это означает, что один и тот же эксперимент, поставленный в разные моменты времени при одних и тех же начальных условиях, даст одинаковые результаты. Пространственно-временная "история" частицы (тела) изображается кривой в пространстве событий (галилеевом 4-мерном пространстве), которая называется **мировой линией**, а все ее точки совпадают с событиями, происходящими с частицей (телом).

Для фиксации того или иного события необходимо иметь часы и систему координат. Однако вопрос о том, где поместить часы и начало системы координат, остается открытым до тех пор, пока не введено понятие **тела отсчета**. Предположим (еще один постулат), что тело отсчета не оказывает влияния на события, происходящие в его окрестности, или же это влияние может быть учтено. Считая тело отсчета материальной точкой, совместим с ним часы и начало системы координат. **Тело отсчета, система координат с началом, совмещенным с телом отсчета, и часы в начале координат в совокупности образуют систему отсчета (СО) – одно из основных понятий классической механики.** Положение материальной точки в пространстве задано, если задан ее радиус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$. Положение N частиц, очевидно, определится заданием $3N$ декартовых координат (по 3 на каждую точку), однако если на систему N точек наложены связи, то из задающих ее положение $3N$ величин не все являются независимыми. Действительно,

1. Пусть при перемещении двух точек a и b расстояние между ними остается неизменным. Их положение в пространстве определяется заданием 6 декартовых координат $\vec{r}_a$ и $\vec{r}_b$, связанных условием неизменности расстояния между точками

$$l_{ab} = [(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2]^{1/2}.$$

   Поэтому независимых величин, определяющих положение этой системы, останется только пять. В этом качестве могут служить 3 декартовы координаты точки a, а если зафиксировать их, то точка b может находиться только на поверхности сферы радиуса l_{ab} и ее положение определится заданием двух углов θ и φ сферических координат.

2. Пусть при перемещении трех точек a, b, c, не лежащих на одной прямой, расстояние между ними остается неизменным (твердотельный треугольник). Их положение в пространстве может быть задано 9 декартовыми координатами $\vec{r}_a$, $\vec{r}_b$, $\vec{r}_c$, которые связаны тремя соотношениями l_{ab}, l_{bc}, l_{ca}, что уменьшает количество независимых величин до шести. В этом качестве можно выбрать 3 декартовы координаты точки a. Если зафиксировать эту точку, то точка b может находиться только на поверхности сферы радиуса l_{ab}, а ее положение определится заданием двух углов θ и φ сферической системы координат. Если зафиксировать точки a и b, то точка c может перемещаться только по окружности, а ее положение определится заданием некоего угла ψ.

Понятно, что предпочтительнее задавать положение системы в пространстве, используя независимые величины. Число независимых величин, полностью определяющих положение системы N материальных точек в пространстве, назовем **числом степеней свободы**. Обозначив это число через s, заметим, что $\mathbf{s} \leq \mathbf{3N}$. Любые независимые величины, определяющие положение системы N материальных точек в пространстве, назовем **обобщенными координатами**. Отметим, что обобщенные координаты не обязательно имеют размерность длины (слово "любые" в определении!). Таким образом, положение системы N материальных точек в пространстве можно определить заданием $\mathbf{s} \leq \mathbf{3N}$ обобщенных координат $q_1, q_2, ..., q_s$.

Классическая механика занимается изучением движения системы материальных точек. Движение невозможно описать одним лишь заданием положения системы (иногда используют эквивалентный термин - задание конфигурации системы). Действительно, точка, имеющая в фиксированный момент времени определенные координаты, спустя бесконечно малый промежуток времени может оказаться в любой из точек сферы бесконечно малого радиуса. И только если вместе с координатами в тот же момент времени задан также вектор скорости, спустя время dt точка окажется в определенном месте, предписанном вектором скорости. Итак, движение системы материальных точек можно описать, если в определенный момент времени заданы как ее положение в пространстве, так и скорости каждой из N точек. Введем понятие **состояния механической системы**: задать состояние механической системы означает задать в определенный момент времени значения стольких переменных, сколько нужно, чтобы однозначно предсказать значения всех динамических переменных в произвольный момент времени. Опыт показывает, что **состояние механической системы определяется заданием всех обобщенных координат и всех обобщенных скоростей в данный момент времени**, т.е. для системы N точек в момент времени t_0 должны быть заданы $2s$ **независимых** величин

$$q_1, q_2, ..., q_s; \qquad \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_s; \qquad (\dot{...}) = \frac{d}{dt}(...).$$

Это понятие позволяет сформулировать **основную задачу механики – по заданному в данный момент времени состоянию предсказать (определить) состояние механической системы в произвольный момент времени**. Решить основную задачу механики означает определить движение системы, т.е. найти $q_i = q_i(t), \quad i = 1, 2, ..., s$. Для того чтобы найти функции $q_i = q_i(t)$ по заданному состоянию системы, необходимо решить систему дифференциальных уравнений, которые естественно называть **уравнениями движения**. Таким образом, решение основной задачи механики сводится, во-первых, к установлению вида уравнений движения механической системы и, во-вторых, к интегрированию этих уравнений для того, чтобы в явном виде определить движение системы, т.е. найти зависимость обобщенных координат от времени.

1. **Основная задача вариационного исчисления. Принцип наименьшего действия. Уравнения Лагранжа.** Следуя исторической традиции, мы могли бы, вслед за Ньютоном, постулировать уравнения движения механической системы. Однако такой подход имеет ограниченную рамками классической механики применимость. Существует другая возможность – сформулировать общий для всех разделов теоретической физики принцип, который называется **принципом наименьшего действия** и который позволяет выяснить, какие именно ограничения накладывают физические требования на вид уравнений движения, и вывести эти уравнения. Перейдем к формулировке этого принципа.

   - Состояние механической системы определяется заданием **функции Лагранжа**, которая является функцией полного набора обобщенных координат и обобщенных скоростей (для системы с s степенями свободы $2s$ величин – q_i и $\dot{q}_i, \quad i = 1, 2, ..., s$):
   $$L = L(q_1, q_2, ..., q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_s, t).$$
   - Вводится понятие **действия** – это определенный интеграл по времени от функции Лагранжа в пределах от t_1 до t_2:
   $$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, ..., q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_s, t)dt.$$
   - Утверждение принципа наименьшего действия состоит в следующем: **движение механической системы между фиксированными в моменты t_1 и t_2 положениями происходит по траектории, на которой функционал действия имеет экстремум.** Практически это означает необходимость сравнить значения действия на всех мыслимых (виртуальных) траекториях между фиксированными в моменты t_1 и t_2 положениями и выбрать ту, на которой действие экстремально, последняя и будет соответствовать истинному движению.

   Экстремальные значения некоторой функции определяют, приравнивая нулю ее первую производную. Иначе говоря, при сравнении значений функции в точке экстремума и в бесконечно близкой точке, т.е. в разложении функции в ряд Тейлора вокруг экстремальной точки, слагаемое, линейное по бесконечно малому приращению аргумента, отбрасывается, что и является отличительным свойством точек экстремума. В основной задаче вариационного исчисления ставится вопрос об экстремальном значении некоторого функционала

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(Q, \dot{Q}, t)dt, \tag{1}$$

заданного в виде определенного интеграла. В (1) функция $F(Q, \dot{Q}, t)$ считается заданной. Задача состоит в том, чтобы найти так называемую экстремаль, т.е. кривую $q = q(t)$, которая обеспечивает требуемое экстремальное свойство. Любую другую функцию $Q(t)$ назовем сравниваемой. К "соревнованию" на экстремальность (1) допускаются кривые $Q(t)$ с фиксированными в моменты t_1 и t_2 значениями, причем

$$Q(t_1) = q(t_1), \qquad Q(t_2) = q(t_2). \tag{2}$$

Будем считать сравниваемую кривую бесконечно близкой к $q(t)$, осуществляющей экстремум (1), и положим

$$Q(t) = q(t) + \epsilon\xi(t), \tag{3}$$

где ϵ – бесконечно малый параметр, а произвольная в остальном функция $\xi(t)$ согласно (2) должна удовлетворять равенствам

$$\xi(t_1) = \xi(t_2) = 0. \tag{4}$$

Величину

$$\delta q(t) = \epsilon\xi(t) \tag{5}$$

назовем вариацией $q(t)$. Подставив далее (3) в (1), получим

$$I(\epsilon) = \int_{t_1}^{t_2} F(q + \epsilon\xi, \dot{q} + \epsilon\dot{\xi}, t)dt \tag{6}$$

– интеграл, зависящий от параметра ϵ. Согласно предположению $q(t)$ – экстремаль, поэтому экстремальное значение интеграла (6) достигается при $\epsilon = 0$. Таким образом, рассматриваемая вариационная задача свелась к задаче об обычном экстремуме, а необходимым условием экстремальности $I(\epsilon)$ является

$$\frac{\partial I(\epsilon)}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = 0. \tag{7}$$

Линейный член разложения интеграла $I(\epsilon)$ в ряд Тейлора

$$\delta I = \epsilon \cdot \frac{\partial I(\epsilon)}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \tag{8}$$

назовем вариацией интеграла I, тогда условием его экстремальности будет

$$\delta I = 0.$$

Можно показать, что операция варьирования перестановочна с дифференцированием. Наглядно это демонстрирует рис. 2.

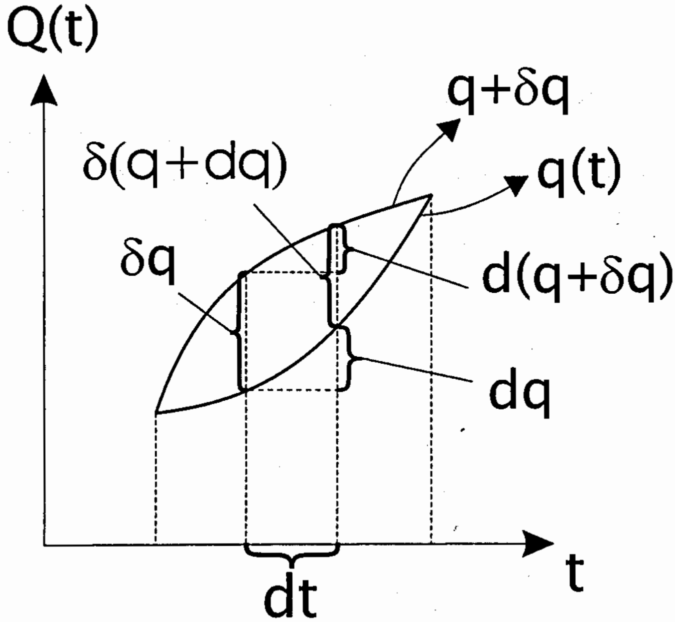

Рис. 2

Действительно, легко видеть, что

$$dq + \delta(q + dq) = \delta q + d(q + \delta q),$$

следовательно, $\delta(dq) = d(\delta q)$. С другой стороны, из (5) следует

$$d(\delta q(t)) = \epsilon d\xi(t),$$

а из (3) получаем

$$\epsilon d\xi(t) = dQ - dq.$$

Ввиду того, что $Q = q + \delta q$, и для дифференциалов $dQ = dq + \delta(dq)$, поэтому

$$\delta(dq) = dQ - dq = \epsilon d\xi = d(\delta q).$$

Вооружившись некоторыми понятиями об экстремуме функционала, обратимся к требованиям принципа наименьшего действия. Напомним его суть: состояние механической системы с s степенями свободы может быть определено **функцией Лагранжа**

$$L = L(q_1, q_2, ..., q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_s, t)$$

(q_i и $\dot{q}_i$ – набор обобщенных координат и скоростей, $i = 1, 2, ..., s$), вводится функционал **действия**

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)dt,$$

и утверждается, что **между двумя фиксированными в моменты t_1 и t_2 положениями движение механической системы происходит по траектории, на которой действие экстремально**. Необходимым условием экстремума, как было показано, является обращение в нуль вариации действия

$$\delta S = 0,$$

причем

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0.$$

Поэтому, поскольку операции дифференцирования (или интегрирования) и варьирования перестановочны, получаем

$$\delta S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{s} \left[\delta q_i \cdot \frac{\partial L}{\partial q_i} + \delta \dot{q}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right] dt = 0.$$

Учитывая, что $\delta \dot{q}_i = d(\delta q_i)/dt$, и интегрируя второе слагаемое подынтегрального выражения по частям, получаем

$$\delta S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i\right] \cdot dt + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \,\Big|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Принцип наименьшего действия относится только к движениям между двумя фиксированными в моменты t_1 и t_2 положениями, поэтому последнее слагаемое предыдущего выражения обращается в нуль, а т.к. $\delta q_i(t)$ произвольна, то как следствие принципа наименьшего действия получаем **уравнения Лагранжа**

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad i = 1, 2, ..., s.$$

С математической точки зрения это система s дифференциальных уравнений второго порядка, решение которой позволяет определить состояние рассматриваемой механической системы по известному в произвольный момент времени состоянию и тем самым решить основную задачу механики (разумеется, функция Лагранжа системы предполагается заданной). Действительно, уравнения Лагранжа – это уравнения типа

$$f_i(\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q_i, t) = 0, \qquad i = 1, 2, ..., s\ ,$$

решения которых содержат $2s$ произвольных постоянных:

$$q_i = q_i(C_1, C_2, ..., C_{2s}, t), \qquad \dot{q}_i = \dot{q}_i(C_1, C_2, ..., C_{2s}, t).$$

Выражая константы C_i через набор $q_{oi}, \dot{q}_{oi}$, определяющий состояние системы в момент времени t_0, получаем полное решение поставленной задачи. Таким образом, **уравнения Лагранжа - это уравнения движения механической системы.**

Вышеизложенное наполнится физическим содержанием лишь после того, как, выяснив физический смысл функции Лагранжа, мы научимся конструировать лагранжиан в каждом конкретном случае. Однако свойства лагранжевой функции можно установить уже сейчас.

- Две функции Лагранжа, которые отличаются на полную производную по времени от произвольной функции координат:

  $$L = \acute{L} + \frac{df(q_i)}{dt}$$

  определяют движение одной и той же механической системы. Действительно,

  $$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \acute{S} + [f(q_i(t_2)) - f(q_i(t_1))].$$

  При варьировании выражение в квадратных скобках исчезает, тогда $\delta S = \delta \acute{S}$, т.е. L и $\acute{L}$ приводят к одним и тем же уравнениям движения. Таким образом, функция Лагранжа определена с точностью до полной производной по времени от произвольной функции координат и времени, иначе говоря, если в выражении для функции Лагранжа удается выделить полную производную по времени, то ее можно отбросить без какого-либо ущерба для уравнений движения.

- Функция Лагранжа асимптотически аддитивна. Это означает, что если некая механическая система состоит из подсистем $A, B, C, ...$, которые не взаимодействуют или разведены настолько, что взаимодействием между ними можно пренебречь, то функция Лагранжа всей системы есть сумма функций Лагранжа подсистем:

$$L = L_A + L_B + L_C + ...$$

  Как будет выяснено в дальнейшем, функция Лагранжа должна обладать этим свойством для того, чтобы обеспечить аналогичное свойство массы (или, если угодно, благодаря тому, что этим свойством обладает масса).

- Нетрудно заметить, что функция Лагранжа определена с точностью до умножения на любую константу, поскольку такое умножение не отражается на уравнениях движения. Казалось бы, это допускает умножение функций Лагранжа изолированных подсистем на разные постоянные, однако свойство асимптотической аддитивности запрещает такой произвол – функции Лагранжа невзаимодействующих подсистем могут быть помножены только на одну и ту же константу.

2. **Принцип относительности. Преобразования Галилея.** Физические явления протекают независимо от состояния движения наблюдателя (предполагается, что наблюдатель вместе с необходимыми для измерений приборами привязан к какой-либо системе отсчета, поэтому в дальнейшем слово "наблюдатель" будет обозначать также и связанную с ним СО, и наоборот). Описание же физических явлений существенно зависит от выбора наблюдателя. Действительно, с точки зрения произвольно движущейся СО частица, покоящаяся в какой-то момент, придет в движение в следующие моменты времени. Однако существуют системы отсчета и связанные с ними наблюдатели, в которых физические явления выглядят проще, чем в других СО. Этот факт был осознан еще Галилеем, а 1-й закон Ньютона, по существу, является определением таких СО – инерциальных систем отсчета (ИСО), с точки зрения которых описание физических явлений наиболее просто.

Помимо ньютоновского определения – существуют системы отсчета, в которых "всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается прилагаемыми силами изменить это состояние" – ИСО можно определить и иначе. **Назовем ИСО такую СО, в которой пространство однородно и изотропно, а время однородно.** В дальнейшем мы будем исходить из этого определения и покажем его эквивалентность ньютоновскому. Поясним понятия "однородно" и "изотропно". Если пространство **однородно**, то один и тот же эксперимент при одинаковых начальных условиях в разных точках пространства даст один и тот же результат. И, наоборот, если выполненный в разных точках пространства при одинаковых начальных условиях один и тот же эксперимент дает совпадающие результаты, то пространство однородно. Если пространство **изотропно**, то один и тот же эксперимент при одинаковых начальных условиях, выполненный в лаборатории, которая может вращаться вокруг какой-либо оси, при повороте на разные углы даст один и тот же результат. И, наоборот, совпадающие результаты экспериментов при поворотах лаборатории на разные углы говорят об изотропности пространства.

Интуитивно принцип относительности (ПО) как обобщение экспериментальных данных обычно формулируют в виде следующего утверждения: **нет никаких оснований, исходя из физических соображений, предпочесть какую-либо одну из инерциальных систем отсчета.** Другими словами, **не существует экспериментов, которые позволили бы выделить какую-либо инерциальную систему отсчета по сравнению с другими,** или **не существует физических систем или состояний этих систем, поведение которых в разных ИСО, но при одинаковых начальных условиях было бы не одинаково.** Попробуем уточнить эти утверждения. Представим себе двух наблюдателей А и В, связанных с разными ИСО, которые следят за поведением двух идентичных физических систем a и b в одном и том же эксперименте. Тогда, согласно ПО, если начальное состояние системы a с точки зрения А такое же, как и начальное состояние системы b с точки зрения В, то результаты экспериментов совпадают. Наблюдатели А и В только сравнивают полученные ими результаты эксперимента над своей физической системой, но А (В) не проводит наблюдений над b (a), а если бы и проводил, то, вообще говоря, получил бы результаты, отличные от тех, которые получает В (А). Действительно, рассмотрим, например, заряды a и b, неподвижные относительно наблюдателей А и В соответственно. Каждый из них обнаружит наличие статического электрического поля, созданного зарядами собственной ИСО (А в a, В в b), но наблюдатель А (В) помимо электрического зафиксирует также и магнитное поле заряда b (a), что не совпадает с наблюдениями B в b (A в a). Эти пояснения позволяют наполнить физическим содержанием одну из распространенных формулировок ПО – **в различных ИСО все физические явления при одних и тех же начальных условиях протекают одинаковым образом.** ПО – это утверждение о том, что некоторый класс физических теорий обладает определенными свойствами инвариантности (симметриями), и, следовательно, связанный с некоторой группой преобразований (симметрий) ПО накладывает ограничения на возможные типы физических теорий, которые можно сформулировать, не нарушая ПО.

Рассмотрим изолированную частицу (частицу, не взаимодействующую с другими частицами или телами) с точки зрения наблюдателя, связанного с ИСО. Вообще говоря, функция Лагранжа $L = L(\vec{r}, \vec{v}, t)$, однако в рассматриваемом случае ввиду однородности и изотропности пространства и однородности времени необходимо потребовать, чтобы L не зависела от $\vec{r}$, t и направления скорости, т.е. функция Лагранжа изолированной частицы в ИСО может зависеть только от величины скорости: $L = L(v^2)$. Уместно отметить, что такая зависимость лагранжиана свободной частицы от скорости согласуется с соображениями однородности и изотропности пространства и однородности времени, однако показатель степени v мог быть и другим. Это означает, что $L = L(v^2)$, по существу, является правдоподобным предположением, истинность которого обнаружится сравнением его следствий с известными и проверенными фактами. (В дальнейшем будет показана обоснованность выбора $L = L(v^2)$.) Продемонстрируем, как, используя ограничения, накладываемые принципом относительности, получить функцию Лагранжа замкнутой (без внешних воздействий) системы невзаимодействующих частиц. Согласно принципу относительности функция Лагранжа частицы в СО $\acute{K}$, которая движется относительно K с постоянной скоростью, может отличаться от L лишь на полную производную от произвольной функции координат и времени. Пусть $\acute{K}$ движется относительно K с бесконечно малой скоростью $\epsilon = const$, тогда $\vec{v} = \vec{\acute{v}} + \vec{\epsilon}$. Если считать, что функция Лагранжа изолированной частицы $L = L(v^2)$, то

$$L(v^2) = L(\acute{v}^2 + 2\acute{v}\epsilon + \epsilon^2),$$

разлагая это выражение в ряд Тейлора вокруг $\acute{v}^2$ и отбрасывая слагаемое, квадратичное по ϵ, получаем

$$L(v^2) = L(\acute{v}^2) + 2\acute{v}\epsilon\frac{\partial L}{\partial \acute{v}^2}.$$

Исходя из принципа относительности, мы должны потребовать, чтобы второе слагаемое было полной производной от произвольной функции координат, а это так, если $\partial L/\partial \acute{v}^2$ не зависит от $\acute{v}^2$, что возможно только лишь в случае $L = \alpha \cdot v^2$. Поскольку лагранжиан обладает свойством асимптотической аддитивности, для замкнутой системы N невзаимодействующих частиц

$$L = \sum_{a=1}^{N} \alpha_a \cdot {v^2}_a.$$

Покажем достаточность этого результата, предполагая, что скорость движения $\acute{K}$ конечна и равна V, тогда

$$\alpha \cdot v^2 = \alpha \cdot (\acute{v}^2 + 2\acute{v} \cdot V + V^2) = \alpha \cdot [\acute{v}^2 + \frac{d}{dt}(2\acute{r} \cdot V + V^2 \cdot t)].$$

Итак, $L = \acute{L} + \frac{d}{dt}(...)$ в полном соответствии с принципом относительности, и второе слагаемое можно опустить, ввиду того что лагранжиан определен с точностью до полной производной по времени.

Для изолированной частицы $L = \alpha \cdot v^2$, подставив ее в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0,$$

получим

$$\vec{v} = const.$$

Иначе говоря, скорость изолированной частицы в ИСО не меняется по величине и направлению (1-й закон Ньютона). Это, в свою очередь, означает, что все СО, которые движутся относительно ИСО с постоянной скоростью, являются ИСО. Нетрудно вывести преобразование пространственных координат при переходе от покоящейся ИСО **K** к **$\acute{\mathbf{K}}$**, движущейся относительно **K** с постоянной скоростью $\vec{V}$. Действительно, легко видеть, что

$$\vec{r} = \acute{\vec{r}} + \vec{V}t.$$

1449144

Объединенный институт ядерных исследований БИБЛИОТЕКА

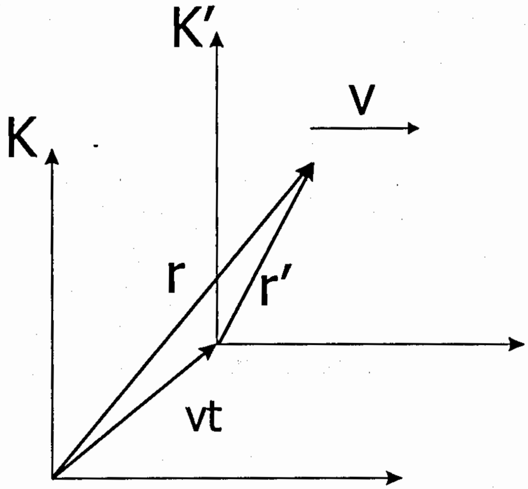

Рис. 3

Постулат о евклидовости пространства классической механики позволяет заключить, что закон сложения скоростей имеет вид

$$\vec{v} = \acute{\vec{v}} + \vec{V},$$

где $\vec{v}$ - скорость частицы в ИСО **K**, $\acute{\vec{v}}$ - скорость частицы в ИСО **Ќ**. Для того, чтобы согласовать этот закон с предыдущим соотношением, связывающим радиусы-векторы, необходимо считать, что

$$t = \acute{t},$$

т.е. полагать время в классической механике абсолютным.

- **Замечание 1.** Если принять в качестве одного из основных предположений абсолютность времени, т.е. постулировать $t = \acute{t}$, то, дифференцируя по времени соотношение $\vec{r} = \acute{\vec{r}} + \vec{V}t$, получим вышеупомянутый закон сложения скоростей.

Поскольку каждой физической величине сопоставляется математический объект, а физические явления облекаются в форму соотношений между этими объектами, т.е. записываются в виде уравнений, адекватно описывающих физические закономерности, то ясно, что математически содержание ПО можно сформулировать в виде эквивалентного ему **принципа ковариантности: уравнения, описывающие физические закономерности, не меняют своей формы (ковариантны) относительно преобразований координат между различными ИСО**. Таким образом, законы физики выражаются в форме, не меняющейся при связывающих ИСО преобразованиях величин, составляющих эти законы, т.е. выражающие физические законы уравнения в различных ИСО имеют один и тот же вид. В классической механике такими преобразованиями являются

$$\vec{r} = \acute{\vec{r}} + \vec{V}t, \qquad t = \acute{t},$$

которые называют **преобразованиями Галилея**.

- **Замечание 2.** Распространение взаимодействия – это физический процесс, поэтому, согласно требованию принципа относительности, скорость распространения взаимодействия должна быть одной и той же во всех инерциальных системах отсчета. Для того чтобы согласовать это требование с законом сложения скоростей (или эквивалентным постулатом об абсолютности времени), необходимо предположить, что **скорость распространения взаимодействия в классической механике бесконечна, т.е. в рамках постулатов классической механики необходимо считать, что взаимодействие распространяется мгновенно.**

Всякая СО, связанная с ИСО преобразованиями Галилея, инерциальна. Для того чтобы можно было утверждать также, что преобразования, связывающие две ИСО, являются преобразованиями Галилея, надо расширить совокупность этих преобразований:

$$t = \acute{t} + t_0,$$

$$x^\alpha = \acute{x}^\alpha + V^\alpha t + L^\alpha_\beta \acute{x}^\beta + x^\alpha_0; \qquad x^\alpha = (x, y, z), \quad V^\alpha = (V_x, V_y, V_z),$$

здесь t_0 и x^α_0 – временной (изменения начала отсчета времени) и пространственный (смещения начала отсчета координат) сдвиги, матрица L^α_β - матрица поворотов пространственных осей. Понятно, что ни одно из этих преобразований не нарушает инерциальности СО, т.к. они сохраняют однородность и изотропность пространства и однородность времени. Эти десятипараметрические преобразования называют **расширенными преобразованиями Галилея**.

Резюмируя, подчеркнем еще раз: ПО – это утверждение о том, что некоторый класс физических теорий обладает определенными симметриями (свойствами инвариантности). В то же время связанный с отражающей эту симметрию группой преобразований ПО накладывает ограничения на возможные типы физических теорий, которые могут быть сформулированы без нарушения ПО.

- **Замечание 3.** Принцип наименьшего действия вместе со своим следствием – уравнениями Лагранжа – сформулирован в обобщенных координатах q_i. Выбор этих координат ничем не предопределен, следовательно, как принцип, так и уравнения движения будут иметь физическую ценность, только если при переходе от q_i к другим обобщенным координатам Q_i, в полном соответствии с принципом ковариантности, уравнения Лагранжа сохранят свою форму. Докажем ковариантность этих уравнений относительно преобразований

$$q_i = q_i(Q_1, Q_2, ..., Q_s, t), \qquad i = 1, 2, ..., s.$$

Для упрощения записи докажем это для одной степени свободы (обобщение на случай s степеней свободы тривиально). Поскольку

$$\tilde{L}(Q, \dot{Q}, t) = L(q(Q,t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t) = L(q, \frac{\partial q}{\partial Q}\dot{Q} + \frac{\partial q}{\partial t}, t),$$

а также $\dot{q} = (\partial q/\partial Q)\dot{Q} + \partial q/\partial t$, имеем

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q} = \frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial Q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial Q}; \qquad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\partial q}{\partial Q}$$

и

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}\frac{\partial q}{\partial Q}; \qquad \frac{\partial \dot{q}}{\partial Q} = \frac{\partial}{\partial Q}\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial q}{\partial Q}.$$

Теперь легко убедиться, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q} = \frac{\partial q}{\partial Q}\Big(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}\Big).$$

Таким образом, справедливость уравнения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

приводит к справедливости аналогичного уравнения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q} = 0.$$

3. **Функция Лагранжа системы материальных точек.** Установим вид функции Лагранжа для замкнутой системы N взаимодействующих частиц. Как было показано, в отсутствие взаимодействия внутри системы функция Лагранжа имеет вид

$$L = \sum_{a=1}^{N} \alpha_a \cdot v_a^2.$$

Для того чтобы включить взаимодействие между частицами, добавим к этому выражению функцию $U = U(r_1, r_2, ..., r_N)$. Предполагается, что именно такая функция, зависящая лишь от положения частиц в пространстве, описывает взаимодействие между ними. Подчеркнем, что при изменении положения одной или нескольких частиц остальные сразу же "узнают" об этом изменении, в полном соответствии с одним из основных положений классической механики о мгновенном распространении взаимодействий. (Это положение является логическим следствием закона сложения скоростей, вытекающего из постулата о евклидовости пространства классической механики или, в другой системе постулатов, из постулата об абсолютности времени.) Итак,

$$L = \sum_{a=1}^{N} \alpha_a \cdot v_a^2 - U(r_1; r_2, ..., r_N).$$

Выше отмечалось, что такой выбор L является определенным допущением, которое может быть оправдано, лишь если при использовании этой L будут получены результаты, согласующиеся с экспериментальными фактами или с известными обобщениями данных наблюдений (с законами Ньютона, например). Подставим эту функцию Лагранжа в уравнения движения. Сравнивая результат со 2-м законом Ньютона, можно заключить, что если **определить силу как отрицательный градиент описывающей взаимодействие функции $U = U(r_1, r_2, ..., r_N)$:**

$$\vec{F}_a = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a},$$

то окажется, что необходимо выбрать $\alpha_a = m_a/2$, тогда для функции Лагранжа замкнутой системы N взаимодействующих частиц получим

$$L = \sum_{a=1}^{N} \frac{m_a \cdot v_a^2}{2} - U(r_1, r_2, ..., r_N).$$

Здесь m_a – масса a-й частицы. Первое слагаемое этого выражения – кинетическая энергия системы T, поэтому ясно, что ответственная за взаимодействие функция U не что иное, как потенциальная энергия системы. Таким образом, в каждой конкретной задаче **функция Лагранжа замкнутой механической системы является разностью кинетической и потенциальной энергий:**

$$L = T - U.$$

По виду функции Лагранжа для замкнутых систем с взаимодействием между частицами можно заключить, что для таких систем время не только однородно, но и изотропно, т.е. его свойства одинаковы в обоих направлениях. Действительно, замена t на $-t$ не меняет как L, так и уравнений движения. Иначе говоря, если возможно некоторое движение, то возможно и обратное, при котором система проходит те же состояния, но в обратном направлении.

Как было замечено выше, при рассмотрении движения механических систем со связями предпочтительнее пользоваться обобщенными координатами. Перепишем функцию Лагранжа в обобщенных координатах. Ввиду того, что

$$x_a = f_a(q_1, q_2, ..., q_s), \qquad \dot{x}_a = \sum_i \frac{\partial f_a}{\partial q_i}\dot{q}_i,$$

$$L = \frac{1}{2}\sum_a m_a(\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U$$

(выражения $\dot{y}_a$ и $\dot{z}_a$ аналогичны выражению для $\dot{x}_a$), получим

$$L = \sum_a \frac{m_a}{2}\sum_{i,k}\dot{q}_i\dot{q}_k\left(\frac{\partial f_a}{\partial q_i}\frac{\partial f_a}{\partial q_k} + \frac{\partial u_a}{\partial q_i}\frac{\partial u_a}{\partial q_k} + \frac{\partial v_a}{\partial q_i}\frac{\partial v_a}{\partial q_k}\right) - U.$$

Окончательно **функция Лагранжа замкнутой системы взаимодействующих частиц в обобщенных координатах** записывается в виде

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}(q_1, q_2, ..., q_s)\cdot\dot{q}_i\dot{q}_k - U;$$

$$a_{ik} = \sum_a m_a\left(\frac{\partial f_a}{\partial q_i}\frac{\partial f_a}{\partial q_k} + \frac{\partial u_a}{\partial q_i}\frac{\partial u_a}{\partial q_k} + \frac{\partial v_a}{\partial q_i}\frac{\partial v_a}{\partial q_k}\right),$$

т.е. в обобщенных координатах кинетическая энергия является функцией не только обобщенных скоростей, но и координат:

$$L = T(q_i, \dot{q}_i) - U(q_i), \qquad i = 1, 2, ..., s.$$

Такая запись, когда переменная в аргументе некоторой функции снабжена индексом, будет использована для краткости и в дальнейшем (переменная с индексом заменяет полный набор этих величин: $(...)_i = (...)_1, (...)_2, ..., (...)_s$).

Определим вид функции Лагранжа для систем, испытывающих внешнее воздействие. В общем случае это довольно сложная задача. Однако в одном частном (но важном) случае, когда рассматриваемая незамкнутая система (назовем ее I) взаимодействует с системой II, движение которой предполагается заданным, задача становится простой. О такой ситуации говорят как о движении системы I в заданном внешнем поле (считается, что q_{II} и $\dot{q}_{II}$ являются известными функциями времени). Выпишем теперь функцию Лагранжа совокупной (уже замкнутой) системы:

$$L_{I+II} = T_I(q_I, \dot{q}_I) + T(q_{II}, \dot{q}_{II}) - U(q_I, q_{II}).$$

Поскольку аргументы второго слагаемого – заданные функции времени, это слагаемое можно представить как производную по времени и игнорировать. Остальные слагаемые содержат переменные, относящиеся только к системе I, поэтому, отбросив индексы, получаем выражение **функции Лагранжа для системы, находящейся в заданном внешнем поле:**

$$L = T(q, \dot{q}) - U(q, t).$$

Этот лагранжиан, как и для замкнутых систем, по-прежнему является разностью T и U с тем отличием, что потенциальная энергия может явно зависеть от времени. В декартовых координатах

$$L = \sum_{a=1}^{N} \frac{m_a \cdot v_a^2}{2} - U(r_1, r_2, ..., r_N, t).$$

II. ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ. ТЕОРЕМА НЕТЕР. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

1. **Интегралы движения.** Решение лагранжевых уравнений движения, которые с математической точки зрения являются системой s дифференциальных уравнений второго порядка (s – число степеней свободы), должно содержать $2s$ произвольных постоянных:

$$q_i = q_i(C_1, C_2, ..., C_{2s}, t), \qquad \dot{q}_i = \dot{q}_i(C_1, C_2, ..., C_{2s}, t).$$

Поскольку для замкнутых механических систем или систем, находящихся в постоянном внешнем поле (формально это системы, лагранжиан которых удовлетворяет условию $\partial L/\partial t = 0$), уравнения движения инвариантны относительно замены $t \mapsto t + t_0$, то одну из констант C обозначим t_0, так чтобы вместо t в решениях уравнений движения фигурировало $t + t_0$. Исключая далее $t + t_0$, для оставшихся $2s - 1$ постоянных получим $C_1(q_i, \dot{q}_i), C_2(q_i, \dot{q}_i), ..., C_{2s-1}(q_i, \dot{q}_i)$. Иначе говоря, **при движении механической системы с s степенями свободы $2s - 1$ функций обобщенных координат и скоростей сохраняют постоянные значения. Такие величины называют интегралами движения.** Особое значение имеют аддитивные (или асимптотически аддитивные) интегралы движения, ввиду того что они позволяют сделать определенные заключения о движении без решения уравнений. Действительно, пусть две (или больше) частиц разведены настолько, что взаимодействие между ними пренебрежимо мало. При своем движении эти частицы сближаются так, что начинают взаимодействовать, а после расходятся настолько, что взаимодействие становится пренебрежимо малым. Если даже природа взаимодействия неизвестна, т.е. область, где его необходимо учитывать, – "черный ящик", то в случае, когда система обладает аддитивными (или асимптотически аддитивными) интегралами движения, приравнивая суммы этих интегралов движения до и после взаимодействия, можно высказать определенные суждения как о характере взаимодействия, так и о характере движения. Принято сохранение аддитивных (или асимптотически аддитивных) интегралов движения называть **законами сохранения**, а сами интегралы – сохраняющимися величинами.

2. **Теорема Нетер.** Теорема Эмми Нетер (1918 г.) играет фундаментальную роль во всей теоретической физике. Она демонстрирует

связь преобразований симметрии функционала действия (в частности, преобразований координат и времени, оставляющих инвариантным действие) с законами сохранения динамических переменных. Эти динамические переменные оказываются первыми интегралами уравнений движения. Иначе говоря, теорема Нетер позволяет найти первые интегралы уравнений движения, не решая их.

В соответствии с принципом относительности действие – инвариант группы преобразований, связывающих две инерциальные системы отсчета K и $\acute{K}$. В классической механике это расширенные преобразования Галилея

$$x^i = \acute{x}^i + S^i_k \acute{x}^k + V^i_0 t + x^i_0,$$

$$t = \acute{t} + t_0, \qquad i, k = 1, 2, 3\ ,$$

где V^i_0, x^i_0, t_0 – константы, S^i_k – ортогональная матрица, характеризующая вращение K относительно $\acute{K}$, параметризуемая тремя постоянными углами. Временная координата имеет абсолютный смысл и изменяется лишь при сдвиге начала отсчета времени на t_0 (репараметризация времени). Вышеприведенные преобразования образуют 10–параметрическую группу преобразований галилеева пространства и являются группой симметрии действия.

На основании теоремы Нетер можно утверждать, что в классической механике эта 10–параметрическая группа симметрии действия порождает законы сохранения 10 динамических величин. Как будет показано, это энергия, по три компоненты импульса, скорости центра масс частицы и момента импульса.

- **Теорема. Каждому n–параметрическому преобразованию независимых переменных действия, относительно которых оно инвариантно, соответствует n сохраняющихся динамических величин.**

  Доказательство. Рассмотрим механическую систему, состояние которой описывается функцией Лагранжа $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$. Было показано, что лагранжевы уравнения движения сохраняют свою форму при преобразованиях $\acute{q}_i = f_i(q_j, t)$. Рассмотрим более общие преобразования, включающие репараметризацию времени:

$$\acute{q}_i = f_i(q_j, t); \qquad \acute{t} = f(t).$$

В общем случае вид нового действия как функционала новых координат, зависящих от нового времени, при таком преобразовании может претерпеть любые изменения. Теорема Нетер относится к тому частному случаю, когда таких изменений не происходит.

Введем совокупность зависящих от одного (ради простоты) параметра λ преобразований координат и времени:

$$[t; q(t)] \Longrightarrow \Lambda(\lambda)[t; q(t)] = [\acute{t}; \acute{q}(\acute{t})] = [f(t; \lambda); f_i(q_j, t; \lambda)]. \qquad (9)$$

Будем считать, что оператор преобразования $\Lambda(\lambda)$ удовлетворяет условиям

$$\Lambda(\lambda_1)\Lambda(\lambda_2) = \Lambda[\lambda_3(\lambda_1, \lambda_2)]; \qquad \Lambda(0) = 1,$$

т.е. образует однопараметрическую группу.

Рассмотрим бесконечно малое преобразование, отвечающее параметру $\lambda \mapsto 0$:

$$t \Longrightarrow \acute{t} = t + \delta t; \qquad \delta t = \frac{\partial f}{\partial \lambda} \cdot \lambda, \qquad (10)$$

$$q_i(t) \Longrightarrow \acute{q}_i(\acute{t}) = f_i(q_j; t; \lambda) = q_i(t) + \frac{\partial f_i}{\partial \lambda} \cdot \lambda. \qquad (11)$$

Вариация функции при изменении аргумента возникает как благодаря этому изменению, так и из-за изменения вида функции:

$$\delta^* q_i = \acute{q}_i(\acute{t}) - q_i(t) = \frac{\partial f_i}{\partial \lambda} \cdot \lambda. \qquad (12)$$

Можно ввести также вариацию формы функции

$$\delta q_i = \acute{q}_i(t) - q_i(t). \qquad (13)$$

Очевидно,

$$\delta^* q_i = \delta q_i + \dot{q}_i \cdot \delta t, \qquad (14)$$

кроме того, вариация формы функции (без звездочки), как было показано, перестановочна с производной по времени $(d/dt)\delta q = \delta\dot{q}$. Соответственно, два типа вариаций можно ввести и для любой величины, например для функции Лагранжа:

$$\delta^* L = \acute{L}(...\acute{t}) - L(...t), \qquad \delta L = \acute{L}(...t) - L(...t),$$

причем

$$\delta^* L = \delta L + \frac{dL}{dt} \cdot \delta t.$$

Вернемся к условиям теоремы Нетер и потребуем, чтобы функционал действия оставался неизменным при преобразованиях (10) и (11):

$$\delta^* S = \int\limits_{\acute{T}} d\acute{t} \cdot \acute{L}(...\acute{t}) - \int\limits_{T} dt \cdot L(...t) = 0. \tag{15}$$

Здесь $\acute{T}$ – та же область интегрирования, что и T, но выраженная через штрихованные переменные, что дает

$$\delta^* S = \int\limits_{\acute{T}} d\acute{t} \cdot [L(...t) + \delta^* L] - \int\limits_{T} dt \cdot L(...t) = 0.$$

Подставив в последнее соотношение $d\acute{t}$ и $\delta^* L$, получим

$$\delta^* S = \int\limits_{T} [\delta L + \frac{d}{dt}(L\delta t)] \cdot dt.$$

Раскрывая δL, принимая во внимание

$$\sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \delta q_i\right) = \sum_i \left[\delta q_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \delta \dot{q}_i\right],$$

подразумевая, что движение происходит по истинной траектории, т.е. учитывая уравнения движения, а также заменив δq_i на $\delta^* q_i$ согласно (14), придем к следующему выражению для $\delta^* S$:

$$\delta^* S = \int\limits_{T} dt \cdot \frac{d}{dt}\left[\left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i\right)\delta t + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \delta^* q_i\right].$$

Эта вариация равна нулю, и, так как область интегрирования произвольна, равно нулю также и подынтегральное выражение

$$\frac{d}{dt}\left[\left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i\right)\frac{\partial f}{\partial \lambda} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \lambda}\right] = 0. \tag{16}$$

Другими словами, из инвариантности действия относительно (10) и (11) как следствие получено, что величина

$$\Psi = \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i\right)\frac{\partial f}{\partial \lambda} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \lambda} \tag{17}$$

сохраняется во времени. Это и есть точное утверждение теоремы Нетер. Теорема доказана.

- **Замечание 1.** Величина (17) зависит как от обобщенных координат, скоростей и времени, так и от функций f и f_i и поэтому еще не есть динамическая (зависящая только от $q, \dot{q}, t$) сохраняющаяся величина. Она станет таковой, как только будет явно задано преобразование, генерирующее сохраняющуюся величину, и выяснена зависимость f и f_i от $q, \dot{q}, t$.

- **Замечание 2.** Слагаемые в (17) имеют разный характер. Первое слагаемое, содержащее функцию Лагранжа, перепутывает степени свободы и поэтому обладает лишь асимптотической аддитивностью. Второе слагаемое имеет явную форму суммы по степеням свободы. Поэтому если преобразование, относительно которого инвариантно действие, затрагивает время, то можно надеяться лишь на сохранение асимптотически аддитивной величины. Если же преобразуются только координаты, то сохраняться будет аддитивная величина.

Применим теорему Нетер к различным частным случаям преобразований симметрии действия.

3. **Энергия.** Рассмотрим преобразование, связанное с однородностью времени, – сдвиг во времени $t = \acute{t} + t_0$. Это преобразование получается как частный случай общих (10) и (11), если положить $(\partial f_i/\partial\lambda) = 0$, выбрать $\delta t = \lambda$ и поэтому принять, что $(\partial f/\partial\lambda) = 1$. Тогда вместо (16) получим

$$\frac{d}{dt}\left[L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i\right] = 0, \tag{18}$$

что означает сохранение

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L. \tag{19}$$

Тот же результат можно получить, исходя из однородности времени, не привлекая теоремы Нетер. Действительно, из однородности времени следует, что функция Лагранжа замкнутых механических систем или систем, находящихся в постоянном внешнем поле (назовем такие системы консервативными), не должна зависеть от времени, т.е.

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right] = \sum_i \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\dot{q}_i\right] = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

– выражение, совпадающее с (18).

Легко показать, что E из (19) является полной энергией механической системы. Действительно, для консервативных систем лагранжиан $L = T(q_i, \dot{q}_i) - U(q_i)$ и является квадратичной функцией обобщенных скоростей, поэтому, согласно теореме Эйлера об однородных функциях, сумма в (19) равна $2T$, а

$$E = 2T - (T - U) = T + U$$

есть полная энергия системы. В декартовых координатах

$$E = \sum_a \frac{mv_a^2}{2} + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N).$$

- **Справка.** *Функция*

$$f(\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_i) = \alpha^k f(x_1, x_2, ..., x_i)$$

называется однородной функцией степени k.

Для однородных функций степени k теорема Эйлера устанавливает

$$\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = k \cdot f.$$

Согласно (19) **энергия** аддитивна в той же мере, в какой аддитивна функция Лагранжа, т.е. **асимптотически аддитивна.**

Таким образом, **вследствие однородности времени при движении замкнутых механических систем, а также систем, находящихся в постоянном внешнем поле, энергия, определяемая выражением (19), остается неизменной.**

4. **Импульс.** Другой закон сохранения возникает в связи с однородностью пространства. Преобразование, отражающее соответствующую этой однородности симметрию, есть пространственный сдвиг. Проще всего это преобразование выглядит в декартовых координатах: $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a}$. Поскольку оно не затрагивает времени, то получается из общих преобразований (10) и (11), если положить $(\partial f/\partial\lambda) = 0$, а также, ввиду необходимости выбора $\lambda = \vec{a}$, принять $(\partial f_i/\partial\lambda) = 1$. Тогда из (16) следует

$$\sum_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = \frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = 0.$$

Подставив сюда лагранжиан замкнутой системы в декартовых координатах, получим

$$\vec{p}_a = m_a \cdot \vec{v}_a; \qquad\qquad \vec{P} = \sum_a \vec{p}_a = const.$$

Здесь $\vec{p}_a$ – импульс отдельной частицы, $\vec{P}$ – полный импульс, сохраняющийся при движении системы и аддитивный по определению, причем, в отличие от энергии, его аддитивность не зависит от того, взаимодействуют части системы или нет.

Тот же результат можно получить, не используя (16). В силу однородности пространства свойства замкнутой механической системы не должны зависеть от параллельного переноса этой системы как целого, а это означает, что при соответствующем пространственному сдвигу бесконечно малом преобразовании $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{\epsilon}(\epsilon \mapsto 0)$ изменение функции Лагранжа должно обращаться в нуль, т.е.

$$\sum_a \delta\vec{r}_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = \vec{\epsilon} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = \vec{\epsilon} \frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = 0.$$

Таким образом, **вследствие однородности пространства при движении замкнутых механических систем их полный импульс $\vec{P}$ остается неизменным.** В декартовых координатах

$$\vec{P} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = \sum_a \vec{p}_a = \sum_a m_a \cdot \vec{v}_a = const. \tag{20}$$

Для незамкнутых систем полный импульс, вообще говоря, сохраняться не будет. Однако в важном случае движения механической системы в симметричном внешнем поле, в частности, если оно не меняется при параллельном переносе системы вдоль какого-либо направления, то, как это следует из приведенного вывода, компонента импульса в этом направлении сохраняется (обычно в этих направлениях выбирают координатные оси). Формальным признаком такой симметрии поля является отсутствие зависимости потенциальной энергии от соответствующей декартовой координаты. Так, в направленном по z однородном поле сохраняются компоненты импульса вдоль осей x и y.

- **Справка.** *Однородным называют поле, во всех точках которого на частицу действует одна и та же сила $\vec{F}$. Из* *определения $\vec{F} = -(\partial U/\partial \vec{r})$ следует, что в однородном поле $U = -\vec{F}\cdot\vec{r}$, т.е. потенциальная энергия является линейной функцией координат.*

Имеет смысл обратить внимание на одно интересное следствие сохранения импульса для замкнутых механических систем. В декартовых координатах уравнения движения таких систем записываются в виде

$$\frac{d\vec{p}_a}{dt} = \vec{F}_a; \qquad \vec{p}_a = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a}; \qquad \vec{F}_a = -\partial U/\partial \vec{r}_a,$$

где $\vec{p}_a$ – импульс a-й частицы, а $\vec{F}_a$ – сила, действующая на эту частицу. Просуммировав по всем частицам, получим

$$\sum_a \vec{F}_a = 0,$$

т.е. **сумма сил, действующих внутри замкнутой системы, равна нулю**. Если система состоит из двух взаимодействующих частей, то мы приходим к 3-му закону Ньютона о равенстве действия и противодействия.

По аналогии с декартовыми координатами **назовем**

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}; \qquad f_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

i-ми компонентами обобщенных импульса и силы. Уравнения движения Лагранжа в этих обозначениях принимают вид

$$\dot{p}_i = f_i, \qquad i = 1, 2, ..., s.$$

Отметим, что обобщенные импульсы и силы необязательно имеют обычные размерности $[MLT^{-1}]$ и $[MLT^{-2}]$.

- **Замечание 3.** Рассмотрим ситуацию, когда функция Лагранжа не зависит от одной (или нескольких) обобщенных координат, необходимых для описания положения системы в пространстве. Такие координаты назовем **циклическими**. Пусть q_k – циклическая координата (для нескольких циклических координат рассуждения такие же), т.е.

$$L = L(q_1, ...q_{k-1}, q_{k+1}, ...q_s, \dot{q}_1, ...\dot{q}_s, t),$$

другими словами, $\partial L/\partial q_k = 0$, что, согласно уравнениям Лагранжа, означает сохранение k-й компоненты обобщенного импульса. Итак, **если одна или несколько координат, задающих положение механической системы в пространстве, циклические, то соответствующие компоненты импульсов являются сохраняющимися величинами.**

5. **Момент импульса.** Следует ожидать, что очередной закон сохранения будет следствием изотропии пространства. И, как было отмечено, из-за того, что соответствующее изотропии пространства преобразование симметрии не затрагивает времени, сохраняющаяся величина будет аддитивной по определению (как импульс). В декартовых координатах искомое преобразование имеет вид

$$\vec{r}_a \Longrightarrow \vec{r}\,'_a = \vec{r}_a + [\delta\vec{\varphi}, \vec{r}_a]; \qquad \delta\vec{r}_a = [\delta\vec{\varphi}, \vec{r}_a].$$

Это преобразование выведено в курсе векторного и тензорного анализа при рассмотрении обусловленных вращениями изменений векторов, которые параметризованы бесконечно малым $\delta\vec{\varphi}$. Сравнив последнее выражение с (11) и подставив результат в (16), получим

$$\frac{d}{dt}\sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a}\cdot[\delta\vec{\varphi}, \vec{r}_a] = \delta\vec{\varphi}\cdot\frac{d}{dt}\sum_a[\vec{r}_a, \vec{p}_a] = 0 \Longrightarrow \vec{M} = \sum_a[\vec{r}_a, \vec{p}_a] = const$$

– закон сохранения вектора момента импульса $\vec{M}$, как и ожидалось, аддитивного по определению. Аналогичное заключение можно получить иначе. В силу изотропности пространства свойства замкнутой механической системы не меняются при поворотах ее как целого. Это означает, что преобразование

$$(\vec{A})'_a = \vec{A}_a + [\delta\vec{\varphi}, \vec{A}_a],$$

где

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{v} \end{pmatrix},$$

оставляет неизменным функцию Лагранжа системы, т.е.

$$\delta L = \sum_a\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a}\cdot\delta\vec{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a}\cdot\delta\vec{v}_a\right) =$$

$$\sum_a\left(\dot{\vec{p}}_a\cdot[\delta\vec{\varphi}, \vec{r}_a] + \vec{p}_a\cdot[\delta\vec{\varphi}, \vec{v}_a]\right) = \delta\vec{\varphi}\cdot\frac{d}{dt}\sum_a[\vec{r}_a, \vec{p}_a] = 0.$$

Итак, **при движении замкнутых механических систем как следствие изотропии пространства сохраняется полный момент импульса $\vec{M}$.** В декартовых координатах

$$\vec{M} = \sum_a [\vec{r}_a, \vec{p}_a]; \qquad \frac{d\vec{M}}{dt} = 0. \tag{21}$$

Покажем, что величина момента импульса зависит от точки, относительно которой он определен. Сместим начало координат на постоянный вектор $\vec{a}$, тогда $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{a}$, а

$$\vec{M} = \vec{M}' + [\vec{a}, \vec{P}],$$

и, только если механическая система покоится как целое ($\vec{P} = 0$), моменты импульса в обеих системах совпадают и не зависят от выбора начала координат.

Достаточно просто понять, что при движении механических систем, взаимодействующих с внешним полем, **компоненты момента импульса (в одном частном случае сферически-симметричного поля – полный момент импульса) остаются неизменными, если внешнее поле обладает осевой симметрией.** Действительно, в этом случае свойства поля не меняются при поворотах вокруг оси симметрии, пространство относительно этой оси изотропно, поэтому компонента импульса на ось симметрии сохраняется. Если внешнее поле сферически-симметрично, любая ось, проходящая через центр поля, является осью симметрии относительно вращений вокруг нее. (Кстати говоря, это положение можно принять за определение сферической симметрии.) А это означает, что сохраняется **определенный относительно центра поля** полный момент импульса, т.к. сохраняются его компоненты относительно трех декартовых осей.

- **Замечание 4.** Характер вывода закона сохранения момента импульса позволяет предположить, что проекция момента на какую-либо ось (например, z) определяется формулой

$$M_z = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_a}.$$

В этом нетрудно убедиться прямым вычислением. Действительно, $M_z = \sum_a m_a [\vec{r}_a \vec{v}_a]_z = \sum_a m_a (x_a \dot{y}_a - y_a \dot{x}_a)$, или в цилиндрических координатах $M_z = \sum_a m_a \rho_a^2 \dot{\varphi}_a$, и, поскольку функция Лагранжа $L = \frac{1}{2}\sum_a m_a(\dot{\rho}_a^2 + \rho_a^2\dot{\varphi}_a^2 + \dot{z}_a^2)$, легко видеть, что формула верна.

6. **Преобразование сохраняющихся величин.** Выясним, как преобразуются сохраняющиеся величины при галилеевых преобразованиях

$$\vec{r} = \acute{\vec{r}} + \vec{V}t; \qquad \vec{v} = \acute{\vec{v}} + \vec{V}; \qquad t = \acute{t}.$$

(ИСО $\acute{K}$ движется относительно K со скоростью $\vec{V} = const$.)

Начнем с импульса

$$\vec{P} = \sum_a m_a\vec{v}_a = \acute{\vec{P}} + \vec{V}\sum_a m_a = \acute{\vec{P}} + \mu\vec{V}, \qquad \mu = \sum_a m_a.$$

Из всех мыслимых ИСО $\acute{K}$ выберем ту, в которой рассматриваемая механическая система покоится как целое. Очевидно, это та $\acute{K}$, в которой $\acute{\vec{P}} = 0$ и которая движется относительно K со скоростью $\vec{V} = \vec{V}_0 = \vec{P}/\mu = \sum_a m_a\vec{v}_a/\mu$. Проинтегрировав последнее соотношение, получим

$$\vec{R} = \vec{V}_0 t + \vec{R}_0 = \frac{\sum_a m_a\vec{r}_a}{\sum_a m_a}.$$

Назовем точку с радиусом-вектором $\vec{R}$ центром инерции (ЦИ) механической системы. Эта точка движется с постоянной скоростью $\vec{V}_0$ вместе с ИСО $\acute{K}$ (в которой наша система покоится как целое) относительно ИСО K. ИСО $\acute{K}$ принято называть ИСО ЦИ. Итак, **в силу закона сохранения импульса ЦИ замкнутой системы материальных точек движется со скоростью $\vec{V}_0 = const$** . Это движение в высокой степени тривиально, поэтому обычно его исключают из рассмотрения. (Отметим аналогию с движением свободной материальной точки. Интересно также заметить, что связь импульса системы с ее скоростью как целого ($\vec{P} = \mu\vec{V}$) такая же, как и для отдельной частицы. Эта аналогия позволяет трактовать систему материальных точек (в тех случаях, когда внутренние движения в ней нас не интересуют) как одну материальную точку, т.е. по существу оправдывает модельное представление о материальной точке.) Постоянство скорости движения ЦИ замкнутой системы естественно отнести к законам сохранения и тем самым завершить рассмотрение величин, сохранение которых следует из инвариантности лагранжиана замкнутых систем относительно 10-параметрической группы расширенных преобразований Галилея.

Перейдем к преобразованию энергии $E = T + U$:

$$T = \sum_a \frac{m_a \cdot v_a^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_a m_a \cdot \acute{v}_a^2 + \frac{\mu V^2}{2} + \sum_a m_a \cdot \vec{\acute{v}}_a \vec{V} = \acute{T} + \frac{\mu V^2}{2} + \vec{\acute{P}} \cdot \vec{V}.$$

Для полной энергии

$$E = \acute{E} + \frac{\mu V^2}{2} + \vec{\acute{P}} \cdot \vec{V},$$

и если штрихованную СО выбрать как ИСО ЦИ, т.е. положить $\vec{\acute{P}} = 0$, то

$$E = E_{in} + \frac{\mu V^2}{2}, \qquad E_{in} = \frac{1}{2} \sum_a m_a \cdot \acute{v}_a^2 + \acute{U}.$$

Таким образом, в ИСО, относительно которой механическая система движется как целое (в ИСО ЦИ), полная энергия складывается из внутренней энергии E_{in} и кинетической энергии движения системы как целого. Это обстоятельство позволяет при решении задачи о движении системы N точек в ИСО ЦИ разбить задачу на две независимые - задачу о внутреннем движении и тривиальную задачу о равномерном и прямолинейном движении системы как целого.

Осталось выяснить, как изменяется при преобразованиях от одной ИСО к другой момент импульса

$$M = \sum_a m_a [\vec{r}_a, \vec{v}_a] = \vec{\acute{M}} + \mu [\vec{R}, \vec{V}].$$

Если механическая система покоится как целое в системе $\acute{K}$, то $\vec{P} = \mu \cdot \vec{V}$, тогда

$$M = \vec{\acute{M}} + [\vec{R}, \vec{P}].$$

В системе ЦИ вектор $\vec{\acute{M}}$ называют собственным моментом импульса и обозначают $\vec{M}_{in}$, иначе говоря, момент импульса механической системы в произвольной СО складывается из собственного момента и векторного произведения радиуса-вектора ЦИ на импульс. (Заметим, что последнее слагаемое имеет форму момента одной частицы с координатой $\vec{R}$ и импульсом $\vec{P}$. А это еще раз подтверждает, что если не интересоваться внутренними движениями, то систему материальных точек можно рассматривать как одну точку с массой μ и радиусом-вектором $\vec{R}$.)

Итак, для замкнутых механических систем, исходя из самых общих свойств однородности и изотропности пространства и однородности времени, удалось получить законы сохранения энергии, импульса и момента импульса. Два последних интеграла движения аддитивны по определению, а энергия асимптотически аддитивна. В каждом случае оказалось возможным указать на достаточно широкий класс внешних полей, не нарушающих законов сохранения. Это постоянные внешние поля (в случае энергии), поля, симметричные относительно пространственных сдвигов вдоль какой-либо оси (вдоль той же оси сохраняется компонента импульса), и поля, обладающие осевой симметрией (сохраняется проекция момента на эту ось). Основная ценность законов сохранения состоит в том, что они позволяют, не вникая детально в механизм происходящего, выявить некоторые основные черты явления. В тех случаях, когда механизм происходящего неизвестен, законы сохранения часто служат единственным источником информации о процессах, происходящих с системой. Наконец, в более простых случаях, когда речь идет об интегрировании уравнений движения, законы сохранения могут служить вспомогательным средством, упрощающим эту процедуру.

По этим причинам сохраняющиеся для всякой замкнутой системы и для систем, взаимодействующих с перечисленными выше типами внешних полей, энергию, импульс и момент называют фундаментальными динамическими величинами.

- **Приложение.** Приведем другое доказательство теоремы Нетер. Рассмотрим бесконечно малое преобразование координат $q_i \mapsto \acute{q}_i + \delta q_i$, где $\delta q_i = T_i^k \cdot \epsilon_k$, а $i, k = 1...n$ (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, ϵ_k – бесконечно малые независимые параметры преобразования). Согласно условиям теоремы потребуем, чтобы при таком преобразовании действие оставалось неизменным. Тогда ясно, что

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta q_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \delta \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right] dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt}\left(\delta q_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \delta q_i dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right] = 0.$$

Разумеется, механическая система движется в соответствии с уравнениями Лагранжа, подставив их в предыдущее выражение и имея в виду произвольность δq_i, получим

$$\frac{d}{dt}[T_i^k(\partial L/\partial \dot{q}_i)] = 0 \Longrightarrow T_i^k(\partial L/\partial \dot{q}_i) = C^k,$$

константы C^k соответствуют $k = 1...n$ сохраняющимся динамическим переменным. Теорема доказана, обратимся к применениям.

Рассмотрим замкнутую систему N частиц с лагранжианом

$$L = \sum_{a=1}^{N} \frac{m_a \dot{\vec{r}}_a^{\,2}}{2} - U(\vec{r}_1, ...\vec{r}_N)$$

и преобразуем координаты согласно

$$\vec{r}_a^{\,\prime} = \vec{r}_a + \delta\vec{r}_a, \qquad \delta\vec{r}_a = \delta\vec{a} + [\delta\vec{n}, \vec{r}_a]$$

или в компонентах

$$(\delta\vec{r}_a)_i = \delta a_i + \epsilon_{ikl}\delta n^k \cdot x_a^l.$$

1. Пусть $\delta\vec{a} \neq 0, \delta\vec{n} = 0$. Ясно, что $(\delta\vec{r}_a)_i = \delta_i^k \cdot \delta a_k$, т.е. $T_i^k = \delta_i^k$, что приводит к
$$\sum m_a \dot{\vec{r}}_a = \vec{P} = const$$
– **закону сохранения импульса** и является следствием инвариантности действия относительно параллельного переноса механической системы как целого, другими словами, следствием однородности пространства.

2. Пусть $\delta\vec{a} = 0, \delta\vec{n} \neq 0$. Ясно, что $T_{ik} = \epsilon_{ikl}x_a^l$ (напомним, что в евклидовом пространстве классической механики нет разницы между верхним и нижним положениями индексов). Ввиду того, что $(\partial L/\partial \dot{x}_i) = \sum m_a \dot{x}_a^i$, а также $\dot{x}_a^i \epsilon_{ikl} x_a^l = \epsilon_{kli} x_a^l \dot{x}_a^i$, получим
$$\sum m_a [\vec{r}_a, \dot{\vec{r}}_a] = \sum m_a [\vec{r}_a, \vec{v}_a] = \vec{M} = const$$
– **закон сохранения момента импульса** как следствие инвариантности действия относительно поворота механической системы как целого, другими словами, как следствие изотропности пространства.

III. МЕХАНИЧЕСКОЕ ПОДОБИЕ. ТЕОРЕМА ВИРИАЛА. ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

1. **Механическое подобие.** Сохраняющиеся динамические переменные позволяют выявить некоторые (иногда существенные) черты механических явлений без решения основной задачи механики. Сохранение этих величин является следствием весьма общих свойств пространства и времени, которые находят свое отражение в преобразованиях, не изменяющих уравнений движения. Ранее отмечалось, что уравнения движения неизменны также и при умножении функции Лагранжа на константу: L и $\acute{L} = c \cdot L$ приводят к одним и тем же уравнениям движения. Попробуем выяснить, дадут ли следствия такой инвариантности уравнений движения какой-либо выигрыш. Довольно общее соображение в духе теоремы Нетер – любая симметрия не случайна – внушает надежду на положительный результат.

Рассмотрим механические системы, потенциальная энергия которых является однородной функцией **декартовых** координат:

$$U(\alpha\vec{r}_1, \alpha\vec{r}_2, ..., \alpha\vec{r}_N) = \alpha^k U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N).$$

Преобразуем координаты рассматриваемой системы так, чтобы

$$\vec{r}_a \mapsto \alpha\vec{r}_a,$$

и предположим, что при этом время движения по траекториям с измененными в α раз координатами изменяется в β раз, т.е. $t \mapsto \beta t$. Кинетическая энергия изменится при этом в $(\alpha/\beta)^2$ раз, а потенциальная – в α^k раз. Выберем β так, чтобы

$$(\alpha/\beta)^2 = \alpha^k \longrightarrow \beta = \alpha^{1-k/2},$$

тогда функция Лагранжа целиком умножится на постоянный множитель α^k, т.е. уравнения движения останутся неизменными.

Изменение координат всех частиц в одинаковое число раз означает переход от одних траекторий к другим – траекториям, геометрически подобным исходным. Итак, **если потенциальная энергия системы является однородной функцией k-й степени от координат, то уравнения движения допускают геометрически**

подобные траектории, причем времена движения между соответствующими точками траекторий относятся как

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-k/2} \implies \frac{v'}{v} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{k/2}, \qquad \frac{E'}{E} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{k}. \tag{22}$$

Здесь $\left(l'/l\right)$ – отношение характерных линейных размеров двух геометрически подобных траекторий.

Рассмотрим несколько примеров.

- Потенциальная энергия – квадратичная функция координат: $U \sim x^2$. Известно, что такая зависимость потенциальной энергии от координат характерна для колебаний. Подставив $k = 2$ в (22), найдем, что период колебаний не зависит от амплитуды – полученный из самых общих соображений хорошо известный результат.

- В однородном поле потенциальная энергия – линейная функция координат, т.е. $k = 1$. Из (22) имеем

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1/2}.$$

  Знакомый результат – в поле тяжести квадраты времен падения тел относятся как их начальные высоты.

- Потенциальная энергия обратно пропорциональна расстоянию между телами: $U \sim 1/r$. Такое взаимодействие соответствует притяжению двух масс или кулоновскому взаимодействию двух зарядов. Подставив $k = -1$ в (22), получим

$$\left(\frac{t'}{t}\right)^2 = \left(\frac{l'}{l}\right)^3,$$

  т.е. отношение квадратов времен обращения по геометрически подобным траекториям пропорционально отношению кубов их линейных размеров (третий закон Кеплера).

Таким образом, факт неизменности уравнений движения, соответствующих лагранжевым функциям, отличающимся на константу, при достаточно общем предположении об однородности потенциальной энергии допускает существование геометрически подобных траекторий с определенным отношением времен и линейных размеров (см.(22)), что в частных случаях, без интегрирования уравнений движения, приводит к интересным следствиям .

2. **Теорема вириала.** Будем по-прежнему считать потенциальную энергию системы однородной, степени k функцией декартовых координат. Кинетическая энергия – квадратичная функция скоростей, и согласно теореме Эйлера

$$\sum_a \vec{v}_a \frac{\partial T}{\partial \vec{v}_a} = 2T = \sum_a \vec{v}_a \cdot \vec{p}_a = \frac{d}{dt}\sum_a \vec{r}_a \cdot \vec{p}_a - \sum_a \vec{r}_a \cdot \dot{\vec{p}}_a =$$

$$\frac{d}{dt}\sum_a \vec{r}_a \cdot \vec{p}_a + \sum_a \vec{r}_a \cdot \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a},$$

откуда

$$2T = \frac{d}{dt}\sum_a \vec{r}_a \cdot \vec{p}_a + kU.$$

(Использованы определение импульса, явный вид уравнений движения, однородность потенциальной энергии.)

- **Справка.** *Средним по времени значением произвольной функции $f(t)$ назовем*

$$< f >= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t)dt.$$

Если $f(t) = (dF/dt)$ ($F(t)$ – произвольная, но ограниченная функция), то среднее по времени значение $f(t)$ обращается в нуль. Действительно,

$$< f >= \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{dF}{dt}dt = \lim_{\tau\to\infty} \frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = 0.$$

Предположим, что рассматриваемая механическая система движется с конечной скоростью в ограниченной области пространства, тогда после усреднения по времени имеем

$$2 < T > \;=\; k < U >,$$

что и составляет содержание **теоремы вириала** (вириал – от латинского "virium" – сила, мощь). Ввиду того, что $< E > \;=\; E$, легко получить

$$< T > \;=\; \frac{k}{k+2}E; \qquad < U > \;=\; \frac{2}{k+2}E.$$

В частности, для колебаний $k = 2$, $\langle T \rangle = \langle U \rangle$, а для ньютоновского притяжения $k = -1$ и $2 \langle T \rangle = -\langle U \rangle$, $\langle T \rangle = -E$. Последнее означает, что полная энергия в этом случае (а это движение в ограниченной области пространства) должна быть отрицательной. Итак, на основании теоремы вириала можно заключить: **в ньютоновском поле притяжения движение в ограниченной области пространства возможно только при отрицательной полной энергии.**

3. **Общие свойства одномерного движения.** Одномерным назовем движение механической системы с одной степенью свободы. Рассмотрим одномерное движение системы, которая замкнута или находится в постоянном внешнем поле. Функция Лагранжа такой системы в декартовых координатах имеет вид

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x).$$

Поскольку потенциальная энергия не зависит от времени явно, сохраняется полная энергия

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x),$$

которая к тому же является первым интегралом уравнений движения. Действительно, помножив обе стороны уравнений движения на $\dot{x}$, имеем

$$\dot{x} \cdot m\ddot{x} = \dot{x}\left(-\frac{\partial U}{\partial x}\right) \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x)\right) = 0,$$

следовательно, $E = const$ – первый интеграл уравнений движения, значение которого определяется начальными условиями $E = E_0$. Легко видеть, что

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(x))},$$

и поэтому

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E_0 - U(x)}} + t_0, \qquad t_0 = const. \tag{23}$$

Первое, что сразу бросается в глаза, - движение возможно только в тех промежутках оси x (**областях, допустимых для движения**), которые определяются неравенством $U(x) \le E_0$, а полученные как решения алгебраического уравнения $U(x) = E_0$ значения x являются **точками остановки** системы, т.к. скорость $\dot{x}$ обращается в этих точках в нуль. Если в области, допустимой для движения, алгебраическое уравнение $U(x) = E_0$ не имеет действительных корней или действительный корень только один x_1, то говорят, что **движение инфинитно** ($-\infty \le x \le +\infty$, или $-\infty \le x \le x_1$, или $x_1 \le x \le +\infty$); если же действительных корней два x_1, x_2, то говорят, что **движение финитно** ($x_1 \le x \le x_2$).

Покажем, что одномерное финитное движение имеет периодический характер.

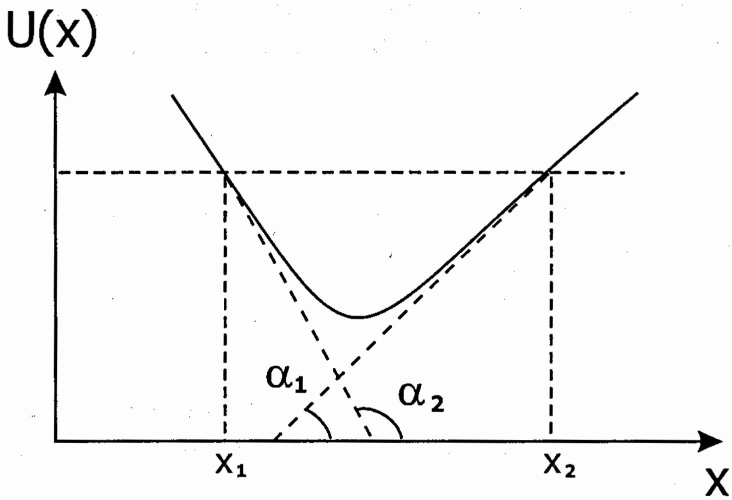

Рис. 4

Как видно из рис. 4, промежуток $x_1 \le x \le x_2$ является областью финитного движения. Тангенсы угла наклона касательных к кривой $U(x)$ в точках остановки x_1 и x_2 изображают силы, действующие на систему в этих точках. Эти силы имеют противоположные направления, поэтому после остановки системы в точке x_1 (x_2) действующая на нее отличная от нуля сила вынуждает ее двигаться в направлении x_2 (x_1), иначе говоря, система колеблется между x_1 и x_2. Из-за свойства обратимости движения время движения от x_1 до x_2 равно времени движения от x_2 до x_1, поэтому период колебаний в зависимости от энергии определяется выражением

$$T = \sqrt{2m} \int\limits_{x_1(E_0)}^{x_2(E_0)} \frac{dx}{\sqrt{E_0 - U(x)}}.$$

- **Замечание 1.** Описание движения систем с одной степенью свободы, которое мы определили как одномерное движение, в декартовых координатах возможно не всегда. Например, лагранжиан плоского математического маятника (материальная точка массой m, колеблющаяся на нити длиной l в поле тяжести) в декартовых координатах имеет вид

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy,$$

в то время как это движение с одной степенью свободы и удобной обобщенной координатой является угол отклонения нити маятника от вертикали φ. Заменив x и y согласно $x = l \cdot sin\varphi$, $y = l \cdot cos\varphi$, получим

$$L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mgl \cdot cos\varphi.$$

Таким образом, лагранжева функция одномерного движения в постоянном внешнем поле, вообще говоря, имеет вид

$$L = \frac{a(q)\dot{q}^2}{2} - U(q).$$

Подстановкой $x = \int \sqrt{a(q)}dq$ последнее выражение приводится к виду

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - U(x),$$

но коэффициент m уже не будет иметь смысла массы.

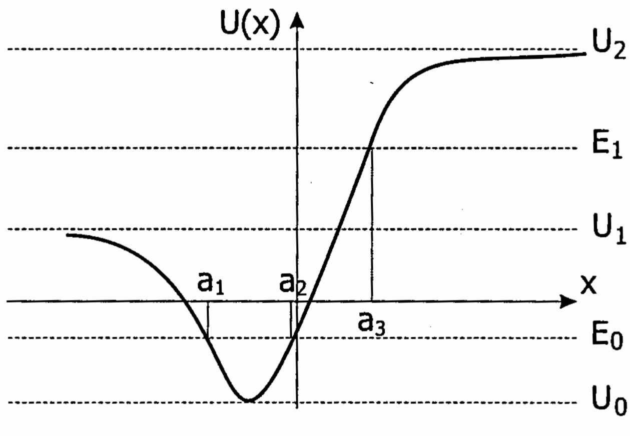

Рис. 5

4. **Движение в поле с потенциалом Эккарта.** Потенциал

$$U(x) = \frac{U_1 + U_2}{2} + \frac{U_2 - U_1}{2} th(kx) - \frac{U_0}{ch^2(kx)}$$

известен как потенциал Эккарта (рис. 5). Потенциальная энергия не зависит от времени, поэтому полная энергия E сохраняется. Если начальные условия таковы, что энергия $E_2 > U_2$, то движение инфинитно в обе стороны $(-\infty < x < +\infty)$; если $U_1 < E_1 < U_2$, то движение инфинитно $(-\infty < x < a_3)$ с одной точкой остановки a_3, которая определяется как корень алгебраического уравнения $U(x) = E_1$. При $U_0 < E_0 < U_1$ движение финитно $(a_1 \leq x \leq a_2)$ и имеет две точки остановки a_1 и a_2, которые являются корнями уравнения $U(x) = E_0$.

Рассмотрим движение в симметричной потенциальной яме $U_1 = U_2 = 0$ (рис. 6):

$$U(x) = -\frac{U_0}{ch^2(kx)},$$

для отрицательных энергий $E = -E_0$.

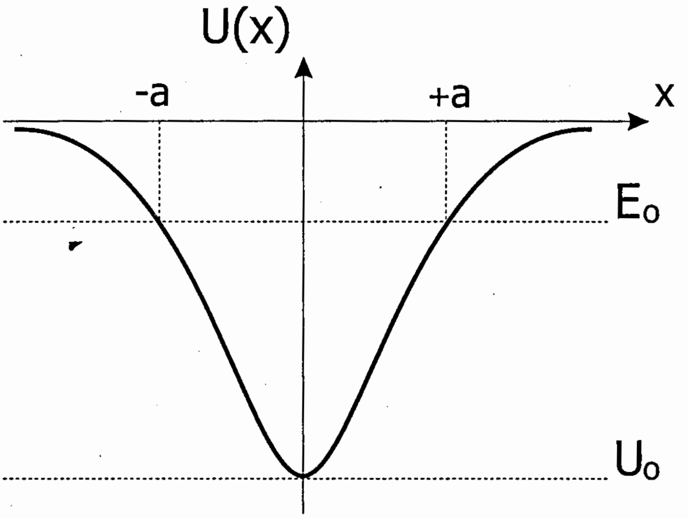

Рис. 6

Подставив $U(x)$ в известное общее выражение, получим

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E + U_0/ch^2(kx)}} = \frac{1}{\omega} \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}},$$

$$y^2 = \frac{E_0 sh^2(kx)}{U_0 - E_0}, \quad \omega = k\sqrt{\frac{2E_0}{m}}.$$

Результат интегрирования

$$sh(kx) = \sqrt{\frac{U_0 - E_0}{E_0}} sin\omega t$$

позволяет заключить, что частица в симметричной потенциальной яме с $U = -U_0/ch^2(kx)$ совершает нелинейные колебания с периодом $T = 2\pi/\omega$ в интервале $-a \leq x \leq +a$, причем $\pm a$ есть решения уравнения $ch^2(kx) = U_0/E_0$.

- Рассмотрим движение у дна ямы: $E = -U_0 + \epsilon$, считая $\epsilon \ll U_0$. Тогда из условия $E = -U_0/ch^2(kx)$ получим $kx \ll 1$, т.е. $U(x) = -U_0(1 - k^2x^2 + ...)$ и

  $$E \approx \frac{m\dot{x}^2}{2} - U_0(1 - k^2x^2).$$

  Дифференцируя последнее, получаем

  $$\ddot{x} + \frac{2U_0}{m}k^2x = 0, \quad x = Asin(\omega_0 t), \quad \omega_0 = k\sqrt{\frac{2U_0}{m}}.$$

  Выбирая начальные условия так, чтобы $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0$, окончательно имеем

  $$x = \frac{v_0}{\omega_0} sin(\omega_0 t).$$

  Частица совершает гармонические колебания.

- Рассмотрим движение над ямой $E_0 > 0$ с начальными условиями $x(0) = -L$, $\dot{x}(0) = v_0$. Найдем промежуток времени, в течение которого частица достигает точки $x = +L$. С этой целью введем

  $$y = \sqrt{\frac{E_0}{E_0 + U_0}} sh(kx), \quad y_0 = \sqrt{\frac{E_0}{E_0 + U_0}} sh(kL),$$

  что дает

  $$t = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{m}{2E_0}} \int\limits_{-y_0}^{+y_0} \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{m}{2E_0}} \cdot ln\frac{\sqrt{y_0^2+1}+y_0}{\sqrt{y_0^2+1}-y_0}.$$

При условии $kL \gg 1$

$$t \simeq \frac{1}{k}\sqrt{\frac{m}{2E_0}} \cdot ln4y_0^2 \simeq \frac{1}{k}\sqrt{\frac{m}{2E_0}} \cdot ln\frac{E_0}{E_0+U_0}exp(2kL) \simeq t_1 + t_2,$$

$$t_1 = 2L\sqrt{\frac{m}{2E_0}}, \qquad t_2 = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{m}{2E_0}} \cdot ln\frac{E_0}{E_0+U_0}.$$

Смысл полученного результата ясен: t_1 – время движения свободной (в отсутствие ямы) частицы от $-L$ до $+L$, а t_2 – изменение времени движения частицы, обусловленное наличием ямы ($t_2 < 0$).

IV. ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ДВИЖЕНИЯ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ. ЗАДАЧА КЕПЛЕРА

1. **Задача двух тел.** Рассмотрим движение замкнутой системы двух частиц. В классической механике предполагают, что энергия взаимодействия этих частиц может зависеть только от их взаимного расстояния, поэтому если $\vec{r}_1$ – радиус-вектор частицы массой m_1, а $\vec{r}_2$ – радиус-вектор частицы массой m_2, то

$$L = \frac{m_1\dot{r}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{r}_2^2}{2} - U(|\,\vec{r}_1 - \vec{r}_2\,|).$$

Перейдем к новым переменным, в качестве которых выберем вектор относительного расстояния между частицами $\vec{r}$ и радиус-вектор центра инерции $\vec{R}$:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad \vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2},$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}.$$

Функция Лагранжа в новых координатах перепишется в виде

$$L = \frac{\mu \cdot \dot{R}^2}{2} + \frac{m \cdot \dot{r}^2}{2} - U(r),$$

здесь $\mu = m_1 + m_2$ – суммарная масса частиц, а

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

– приведенная масса. Таким образом, в задаче двух тел удалось разделить трансляционные и внутренние переменные. Исключив трансляционные переменные, т.е. переменные, описывающие равномерное движение системы как целого, и выбирая начало координат в центре инерции ($\vec{R} = 0$), получим

$$L = \frac{m \cdot \dot{r}^2}{2} - U(r).$$

Поле, потенциальная энергия $U(r)$ которого зависит только от расстояния до начала координат r, назовем центральным. Очевидно, такое поле обладает сферической симметрией.

Итак, **если поместить начало координат в центре инерции и исключить тривиальное движение системы частиц как целого, то задача двух тел сводится к эквивалентной задаче о движении фиктивной частицы с приведенной массой m в центральном поле $U(r)$.**

После того как получено решение эквивалентной задачи $r(t)$, вышеприведенные формулы позволяют найти искомую зависимость r_1 и r_2 от времени.

2. **Общие свойства движения в центральном поле.** В предыдущем пункте специальным выбором начала координат задачу о движении двух тел удалось свести к эквивалентной задаче о движении частицы массой m в центральном поле – внешнем поле, потенциальная энергия которого зависит только от расстояния до центра. Рассмотрим общие свойства движения в таком поле.

   - **Сила в центральном поле**

   $$\vec{F} = -\frac{\partial U(r)}{\partial \vec{r}} = -gradU(r) = -\frac{dU}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

   - Выше доказывалось, что при движении в центральном поле, т.е. в поле со сферической симметрией относительно центра поля, сохраняется полный момент импульса (в будущем мы часто будем называть его просто моментом). Подтвердим это прямым вычислением:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r}, \vec{p}] = [\dot{\vec{r}}, m\vec{v}] + [\vec{r}, \dot{\vec{p}}] = -[\vec{r}, \frac{dU}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r}] = 0.$$

В центральном поле сохраняется вектор момента импульса.

- По определению момент есть векторное произведение радиуса-вектора и вектора импульса, которые поэтому перпендикулярны моменту. Сохранение момента означает, что как $\vec{r}$, так и $\vec{p}$ при движении не выходят за пределы плоскости, перпендикулярной направлению момента. Если выбрать ось z в направлении момента, то движение будет происходить в плоскости xy.

Движение в центральном поле плоское.

- В каких координатах описывать это плоское движение? В декартовых функция Лагранжа будет содержать обе (x, y) координаты и соответствующие им скорости: $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(\sqrt{x^2 + y^2})$, а в полярных

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r) \tag{24}$$

координата φ является циклической, что, как было показано, говорит о сохранении компоненты обобщенного импульса p_φ. Ясно поэтому, что **движение в центральном поле удобнее описывать в полярных координатах**. Обобщенный импульс

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = M_z = M = const \tag{25}$$

совпадает с сохраняющимся моментом.

- **Замечание 1.** Факт сохранения момента в центральном поле приводит к интересному следствию – второму закону Кеплера, который первоначально был установлен только для поля ньютоновского тяготения.

Введем понятие секторной скорости. Выражение

$$d\sigma = \frac{1}{2}r \cdot rd\varphi$$

представляет собой площадь сектора, образованного двумя бесконечно близкими радиусами-векторами и элементом дуги траектории. Скорость изменения этой площади со временем $\dot{\sigma}$ назовем **секторной скоростью**. Ясно, что $M = 2m\dot{\sigma} = const$, т.е. сохранение момента означает постоянство секторной скорости. Иначе говоря, **при движении в центральном поле радиус-вектор частицы за равные промежутки времени заметает равные площади – второй закон Кеплера.**

Вид функции Лагранжа (24) позволяет утверждать: полная энергия частицы, движущейся в центральном поле, сохраняется и является первым интегралом уравнений движения:

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{\text{эфф}}(r),$$

здесь

$$U_{\text{эфф}}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}.$$

Слагаемое, пропорциональное моменту, обычно называют **центробежной энергией**. Из формулы для энергии получаем

$$\frac{dr}{dt} \equiv \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U_{\text{эфф}}(r)]},$$

откуда следует, что радиальную часть движения в центральном поле можно рассматривать как одномерное движение в поле с "эффективной" потенциальной энергией $U_{\text{эфф}}(r)$, но при одном существенном отличии – координата r меняется в пределах $0 \leq r \leq \infty$, а не от минус до плюс бесконечности, как x в случае одномерного движения. Ясно также, что **границы области, допустимой для движения, есть действительные решения неравенства**

$$U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} \leq E.$$

Предыдущее позволяет достаточно просто получить уравнение

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{2[E - U(r)]/m - (M/mr)^2}} + t_0, \tag{26}$$

определяющее в неявном виде расстояние r движущейся точки от центра как функцию времени.

Перепишем формулу для момента (25) в виде $d\varphi = Mdt/mr^2$, подставив затем сюда dt из (26), получим

$$\varphi = \int \frac{Mdr/r^2}{\sqrt{2m[E - U(r)] - M^2/r^2}} + \varphi_0. \tag{27}$$

Формулы (26) и (27) в общем виде решают задачу о движении частицы в центральном поле. Уравнение (27) устанавливает связь между r и φ, т.е. является уравнением траектории. Важно заметить, что в отличие от r угол φ меняется со временем монотонно, так как из определяющей момент формулы (25) следует, что $\dot{\varphi} \sim M$ не меняет знак.

Если в области, допустимой для движения, уравнение

$$U_{\text{эфф}}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = E$$

не имеет действительных корней или имеет один корень r_{min}, то движение инфинитно ($0 \leq r \leq \infty$ или $r_{min} \leq r \leq \infty$ соответственно), а если действительных корней два, то движение финитно ($r_{min} \leq r \leq r_{max}$) и траектория целиком лежит внутри кольца, ограниченного окружностями с $r = r_{min}$ и $r = r_{max}$. В отличие от одномерного случая корни уравнения $U_{\text{эфф}}(r) = E$ являются точками поворота, а не точками остановки, т.к. если начальные условия дают для момента частицы отличное от нуля значение, то угловая скорость $\dot{\varphi} \neq 0$.

Итак, задача двух тел сводится к эквивалентной задаче о движении фиктивной частицы с приведенной массой

$$\mathbf{m = m_1 m_2/(m_1 + m_2)}$$

в поле эквивалентного одномерного потенциала

$$\mathbf{U_{\text{эфф}}(r) = U(r) + M^2/2mr^2}.$$

Для того чтобы получить полное решение этой задачи, необходимо вычислить интегралы

$$\mathbf{t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{эфф}}(r)}}}, \quad \varphi = \int \frac{\mathbf{Mdr/r^2}}{\sqrt{\mathbf{2m(E - U_{\text{эфф}}(r))}}}$$

для каждого конкретного потенциала силового поля U(r) и подставить в результат начальные условия.

- **Замечание 2. Формула Бине**. Следуя Бине, получим уравнение траектории частицы в центральном поле $U = U(r)$. Уравнения движения в полярных координатах (r, φ) записываются в виде

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = -\frac{dU}{dr}, \qquad \dot{\varphi} = \frac{M}{mr^2}.$$

Введем $v = 1/r$ и, используя уравнения движения, подсчитаем

$$\frac{dv}{d\varphi} = \frac{dv}{dt}\frac{dt}{d\varphi} = \frac{mr^2}{M}\frac{d}{dt}(1/r) = -\frac{m\dot{r}}{M},$$

а также

$$\frac{d^2v}{d\varphi^2} = -\frac{m\ddot{r}}{M}\frac{mr^2}{M} = \frac{mr^2}{M^2}\frac{dU}{dv}\frac{dv}{dr} - \frac{m^2r^3}{M^2}\frac{M^2}{m^2r^4}.$$

В результате получается **формула Бине**

$$\frac{d^2v}{d\varphi^2} + v = -\frac{m}{M^2}\frac{dU}{dv},$$

которая определяет траекторию движения частицы в центральном поле по заданной потенциальной энергии; если же уравнение орбиты известно (задано $r = r(\varphi)$), то формула Бине позволяет найти закон изменения силы $F = F(r)$. В частном случае ньютоновского притяжения $U = -\alpha/r = -\alpha v$ получим

$$\frac{d^2v}{d\varphi^2} + v = \frac{m\alpha}{M^2},$$

решение которого имеет вид

$$\frac{1}{r} = a \cdot cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{m\alpha}{M^2}.$$

Стоит обратить внимание на интересную аналогию – **уравнение траектории для переменной $v = 1/r$ в случае ньютоновского поля притяжения формально выглядит так же, как и уравнение, описывающее малые колебания частицы под действием постоянной внешней силы.**

- Покажем, что в центральном поле траектория частицы симметрична. Примем для определенности, что $\varphi_0 = 0$ и $\varphi > 0$, когда r меняется в пределах от r_{max} до r_{min} (в случае бесконечного верхнего предела r рассуждения будут такими же). В точке поворота подынтегральное выражение

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\pm\sqrt{2m[E-U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}}$$

вместе с φ меняет знак, а r начинает расти от r_{min} до r_{max}, принимая те же значения, что и до точки поворота. Таким образом, по обеим сторонам от луча, проведенного от центра поля через точку r_{min}, одним и тем же значениям r соответствуют одинаковые углы φ, отличающиеся знаком. А это означает, что **траектория частицы в центральном поле симметрична относительно луча, проведенного от центра поля через точку поворота.**

- Центробежная энергия при $r \mapsto 0$ обращается в бесконечность как $1/r^2$ и поэтому может оказаться непреодолимым барьером при движении частицы к центру поля, даже если это поле имеет характер притяжения. Рассмотрим, в каких случаях при отличном от нуля моменте падение в центр возможно. Заранее ясно, что это должны быть поля с потенциальной энергией, которая достаточно быстро стремится к $-\infty$ при $r \mapsto 0$. Из очевидного неравенства

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} > 0$$

или

$$r^2U(r) + \frac{M^2}{2m} < Er^2 \Longrightarrow r^2U(r)\,|_{r\to 0} < -M^2/2m$$

следует: **падение в центр возможно только для полей с $\mathbf{U \sim -1/r^n}$ при $\mathbf{n > 2}$ или с $\mathbf{U \sim -\alpha/r^2}$, где $\alpha > \frac{\mathbf{M^2}}{\mathbf{2m}}$,** если, конечно, $M \neq 0$.

3. **Потенциальная энергия взаимодействия однородного шара с частицей.** Однородность шара означает постоянство его плотности $\rho_0 = const$. Примем, что радиус шара равен R_0, тогда его масса $M_0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3\rho_0$, а потенциальная энергия взаимодействия с частицей массой m

$$U(r) = -Gm\int \frac{dM}{|\vec{r} - \vec{u}|}.$$

Здесь $dM = \rho_0 dV = \rho_0 u^2 du sin\theta d\theta d\varphi$, $\vec{u}$ – радиус-вектор точки dM, расположенной внутри шара (начало координат выбрано в центре шара), $\mid \vec{r} - \vec{u} \mid = \sqrt{r^2 + u^2 - 2rucos\theta}$, θ – угол между $\vec{r}$ – радиусом-вектором точки массой m и $\vec{u}$, φ – азимутальный угол. Подставив эти выражения в интеграл, получим

$$U(r) = -Gm\rho_0 2\pi \int_0^{R_0} u^2 du \int_0^{\pi} \frac{sin\theta d\theta}{\sqrt{r^2 + u^2 - 2rucos\theta}}.$$

Проинтегрируем по θ:

$$\int_0^{\pi} \frac{sin\theta d\theta}{\sqrt{r^2 + u^2 - 2rucos\theta}} = \frac{1}{2ru} \int_0^{\pi} \frac{d(r^2 + u^2 - 2rucos\theta)}{\sqrt{r^2 + u^2 - 2rucos\theta}} =$$

$$\frac{r + u - \mid r - u \mid}{ru}.$$

Теперь нетрудно подсчитать интеграл

$$U(r) = -Gm\rho_0 \frac{2\pi}{r} \int_0^{R_0} u(r + u - \mid r - u \mid) du,$$

если учесть, что

$$\text{при} \quad r > R_0, \quad u < r, \quad \mid r - u \mid = r - u \quad U(r) = -\frac{GmM_0}{r}.$$

С другой стороны, при $r < R_0$ в пределах $(0, r)$ $\quad u < r$, $\quad \mid r - u \mid = r - u$, а в промежутке (r, R_0) имеем $u > r$, $\quad \mid r - u \mid = -(r - u)$.

Тогда

$$U(r) = -\frac{2\pi Gm\rho_0}{r} \left(\int_0^r 2u^2 du + \int_r^{R_0} 2rudu \right) = -\frac{GmM_0}{2R_0} \left(3 - \frac{r^2}{R_0^2} \right).$$

$$U(r) = \begin{cases} -GmM_0/r, & r > R_0, \\ -(3 - r^2/R_0^2)\, GmM_0/2R_0, & r < R_0. \end{cases}$$

Вне шара результат совпадает с потенциалом взаимодействия двух точечных масс M_0 и m – вывод, впервые полученный Ньютоном. Иначе говоря, **гравитационное поле вне шара такое же, каким оно было бы, если бы вся его масса была сосредоточена в одной точке – центре шара**. Стоит обратить внимание на очевидное следствие этого факта: на расстояниях, много больших линейных размеров тела произвольной формы, его можно с большой точностью считать шаром со сферически-симметричным гравитационным полем, совпадающим с гравитационным полем точки в центре поля, в которой сосредоточена вся масса тела.

Найдем также собственную гравитационную энергию этого шара. Энергия взаимодействия шара радиуса $r < R_0$ и элемента массой $\rho_0 dV$, расположенного на поверхности шара, равна

$$dU = -\frac{G}{r}\left(\frac{4\pi\rho_0 r^3}{3}\right)\rho_0 r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi.$$

Следовательно,

$$U = -\frac{4\pi G}{3}\rho_0^2 \int_0^{R_0} r^4 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = -\frac{G}{3}(4\pi\rho_0^2)\frac{R_0^5}{5}.$$

Поскольку масса шара $M_0 = 4\pi\rho_0 R_0^3/3$, то для собственной энергии однородного шара с массой M_0 и радиусом R_0 получим

$$U = -\frac{3}{5}\frac{GM_0^2}{R_0}.$$

4. **Задача Кеплера**. Рассмотрим центральное поле, потенциальная энергия которого $U \sim 1/r$. Введем коэффициент пропорциональности $\alpha > 0$, тогда, как нетрудно убедиться, $U = -\alpha/r$ соответствует полю притяжения, а $U = \alpha/r$ – полю отталкивания. При $\alpha = Gm_1m_2$ поле U является полем ньютоновского притяжения, а при $\alpha = e_1e_2$ – кулоновского притяжения или отталкивания.

   - **Замечание 3. Вектор Лапласа – Рунге – Ленца**. В задаче Кеплера с $U = -\alpha/r$ благодаря сохранению момента импульса $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}] = m[\vec{r}, \dot{\vec{r}}]$ движение плоское, т.е. можно положить $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Сила, действующая на частицу массой m, есть $-(\alpha/r^3)\vec{r}$, а уравнение движения имеет вид

     $$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\alpha}{r^3}\vec{r}, \qquad \vec{r} = \vec{i}\cdot x + \vec{j}\cdot y.$$

     Используя это уравнение и выражение момента M, подсчитаем производную по времени от $[\dot{\vec{r}}, \vec{M}]$:

     $$\frac{d}{dt}[\dot{\vec{r}}, \vec{M}] = -\frac{\alpha}{mr^3}[\vec{r}, \vec{M}] = -\frac{\alpha}{r^3}(\vec{r}(r\dot{r}) - \dot{\vec{r}}r^2) = \frac{d}{dt}\frac{\alpha\vec{r}}{r},$$

откуда следует, что вектор

$$\vec{\varepsilon} = \frac{1}{\alpha}[\dot{\vec{r}}, \vec{M}] - \vec{r}/r$$

является интегралом движения в поле $U \sim 1/r$.

Этот сохраняющийся вектор (иногда его называют **интегралом Лапласа - Рунге - Ленца**) был обнаружен Лапласом и независимо Рунге и Ленцом. Его существование есть проявление так называемой скрытой симметрии, специфичной для поля $U \sim 1/r$. Эту симметрию называют скрытой, поскольку по виду функции Лагранжа задачи невозможно установить преобразование симметрии, обуславливающее сохранение вектора Лапласа - Рунге - Ленца, тогда как сохранение энергии и момента импульса в этом поле связано с легко обнаруживаемой симметрией лагранжиана относительно трансляций времени и ортогональных преобразований, описывающих вращение координат. (В. А. Фок показал, что скрытая симметрия обусловлена явной симметрией взаимодействия $U = -\alpha/r$ в 4-мерном импульсном пространстве.)

Найдем величину вектора Лапласа - Рунге - Ленца, предварительно заметив, что он расположен в плоскости движения ($\vec{\varepsilon}\vec{M} = 0$):

$$\varepsilon^2 = \frac{\dot{r}^2 M^2}{\alpha^2} - \frac{2\vec{r}}{\alpha r}[\dot{\vec{r}}, \vec{M}] + 1 = 1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}, \qquad E = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{\alpha}{r}.$$

Итак, векторы $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{r} = \vec{i} \cdot x + \vec{j} \cdot y$ лежат в одной плоскости, перпендикулярной $\vec{M}$, а их скалярное произведение

$$\vec{\varepsilon}\vec{r} = \frac{\vec{r}[\dot{\vec{r}}, \vec{M}]}{\alpha} - r = \frac{M^2}{\alpha m} - r = \varepsilon r \cdot cos\varphi.$$

Поэтому

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot cos\varphi}, \qquad p = \frac{M^2}{\alpha m}, \qquad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}.$$

Таким образом, используя специфичный для кеплеровой задачи интеграл движения – вектор Лапласа - Рунге - Ленца, удалось получить уравнение траектории частицы в виде уравнения конических сечений с эксцентриситетом ε и параметром p без интегрирования уравнений движения.

Перейдем к более подробному рассмотрению движения в поле притяжения $U = -\alpha/r$. Эффективная потенциальная энергия

$$U_{\text{эфф}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$

изображена кривой на рис. 7.

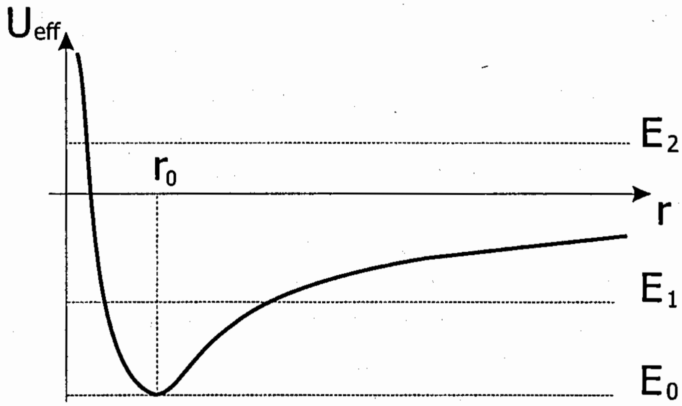

Рис. 7

Нетрудно заметить, что движение будет финитным при отрицательных значениях полной энергии $E < 0$ в полном соответствии с выводом, полученным как следствие теоремы вириала. Более того, ясно, что при $E_0 = (U_{\text{эфф}})_{min}$ частица при движении остается на неизменном от центра расстоянии $r_0 = M^2/\alpha m$. Другими словами, при энергии $E_0 = -m\alpha^2/2M^2$ движение частицы происходит по окружности радиуса r_0. Частица с энергиями E, удовлетворяющими неравенству $E_0 < E < 0$, движется в ограниченной значениями r_{min} и r_{max} области. При энергиях $E \geq 0$ движение инфинитно, а из-за барьера, обусловленного центробежной энергией $(M \neq 0)$, невозможно падение в центр.

Подставив в определяющую траекторию движения общую формулу (27) $U = -\alpha/r$, получим

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{M dr/r^2}{\sqrt{2m(E + \alpha/r) - (M/r)^2}}$$

$$= -\int \frac{d(M/r)}{\sqrt{2mE + (2m\alpha/M)(M/r) - (M/r)^2}}$$

$$= \int \frac{d(m\alpha/M - M/r)}{\sqrt{2mE + (m\alpha/M)^2 - (m\alpha/M - M/r)^2}}$$

$$= arccos\frac{M/r - m\alpha/M}{\sqrt{2mE + (m\alpha/M)^2}}.$$

Итак, **траектория движения частицы в поле притяжения** $U = -\alpha/r$ **определяется формулой**

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cdot cos(\varphi - \varphi_0), \qquad p = \frac{M^2}{m\alpha}, \qquad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}. \qquad (28)$$

Напомним, что, используя интеграл движения Лапласа – Рунге – Ленца, мы получили такой же результат без интегрирования уравнений движения. Уравнение (28) известно как уравнение конических сечений с фокусом в начале координат, параметром p и эксцентриситетом ε. В эквивалентной задаче двух тел орбита каждой из частиц также будет коническим сечением с фокусом в их общем центре инерции.

Уравнение (28) при разных начальных условиях приводит к разным траекториям. Так, при $E = E_0 = -m\alpha^2/2M^2$ $(\varepsilon = 0)$ траекторией движения частицы будет **окружность** с радиусом $r_0 = p = M^2/m\alpha$ (сравните с результатом, полученным качественно по графику эффективной потенциальной энергии). Если $E_0 < E < 0$, то $\varepsilon < 1$ и траектория – **эллипс**. При $E = 0$ имеем $\varepsilon = 1$, что соответствует **параболе**. В зависимости от направления скорости частица с $E = 0$ по параболе приближается к центру до расстояний $r = r_{min}$, а затем уходит на бесконечность или, при другом направлении скорости, не приближаясь к центру, сразу уходит на бесконечность. И, наконец, при $E > 0$ получаем $\varepsilon > 1$ и траектория частицы – **гипербола**.

Большая и малая полуоси эллипса определяются известными формулами аналитической геометрии

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{\alpha}{2 \mid E \mid}, \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m \mid E \mid}}.$$

Из уравнения (28) легко найти наименьшее и наибольшее удаление частицы от центра. Величина r_{min} определится формулой (28) при $\varphi - \varphi_0 = 0$, а для того, чтобы получить r_{max}, надо принять $\varphi - \varphi_0 = \pi$. Таким образом,

$$r_{min} = \frac{p}{1 + \varepsilon} = a(1 - \varepsilon), \qquad r_{max} = \frac{p}{1 - \varepsilon} = a(1 + \varepsilon).$$

Разумеется, если искать действительные корни алгебраического уравнения $E = U_{эфф}(r)$ в допустимой для движения области, то будет получен такой же результат.

Достаточно просто получить период обращения тела по эллиптической орбите. Проинтегрировав с этой целью выражение $M = 2m\dot{\sigma}$ по времени от 0 до T, имеем $MT = 2m\sigma$, где $\sigma = \pi ab$ - площадь эллипса, и, используя далее выражения для полуосей эллипса, получим закон Кеплера

$$T = 2\pi a^{3/2}\sqrt{m/\alpha}.$$

При движении с $E > 0, \varepsilon > 1$ гипербола огибает центр поля, в котором находится фокус, $r_{min} = p/(\varepsilon + 1) = a(\varepsilon - 1) = \alpha(\varepsilon - 1)/2E$. При движении по параболе ($E = 0, \varepsilon = 1$) минимальное расстояние от центра $r_{min} = p/2$.

Обратимся к случаю поля отталкивания $U = \alpha/r$. Финитное движение в поле отталкивания невозможно, т.к. функция $U_{эфф}(r) = \alpha/r + M^2/2mr^2$, монотонно убывая от бесконечности до нуля, не имеет минимума. Повторяя все выкладки предыдущего случая, для траектории движения в поле отталкивания получим

$$\frac{p}{r} = -1 + \varepsilon cos\varphi,$$

параметр p и эксцентриситет ε траектории определяются прежними формулами. Ввиду того, что допустимой для движения областью является $E \geq U_{эфф}(r) > 0$, **в поле отталкивания единственно возможная орбита – гипербола**, фокус которой (центр поля) расположен во внешней по отношению к гиперболе области, на расстоянии $r_{min} = p/(\varepsilon - 1) = a(\varepsilon + 1)$.

V. РАСПАД И РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЦ. ФОРМУЛА РЕЗЕРФОРДА

Рассмотрим замкнутую систему двух частиц, и пусть в бесконечно далекий момент времени $t_- = -\infty$ частицы свободны и каждая из них движется с постоянным импульсом p_1 и p_2. Другими словами, начальные условия приписывают находящимся достаточно далеко друг от друга частицам постоянные импульсы p_1 и p_2 в далеком прошлом. Допустим далее, что происходит сближение частиц и начиная с какого-то расстояния существенным становится взаимодействие между ними, однако спустя конечное время они опять расходятся на сколь угодно большое расстояние, так что при $t_+ = +\infty$ частицы вновь становятся свободными. Ясно, что искомая асимптотика в $t_+ = +\infty$ несет на себе отпечаток закона взаимодействия. Мы не случайно сосредоточили внимание на асимптотике, а не на деталях, связанных с взаимодействием. Дело в том, что экспериментальные средства для выяснения этих деталей весьма скудны или их попросту нет, поэтому задача о рассеянии является одной из центральных в физике элементарных частиц, атомной и ядерной физике. Конечно, если рассматриваются частицы, для которых существенны квантовые эффекты, то можно ожидать, что результаты классического рассмотрения будут весьма и весьма приближенными и даже неверными. Тем не менее некоторые классические положения остаются верными для микрообъектов и могут служить в качестве хорошего приближения.

При рассмотрении задач о столкновениях и рассеянии частиц приходится пользоваться двумя системами отсчета – удобной для теоретических расчетов системой **центра инерции (ц-системой)**, начало которой совмещено с центром инерции частиц, а также **лабораторной системой отсчета (л-системой)**, в которой задаются асимптотические начальные импульсы частиц (чаще всего одну из них – мишень – считают неподвижной) и ищутся конечные асимптотические значения импульсов.

Уместно заметить, что существенно важные заключения о свойствах различных физических процессов можно получить, используя законы сохранения импульса и энергии. Причем эти заключения совершенно не зависят от конкретного рода взаимодействия между участвующими в процессе частицами. Таким образом, законы сохранения могут оказаться источником ценной информации при решении задач о столкновении и рассеянии частиц. Приведем два примера.

1. **Распад частиц.** Рассмотрим "самопроизвольный" (без внешних воздействий) распад частицы на две "дочерние", движущиеся после распада независимо друг от друга. В ц-системе, в которой этот распад выглядит наиболее просто, частица до распада покоится и образовавшиеся частицы, в силу закона сохранения импульса, разлетаются с равными и противоположно направленными импульсами. Обозначим абсолютное значение импульса одной из распадных частиц p_0, тогда из закона сохранения энергии

$$E_{\text{вн}} = E_{1\text{вн}} + \frac{p_0^2}{2m_1} + E_{2\text{вн}} + \frac{p_0^2}{2m_2}.$$

Здесь $E_{вн}$ – внутренняя энергия распадной частицы, $E_{1вн}$ и $E_{2вн}$ – внутренние энергии образовавшихся частиц, а m_1 и m_2 – их массы. Введем понятие энергии распада

$$\varepsilon \equiv E_{вн} - (E_{1вн} + E_{2вн}) \implies \varepsilon = \frac{p_0^2}{2m}\,, \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\,,$$

а скорости частиц в ц-системе $v_{10} = p_0/m_1$, $v_{20} = p_0/m_2$.

Перейдем теперь в л-систему, в которой первичная частица движется до распада со скоростью V. Рассмотрим одну из дочерних частиц, и пусть v – ее скорость в л-системе, а v_0 – в ц-системе. Очевидно, $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{V}$, откуда

$$v^2 + V^2 - 2vV cos\theta = v_0^2,$$

где θ - угол вылета дочерней частицы по отношению к направлению движения л-системы (направлению движения материнской частицы).

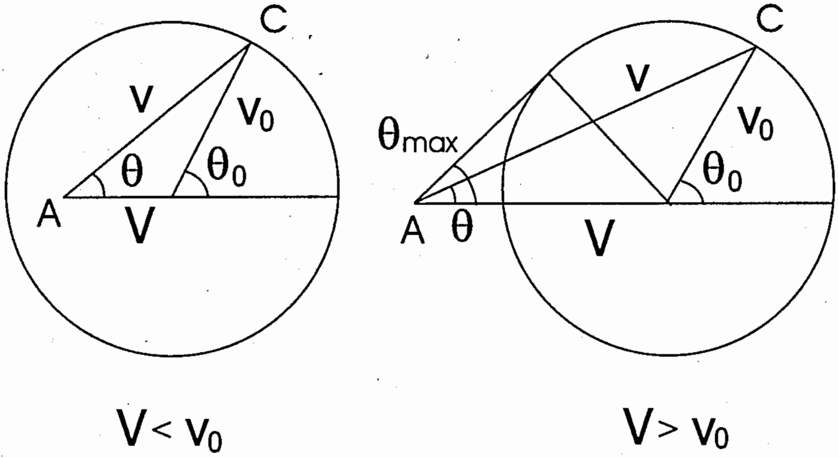

Рис. 8

Представим эту зависимость графически, для чего построим окружность радиуса v_0, тогда v дается вектором, проведенным в какую-либо точку окружности из точки A, отстоящей на расстоянии V от центра окружности (см. рис. 8). Может представиться два случая: $V < v_0$ (точка A внутри окружности) и $V > v_0$ (точка A вне окружности). Во втором случае дочерняя частица может вылететь только вперед под углом, не превышающим значения θ_{max} из

$$sin\theta_{max} = v_0/V.$$

Связь между углами вылета θ и θ_0 в л- и ц-системах, как это видно из рис. 8, есть

$$tg\theta = \frac{v_0 sin\theta_0}{v_0 cos\theta_0 + V} \Longrightarrow cos\theta_0 = -\frac{V}{v_0} sin^2\theta \pm cos\theta\sqrt{1 - V^2 sin^2\theta / v_0^2}.$$

При $v_0 < V$ связь между θ и θ_0 однозначна (см. рис. 8) и в последней формуле надо выбрать знак плюс перед корнем, чтобы при $\theta_0 = 0$ и $\theta = 0$.

2. **Упругие столкновения частиц.** Столкновение частиц назовем **упругим**, если оно происходит без изменения их внутреннего состояния. Иначе говоря, если рассматриваются упругие столкновения, то, используя закон сохранения энергии, мы можем не учитывать внутреннюю энергию частиц. Скорости частиц до столкновения в ц-системе связаны с относительной скоростью $v = \mid \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \mid$ в л-системе следующими известными соотношениями:

$$\vec{v}_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}, \qquad \vec{v}_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}.$$

После рассеяния закон сохранения импульса предписывает частицам равные по величине и противоположные по направлению импульсы, а в силу закона сохранения энергии остаются неизменными их абсолютные величины. Таким образом, в ц-системе результат столкновения сводится к повороту скоростей обеих частиц, которые остаются неизменными по величине, но противоположными по направлению (см. рис. 9):

$$\acute{\vec{v}}_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v\vec{n}_0, \qquad \acute{\vec{v}}_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v\vec{n}_0,$$

здесь $\vec{n}_0$ – единичный вектор в направлении скорости частицы m_1 после столкновения.

Для перехода к л-системе надо добавить к этим выражениям скорость $\vec{V}$ центра инерции, что для скоростей частиц в л-системе после столкновения дает

$$\acute{\vec{v}}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v\vec{n}_0 + \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2},$$

$$\acute{\vec{v}}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v\vec{n}_0 + \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

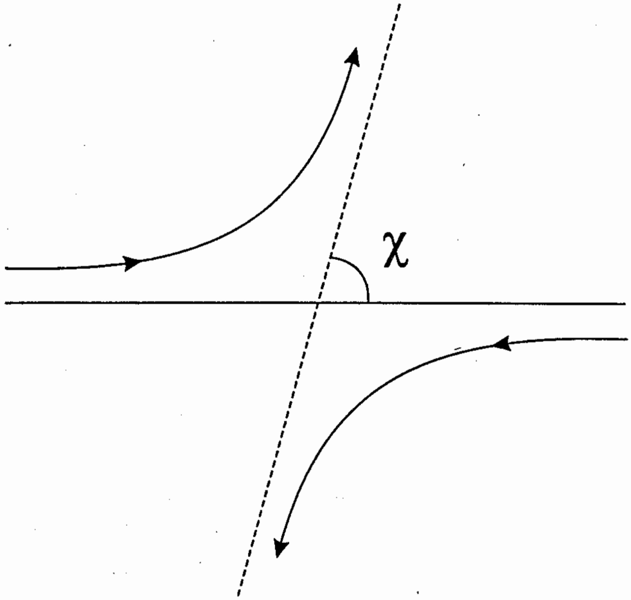

Рис. 9

Сведения, которые можно было получить из одних только законов сохранения, исчерпываются этими соотношениями. Заметим, что направление единичного вектора $\vec{n}_0$ зависит от закона взаимодействия частиц и их взаимного расположения во время столкновения.

Для того чтобы интерпретировать полученные результаты геометрически, перейдем от скоростей к импульсам, помножив с этой целью $\acute{\vec{v}}_1$ на m_1, а $\acute{\vec{v}}_2$ на m_2, получим

$$\acute{\vec{p}}_1 = mv\vec{n}_0 + \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2),$$

$$\acute{\vec{p}}_2 = -mv\vec{n}_0 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2).$$

Построим окружность радиуса $mv = OC$, направив по $\vec{OC}$ единичный вектор $\vec{n}_0$. Если взять $\vec{AO} = \frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$ и $\vec{OB} = \frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$ (см. рис. 10), то $\vec{AC}$ и $\vec{CB}$ дают импульсы $\acute{\vec{p}}_1$ и $\acute{\vec{p}}_2$. Рассмотрим подробно случай, когда одна из частиц (пусть это будет m_2) покоится. Тогда $OB = mv = OC$, а $\vec{AB} = \vec{p}_1$. Точка А может находиться как внутри ($m_1 < m_2$), так и вне ($m_1 > m_2$) окружности. Углы θ_1 и θ_2 есть углы отклонения частиц после столкновения по отношению к направлению $\vec{p}_1$, а угол χ (задающий направление $\vec{n}_0$) представляет

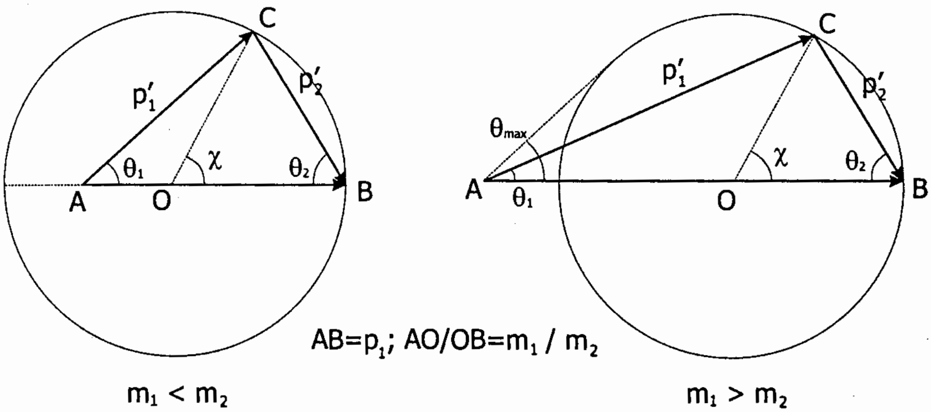

Рис. 10

собой угол поворота первой частицы в ц-системе. Очевидно,

$$tg\theta_1 = \frac{m_2 sin\chi}{m_1 + m_2 cos\chi}, \qquad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}.$$

После столкновения частицы разлетаются под углом $\theta_1 + \theta_2$, причем при $m_1 < m_2$ имеем $\theta_1 + \theta_2 > \frac{\pi}{2}$, а при $m_1 > m_2$ получаем $\theta_1 + \theta_2 < \frac{\pi}{2}$. При $m_1 < m_2$ скорость первой частицы после столкновения может иметь любое направление. Если же $m_1 > m_2$, то угол отклонения налетающей частицы не может превышать некоторого максимального значения (см. рис. 10):

$$\theta_{1max} = arcsin\frac{m_2}{m_1}.$$

Используя теорему косинусов, можно без труда получить формулы, определяющие абсолютные величины скоростей обеих частиц после столкновения через относительную скорость и угол χ, величина которого зависит от закона взаимодействия сталкивающихся частиц:

$$\acute{v}_1 = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 cos\chi}}{m_1 + m_2} v, \qquad \acute{v}_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} sin\frac{\chi}{2}.$$

Рассмотрим два частных случая.

- "Лобовой" удар – после столкновения обе частицы движутся по одной прямой ($\chi = \pi$). В этом случае скорости частиц после столкновения равны

$$\acute{v}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v, \qquad \acute{v}_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v.$$

Значение $\acute{v}_2$ при этом наибольшее возможное, и в результате столкновения первоначально покоящаяся частица получает максимальную (по сравнению с другими случаями) энергию

$$\acute{E}_2^{max} = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}E_1, \qquad E_1 = \frac{m_1v_1^2}{2},$$

здесь E_1 – первоначальная энергия налетающей частицы.

$$sin\theta_1^{max} = \frac{m_2}{m_1}.$$

- "Бильярд" – массы сталкивающихся частиц одинаковы, одна из них первоначально покоится. В этом случае

$$\theta_1 = \frac{\chi}{2}, \qquad \theta_2 = \frac{\pi-\chi}{2}, \qquad \acute{v}_1 = vcos\frac{\chi}{2}, \qquad \acute{v}_1 = vsin\frac{\chi}{2}.$$

Отметим, что после столкновения частицы разлетаются под прямым углом друг к другу.

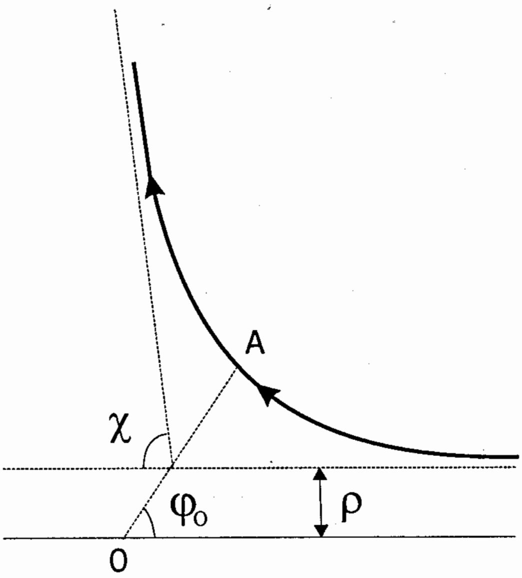

Рис. 11

3. **Рассеяние частиц.** Результат столкновения двух частиц может быть определен полностью лишь после решения уравнений движения с конкретным законом взаимодействия. Рассмотрим эквивалентную задачу отклонения частицы с приведенной массой m в поле

$U(r)$ неподвижного силового центра, расположенного в центре инерции частиц. Траектория частицы в центральном поле симметрична относительно прямой, проведенной в ближайшую к силовому центру точку орбиты. Поэтому обе асимптоты траектории пересекают указанную прямую под одинаковыми углами ϕ_0. Тогда, как видно из рис. 11, угол отклонения частицы при ее пролете мимо центра есть

$$\chi = |\, \pi - 2\phi_0 \,| \,.$$

Угол ϕ_0 определяется, как известно, формулой

$$\phi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{M dr/r^2}{\sqrt{2m[E - U(r)] - M^2/r^2}}.$$

Здесь r_{min} – расстояние, определяющее ближайшее к центру положение частицы, оно и является корнем подрадикального выражения.

При инфинитном движении, которое мы сейчас рассматриваем, существуют комбинации динамических переменных, которые выносятся на асимптотику законами сохранения. Это скорость в бесконечности v_∞ и так называемое прицельное расстояние ρ – длина перпендикуляра, опущенного из центра на направление v_∞, т.е. расстояние, на котором частица прошла бы мимо центра, если бы силовое поле отсутствовало. Очевидно,

$$M = \rho m v_\infty, \qquad E = \frac{m v_\infty^2}{2}.$$

Перепишем ϕ_0, используя эти выражения энергии и момента импульса:

$$\phi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho dr/r^2}{\sqrt{1 - \rho^2/r^2 - 2U/m v_\infty^2}}.$$

Прицельное расстояние отдельной частицы ρ невозможно измерить на опыте. Поэтому обычно переходят от характеристик индивидуального акта рассеяния к статистическим характеристикам, а именно от рассмотрения задач с точно заданным прицельным расстоянием к рассмотрению совокупности задач, в которых прицельное расстояние распределено по некоторому закону. Конкретнее: рассмотрим монохроматический и однородный пучок частиц, т.е. пучок, частицы которого имеют одинаковые по величине и направлению скорости (монохроматичность). Кроме того, одинаково число частиц, проходящих через любую единичную площадку, перпендикулярную пучку, в единицу времени, которое называют **интенсивностью пучка** $n = const$ (однородность).

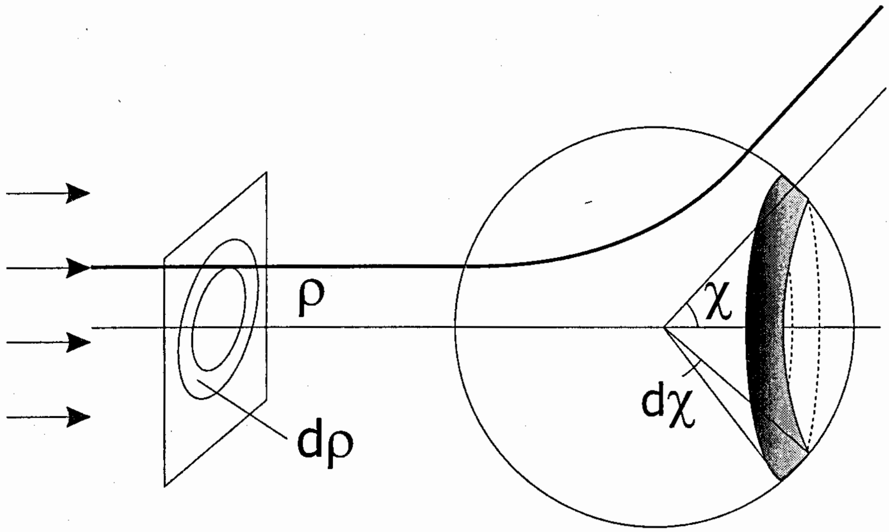

Рис. 12

Все частицы, рассеивающиеся в кольцо $2\pi\rho d\rho$, (см.рис. 12) число которых есть $dN = 2\pi\rho d\rho \cdot n$, обладают в силу монохроматичности пучка одинаковой скоростью v_∞ и почти одинаковыми прицельными расстояниями (в интервале от ρ до $\rho + d\rho$), т.е. они обладают одинаковыми энергиями и почти одинаковыми моментами и поэтому должны отклоняться на почти одинаковые углы (в интервале от χ до $\chi+d\chi$). Понятно поэтому, что рассеяние удобно характеризовать величиной

$$d\sigma = \frac{dN}{n} = 2\pi\rho d\rho,$$

которую назовем **эффективным сечением рассеяния** частиц в интервал от χ до $\chi+d\chi$ (или в интервал от ρ до $\rho+d\rho$). Эффективное сечение рассеяния имеет размерность площади и всецело определяется видом рассеивающего поля. Для того чтобы найти зависимость эффективного сечения от угла рассеяния χ, достаточно переписать предыдущее выражение в виде

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi)\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right|d\chi.$$

Знак модуля нам понадобился ввиду того, что по смыслу эффективное сечение рассеяния – положительная величина, а $\rho(\chi)$ – убывающая функция: чем больше прицельное расстояние, тем меньше угол рассеяния. Иногда сечение рассеяния относят не к $d\chi$, а к элементу телесного угла. Телесный угол между конусами с углами раствора χ и $\chi + d\chi$ есть $d\Omega = 2\pi sin\chi d\chi$, поэтому

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{sin\chi}\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right| d\Omega.$$

Полученные формулы определяют сечение рассеяния в зависимости от угла рассеяния в системе центра инерции. Для того чтобы получить аналогичные формулы в лабораторной системе, надо выразить χ через угол рассеяния в лабораторной системе θ. При этом получатся выражения как для сечения рассеяния падающего пучка (χ выражено через θ_1), так и для первоначально покоящихся частиц (χ выражено через θ_2).

4. **Формула Резерфорда.** Найдем сечение рассеяния для кулоновского поля, т.е. подставим в формулу, определяющую ϕ_0, $U = \alpha/r$:

$$\phi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho dr/r^2}{\sqrt{1 - \rho^2/r^2 - 2\alpha/mv_\infty^2 r}}.$$

Интегрирование элементарно, и, учитывая, что r_{min} – корень выражения под радикалом, получим

$$\cos\phi_0 = \frac{\alpha/mv_\infty^2\rho}{\sqrt{1 + (\alpha/mv_\infty^2\rho)^2}},$$

откуда

$$\rho^2 = (\alpha/mv_\infty^2)^2 tg^2\phi_0 \Longrightarrow \rho^2 = (\alpha/mv_\infty^2)^2 ctg^2\frac{\chi}{2}.$$

Дифференцируя последнее выражение по χ, найдем

$$d\sigma = \pi(\alpha/mv_\infty^2)^2 \frac{cos\frac{\chi}{2}}{sin^2\frac{\chi}{2}} d\chi = (\alpha/2mv_\infty^2)^2 \frac{d\Omega}{sin^4\frac{\chi}{2}}.$$

Получена формула, известная как **формула Резерфорда**. Заметим, что эффективное сечение не зависит от знака α, т.е. результат в равной мере относится к кулоновским полям притяжения и отталкивания, как и должно было быть, т.к. эффективное сечение не может зависеть от того, в какую сторону отклоняются частицы, но зависит от того, как они отклоняются (имеется в виду зависимость $U \sim 1/r$). Формула Резерфорда получена в системе центра инерции, и, разумеется, ее можно преобразовать к лабораторной системе, однако это связано с довольно громоздкими вычислениями, поэтому ограничимся тем, что имеем.

VI. ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ

В предыдущем изложении рассматривались уравнения Лагранжа и ряд их приложений – мы работали в рамках так называемого лагранжева формализма. Состояние механической системы с s степенями свободы в лагранжевом формализме описывается заданием $2s$ независимых величин – s обобщенных координат и s обобщенных скоростей. Состояние механической системы в формализме, который принято называть гамильтоновым, задают s обобщенных координат и s обобщенных импульсов. Каждый из этих подходов имеет свои преимущества и недостатки, но важно отметить, что гамильтонов формализм глубже проникает в суть теории, однако из-за выделенной роли времени наталкивается на трудности в релятивистском случае.

1. **Канонические уравнения Гамильтона.** Перейдем от набора "лагранжевых" переменных $q_i, \dot{q}_i$ к набору "гамильтоновых" переменных $q_i, p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$. Обычно для этого используют прием, который называют преобразованием Лежандра. Продемонстрируем, как это делается, а затем дадим определение преобразований Лежандра. Для полного дифференциала функции Лагранжа $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$, учитывая определение импульса $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$, а также лагранжевы уравнения движения, имеем

$$dL = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt = \sum_i (p_i d\dot{q}_i + \dot{p}_i dq_i) + \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Поскольку

$$d(p_i \dot{q}_i) = p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i,$$

то

$$d(L - \sum_i p_i \dot{q}_i) = \sum_i (-\dot{q}_i dp_i + \dot{p}_i dq_i) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

или

$$d\Big(\sum_i \dot q_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - L\Big) = \sum_i (-\dot p_i dq_i + \dot q_i dp_i) - \frac{\partial L}{\partial t}dt.$$

Введем

$$H = H(q_i, p_i, t) = \sum_i \dot q_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - L.$$

Функция $H(q_i, p_i, t)$ называется **функцией Гамильтона или гамильтонианом**. Ясно, что

$$dH = \sum_i \Big(\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i\Big) + \frac{\partial H}{\partial t}dt = \sum_i (-\dot p_i dq_i + \dot q_i dp_i) - \frac{\partial L}{\partial t}dt.$$

Сравнивая, получаем

$$\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

– **канонические уравнения Гамильтона** – систему $2s$ дифференциальных уравнений первого порядка, которая позволяет по заданному в какой-либо момент времени состоянию механической системы предсказать ее состояние в любой другой момент и тем самым решить основную задачу механики.

Найдем полную производную по времени от функции Гамильтона:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_i \Big(\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot p_i\Big).$$

После подстановки уравнений движения получим

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Определение функции Гамильтона и последнее соотношение позволяют заключить, что для изолированной системы или системы, находящейся в не зависящем от времени внешнем поле, гамильтониан совпадает с полной энергией системы.

- **Примечание.** Функцию Гамильтона составляют согласно следующему алгоритму: по функции Лагранжа $L = L(q_i, \dot q_i, t)$ строят $H = \sum_i \dot q_i \cdot \partial L/\partial \dot q_i - L$, затем в этом выражении все $\dot q_i$ заменяют на p_i, используя связь $p_i = \sum_i \partial L/\partial \dot q_i$. Это возможно лишь для невырожденных механических систем, т.е. для систем с не равным нулю определителем Гессе (гессианом) $det(\partial^2 L/\partial \dot q_i \partial \dot q_k) \neq 0$. Получившаяся в результате функция $H = H(q_i, p_i, t)$ есть гамильтониан системы.

• **Справка. Преобразование Лежандра.** *Рассмотрим функцию $f = f(u)$, полагая ее выпуклой ($d^2f/du^2 > 0$). Допустим, возникла необходимость перейти к другой независимой переменной v, такой, что $v = df/du$. Как, используя $f = f(u)$, построить такую функцию $F = F(v)$, чтобы ее полный дифференциал был пропорционален dv? Ответ на этот вопрос дает преобразование Лежандра.*

Назовем преобразованием Лежандра функции $f(u)$ такую функцию $F(v)$, которая является огибающей семейства

$$\varphi(v, u) = uv - f(u).$$

Уравнение огибающей имеет вид $F(v) = \varphi(v, u(v))$, а функция $u(v)$ определяется из $v = df/du$. Функцию $f(u)$ называют производящей функцией (или генератором) преобразования Лежандра. *Преобразование Лежандра обычно выполняют в дифференциальной форме:*

$$df(u) = \frac{df}{du} \cdot du = vdu = d(uv) - udv \Longrightarrow dF = d(uv - f) = udv.$$

Пример. *Найдем преобразование Лежандра, генератором которого является лагранжиан свободной релятивистской частицы*

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Преобразование Лежандра является огибающей семейства

$$\varphi(p, v) = pv - L(v),$$

а уравнение этой огибающей

$$H(p) = v \cdot \partial L/\partial v - L.$$

По определению $p = \partial L/\partial v = mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, следовательно,

$$v = pc/\sqrt{m^2c^2 + p^2}, \quad \text{т.е.} \quad H = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}.$$

Таким образом, $H(p)$, с одной стороны, – гамильтониан свободной релятивистской частицы, а с другой – преобразование Лежандра, генератором которого является лагранжиан.

Канонические уравнения Гамильтона особенно удобны при исследовании систем, содержащих циклические координаты. Напомним, что циклической называется координата, которая хотя и необходима для определения положения системы в пространстве, но в лагранжиане не содержится, и поэтому соответствующий ей обобщенный импульс сохраняется. Но если $\dot{p}_i = 0$, то, согласно гамильтоновым уравнениям, гамильтониан не должен зависеть от соответствующей координаты q_i. И, наоборот, если гамильтониан не содержит q_i, то сохраняется p_i, т.е. в этом смысле лагранжев и гамильтонов формализм эквивалентны. Однако существует и различие: если в лагранжиане, для которого q_i циклическая, содержатся все обобщенные скорости, то гамильтониан с той же циклической координатой вместо p_i содержит константу α_i, т.е. циклическая координата в этом случае действительно является игнорируемой, другими словами, решают задачу для оставшихся $s-1$ переменных, а циклическая координата определяется интегрированием уравнения $\dot{q}_i = \partial H/\partial\alpha_i$.

Канонические уравнения Гамильтона можно получить также и как следствие принципа наименьшего действия. Действительно, перепишем действие

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)dt,$$

заменив L согласно

$$L = \sum_i p_i\dot{q}_i - H(q_i, p_i, t).$$

Тогда

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \Big(\sum_i p_i dq_i - H dt\Big),$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \Big(\delta p_i dq_i + p_i d\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i dt - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i dt\Big).$$

Проинтегрируем второе слагаемое по частям и, исходя из требования принципа наименьшего действия, приравняем вариацию действия нулю:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \Big[\delta p_i\Big(dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}dt\Big) - \delta q_i\Big(dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}dt\Big)\Big] + \int_{t_1}^{t_2} d(p_i\delta q_i) = 0.$$

Последний интеграл дает нуль в силу того, что в моменты t_1 и t_2 конфигурация системы фиксирована, а равенство нулю вариации действия приводит к обращению в нуль подынтегральных выражений в круглых скобках, что и дает канонические уравнения Гамильтона.

2. **Действие как функция координат.** Формулируя принцип наименьшего действия, мы рассматривали интеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} Ldt,$$

взятый по траектории между двумя фиксированными в моменты t_1 и t_2 положениями $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$. При варьировании действия сравнивались значения этого интеграла для близких траекторий с одними и теми же значениями $q(t_1)$ и $q(t_2)$. Истинному движению соответствовала та траектория, на которой интеграл S экстремален.

Рассмотрим теперь понятие действия в несколько другом аспекте. Будем рассматривать S как величину, характеризующую движение по истинным траекториям, и сравним значения, которые она принимает для траекторий, имеющих общее начало $q(t_1) = q^{(1)}$, но проходящих в момент t_2 через различные положения. Иначе говоря, рассмотрим интеграл действия для истинных траекторий как функцию координат в верхнем пределе интегрирования. Изменение действия при переходе от одной траектории к близкой к ней другой дается выражением (ради простоты рассматривается случай с одной степенью свободы):

$$\delta S = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right)_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q dt.$$

Поскольку движение происходит по истинной траектории, т.е. в соответствии с уравнениями Лагранжа, подынтегральное выражение дает нуль, кроме того, $\delta q(t_1) = 0$, а $\delta q(t_2)$ обозначим просто δq, тогда

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q = p\delta q \Longrightarrow p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}.$$

Таким образом, действие является такой функцией координат, что его частная производная по координате дает соответствующий обобщенный импульс.

По определению

$$L = \frac{dS}{dt},$$

с другой стороны, рассматривая действие как функцию координат и времени $S = S(q_i, t)$, имеем

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i\dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},$$

откуда сразу получаем

$$H = -\frac{\partial S}{\partial t}.$$

Итак, действие является такой функцией времени, что его частная производная по времени со знаком минус дает гамильтониан.

3. **Понятие о фазовом пространстве.** Для механических систем, имеющих s степеней свободы, понятие "состояние системы" предполагает

- в лагранжевом формализме задание s обобщенных координат $q_1, ..., q_s$ и стольких же обобщенных скоростей $\dot{q}_1, ..., \dot{q}_s$, состояние системы описывается **функцией Лагранжа**

$$L = L(q_1, ..., q_s, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_s, t);$$

- в гамильтоновом формализме задание обобщенных координат $q_1, ..., q_s$ и обобщенных импульсов $p_1, ..., p_s$, состояние системы описывается **функцией Гамильтона**

$$H = H(q_1, ..., q_s, p_1, ..., p_s, t).$$

Положение механической системы с s степенями свободы в данный момент времени определено, если задано s обобщенных координат $q_1, ..., q_s$. В этом случае говорят, что задана конфигурация системы, а пространство s измерений, на осях которого отложены $q_1, ..., q_s$, называют **конфигурационным пространством**. В конфигурационном пространстве положение механической системы в каждый момент времени изображается точкой.

В гамильтоновом формализме обычно вводят $2s$-мерное пространство, осями которого служат обобщенные координаты и импульсы $q_1, ..., q_s, p_1, ..., p_s$. Такое пространство называют **фазовым**. Точка фазового пространства соответствует состоянию (изображает состояние) механической системы в некоторый момент времени и называется **изображающей точкой**. (Заметим, что в одномерном случае фазовое пространство вырождается в фазовую плоскость.)

Совокупность изображающих точек в различные моменты времени образует в фазовом пространстве некую кривую, которую называют **фазовой траекторией** системы (это кривая в фазовом пространстве, изображающая изменение состояния системы со временем). Задание состояния системы в некоторый момент времени предопределяет (в соответствии с уравнениями движения) ее состояния во все другие моменты времени. Это означает, что задание изображающей точки в некоторый момент $t = t_0$ предопределяет всю фазовую траекторию. Таким образом, через **каждую точку фазового пространства проходит только одна фазовая траектория**. Множество фазовых траекторий называют **фазовым портретом системы**, который обычно составляют для геометрической интерпретации результатов интегрирования уравнений движения.

4. **Скобки Пуассона.** Найдем полную производную по времени от произвольной функции координат, импульсов и времени $f(q_i, p_i, t)$:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f],$$

где введено обозначение

$$[f, g] = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} \right),$$

определяющее так называемые **скобки Пуассона** двух произвольных функций координат, импульсов и времени. Легко заметить, что если f не зависит от времени явно, то из обращения в нуль $[H, f]$ следует, что f является интегралом движения. Вообще говоря, условие того, что f – интеграл движения, имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [H, f] = 0.$$

Пользуясь определением скобок Пуассона, можно просто установить их следующие свойства:

$$[f, g] = -[g, f],$$

$$[f, const] = 0,$$

$$[f_1 + f_2, g] = [f_1, g] + [f_2, g],$$

$$[f_1 \cdot f_2, g] = f_1 \cdot [f_2, g] + f_2 \cdot [f_1, g],$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[f,g] = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g\right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t}\right].$$

Еще одно свойство, известное как тождество Якоби,

$$[f,[g,h]] + [h,[f,g]] + [g,[h,f]] = 0$$

примем без доказательства.

Вычислим

$$[p_k, g] = \sum_i \frac{\partial p_k}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} = \sum_i \delta_{ki}\frac{\partial g}{\partial q_i} = \frac{\partial g}{\partial q_k}.$$

Точно так же

$$[f, q_k] = \frac{\partial f}{\partial p_k}.$$

Поэтому

$$[p_i, q_k] = \delta_{ik}, \qquad [q_i, q_k] = 0, \qquad [p_i, p_k] = 0.$$

Это так называемые **фундаментальные скобки Пуассона** – классический аналог перестановочных соотношений Гейзенберга в квантовой механике. Скобки Пуассона позволяют переписать канонические уравнения Гамильтона в симметричном относительно обоюдной замены q на p виде

$$\dot{q}_i = [H, q_i], \qquad \dot{p}_i = [H, p_i].$$

Докажем **теорему Пуассона: если $f(q_i, p_i, t)$ и $g(q_i, p_i, t)$ являются интегралами движения, то скобки Пуассона этих величин также интеграл движения**. Доказательство использует тождество Якоби:

$$\frac{d}{dt}[f,g] = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g\right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t}\right] + [H,[f,g]] = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g\right] +$$

$$\left[f, \frac{\partial g}{\partial t}\right] - [g,[H,f]] - [f,[g,H]] = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + [H,f], g\right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} + [H,g]\right] = 0.$$

Число интегралов движения механической системы, имеющей s степеней свободы, как известно, ограничено величиной $2s - 1$, и на первый взгляд это положение противоречит содержанию теоремы Пуассона. Однако противоречие снимается сразу же, если учесть, что скобка Пуассона двух интегралов движения может оказаться просто константой или функцией от уже известного интеграла движения.

Теорема. Любая функция координат и импульсов $f(q(t), p(t))$ выражается через значения $p_0 = p(0)$ и $q_0 = q(0)$ согласно

$$f(q(t), p(t)) = f_0 + \frac{t}{1!}[H_0, f_0] + \frac{t^2}{2!}[H_0, [H_0, f_0]] + ...,$$

где H - гамильтониан, $f_0 = f(q_0, p_0)$, а $H_0 = H(q_0, p_0)$.

Доказательство. Разложим $f(q, p)$ в ряд Тейлора:

$$f(q,p) = f_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)_0 (q - q_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_0 (p - p_0) +$$

$$\frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\right)_0 (q - q_0)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\right)_0 (p - p_0)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q \partial p}\right)_0 (q - q_0)(p - p_0)\right] + ...$$

Подставив в это выражение разложения

$$q(t) = q_0 + (\dot{q})_{t=0} \cdot t + \frac{t^2}{2!}(\ddot{q})_{t=0} + ...,$$

$$p(t) = p_0 + (\dot{p})_{t=0} \cdot t + \frac{t^2}{2!}(\ddot{p})_{t=0} + ...,$$

получим

$$f(q,p) = f_0 + \frac{t}{1!}(F_1)_{t=0} + \frac{t^2}{2!}(F_2)_{t=0},$$

где

$$F_1 = \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f}{\partial p}\dot{p} = [H, f],$$

$$F_2 = \frac{\partial f}{\partial q}\ddot{q} + \frac{\partial f}{\partial p}\ddot{p} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\dot{q}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\dot{p}^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial q \partial p}\dot{q}\dot{p}.$$

Подсчитаем сумму первых двух слагаемых в выражении для F_2. Поскольку

$$\ddot{q}\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial q} \cdot \dot{q}\right) - \dot{q}\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q} =$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p}\right) + \left[H, \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p}\right] - \frac{\partial H}{\partial p}\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q} =$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p}\right) + \left[H, \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p}\right] - \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial p}\left[H, \frac{\partial f}{\partial q}\right],$$

$$\ddot{p}\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial p} \cdot \dot{p}\right) - \dot{p}\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial p} =$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}\right)-\left[H,\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}\right]+\frac{\partial H}{\partial q}\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial p}=$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}\right)-\left[H,\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}\right]+\frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial p}+\frac{\partial H}{\partial q}\left[H,\frac{\partial f}{\partial p}\right],$$

то

$$\ddot{q}\frac{\partial f}{\partial q}+\ddot{p}\frac{\partial f}{\partial p}=\frac{\partial}{\partial t}\Big[H,f\Big]-\left[H,\frac{\partial f}{\partial t}\right]+\Big[H,\Big[H,f\Big]\Big]+$$

$$\frac{\partial H}{\partial q}\left[H,\frac{\partial f}{\partial p}\right]-\frac{\partial H}{\partial p}\left[H,\frac{\partial f}{\partial q}\right].$$

Преобразуем два последних слагаемых:

$$-\dot{p}\left[H,\frac{\partial f}{\partial p}\right]-\dot{q}\left[H,\frac{\partial f}{\partial q}\right]=-\dot{p}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial p}\right)-$$

$$\dot{q}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial q}-\frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}\right)=-\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\dot{q}^2-\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\dot{p}^2-2\frac{\partial^2 f}{\partial q\partial p}\dot{q}\dot{p}.$$

Поэтому

$$F_2=\frac{\partial}{\partial t}\Big[H,f\Big]-\left[H,\frac{\partial f}{\partial t}\right]+\Big[H,\Big[H,f\Big]\Big]=\left[\frac{\partial H}{\partial t},f\right]+\Big[H,\Big[H,f\Big]\Big]$$

или

$$(F_2)_{t=0}=\Big[H_0,\Big[H_0,f_0\Big]\Big],$$

что вместе с выражением $(F_1)_{t=0}$ доказывает теорему.

5. **Канонические преобразования.** В сравнении с лагранжевым формализмом при прямом применении уравнений Гамильтона математические трудности существенно не уменьшаются. Преимущества гамильтонова подхода заключаются в более глубоком проникновении в структуру механики, т.к. равноправность координат и импульсов предоставляет большую свободу в выборе величин, которые мы принимаем за "координаты" и "импульсы". Именно эти абстрактные концепции классической механики служили исходными для построения квантовой теории и статистической механики. Изложению таких концепций отводятся последующие параграфы этой главы. Рассмотрим механическую систему, гамильтониан которой является константой движения, а все координаты – циклическими. В этом случае константами оказываются и все обобщенные импульсы

$$p_i=\alpha_i.$$

Гамильтониан системы будет иметь вид

$$H = H(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s),$$

а канонические уравнения дадут

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = \omega_i(\alpha_i) = const,$$

откуда

$$q_i = \omega_i t + \beta_i,$$

т.е. данная задача решается очень просто – координаты оказываются линейными функциями времени. Может показаться, что такая задача представляет чисто академический интерес, т.к. все обобщенные координаты могут оказаться циклическими в экзотических случаях. Однако выбор обобщенных координат не единственен. Действительно, при исследовании плоского движения в центральном поле мы могли выбрать декартовы координаты, но предпочли им полярные, т.к. одна из полярных координат оказалась циклической. Следовательно, цикличность координат связана со способом их выбора и в каждом конкретном случае можно подобрать такую систему обобщенных координат, что все они будут циклическими. Разумеется, если такая система будет подобрана, то, как было показано выше, дальнейшее решение задачи становится тривиальным. Но т.к. те координаты, которые мы рассматриваем как наиболее естественные для данной системы, обычно не являются циклическими, необходимо разработать специальную процедуру для перехода от одной системы координат к другой – более подходящей. При этом нужно позаботиться и о том, чтобы канонические уравнения сохранили свой вид.

В гамильтоновом формализме импульсы являются такими же независимыми переменными, как и координаты. Поэтому расширим преобразования $Q_i = Q_i(q_i, t)$, которые встречались нам ранее, подключив к преобразованию независимых координат также и преобразования независимых импульсов:

$$Q_i = Q_i(q_i, p_i, t), \qquad P_i = P_i(q_i, p_i, t).$$

Поскольку нас интересуют преобразования, сохраняющие структуру исходных уравнений движения, потребуем, чтобы в новых координатах уравнения движения имели вид канонических уравнений

Гамильтона

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \acute{H}}{\partial P_i}, \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial \acute{H}}{\partial Q_i},$$

где $\acute{H} = \acute{H}(Q_i, P_i, t)$ – гамильтониан в новых переменных. Преобразования, удовлетворяющие этому требованию, назовем **каноническими**, а условие неизменности вида уравнений Гамильтона – **условием каноничности**.

Как было показано, уравнения Гамильтона могут быть получены из принципа наименьшего действия

$$\delta \int \Big(\sum_i p_i dq_i - H dt \Big) = 0$$

путем независимого варьирования всех координат и импульсов. Исходя из условия каноничности, можно утверждать, что в новых переменных

$$\delta \int \Big(\sum_i P_i dQ_i - \acute{H} dt \Big) = 0.$$

Эти два принципа эквивалентны друг другу, если подынтегральные выражения отличаются лишь на полный дифференциал произвольной функции F координат, импульсов и времени. Таким образом,

$$\sum_i p_i dq_i - H dt = \sum_i P_i dQ_i - \acute{H} dt + dF.$$

Функция F называется **производящей функцией или генератором канонического преобразования**. Далее мы увидим, что, задавая эту функцию, мы однозначно определяем преобразование от старых переменных к новым, поэтому она должна быть функцией как тех, так и других – всего $4s$ величин и времени. Однако т.к. старые и новые переменные связаны $2s$ уравнениями преобразования

$$Q_i = Q_i(q_i, p_i, t), \qquad P_i = P_i(q_i, p_i, t),$$

то производящая функция F оказывается функцией всего $2s$ независимых величин и ее можно представить в одном из следующих видов:

$$F_1 = F_1(q_i, Q_i, t), \quad F_2 = F_2(q_i, P_i, t),$$
$$F_3 = F_3(p_i, Q_i, t), \quad F_4 = F_4(p_i, P_i, t).$$

Из выражения, определяющего производящую функцию, видно, что

$$dF_1 = \sum_i p_i dq_i - \sum_i P_i dQ_i + (\acute{H} - H) dt.$$

С другой стороны,

$$dF_1 = \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt.$$

Сравнивая, имеем

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \qquad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \qquad \acute{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t},$$

что позволяет определить каноническое преобразование по известной производящей функции, т.е. установить связь между старыми (p_i, q_i) и новыми (P_i, Q_i) переменными, а также найти новый гамильтониан. Для того чтобы получить формулы, определяющие каноническое преобразование через генератор $F_2(q_i, P_i, t)$, имея в виду $d\sum_i(P_iQ_i) = \sum_i(P_idQ_i + Q_idP_i)$, выполним преобразование Лежандра

$$d(F_1 + \sum_i P_iQ_i) = \sum_i p_idq_i + \sum_i Q_idP_i + (\acute{H} - H)dt.$$

Откуда заключаем, что

$$F_2 = F_1 + \sum_i P_iQ_i, \qquad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \qquad \acute{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

Аналогично можно определить канонические преобразования через *генераторы F_3 и F_4. Рассмотрим несколько простых примеров.*

(a) Пусть производящая функция канонического преобразования

$$F_2 = \sum_i q_iP_i.$$

В этом случае, воспользовавшись полученными выше соотношениями, найдем

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i, \qquad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i, \qquad \acute{H} = H.$$

Новые переменные совпадают со старыми, т.е. рассматриваемое преобразование суть тождественное.

Если же

$$F_2 = \sum_i f_i(q_1, q_2, ..., q_s, t)P_i,$$

то

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i, \qquad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = f_i(q_1, q_2, ..., q_s, t), \qquad \acute{H} = H.$$

При такой производящей функции новые координаты будут зависеть только от старых и времени, и это преобразование относится к числу так называемых **точечных преобразований**, кроме того, фактически удалось доказать, что все точечные преобразования являются каноническими. Итак, канонические уравнения Гамильтона ковариантны относительно точечных преобразований. (Ранее было показано, что относительно точечных преобразований ковариантны уравнения Лагранжа.)

(b) Допустим, что генератор канонических преобразований

$$F_1 = \sum_i q_i Q_i.$$

Тогда

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = Q_i, \qquad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -q_i, \qquad \acute{H} = H.$$

Это преобразование взаимно переименовывает координаты и импульсы: старые импульсы становятся новыми координатами, и наоборот, что еще раз подчеркивает, что в гамильтоновом подходе и "координаты", и "импульсы" лишены своего первоначального смысла и выступают в роли равноправных переменных.

(c) В качестве последнего примера рассмотрим одномерный гармонический осциллятор с гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

(*Одномерным (или линейным) гармоническим осциллятором называют точку, которая колеблется по отрезку прямой около положения устойчивого равновесия под действием возвращающей силы, пропорциональной смещению от положения равновесия.*)

Выполним каноническое преобразование, производящая функция которого

$$F_1 = \frac{m}{2}\omega x^2 ctgX.$$

Согласно известным соотношениям

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial x} = m\omega x ctg X, \qquad P = -\frac{\partial F_1}{\partial X} = \frac{m\omega x^2}{2sin^2 X}.$$

Последнее уравнение дает

$$x = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} sin X,$$

подставив которое в выражение для p, найдем

$$p = \sqrt{2m\omega P} cos X.$$

Подсчитав гамильтониан с этими x и p, получим $H = \omega P = \acute{H}$, т.е. новая координата X оказывается циклической и подчиняется уравнению

$$\dot{X} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega,$$

поэтому $X = \omega t + \alpha$, где α – постоянная интегрирования. Подставив этот результат в x, окончательно получим

$$x = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} sin(\omega t + \alpha)$$

– хорошо известное решение задачи о гармоническом осцилляторе.

6. **Инварианты канонических преобразований.** Канонические преобразования

$$Q_i = Q_i(q_i, p_i, t), \qquad P_i = P_i(q_i, p_i, t)$$

по определению не меняют вида канонических уравнений Гамильтона. К инвариантам канонических преобразований относятся также скобки Пуассона и интегральные инварианты Пуанкаре.

(a) **Скобки Пуассона.** Докажем инвариантность скобок Пуассона относительно канонических преобразований:

$$[f, g]_{q,p} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) =$$

$$\sum_{i,j,l} \left(\frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial Q_l} \frac{\partial Q_l}{\partial q_i} \right) -$$

$$\sum_{i,j,l}\left(\frac{\partial f}{\partial P_j}\frac{\partial P_j}{\partial q_i}+\frac{\partial f}{\partial Q_j}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial P_l}\frac{\partial P_l}{\partial p_i}+\frac{\partial g}{\partial Q_l}\frac{\partial Q_l}{\partial p_i}\right)=$$

$$\sum_{j,l}\frac{\partial f}{\partial P_j}\frac{\partial g}{\partial P_l}[P_j,P_l]_{q,p}+\sum_{j,l}\frac{\partial f}{\partial P_j}\frac{\partial g}{\partial Q_l}[P_j,Q_l]_{q,p}+$$

$$\sum_{j,l}\frac{\partial f}{\partial Q_j}\frac{\partial g}{\partial P_l}[Q_j,P_l]_{q,p}+\sum_{j,l}\frac{\partial f}{\partial Q_j}\frac{\partial g}{\partial Q_l}[Q_j,Q_l]_{q,p}=$$

$$\sum_{j,l}\frac{\partial f}{\partial P_j}\frac{\partial g}{\partial P_l}[P_j,P_l]_{q,p}+\sum_{j,l}\left(\frac{\partial f}{\partial P_j}\frac{\partial g}{\partial Q_l}-\frac{\partial f}{\partial Q_l}\frac{\partial g}{\partial P_j}\right)[P_j,Q_l]_{q,p}+$$

$$\sum_{j,l}\frac{\partial f}{\partial Q_j}\frac{\partial g}{\partial Q_l}[Q_j,Q_l]_{q,p}.$$

Теперь ясно, что достаточным условием инвариантности скобок Пуассона относительно канонических преобразований являются равенства

$$[P_j,P_l]_{q,p}=[Q_j,Q_l]_{q,p}=0,\qquad [P_j,Q_l]_{q,p}=\delta_{jl}.$$

Нетрудно видеть, что эти равенства являются и необходимыми условиями. Действительно, подставив последовательно в

$$[f,g]_{q,p}=[f,g]_{Q,P}$$

пары $(P_j,P_l),(Q_j,Q_l),(P_j,Q_l)$ и учитывая доказанные ранее соотношения, получим нужный результат.

Итак, скобки Пуассона являются инвариантом канонических преобразований. Можно доказать и обратное утверждение – преобразования, относительно которых инвариантны скобки Пуассона, являются каноническими, поэтому условие

$$[f,g]_{q,p}=[f,g]_{Q,P}$$

часто называют **условием каноничности.**

(b) **Интегральные инварианты Пуанкаре. Теорема Пуанкаре. Интеграл**

$$I_1=\int_S\sum_i dq_i dp_i$$

является инвариантом канонических преобразований (S - произвольная поверхность фазового пространства).

Доказательство. Положение точки на двумерной поверхности определяется двумя параметрами. Для определенности назовем их u и v, тогда $q_i = q_i(u,v)$; $p_i = p_i(u,v)$. Требуется доказать, что

$$\int_S \sum_i dq_i dp_i = \int_S \sum_i dQ_i dP_i,$$

где

$$dq_i dp_i = \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u,v)} dudv \equiv \left(\frac{\partial q_i}{\partial u}\frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u}\frac{\partial q_i}{\partial v}\right) dudv.$$

С учетом последнего доказательство теоремы сводится к доказательству

$$\int_S \sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u,v)} dudv = \int_S \sum_i \frac{\partial(Q_i, P_i)}{\partial(u,v)} dudv$$

или, ввиду произвольности области интегрирования, доказательству

$$\sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u,v)} = \sum_i \frac{\partial(Q_i, P_i)}{\partial(u,v)}.$$

Пусть для определенности генератор рассматриваемого канонического преобразования относится к типу $F_2 = F_2(q, P, t)$. В таком случае

$$\frac{\partial p_i}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial F_2}{\partial q_i} = \sum_k \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial u} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial u}\right)$$

и аналогично для $\partial p_i / \partial v$. Поэтому

$$\sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u,v)} = \sum_{i,k} \left(\frac{\partial q_i}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial v} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial v}\right) - \right.$$

$$\left. \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial u} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial u}\right)\frac{\partial q_i}{\partial v}\right)$$

$$= \sum_{i,k} \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_k}\left(\frac{\partial q_i}{\partial u}\frac{\partial P_k}{\partial v} - \frac{\partial q_i}{\partial v}\frac{\partial P_k}{\partial u}\right) + \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial q_k}\left(\frac{\partial q_i}{\partial u}\frac{\partial q_k}{\partial v} - \frac{\partial q_i}{\partial v}\frac{\partial q_k}{\partial u}\right)\right).$$

Последнее слагаемое является произведением симметричной по i, k величины на антисимметричное по i, k выражение в скобках и поэтому равно нулю. По той же причине равно нулю и выражение

$$\sum_{i,k} \frac{\partial^2 F_2}{\partial P_i \partial P_k}\left(\frac{\partial P_i}{\partial u}\frac{\partial P_k}{\partial v} - \frac{\partial P_i}{\partial v}\frac{\partial P_k}{\partial u}\right),$$

добавив которое к последней сумме предыдущего равенства, получим

$$\sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} = \sum_{i,k} \frac{\partial^2 F_2}{\partial P_i \partial P_k}\left(\frac{\partial P_i}{\partial u}\frac{\partial P_k}{\partial v} - \frac{\partial P_i}{\partial v}\frac{\partial P_k}{\partial u}\right)$$

$$+\sum_{i,k} \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_k}\left(\frac{\partial q_i}{\partial u}\frac{\partial P_k}{\partial v} - \frac{\partial q_i}{\partial v}\frac{\partial P_k}{\partial u}\right).$$

Легко видеть, что для любого фиксированного k

$$\sum_i \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial P_i \partial P_k}\frac{\partial P_i}{\partial u} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_k}\frac{\partial q_i}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial F_2}{\partial P_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial u},$$

$$\sum_i \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial P_i \partial P_k}\frac{\partial P_i}{\partial v} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_k}\frac{\partial q_i}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial F_2}{\partial P_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial v}.$$

Подставив, получим

$$\sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} = \sum_k \left(\frac{\partial Q_k}{\partial u}\frac{\partial P_k}{\partial v} - \frac{\partial Q_k}{\partial v}\frac{\partial P_k}{\partial u}\right) = \sum_i \frac{\partial(Q_i, P_i)}{\partial(u, v)}.$$

Теорема доказана.

Можно доказать также, что инвариантами канонических преобразований являются

$$I_2 = \int \sum_{i,k} dq_i dp_i dq_k dp_k ..., \qquad I_s = \int \sum_{i,k} dq_1, ..., dq_s dp_1, ..., dp_s.$$

Здесь в I_2 интегрирование ведется по 4-мерной поверхности фазового пространства, а в I_s – по произвольной области фазового пространства. Инвариант I_s показывает, что объем любой части фазового пространства не изменяется при канонических преобразованиях. В курсе статистической механики будет показано, что этот объем не изменяется и со временем.

Итак, последовательность $I_1, ..., I_s$ образует совокупность интегральных инвариантов Пуанкаре.

7. **Бесконечно малые канонические преобразования.** Бесконечно малыми каноническими преобразованиями назовем такие преобразования, при которых новые координата и импульс получаются изменением q и p на бесконечно малые величины:

$$Q_i = q_i + \Delta q_i, \qquad P_i = p_i + \Delta p_i. \tag{29}$$

Понятно, что производящая функция этого преобразования должна бесконечно мало отличаться от генератора (так удобнее называть производящую функцию) тождественного канонического преобразования $\sum q_i P_i$, т.е.

$$F_2 = \sum q_i P_i + \epsilon G(q, P).$$

Поэтому

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}.$$

Здесь ϵ – бесконечно малый параметр рассматриваемого канонического преобразования. Точность результатов нашего рассмотрения ограничим величинами первого порядка малости, поэтому

$$\Delta p_i = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}, \qquad \Delta q_i = \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} \approx \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}. \tag{30}$$

Назовем $G(q,p)$ генератором бесконечно малого канонического преобразования (29) и рассмотрим интересный случай $G = H(q,p)$ с параметром $\epsilon = dt$, тогда из (30) следует

$$\Delta q_i = dt \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i dt = dq_i, \quad \Delta p_i = -dt \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i dt = dp_i. \tag{31}$$

Таким образом, при бесконечно малом каноническом преобразовании с генератором $H(q,p)$ и параметром dt переменные $q(t)$ и $p(t)$ преобразуются в $q(t+dt)$ и $p(t+dt)$. Другими словами, изменение состояния системы за время dt возникает как результат бесконечно малого канонического преобразования, осуществляемого гамильтонианом $H(q,p)$. Поэтому изменение состояния системы за конечное время от t_0 до t можно получить как последовательность бесконечно малых канонических преобразований, эквивалентных одному конечному. Таким образом, каноническое преобразование, зависящее от времени, позволяет по заданным $q(t_0) = q_0$ и $p(t_0) = p_0$ определить $q(t)$ и $p(t)$, иначе говоря, **движение механической системы**

можно рассматривать как непрерывно совершаемое каноническое преобразование, генератором которого в каждый момент времени является гамильтониан.

Рассмотрим изменение произвольной функции $f = f(q,p)$ при бесконечно малом каноническом преобразовании. С этой целью разложим ее приращение

$$\Delta f = f(q_i + \Delta q_i, p_i + \Delta p_i) - f(q_i, p_i)$$

в ряд Тейлора, отбрасывая члены выше первого порядка малости:

$$\Delta f = \sum_i (\frac{\partial f}{\partial q_i}\Delta q_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\Delta p_i).$$

Подставив (30) в это соотношение, получим

$$\Delta f = \epsilon \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}\right) \equiv \epsilon \cdot [G, f]. \qquad (32)$$

Пусть $f = H$, тогда изменение гамильтониана при бесконечно малом каноническом преобразовании с генератором G будет

$$\Delta H = \epsilon \cdot [G, H], \qquad (33)$$

и если $G = G(q,p)$ есть первый интеграл уравнений движения, то, как известно,

$$[H, G] = 0,$$

поэтому $\Delta H = 0$, т.е. величина гамильтониана остается неизменной, что позволяет высказать
предложение: *все первые интегралы уравнений движения являются генераторами тех бесконечно малых канонических преобразований, при которых гамильтониан остается неизменным.*

Из соотношения (33) следует также, что если найдены преобразования, не изменяющие гамильтониан, то им можно сопоставить сохраняющуюся величину. Такие преобразования можно найти исходя из свойств симметрии системы. Действительно, если механическая система остается неизменной при определенных изменениях ее конфигурации, то ее гамильтониан при соответствующих этим изменениям преобразованиях должен также оставаться неизменным. Иначе говоря, исследуя свойства симметрии гамильтониана, можно получить интегралы уравнений движения.

Пример 1. Пусть q_k – циклическая координата, тогда гамильтониан не меняется при бесконечно малом каноническом преобразовании

$$\Delta q_k = \epsilon \delta_{ik}, \qquad \Delta p_k = 0,$$

откуда с учетом (30) имеем $G = p_k$, что приводит к сохранению p_k (см. (33)).

Пример 2. Рассмотрим бесконечно малое каноническое преобразование, соответствующее повороту механической системы на угол $d\varphi$. Для определенности пусть осью поворота служит ось z. Тогда

$$X_i = x_i - y_i d\varphi, \qquad Y_i = y_i + x_i d\varphi, \qquad Z_i = z_i,$$

т.е.

$$\Delta x_i = -y_i d\varphi, \qquad \Delta y_i = x_i d\varphi, \qquad \Delta z_i = 0.$$

Точно такие же изменения претерпевают компоненты импульса:

$$\Delta p_{ix} = -p_{iy} d\varphi, \qquad \Delta p_{iy} = p_{ix} d\varphi, \qquad \Delta p_{iz} = 0.$$

Сравнивая с (30), заключаем, что

$$G = \sum_i (x_i \cdot p_{iy} - y_i \cdot p_{ix}),$$

а роль параметра ϵ играет $d\varphi$. Таким образом, в рассматриваемом случае генератор бесконечно малого канонического преобразования G совпадает с z-компонентой момента импульса M_z. Ясно, что для поворота вокруг произвольной оси с единичным вектором $\vec{n}$

$$G = \vec{M} \cdot \vec{n}.$$

Итак, момент импульса – генератор вращательного движения системы. (Напомним, что гамильтониан – генератор фактического движения системы.)

8. **Уравнение Гамильтона – Якоби. Схема решения задач методом Гамильтона – Якоби.** В пункте 5 колебания гармонического осциллятора рассматривались как пример использования канонических преобразований для решения задач механики. Изучая бесконечно малые канонические преобразования, мы пришли к заключению о том, что существует каноническое преобразование, зависящее от времени, которое позволяет по заданным в начальный момент $q(t_0) = q_0$ и $p(t_0) = p_0$ определить $q(t)$ и $p(t)$ в

произвольный момент времени. Иначе говоря, движение механической системы можно рассматривать как непрерывно совершаемое каноническое преобразование. Понятно, что существует и обратное преобразование, превращающее координаты $q(t)$ и импульсы $p(t)$ в константы q_0 и p_0. Если найдена производящая функция такого канонического преобразования, то ясно, что это преобразование будет эквивалентно полному решению задачи о движении рассматриваемой системы. Генератор этого преобразования можно найти из следующих соображений: новые координаты Q_i и импульсы P_i, которые получаются в результате отображения

$$(q_i, p_i) \Longrightarrow (Q_i = q_{0i} \equiv \beta_i = const, P_i = p_{0i} \equiv \alpha_i = const),$$

должны удовлетворять каноническим уравнениям

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \acute{H}}{\partial P_i}, \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial \acute{H}}{\partial Q_i},$$

а для того, чтобы они оказались константами, достаточно потребовать, чтобы $\acute{H} = 0$. Как известно, в результате канонических преобразований $\acute{H} = H + \partial F/\partial t$. С другой стороны, рассматривая действие как функцию координат и времени, мы пришли к заключению, что $H = -\partial S/\partial t$, поэтому в качестве генератора искомого канонического преобразования следует выбрать действие S. Тогда если в последнем соотношении заменить все импульсы – аргументы гамильтоновой функции – на $\partial S/\partial q_i$, то S определится как решение дифференциального уравнения в частных производных

$$H(q_1, ..., q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial S}{\partial q_s}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

которое известно как **уравнение Гамильтона – Якоби**. Таким образом, действие S, как генератор канонического преобразования

$$(q_i, p_i) \Longrightarrow (q_{0i} \equiv \beta_i = const, p_{0i} \equiv \alpha_i = const),$$

которое эквивалентно полному решению задачи о движении механической системы, определяется решением уравнения Гамильтона – Якоби.

- **Примечание.** Уравнение Гамильтона - Якоби составляют согласно следующему алгоритму: по функции Лагранжа $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ строят

$$H = \sum_i \dot{q}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L,$$

затем в этом выражении все $\dot{q}_i$ выражают через $p_i = \sum_i \partial L/\partial \dot{q}_i$. (Отметим, что такая замена возможна, лишь если для рассматриваемой системы гессиан $det(\partial^2 L/\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k) \neq 0$.) Получившаяся в результате функция $H = H(q_i, p_i, t)$ есть гамильтониан системы. Заменим в гамильтониане все p_i на $\partial S/\partial q_i$ и, добавив к нему $\partial S/\partial t$, приравняем нулю. Полученное уравнение и есть уравнение Гамильтона - Якоби (Г-Я)

$$H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Согласно общей теории дифференциальных уравнений в частных производных различают два типа их решения – общий и полный интегралы. Общий интеграл - это решение уравнения Г-Я, которое зависит от произвольной функции, а полный интеграл содержит столько произвольных постоянных, сколько независимых переменных содержит уравнение. Из соображений, которые выяснятся в ходе дальнейшего изложения, в механических приложениях интересуются полным интегралом уравнения Г-Я. Число независимых переменных уравнения Г-Я равно $s + 1$, однако сама функция S не входит в уравнение, поэтому если решением уравнения является S, то $S + A$ также есть решение этого уравнения, т.е. одна из произвольных постоянных входит в решение аддитивно, и полный интеграл уравнения Г-Я можно записать в виде

$$S = S(q_1, q_2, ..., q_s, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s, t).$$

Таким образом, действие как решение уравнения Г-Я относится к производящим функциям 2-го типа, а α_i - новые импульсы, поэтому новые координаты β_i определяются уравнением

$$\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i},$$

что позволяет найти $q_i = q_i(\alpha_i, \beta_i, t)$, а соотношение

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$$

дает $p_i = p_i(\alpha_i, \beta_i, t)$, завершая решение задачи.

Рассмотрим два наиболее часто встречающихся типа задач.

(a) Пусть гамильтониан задан в общем виде $H = H(q, p, t)$. Найдем каноническое преобразование к новым координатам и импульсам, которые постоянны во времени: $Q_i = const, P_i = const$. Необходимым условием этого постоянства является обращение нового гамильтониана в нуль: $\acute{H} = 0$. Тогда канонические уравнения Гамильтона в новых координатах

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \acute{H}}{\partial P_i} = 0, \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial \acute{H}}{\partial Q_i} = 0$$

приводят к искомым решениям

$$Q_i = \beta_i = const, \qquad P_i = \alpha_i = const.$$

Было показано, что производящей функцией такого канонического преобразования является действие $S = S(q, P, t)$, вид которого определяется уравнением Гамильтона - Якоби

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Производящая функция искомого канонического преобразования является решением уравнения Гамильтона - Якоби в виде полного интеграла. Полный интеграл уравнения Гамильтона - Якоби содержит столько произвольных постоянных, сколько независимых переменных содержит уравнение. При s степенях свободы число независимых переменных уравнения Г-Я равно $s+1$ (s координат и время). Искомая функция входит в уравнение только в виде частных производных, поэтому одна из констант содержится в решении аддитивно: $S(q_i, \alpha_i, t) + A$. Если найден полный интеграл уравнения Г-Я и тем самым генератор канонического преобразования $S(q_i, \alpha_i, t)$, то, дифференцируя его по содержащимся в нем константам α_i и приравнивая другим константам, получаем

$$Q_i = \beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i},$$

а соотношение

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$$

выполняется автоматически, т.к. использовано при составлении уравнения Г-Я, что после разрешения относительно q_i окончательно приводит к решению поставленной задачи

$$q_i = q_i(\beta_i, \alpha_i, t), \quad p_i = p_i(\beta_i, \alpha_i, t).$$

(b) *Рассмотрим механическую систему с гамильтонианом*

$$H = H(q, p) = const.$$

Найдем каноническое преобразование, в результате которого все новые импульсы становятся постоянными во времени: $P_i = \alpha_i = const$. Для этого необходимо, чтобы все новые координаты были циклическими, т.е. не содержались бы в новом гамильтониане $\acute{H} = \acute{H}(P_i) = const$, а это возможно, только если производящая функция искомого канонического преобразования не зависит от времени (т. к. $\acute{H} = H + \partial F/\partial t$). Для того чтобы найти производящую функцию (генератор) такого канонического преобразования, запишем уравнение Г-Я

$$H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

полный интеграл которого

$$S(q_i, P_i, t) = W(q_i, \alpha_1, ..., \alpha_{s-1}, H_0) - H_0 t$$

линейно зависит от времени, а роль s-й неаддитивной постоянной играет H_0, которую обычно отождествляют с энергией - величиной, канонически сопряженной времени, отсутствующему явно в исходном гамильтониане. (Время выступает в роли "циклической координаты", поэтому в полном интеграле уравнения Г-Я появляется слагаемое $-H_0 t$ - произведение канонически сопряженных времени и энергии.) Ясно, что величина W, которую называют **укороченным действием (или характеристической функцией)**, удовлетворяет уравнению

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = H_0.$$

Если полный интеграл этого уравнения $W(q_i, \alpha_1, ..., \alpha_{s-1}, H_0)$ известен, то, подставив его в S и применив процедуру, описанную в предыдущем пункте, получим

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \qquad i = 1, ..., s,$$

$$\beta_j = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_j}, \qquad j = 1, ..., s-1,$$

$$t_0 = \frac{\partial S}{\partial H_0} = -t + \frac{\partial W}{\partial H_0}.$$

Эти соотношения показывают, что $W(q_i, \alpha_1, ..., \alpha_{s-1}, H_0)$ можно выбрать в качестве генератора искомого канонического преобразования.

Итак, если найдено укороченное действие как полный интеграл соответствующего уравнения Г-Я, то соотношения для p_i, β_j и t_0 полностью решают поставленную задачу, поскольку позволяют получить зависимость координат и импульсов от времени, содержащую $2s$ произвольных постоянных α_i, β_j, H_0, которые можно определить заданием начальных условий.

Отметим, что решения канонических уравнений Гамильтона в новых координатах

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \acute{H}}{\partial P_i} = \nu_i \quad (\acute{H} = H_0, \quad P_i = \alpha_i), \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \acute{H}}{\partial Q_i} = 0$$

имеют простой вид

$$Q_i = \nu_i t + \gamma_i, \qquad P_i = \alpha_i.$$

(c) Уравнение Г-Я допускает разделение переменных при наличии циклических координат. В самом деле, пусть $s - m$ независимых координат являются циклическими, тогда уравнение Г-Я принимает вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_1, ..., q_m, \frac{\partial S}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial S}{\partial q_s}, t) = 0.$$

По аналогии с предыдущим пунктом будем искать его решение в линейном по циклическим координатам виде, сопоставив с каждой циклической координатой канонически сопряженный ей постоянный обобщенный импульс α_j, $j = m+1, ..., s$:

$$S = F(q_1, ..., q_m, \alpha_1, ..., \alpha_m, t) + \sum_{j=m+1}^{s} \alpha_j q_j.$$

Определим F как полный интеграл уравнения Г-Я

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(q_1, ..., q_m, \frac{\partial V}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial V}{\partial q_m}, \alpha_{m+1}, ..., \alpha_s, t) = 0.$$

Действуя далее, как в предыдущем пункте, получим полное решение задачи.

9. Решение уравнения Гамильтона – Якоби в простейших случаях

- **Движение свободной частицы.** Функция Лагранжа изолированной частицы $L = mv^2/2$, ее гамильтониан $H = p^2/2m = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m$. Уравнение Гамильтона-Якоби записывается в виде

$$\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Четыре переменные t, x, y, z оказываются циклическими. Это означает, что решение уравнения Г-Я можно искать в виде

$$S = xp_x + yp_y + zp_z - Et,$$

где каждое из слагаемых есть произведение циклической переменной на канонически сопряженную величину (координаты – на соответствующие компоненты импульса, углы – на соответствующие компоненты момента импульса, время – на энергию). Подставив в уравнение, получим очевидный результат: $E = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m$, а для действия

$$S = xp_x + yp_y + zp_z - t\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}.$$

Следуя далее известной процедуре, найдем решение задачи:

$$\frac{\partial S}{\partial p_x} = x_0 \Longrightarrow x = x_0 + \frac{p_x t}{m},$$

$$\frac{\partial S}{\partial p_y} = y_0 \Longrightarrow y = y_0 + \frac{p_y t}{m},$$

$$\frac{\partial S}{\partial p_z} = z_0 \Longrightarrow z = z_0 + \frac{p_z t}{m}.$$

- **Линейный гармонический осциллятор.** Функция Лагранжа гармонического осциллятора $L = m\dot{x}^2/2 - kx^2/2$, гамильтониан $H = p_x^2/2m + kx^2/2$. Уравнение Г-Я

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{kx^2}{2} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Время t является циклической переменной, поэтому будем искать решение уравнения Г-Я в виде

$$S = S_0(x) - Et,$$

что дает

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_0}{dx}\right)^2 + \frac{kx^2}{2} = E,$$

откуда получаем

$$S = \sqrt{mk}\int\left(\frac{2e}{k} - x^2\right)^{1/2} dx - Et \Longrightarrow$$

$$t_0 = \frac{\partial S}{\partial E} \equiv \sqrt{\frac{m}{k}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{k} - x^2}} - t.$$

После интегрирования получим решение задачи

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} cos\omega(t + t_0), \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

- **Задача Кеплера.** В центральном поле благодаря сохранению момента импульса движение плоское. В полярных координатах, которые удобны в этом случае, функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\phi}^2}{2} + \frac{\alpha}{r}.$$

Найдем обобщенные импульсы

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} \Longrightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2}.$$

Тогда гамильтониан запишется в виде

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r},$$

а уравнение Г-Я – в виде

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Здесь циклическими являются время t и ϕ, поэтому будем искать решение задачи в виде

$$S = S_0(r) + M\phi - Et,$$

где M – сохраняющийся момент импульса, величина канонически сопряженная углу ϕ. Тогда

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_0}{dr}\right)^2 + \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} = E,$$

что приводит к

$$S = \int\left[2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{M^2}{r^2}\right]^{1/2} dr + M\phi - Et,$$

откуда

$$\phi_0 = \frac{\partial S}{\partial M} \equiv \phi + \int \frac{Mdr/r^2}{\sqrt{2m\left(E + \alpha/r\right) - M^2/r^2}},$$

и после вычисления интеграла для траектории движения получим (заметим на будущее – уравнение траектории получается как следствие $\phi_0 = \partial S/\partial M$):

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon cos(\phi - \phi_0), \quad \text{где} \quad p = \frac{M^2}{m\alpha}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}.$$

VII. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Движение механической системы вблизи положения устойчивого равновесия называют **малыми колебаниями**. Понятия "равновесие", "устойчивое равновесие" и "малые колебания" нуждаются в уточнении. Механическая система с s степенями свободы находится в положении равновесия, если действующие на нее обобщенные силы обращаются в нуль:

$$f_i = -\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_0 = 0.$$

Таким образом, равновесная конфигурация (положение равновесия) системы $q_{01}, q_{02}, ..., q_{0s}$, которую мы для краткости будем обозначать индексом нуль, определяется условием экстремальности потенциальной энергии. Если начальная конфигурация системы равновесна и ее начальные скорости равны нулю, то она и дальше будет оставаться в равновесии.

Равновесие назовем **устойчивым**, если возникшее в результате небольшого возмущения движение не выводит систему из малой окрестности ее первоначальной конфигурации. Если же система при малом возмущении неограниченно удаляется от своего равновесного состояния, то равновесие называется **неустойчивым**. Легко понять, что потенциальная энергия в положении устойчивого равновесия имеет минимум. Действительно, в этом случае, если короткодействующий импульс выведет тело из положения равновесия, его потенциальная энергия возрастет. При дальнейшем отклонении потенциальная энергия продолжает расти, а кинетическая, согласно закону сохранения энергии, уменьшается, пока скорость тела не станет равной нулю. Здесь в игру вступают отличные от нуля силы, которые возвращают тело в положение равновесия, где они, в свою очередь, обращаются в нуль, однако тело имеет отличную от нуля скорость, которая выведет его из равновесного состояния, и процесс повторится. Таким образом, тело не может покинуть окрестности положения устойчивого равновесия и колеблется вблизи него. Если же в положении равновесия потенциальная энергия системы максимальна, то при небольшом смещении от равновесного состояния потенциальная энергия уменьшится, а кинетическая, по закону сохранения энергии, возрастет и система со все увеличивающейся скоростью будет удаляться от положения равновесия – равновесие оказывается неустойчивым.

1. **Постановка задачи.** Функция Лагранжа замкнутой механической системы с s степенями свободы имеет вид

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k - U(q_1, q_2, ..., q_s).$$

Разложим потенциальную энергию $U(q_1, q_2, ..., q_s)$ в ряд Тейлора вокруг положения равновесия $(q_{01}, q_{02}, ..., q_{0s})$:

$$U(q_1, q_2, ..., q_s) = U(q_{01}, q_{02}, ..., q_{0s}) + \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_0 (q_i - q_{0i}) +$$

$$\frac{1}{2!}\sum_{i,k}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_k}\right)_0 (q_i - q_{0i})(q_k - q_{0k}) + ...$$

Произвол в выборе начального уровня потенциальной энергии позволяет отсчитывать ее от положения равновесия, поэтому примем, что

$$U(q_{01}, q_{02}, ..., q_{0s}) = 0.$$

В положении равновесия

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_0 = 0,$$

тогда если

$$x_i = q_i - q_{0i}$$

– смещение от положения равновесия, то первое неисчезающее слагаемое в разложении оказывается пропорциональным квадрату x_i. Предположим, что вклад последующих членов, пропорциональных кубу и более высоким степеням x_i, незначителен, что и примем в качестве критерия малости колебаний. Введем

$$k_{ik} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_k}\right)_0.$$

Поскольку рассматриваются колебания вблизи положения устойчивого равновесия, $k_{ik} > 0$, кроме того, из определения следует, что коэффициент k_{ik} симметричен по индексам: $k_{ik} = k_{ki}$. В результате

$$U(q_1, q_2, ..., q_s) \approx \frac{1}{2}\sum_{i,k} k_{ik} x_i x_k.$$

Разложим в ряд Тейлора также и $a_{ik}(q_1, q_2, ..., q_s)$:

$$a_{ik}(q_1, q_2, ..., q_s) = a_{ik}(q_{01}, q_{02}, ..., q_{0s}) + \sum_i \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial q_i}\right)_0 x_i +$$

$$\frac{1}{2!}\sum_{i,k}\left(\frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial q_i \partial q_k}\right)_0 x_i x_k + ...$$

Коэффициент a_{ik} умножается на величину второго порядка малости $\dot{x}_i \dot{x}_k$, а в разложении потенциальной энергии были отброшены члены, пропорциональные x_i^3, поэтому понятно, что в разложении a_{ik} достаточно сохранить только первое слагаемое, для которого введем обозначение

$$m_{ik} = a_{ik}(q_{01}, q_{02}, ..., q_{0s}).$$

По определению и эта величина положительна и симметрична по индексам. Таким образом, для **функции Лагранжа многомерной**

системы с s степенями свободы, совершающей малые колебания вокруг положения устойчивого равновесия, имеем

$$L = \frac{1}{2}\sum_{ik}(m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k - k_{ik}x_ix_k).$$

Ее полный дифференциал

$$dL = \frac{1}{2}\sum_{ik}(m_{ik}\dot{x}_i d\dot{x}_k + m_{ik}\dot{x}_k d\dot{x}_i - k_{ik}x_i dx_k - k_{ik}x_k dx_i).$$

В первом и третьем слагаемых переименуем индекс i на k, а k на i и воспользуемся симметричностью m_{ik} и k_{ik}, тогда

$$dL = \sum_{ik}(m_{ik}\dot{x}_k d\dot{x}_i - k_{ik}x_k dx_i),$$

следовательно, уравнения движения получатся в виде

$$\sum_{k}^{s}(m_{ik}\ddot{x}_k + k_{ik}x_k) = 0, \qquad x_k = q_k - q_{0k}, \quad i = 1, 2, ..., s.$$

Для механических систем с одной степенью свободы

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}, \qquad m\ddot{x} + kx = 0.$$

Отметим, что m есть масса тела, только если x – декартова координата. В одномерном случае решение уравнения движения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

известно и имеет вид

$$x = a \cdot cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Здесь ω_0 – частота (циклическая частота), a – амплитуда, α – начальная фаза колебаний. Таким образом, вблизи положения устойчивого равновесия система колеблется гармонически, что является следствием принятого выше критерия малости колебаний, согласно которому в тейлоровском разложении потенциальной энергии были отброшены слагаемые, порядок которых выше квадрата отклонения от положения равновесия. Поэтому возвращающая в положение равновесия сила оказывается пропорциональной первой степени этого отклонения ($F \sim x$), что и предопределяет гармоничность колебаний.

Легко показать, что амплитуда a и начальная фаза колебаний α задаются начальными условиями. Действительно, пусть $x_{t=0} = x_0$, $\dot{x}_{t=0} = v_0$, тогда $x_0 = a \cdot cos\alpha$, а $v_0 = -a\omega_0 \cdot sin\alpha$, откуда получаем

$$a = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega_0^2}, \qquad tg\alpha = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0}.$$

Частота колебаний ω_0 не зависит от начальных условий и полностью определяется свойствами механической системы. Ее можно найти по заданной функции Лагранжа

$$L = \frac{a(q)\dot{q}^2}{2} - U(q),$$

если следовать следующему алгоритму:

- определить положение равновесия q_0 из условия $dU(q)/dq = 0$,
- найти $m = a(q_0)$,
- найти $k = (d^2U/dq^2)_{q=q_0}$,
- найти $\omega_0^2 = k/m$.

Энергия системы, совершающей малые колебания,

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 a^2$$

пропорциональна квадрату амплитуды, т.е., как и должно было быть, определяется начальными условиями.

Зависимость координаты колеблющейся системы от времени обычно представляют в виде вещественной части комплексного выражения

$$x = Re[Ae^{i\omega_0 t}], \quad \text{где} \quad A = ae^{i\alpha}.$$

В таком виде удобно проводить все промежуточные выкладки и только в окончательном результате необходимо перейти к вещественной части полученного.

2. **Вынужденные колебания. Резонанс. Биения.** Пусть при движении вблизи положения устойчивого равновесия на частицу действует нестационарная (зависящая от времени) сила $f(t)$. Уравнение движения в этом случае

$$m\ddot{x} = -kx + f(t) \qquad \text{или} \qquad \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m},$$

а соответствующая функция Лагранжа

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + xf(t).$$

Решение уравнения движения может быть найдено в общем виде при произвольной вынуждающей силе, если ввести

$$\xi = \dot{x} + i\omega_0 x.$$

тогда уравнение движения оказывается уравнением первого порядка

$$\frac{d\xi}{dt} - i\omega_0\xi = \frac{f(t)}{m}.$$

Решение соответствующего однородного уравнения есть

$$\xi = Aexp(i\omega_0 t).$$

Общее решение неоднородного уравнения найдем, используя известный прием вариации постоянной, что дает

$$\xi = exp(i\omega_0 t)\left[\int_0^t \frac{f(t)}{m} exp(-i\omega_0 t)dt + \xi_0\right].$$

Константа интегрирования ξ_0 представляет значение ξ в момент времени $t = 0$. Итак, решение задачи в общем виде

$$x = \frac{1}{\omega_0} Im\left(exp(i\omega_0 t)\left[\int_0^t \frac{f(t)}{m} exp(-i\omega_0 t)dt + \xi_0\right]\right).$$

Наиболее интересны случаи, когда вынуждающая сила изменяется по периодическому закону. Пусть, например,

$$f(t) = f_0 cos(\gamma t + \beta).$$

Как известно, общее решение неоднородного уравнения x есть сумма общего решения однородного уравнения x_0 и какого-либо частного решения неоднородного уравнения x_1, т.е. $x = x_0 + x_1$. Общее решение однородного уравнения есть

$$x_0 = a \cdot cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $x_1 = b\ cos(\gamma t + \beta)$, что после подстановки в исходное уравнение дает

$$x = a \cdot cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{f_0}{m(\omega_0^2 - \gamma^2)} cos(\gamma t + \beta).$$

Итак, под действием периодической вынуждающей силы движение системы оказывается наложением двух колебаний - с собственной частотой ω_0 и с частотой вынуждающей силы γ. Однако это решение неприменимо в случае, когда собственная частота совпадает с частотой вынуждающей силы. Для того чтобы представить, каким будет поведение системы при совпадении частот, перепишем последнюю формулу, переобозначив постоянные так, чтобы

$$x = a \cdot cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{f_0}{m(\omega_0^2 - \gamma^2)}[cos(\gamma t + \beta) - cos(\omega_0 t + \beta)].$$

(Нетрудно убедиться, что эта формула с переобозначенными константами эквивалентна исходной.) Второе слагаемое содержит неопределенность типа 0/0, устранив ее по правилу Лопиталя, получим

$$x = acos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{f_0 \cdot t}{2m\omega_0} sin(\omega_0 t + \beta).$$

Итак, при совпадении собственной частоты с частотой вынуждающей силы наступает явление **резонанса - амплитуда колебаний линейно возрастает со временем**. Нетрудно выяснить, какими будут малые колебания вблизи резонанса, когда $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$, причем $\varepsilon \ll \omega_0$. В этом случае

$$x = Aexp(i\omega_0 t) + Be^{i(\omega_0 + \varepsilon)t} = (A + Be^{i\varepsilon t})exp(i\omega_0 t).$$

За период $2\pi/\omega_0$ величина $A + Be^{i\varepsilon t}$ меняется мало, поэтому можно говорить, что вблизи резонанса система колеблется с переменной во времени (периодически то растущей, то уменьшающейся) амплитудой $c = \mid A + Be^{i\varepsilon t} \mid$. Представив комплексные амплитуды A и B в виде $A = ae^{i\alpha}$, $B = be^{i\beta}$, найдем

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2abcos(\varepsilon t + \beta - \alpha),$$

и ясно, что

$$\mid a - b \mid \leq c \leq a + b.$$

Такие колебания носят название **биений.**

3. **Функции Грина в классической механике.** Аппарат функций Грина используется практически во всех разделах теоретической физики как метод решения неоднородных дифференциальных уравнений. Использование метода функций Грина для решения простых задач о механических колебаниях напоминает стрельбу из пушек по воробьям. Однако простота этих задач позволяет довольно

наглядно ввести понятие о функциях Грина и продемонстрировать возможности метода. С этой целью рассмотрим задачу о вынужденных (под действием произвольной внешней силы $f(t)$) колебаниях линейного гармонического осциллятора:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m} \equiv F(t). \tag{34}$$

Решение уравнения (34) будем искать в виде интеграла Фурье, представив в таком же виде и внешнюю силу:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int \tilde{x}(\omega) exp(-i\omega t) d\omega, \qquad F(t) = \frac{1}{2\pi}\int \tilde{F}(\omega) exp(-i\omega t) d\omega. \tag{35}$$

Обратив интегралы, получим

$$\tilde{x}(\omega) = \int x(\acute{t}) exp(i\omega \acute{t}) d\acute{t}, \qquad \tilde{F}(\omega) = \int F(\acute{t}) exp(i\omega \acute{t}) d\acute{t}. \tag{36}$$

Перепишем (34) для фурье-образов $\tilde{x}(\omega)$ и $\tilde{F}(\omega)$:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)\tilde{x}(\omega) = \tilde{F}(\omega). \tag{37}$$

Казалось бы, следующее из алгебраического уравнения (37) соотношение

$$\tilde{x} = \frac{\tilde{F}}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

позволяет получить решение задачи, однако оно не содержит никакой информации о случае $\omega = \pm\omega_0$, т.к. деление на нуль запрещено. Избежать этой неприятности удается, если использовать часто употребляемый формальный прием добавления нуля. Добавим к $\tilde{F}(\omega)$ слагаемое $C \cdot (\omega_0^2 - \omega^2) \cdot \delta(\omega_0^2 - \omega^2)$, которое обращается в нуль как при $\omega = \pm\omega_0$, так и при $\omega \neq \pm\omega_0$. Тогда

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{\tilde{F}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2} + C \cdot \delta(\omega_0^2 - \omega^2). \tag{38}$$

Добавка $C \cdot \delta(\omega_0^2 - \omega^2)$ даст в $x(t)$ вклад с частотами $\omega = \pm\omega_0$, т.е. с частотами собственных колебаний свободного осциллятора. Поэтому (38) является общим решением задачи (34) – к частному решению неоднородного уравнения (первое слагаемое) добавлено общее решение однородного.

Ограничимся поиском частного решения. С этой целью подставим (38) с учетом (36) в (35), что дает

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int F(\acute{t})d\acute{t}\int \frac{exp(-i\omega(t-\acute{t}))d\omega}{\omega_0^2-\omega^2} = \int F(\acute{t})G(t,\acute{t})d\acute{t}. \quad (39)$$

Здесь

$$G(t,\acute{t}) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{exp(-i\omega(t-\acute{t}))d\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \quad (40)$$

– **функция Грина** уравнения (34). Если $F(\acute{t}) = \delta(\acute{t}-\tau)$, то $x(t) = G(t,\tau)$, поэтому ясно, что функция Грина $G(t,\acute{t})$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_0^2\right)G(t,\acute{t}) = \delta(t-\acute{t}), \quad (41)$$

которое похоже на (34), но, в отличие от (34), внешний источник (правая часть уравнения) имеет δ-образный характер. Теперь легко представить смысл решения (39) уравнения (34) – это суперпозиция решений того же уравнения, но с внешними силами в виде короткодействующих в разные моменты времени импульсов.

Ввиду наличия полюсов $\omega = \pm\omega_0$ на вещественной оси интеграл (40) в обычном понимании не существует. Однако если исключить полюса из области интегрирования, а затем предельным переходом избавиться от такого исключения, то интеграл (40) приобретает смысл. Возможной операцией такого типа является деформация контура интегрирования, выводящая контур в комплексную плоскость с последующим предельным возвратом на вещественную ось. Для ответа на вопрос, как деформировать контур, т.е. как обходить полюса, выберем два контура с таким обходом полюсов, чтобы можно было интегрировать по замкнутому контуру, охватывающему полюса, например, так, как показано на рис. 13.

Такой обход полюсов отвечает разности интегралов по контуру от $-\infty$ до $+\infty$ над вещественной осью и по контуру от $+\infty$ до $-\infty$ под ней. Для изображенного на рисунке контура C в соответствии с теоремой о вычетах имеем

$$\frac{1}{2\pi}\oint \frac{exp(-i\omega\tau)}{(\omega-\omega_0)(\omega+\omega_0)}d\omega = i(\frac{exp(-i\omega\tau)}{2\omega_0}+\frac{exp(i\omega\tau)}{-2\omega_0}) =$$

$$\frac{sin\omega_0\tau}{\omega_0} \equiv D(\tau),$$

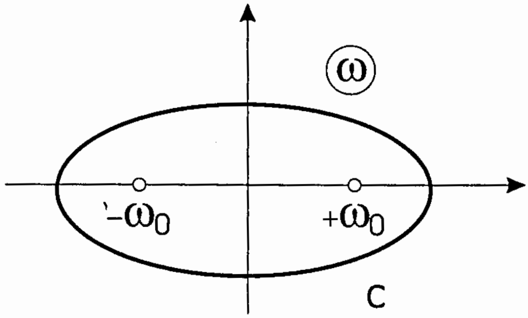

Рис. 13

где $\tau = t - t'$. Таким образом, интеграл по замкнутому контуру C, который представляет разницу в выборе правила обхода полюсов, приводит к решению однородного уравнения поставленной задачи. Поскольку нас интересует лишь частное решение неоднородного уравнения, для наших целей принципиально безразлично, как обходить полюса. Практически выбор конкретного обхода может дать определенные преимущества, в частности, избавить от необходимости добавлять в общее решение решение однородной задачи и т.п. Остановимся далее на нескольких физически интересных возможностях в выборе контура интегрирования.

- **Справка. Интеграл Фурье** *представляет собой разложение непериодической функции по гармоническим компонентам, частоты которых пробегают непрерывную совокупность значений. Если $f(x)$ абсолютно интегрируема на каждом конечном отрезке и если сходится*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mid f(x) \mid dx,$$

то

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk,$$

где

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

– **фурье-образ**, *или* **фурье-преобразование** *(ф.п.) заданной функции $f(x)$. Ф.п. является разновидностью интегральных преобразований. Отображение $F : f(x) \mapsto \tilde{f}(k)$ является унитарным оператором в пространстве функций $f(x)$ для любых* *x. Каждой операции над функциями соответствует операция над ее ф.п., которая во многих случаях проще соответствующей операции над $f(x)$. Например,*

$$\frac{df}{dx} = ikf(x).$$

Если существует

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | f(x) |^2 \, dx, \text{ то } \int_{-\infty}^{+\infty} | f(x) |^2 \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} | \tilde{f}(k) |^2 \, dk.$$

Это соотношение известно как теорема Планшереля.

Функцию $f(x)$ можно представить в виде интеграла Фурье также и в следующей эквивалентной форме:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{-ikx} dk.$$

В этом случае

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx.$$

Заметим, что коэффициент $1/2\pi$ должен присутствовать только в одном из выражений – или в выражении для $f(x)$, или в выражении для $\tilde{f}(k)$. Иногда оба выражения снабжают коэффициентами $1/\sqrt{2\pi}$.

Дельта-функция Дирака (δ-функция) – *обобщенная функция, которую принято определять следующим образом:*

$$\int_a^b f(x)\delta(x - x_0)dx = \begin{cases} 0 & \text{при } \; x_0 < a \; \text{ или } \; x_0 > b, \\ f/2 & \text{при } \; x_0 = a \; \text{ или } \; x_0 = b, \\ f(x_0) & \text{при } \; a < x_0 < b. \end{cases}$$

В частном случае $f(x) = 1$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1,$$

кроме того, ясно, что

$$\delta(x) = 0 \;\; \text{при} \;\; x \neq 0.$$

Если в качестве определения δ-функции принять одно из ее аппроксимационных представлений

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2} \equiv \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to \infty} \frac{\epsilon}{1 + \epsilon^2 x^2},$$

то легко видеть, что, во-первых,

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \neq 0, \\ \infty & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

(Действительно,

$$\text{при} \quad x = 0 \quad \delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \to \infty,$$

$$\text{при} \quad x \neq 0 \quad \delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to \infty} \frac{\epsilon}{1 + \epsilon^2 x^2} = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to \infty} \frac{1}{\epsilon x^2} \to 0.)$$

И, во-вторых,

$$\int_a^b \delta(x) dx = 1 \quad \text{при} \quad a < 0 < b.$$

(Действительно,

$$\int_a^b \delta(x) dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{\pi} \int_a^b \frac{dx}{\varepsilon^2 + x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} arctg \frac{x}{\varepsilon} \right)_a^b =$$

$$\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(arctg \frac{b}{\varepsilon} - arctg \frac{a}{\varepsilon} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} \right) = 1.)$$

– **Интегральное представление δ-функции.** *По определению δ-функции ее фурье-образ*

$$\tilde{\delta}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-ikx} dx = 1,$$

поэтому

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\delta}(k) e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk.$$

Последнее позволяет найти еще одно представление δ-функции

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{ikx} dk =$$

$$\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to \infty} \frac{\sin \varepsilon x}{x}.$$

– **Свойства δ-функции**

$$\delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x), \quad a > 0,$$

$$\delta(-x) = \delta(x),$$

$$x\delta(x) = 0,$$

$$f(x)\delta(x-a) = \frac{1}{2}\left[f(a-0) + f(a+0)\right]\delta(x-a),$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a}\left[\delta(x-a) + \delta(x+a)\right], \quad a > 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a-x)\delta(x-b)dx = \delta(a-b),$$

$$\frac{1}{2}\left[\delta(x-x_0) + \delta(x+x_0)\right] = \frac{1}{\pi}\int \cos kx_0 \cdot \cos kx dk.$$

– **δ-функция как предел непрерывных функций**

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\alpha}{1+\alpha^2x^2},$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{\alpha\to\infty}\alpha e^{-\alpha^2x^2},$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\sin\alpha x}{x},$$

$$\frac{d}{dx}\delta(x) = -\frac{2}{\pi}\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\alpha^2x^2}{(\alpha^2x^2+1)^2}.$$

Ступенчатая функция Хевисайда – *это функция, которую определяют согласно*

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ 1/2 & \text{при} \quad x = 0, \\ 1 & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

– **Интегральное представление функции Хевисайда**

$$\theta(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}dk,$$

$$\theta(1-x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin k \cdot \cos kx}{k}dk, \quad x \geq 0,$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k}dk = \begin{cases} \theta(x), \\ -\theta(-x) \end{cases}$$

в зависимости от направления, по которому контур интегрирования огибает начало координат, если против часовой стрелки – реализуется возможность $\theta(x)$, если по часовой стрелке – реализуется вторая возможность.

– **Свойства функции Хевисайда**

$$\theta(0-0) = 0, \quad \theta(0+0) = 1, \quad \theta(e^x) = 1.$$

– **θ-функция как предел непрерывных функций**

$$\theta(x) = \lim_{\alpha\to\infty}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}arctg\ \alpha x\right],$$

$$\theta(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\infty}^{\alpha x}\frac{\sin t}{t}dt.$$

– **Связь θ-функции с другими функциями**

$$sgn\ x = 2\theta(x) - 1, \quad \delta(x) = \frac{d}{dx}\theta(x).$$

Дельта-функция Дирака и ступенчатая функция Хевисайда являются **обобщенными функциями**, *которые расширяют классическое понятие функции. На обобщенные функции распространяются основные линейные операции математического анализа. С физической точки зрения обобщенные функции отражают невозможность абсолютно точного измерения значения физической величины, поскольку всякий измерительный прибор имеет свою разрешающую способность и показывает усредненный, "размазанный" результат. Впервые обобщенные функции были использованы Дираком, а их теория разработана Соболевым и Шварцом. По определению обобщенная функция есть линейный непрерывный функционал на некотором пространстве F основных функций. Обычно значение обобщенной функции $f \in \acute{F}$ на основной $\Phi \in F$ задают в следующем виде:*

$$(f, \Phi) = \int f(x)\Phi(x)dx.$$

(Заметим, что пространство обобщенных функций $\acute{F}$ сопряжено с пространством основных функций F.)

Примеры: функция Хевисайда

$$(\theta, \Phi) = \int_0^\infty \Phi(x)dx,$$

дельта-функция Дирака

$$(\delta, \Phi) = \Phi(0).$$

Вычеты. Теорема о вычетах. *Вычет однозначной аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 – это комплексное число, равное значению интеграла*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz,$$

взятого в положительном направлении по окружности достаточно малого радиуса $\gamma = \{\mid z - z_0 \mid = r\}$ с центром в изолированной особой точке z_0 этой функции. Обозначают вычет символом

$$res_{z=z_0}f(z).$$

– *Если при $z = z_0$ полюс $f(z)$ – простой (первого порядка), то вычет*

$$res_{z=z_0}f(z) = lim_{z\to z_0}[(z - z_0)f(z)].$$

– *Если $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – аналитические функции, причем $\varphi(z_0) \neq 0$, а для $\psi(z)$ точка $z = z_0$ – нуль первого порядка (т.е. $\acute{\psi}(z_0) \neq 0$), то вычет в этом полюсе первого порядка*

$$res_{z=z_0}f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\acute{\psi}(z_0)}.$$

– *В полюсе порядка m вычет вычисляется по формуле*

$$res_{z=z_0}f(z) = \frac{1}{(m-1)!}lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}[(z - z_0)^m \cdot f(z)].$$

Изолированная особая точка – *это такая особая точка аналитической функции, для которой существует окрестность без других особых точек.*

Полюс функции – *изолированная особая точка* z_0 *аналитической функции* $f(z)$ *комплексной переменной* z, *в окрестности которой выполняется предельное соотношение*

$$lim_{z \to z_0} f(z) = \infty.$$

Если z_0 *есть полюс* $f(z)$, *то эта же точка есть нуль функции* $1/f(z)$, *причем порядок полюса* $f(z)$ *совпадает с порядком нуля для* $1/f(z)$. *Полюс порядка* $m = 1$ *называется простым, а при* $m > 1$ – m*-кратным.*

Теорема о вычетах. *Пусть однозначная функция* $f(z)$ *аналитична в области* D, *за исключением конечного числа изолированных особых точек, а простая замкнутая кривая (замкнутый контур)* C *вместе со своей внутренностью принадлежит области* D, *содержит внутри себя конечное число особых точек* $z_1, z_2, ..., z_n$ *функции* $f(z)$ *и не проходит ни через одну из них. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} res_{z=z_k} f(z).$$

Определенный интеграл от действительной функции

$$\int_a^b f(x)dx$$

часто вычисляют, рассматривая его как часть комплексного контурного интеграла

$$\int_C f(z)dz,$$

при условии что контур C *включает интервал действительной оси* (a, b).

При вычислении интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

можно применить формулу теоремы о вычетах к контуру C, *состоящему из интервала* $(-R, +R)$ *действительной оси и дуги* C_R *окружности* $\mid z \mid = R$. *При этом в следующих случаях интегралы по дуге* C_R *при* $R \to \infty$ *оказываются равными нулю.*

– *Если $f(z)$ аналитична при $\mid z \mid > R_0$ и $zf(z)$ стремится к нулю при $z \to \infty$, когда мнимая часть комплексной переменной z неотрицательна, то*

$$lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0.$$

Заметим, что $zf(z)$ стремится к нулю при больших $\mid z \mid$, если

$$\mid f(z) \mid < \frac{const}{\mid z \mid^{1+\alpha}},$$

где $\alpha > 0$.

– **Лемма Жордана.** *Если функция $F(z)$ всюду аналитична, за возможным исключением конечного числа полюсов, и стремится к нулю при $\mid z \mid \to \infty$, когда мнимая часть комплексной переменной z неотрицательна, то для любого действительного положительного числа m*

$$lim_{R\to\infty} \int_{C_R} F(u)e^{imu}du = 0.$$

(a) **Запаздывающая функция Грина**

Запаздывающая функция Грина возникает в случае, если контур интегрирования провести над вещественной осью и обойти оба полюса сверху.

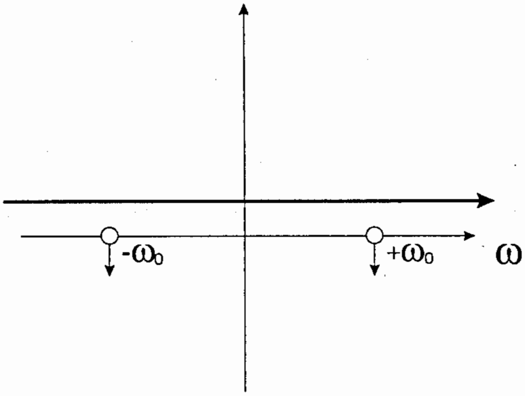

Рис. 14

Подынтегральная экспонента в (40) содержит "$-i\omega\tau$", поэтому при $\tau > 0$ замкнем контур снизу. Тогда оба полюса окажутся внутри контура и результат интегрирования будет таким же, как и в рассмотренном выше случае (см. стр. 104). (Заметим,

(Заметим, что интеграл по замкнутому таким образом контуру совпадает с исходным (40), пределы интегрирования которого заключены в интервале $-\infty < \omega < +\infty$ ввиду того, что вклад в интеграл по нижней половине большого круга, в силу леммы Жордана, равен нулю.) При $\tau < 0$ замкнем контур сверху, тогда, ввиду того что полюса оказываются вне контура, интегрирование дает нуль. Итак,

$$\frac{1}{2\pi}\int\frac{exp(-i\omega\tau)d\omega}{\omega_0^2-\omega^2} = D^{ret}(\tau) \equiv \vartheta(\tau)\frac{sin\omega_0\tau}{\omega_0} .$$

Полученная при таком выборе контура функция Грина $D^{ret}(\tau)$ называется запаздывающей (retarded) функцией Грина, а $\vartheta(\tau)$ – ступенчатая функция Хевисайда. Физический смысл $D^{ret}(\tau)$ прозрачен. Действительно, заметим, что в выражении

$$x^{ret}(t) = \int F(\acute{t})D^{ret}(t-\acute{t})d\acute{t}$$

интегрирование распространяется на интервал $-\infty < \acute{t} < t$, поэтому запаздывающая функция Грина в момент t выражает влияние внешней силы, действовавшей в предыдущие моменты $\acute{t} < t$. Понятно, что D^{ret} естественно пользоваться, если начальные условия заданы в прошлом.

Вместо деформации контура смещением его вверх можно было оставить его на вещественной оси, но сместить полюса вниз. Это достигается бесконечно малой мнимой добавкой $-i\epsilon, (\epsilon > 0)$ к полюсам $\pm\omega_0$, а после интегрирования устремлением ϵ к нулю. Учитывая

$$\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2} \Longrightarrow -\frac{1}{[\omega-(\omega_0-i\epsilon)][\omega-(-\omega_0-i\epsilon)]} =$$

$$-\frac{1}{(\omega^2-\omega_0^2+2i\epsilon\omega)}$$

для фурье-образа запаздывающей функции Грина, получаем

$$\tilde{D}^{ret}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-2i\epsilon\omega}.$$

Последнее выражение включает также и указание о способе обхода особенностей, а необходимость выполнить предельное устранение добавки ($\epsilon \mapsto 0$) после интегрирования будем держать в уме.

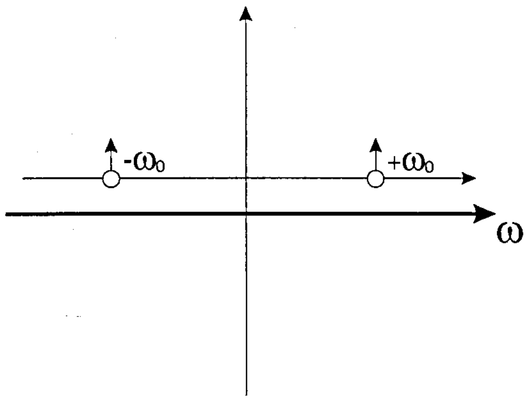

Рис. 15

(b) **Опережающая функция Грина**

Проведем путь интегрирования под вещественной осью.

Аналогично случаю предыдущего пункта имеем

$$D^{adv}(\tau) = -\vartheta(-\tau)\frac{sin\omega_0\tau}{\omega_0}$$

– опережающую (advanced) функцию Грина, которая отлична от нуля только для отрицательных аргументов, т.е. приводит к частному решению, зависящему в некоторый момент времени от действия силы в "последующие моменты". Поэтому опережающая функция Грина находит применение в таких задачах, в которых конечные условия предписываются в момент $t \longrightarrow +\infty$. В этом случае аналогично предыдущему можно получить

$$\tilde{D}^{adv}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\epsilon\omega}.$$

(c) **D-функция Паули**

По определению D-функция Паули

$$D(\tau) = \frac{sin\omega_0\tau}{\omega_0} = D^{ret}(\tau) - D^{adv}(\tau).$$

Линейность преобразования Фурье позволяет заключить, что аналогичное соотношение должно существовать и между фурье-образами:

$$\tilde{D}(\omega) = \tilde{D}^{ret}(\omega) - \tilde{D}^{adv}(\omega) = 2\pi i \cdot sgn\omega \cdot \delta(\omega^2 - \omega_0^2).$$

При выводе последнего соотношения использовано определение знаковой функции

$$sgnx = \frac{|x|}{x}$$

и одно из символических представлений δ-функции

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}.$$

(d) **Задача Коши**

Пусть начальные условия заданы в некоторый момент $t = t_0$. В этом случае удобной функцией Грина будет следующая:

$$G(t, \acute{t} \mid t_0) = [\vartheta(t - \acute{t}) - \vartheta(t_0 - \acute{t})]D(t - \acute{t}),$$

производная которой

$$\dot{G}(t, \acute{t} \mid t_0) = [\vartheta(t - \acute{t}) - \vartheta(t_0 - \acute{t})]cos\omega_0(t - \acute{t}) + \delta(t - \acute{t})D(t - \acute{t}).$$

(Напомним, что $\delta(\tau) = d\vartheta(\tau)/d\tau$.)

Ясно, что при $t = t_0$ как $G(t, \acute{t} \mid t_0)$, так и $\dot{G}(t, \acute{t} \mid t_0)$ обращаются в нуль. Тогда общее решение уравнения (34) запишется в виде

$$x(t) = x_0(t) + \int G(t, \acute{t} \mid t_0)F(\acute{t})d\acute{t}, \qquad (42)$$

где $x_0(t)$ – решение однородного уравнения. С учетом вышесказанного при $t = t_0$ из соотношения (42) следует

$$x(t) = x_0(t), \qquad \dot{x}(t) = \dot{x}_0(t).$$

Допустим, поставлена задача Коши, т.е. заданы

$$x(t)\mid_{t=t_0} = f_1, \qquad \dot{x}(t)\mid_{t=t_0} = f_2.$$

В момент $t = t_0$ функция Паули и ее производные обладают следующими свойствами:

$$D(t - t_0)\mid_{t=t_0} = 0, \qquad \dot{D}(t - t_0)\mid_{t=t_0} = 1, \qquad \ddot{D}(t - t_0)\mid_{t=t_0} = 0.$$

Поэтому

$$x_0(t) = f_1 \cdot \dot{D}(t - t_0) + f_2 \cdot D(t - t_0),$$

и общее решение задачи Коши уравнения (34) запишется в виде

$$x(t) = f_1 \cdot \dot{D}(t - t_0) + f_2 \cdot D(t - t_0) + \int G(t, \acute{t} \mid t_0)F(\acute{t})d\acute{t}.$$

4. **Колебания систем со многими степенями свободы.** Рассмотрим механическую систему с s степенями свободы, которая совершает малые колебания вокруг положения устойчивого равновесия $(q_{01}, ..., q_{0s})$. Уравнения движения такой системы имеют вид

$$\sum_{k=1}^{s}(m_{ik}\ddot{x}_k + k_{ik}x_k) = 0, \qquad x_k = q_k - q_{0k}, \quad i = 1, 2, ..., s \tag{43}$$

и представляют собой систему s линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В соответствии с общими правилами решение этой системы будем искать в виде

$$x_k = Ca_k \cdot e^{-i\omega t}, \tag{44}$$

где Ca_k - комплексная амплитуда колебаний, соответствующая координате x_k, коэффициент C - некий масштабный множитель, одинаковый для всех координат. Разумеется, истинному движению соответствует реальная часть выражения (44). Подставив (44) в (43), получим систему линейных однородных алгебраических уравнений, которым удовлетворяет a_k:

$$\sum_k (k_{ik} - \omega^2 m_{ik})a_k = 0. \tag{45}$$

Эта система имеет нетривиальное решение, лишь если ее определитель обращается в нуль:

$$det(k_{ik} - \omega^2 m_{ik}) = 0. \tag{46}$$

Уравнение (46) - это алгебраическое уравнение s-й степени относительно ω^2 (его называют характеристическим), корни которого $\omega_l^2 (l = 1, ..., s)$ определяют те частоты, при которых (44) может служить решением уравнений (43). Амплитуды же a_k определяются как решения уравнений (45) для каждого из найденных значений ω_l^2 (точнее, поскольку (45) – однородные уравнения, все a_k могут быть выражены через одно из них).

Покажем, что корни характеристического уравнения вещественны и положительны. Умножим для этого (45) на a_i^* и просуммируем по i:

$$\sum_{i,k}(k_{ik} - \omega^2 m_{ik})a_i^* a_k = 0,$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{\sum_{i,k}(k_{ik}a_i^* a_k)}{\sum_{i,k}(m_{ik}a_i^* a_k)}.$$

Легко видеть, что квадратичные формы числителя и знаменателя вещественны ввиду того, что по определению вещественны и симметричны k_{ik} и m_{ik}. Действительно, пусть

$$a_i = \alpha_i + i\beta_i,$$

тогда

$$\sum_{i,k} k_{ik} a_i^* a_k = \sum_{i,k} k_{ik}[(\alpha_i\alpha_k + \beta_i\beta_k) + i(\alpha_i\beta_k - \alpha_k\beta_i)].$$

В силу симметрии $k_{ik} = k_{ki}$ сумма от последней скобки обращается в нуль, т.к. при обоюдной замене i на k она меняет знак. Таким образом,

$$\sum_{i,k} k_{ik} a_i^* a_k = \sum_{i,k} k_{ik}(\alpha_i\alpha_k + \beta_i\beta_k),$$

$$\sum_{i,k} m_{ik} a_i^* a_k = \sum_{i,k} m_{ik}(\alpha_i\alpha_k + \beta_i\beta_k).$$

Иначе говоря, квадратичные формы числителя и знаменателя выражения ω^2 вещественны и положительны, т.е. вещественны и положительны корни характеристического уравнения ω_l^2. Удобно ввести обозначение

$$\lambda_l = \omega_l^2; \qquad \lambda_l > 0; \qquad \lambda_l = \lambda_l^*. \tag{47}$$

(Вещественность ω^2 очевидна и из физических соображений – наличие у ω мнимой части привело бы в (44) к наличию множителя, который убывал или возрастал бы экспоненциально, чего не допускает закон сохранения энергии.)

Амплитуды a_k можно рассматривать как составляющие s-мерного вектора. Для того чтобы подчеркнуть его принадлежность l-й собственной частоте ω_l^2, добавим еще один индекс, тогда a_{kl} обозначает k-ю компоненту l-го вектора (l – номер вектора, означающий его принадлежность l-й частоте). Теперь из (45) с учетом (47) получим

$$\lambda_i = \frac{\sum_k (k_{il} a_{lk})}{\sum_k (m_{il} a_{lk})}. \tag{48}$$

Как было подчеркнуто, ввиду однородности исходного уравнения (45) выбор одной из амплитуд произволен, и если выбрать ее вещественной, то, как это следует из (48), вещественность всех остальных обеспечивается вещественностью λ_k, k_{il} и m_{il}. (Заметим, что амплитуды Ca_k из (44) вообще должны быть комплексными, что при вещественных a_k достигается за счет масштабного множителя C.)

Введем теперь $s \times s$ матрицы $\mathbf{T}, \mathbf{V}, \mathbf{A}$ с элементами m_{ik}, k_{ik}, a_{ik} соответственно и перепишем (45) в виде матричного уравнения

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{A} = \lambda \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}. \tag{49}$$

Уравнения такого типа хорошо изучены и известны как уравнения, определяющие собственные векторы ($\mathbf{A}$) и собственные значения ($\lambda\mathbf{T}$) матрицы $\mathbf{V}$. Перепишем это уравнение в компонентах для $\lambda = \lambda_k$ и $\lambda = \lambda_n$:

$$\sum_l k_{il} a_{lk} = \lambda_k \sum_l m_{il} a_{lk}, \qquad \sum_i k_{li} a_{in} = \lambda_n \sum_i m_{li} a_{in}. \tag{50}$$

Помножим первое из этих соотношений на a_{in}, а второе на a_{lk} и просуммируем по i и l соответственно, затем, вычитая из первого результата второй, получим

$$(\lambda_k - \lambda_n) \sum_{i,l} m_{il} a_{lk} a_{in} = 0. \tag{51}$$

Будем считать, что все корни характеристического уравнения различны, тогда

$$\sum_{i,l} m_{il} a_{lk} a_{in} = 0, \qquad k \neq n.$$

Неоднозначность в определении a_{ik}, вызванную однородностью уравнений (45), можно устранить, нормируя амплитуды так, чтобы

$$\sum_{i,l} m_{il} a_{lk} a_{in} = 1.$$

Объединив два последних равенства, получим

$$\sum_{i,l} m_{il} a_{lk} a_{in} = \delta_{kn},$$

или в матричном виде

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T}\mathbf{A} = \mathbf{I}, \tag{52}$$

где тильда означает транспонирование, а I - единичная матрица.

Примечание. Преобразование

$$\acute{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{C}\mathbf{B}$$

называют конгруэнтным. Если же преобразующая матрица ортогональна $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B}^{-1}$, то конгруэнтное преобразование совпадает с преобразованием подобия.

Введем диагональную матрицу $\mathbf{\Lambda}$ с элементами $\Lambda_{ik} = \lambda_k \delta_{ik}$ и, переписав соответствующим образом матричное уравнение (49), помножим его слева на $\tilde{\mathbf{A}}$, затем, учитывая (52), получим

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{V}\mathbf{A} = \mathbf{\Lambda}. \tag{53}$$

Таким образом, $\mathbf{A}$ – преобразующая матрица конгруэнтного преобразования – является матрицей, которая одновременно диагонализует кинетическую $\mathbf{T}$ и потенциальную $\mathbf{V}$ энергию (см.(52) и (53)), другими словами, матрица $\mathbf{A}$ осуществляет такое линейное преобразование координат, результатом которого является диагонализация матриц $\mathbf{T}$ и $\mathbf{V}$.

Запишем далее общее решение основных уравнений (43) в виде

$$x_i = \sum_k C_k a_{ik} \cdot e^{-i\omega_k t}, \tag{54}$$

где ω_k - корни характеристического уравнения (46), которые называют собственными частотами колебаний системы, C_k - комплексный масштабный коэффициент, соответствующий данной собственной частоте. Покажем , что C_k можно вычислить непосредственно по начальным данным $x_i(0)$ и $\dot{x}_i(0)$. Действительно, при $t = 0$

$$x_i(0) = \sum_k (ReC_k) a_{ik}, \qquad \dot{x}_i(0) = \sum_k (ImC_k) a_{ik} \omega_k.$$

Помножив первое из этих равенств на $m_{il} a_{ln}$ и суммируя по i и l, получим

$$ReC_n = \sum_{i,l} m_{il} x_i(0) a_{ln} \tag{55}$$

и точно так же

$$ImC_n = -\frac{1}{\omega_n} \sum_{i,l} m_{il} \dot{x}_i(0) a_{ln}. \tag{56}$$

Введем теперь новые координаты ξ_i согласно

$$x_i = \sum_l a_{il} \xi_l, \qquad \mathbf{x} = \mathbf{A}\xi. \tag{57}$$

Перепишем выражения для кинетической

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \mathbf{T} \dot{\mathbf{x}}$$

и потенциальной

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2}\sum_{i,k} k_{ik}x_i x_k = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{V}\mathbf{x}$$

энергий в новых координатах, учитывая (52) и (53):

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\dot{\tilde{\xi}}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T}\mathbf{A}\dot{\xi} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\dot{\tilde{\xi}}\dot{\xi} = \frac{1}{2}\sum_k \dot{\xi}_k^2,$$

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\tilde{\xi}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{V}\mathbf{A}\xi = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\tilde{\xi}\Lambda\xi = \frac{1}{2}\sum_k \omega_k^2\xi_k^2.$$

Тогда лагранжиан системы перепишется в виде

$$L = \sum_k(\dot{\xi}_k^2 - \omega_k^2\xi_k^2), \tag{58}$$

а уравнения движения и их решения – в виде

$$\ddot{\xi}_k + \omega_k^2\xi_k = 0, \qquad \xi_k = C_k e^{-i\omega_k t}, \tag{59}$$

что позволяет записать (54) в виде (57)

$$x_i = \sum_k \xi_k a_{ik}.$$

Каждая из новых координат ξ_k является строго периодической функцией с частотой, равной одной из собственных частот. Обычно координаты ξ_k называют **нормальными** или **главными координатами** рассматриваемой многомерной системы, соответствующие каждой из них колебания называют **нормальными** или **главными колебаниями**. Полное движение системы получается как результат суперпозиции главных колебаний с учетом их амплитуд и фаз, определяемых коэффициентами C_k. Отметим, что полное колебание системы не содержит частот, кратных основным, по той простой причине, что рассматриваемые многомерные колебания считались малыми, поэтому и оказалось возможным представить потенциальную энергию системы в виде квадратичной формы, что характерно для гармонического движения. Как следствие этого мы и получили, после введения нормальных координат, лагранжиан системы в виде суммы лагранжианов гармонических осцилляторов (см. (58)). Таким образом, малые колебания многомерной системы можно рассматривать как результат возбуждения разных гармонических осцилляторов, колеблющихся с разными фазами и амплитудами.

Примеры

(a) Определить колебания системы двух линейных гармонических осцилляторов, имеющих одинаковую частоту ω_0 и взаимодействующих по закону $-\alpha xy$ (x, y - оси декартовой системы координат, по которым происходят колебания).

Лагранжиан такой системы имеет вид

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\omega_0^2}{2}(x^2 + y^2) + \alpha xy,$$

а уравнения движения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha y; \qquad \ddot{y} + \omega_0^2 y = \alpha x.$$

В соответствии с (44) будем искать решение этих уравнений в виде

$$x = Ca_x e^{-i\omega t}, \qquad y = Ca_y e^{-i\omega t},$$

что приводит к следующим алгебраическим уравнениям:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)a_x - \alpha a_y = 0,$$

$$\alpha a_x - (\omega_0^2 - \omega^2)a_y = 0.$$

Приравнивая нулю детерминант этой системы, получим характеристическое уравнение

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \alpha^2$$

с решениями

$$\lambda_1 = \omega_1^2 = \omega_0^2 - \alpha \quad (\lambda > 0 \to \alpha < \omega_0^2), \quad \lambda_2 = \omega_2^2 = \omega_0^2 + \alpha.$$

Найдем элементы матрицы $\mathbf{A} = (a_{ik})$ (индексы $i = x, y,\ k = 1\ (\omega = \omega_1),\ k = 2\ (\omega = \omega_2)$). Подставив ω_1 в исходные алгебраические уравнения, получим $a_{x1} = a_{y1}$, а для ω_2 имеем $a_{x2} = -a_{y2}$. Используем произвол в определении a_{ik} и положим $a_{x1} = a$, $a_{y2} = b$, тогда

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ a & b \end{pmatrix}.$$

По виду лагранжиана можно заключить, что $\mathbf{T}$ является единичной матрицей, тогда, используя условие ортонормированности (52), получим $a = b = 1/\sqrt{2}$, т.е.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Общее решение задачи будет иметь вид

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 - \xi_2), \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 + \xi_2),$$

где

$$\xi_1 = C_1 e^{-it\sqrt{\omega_0^2 - \alpha}}, \qquad \xi_2 = C_2 e^{-it\sqrt{\omega_0^2 + \alpha}}.$$

(b) Найти нормальные колебания и собственные частоты для системы с

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(x^2 - xy + y^2).$$

Сравнивая последнее выражение с лагранжевой функцией наиобщего вида для многомерных систем

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,k}(m_{i,k}\dot{x}_i\dot{x}_k - k_{i,k}x_i x_k), \qquad x_i = (x, y), \qquad i, k = x, y,$$

можно без труда выписать матрицы $\mathbf{T} = (m_{ik})$ и $\mathbf{V} = (k_{ik})$:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} m_{xx} & m_{xy} \\ m_{yx} & m_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение уравнений движения, соответствующих заданному лагранжиану,

$$\ddot{x} + \frac{1}{2}\ddot{y} + x - \frac{1}{2}y = 0, \qquad \frac{1}{2}\ddot{x} + \ddot{y} - \frac{1}{2}x + y = 0$$

будем искать в виде

$$x_i = C a_i e^{-i\omega t},$$

что после подстановки в уравнения дает

$$a_x(\omega^2 - 1) + \frac{1}{2}a_y(\omega^2 + 1) = 0, \qquad \frac{1}{2}a_x(\omega^2 + 1) + a_y(\omega^2 - 1) = 0.$$

Решениями характеристического уравнения

$$(\omega^2-1)^2-\frac{1}{4}(\omega^2+1)^2\equiv\frac{1}{4}(1-3\omega^2)(3-\omega^2)=0$$

будут

$$\lambda_1=\omega_1^2=3,\qquad \lambda_2=\omega_2^2=1/3,$$

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix}3&0\\0&1/3\end{pmatrix}.$$

Матрицу

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{x1}&a_{x2}\\a_{y1}&a_{y2}\end{pmatrix}$$

можно построить двояко: или решая матричное уравнение

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{V}\mathbf{A}=\mathbf{\Lambda},$$

или подставляя корни характеристического уравнения в систему алгебраических. В данном примере второй путь проще, и для $\lambda_1=\omega_1^2=3$ имеем $a_{x1}=-a_{y1}$, а для $\lambda_2=\omega_2^2=1/3$ получим $a_{x2}=a_{y2}$. (Напомним, что индексы 1 и 2 указывают на принадлежность собственным значениям λ_1 и λ_2.) Используя произвол в определении a_{ik}, выберем $a_{x1}=a$, $a_{y2}=b$ и, подставив полученную матрицу $\mathbf{A}$ в условие ортонормированности $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{T}\mathbf{A}=\mathbf{I}$, получим

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}/3\\-1&\sqrt{3}/3\end{pmatrix}.$$

Теперь можно выписать общее решение исходных уравнений

$$x_i=\sum_k a_{ik}\xi_k,$$

где ξ_k - нормальные колебания:

$$\xi_1=C_1e^{-it\sqrt{3}},\qquad \xi_2=C_2e^{-it\sqrt{3}/3}.$$

Окончательно

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}\xi,\qquad x=\xi_1+\frac{\sqrt{3}}{3}\xi_2,\qquad y=\frac{\sqrt{3}}{3}\xi_2-\xi_1.$$

Определим константы C_1 и C_2, используя формулы (55) и (56) и считая, что начальные условия заданы в общем виде $x_i(0)$ и $\dot{x}_i(0)$:

$$ReC_n = m_{11}x_1a_{1n} + m_{12}x_1a_{2n} + m_{21}x_2a_{1n} + m_{22}x_2a_{2n},$$

$$ReC_1 = \frac{1}{2}(x_1(0) - x_2(0)) \equiv X^-(0),$$

$$ReC_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1(0) + x_2(0)) \equiv \sqrt{3}X^+(0).$$

Точно так же

$$ImC_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3\cdot 2}(\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)) \equiv -\frac{\sqrt{3}}{3}\dot{X}^-(0),$$

$$ImC_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}(\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)) \equiv -\sqrt{3}\dot{X}^+(0).$$

Если представить C_n в виде

$$C_1 = b_1e^{i\delta_1}, \qquad C_2 = b_2e^{i\delta_2},$$

то нетрудно получить

$$b_1 = \sqrt{(X^-(0))^2 + \frac{1}{3}(\dot{X}^-(0))^2},$$

$$b_2 = \sqrt{3}\sqrt{(X^+(0))^2 + (\dot{X}^+(0))^2},$$

$$tg\delta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\dot{X}^-(0)}{X^-(0)}, \qquad tg\delta_2 = -\frac{\dot{X}^+(0)}{X^+(0)}.$$

Поэтому

$$\xi_1 = b_1cos(\sqrt{3}t + \delta_1), \qquad \xi_2 = b_2cos(\frac{\sqrt{3}}{3}t + \delta_2).$$

5. **Затухающие колебания. Диссипативная функция.** Выше, рассматривая малые колебания, мы подразумевали, что они происходят в пустоте, или предполагали, что влияние среды на движение пренебрежимо мало. При снятии этих ограничений необходимо учесть, что при колебаниях в среде возникает сопротивление, которое замедляет движение, а энергия колеблющегося тела в конце концов превращается в тепло или, как говорят, диссипируется. Движение с диссипацией энергии уже не является чисто механическим, его

описание требует рассмотрения движения и свойств самой среды, внутреннего теплового состояния как среды, так и тела. Другими словами, задача о движении тела в среде уже не является задачей механики. Однако для определенной категории явлений движение в среде можно приближенно описать на языке классической механики путем введения в уравнения дополнительных членов. Сюда относятся колебания, периоды которых много больше времени, характерного для завершения диссипативных процессов в однородной среде. В этом случае влияние среды на колебания тела можно учесть введением **силы трения, линейно зависящей от скорости**.

Для многомерных систем обобщенная сила трения, соответствующая координате x_i, будет линейной функцией скоростей:

$$f_i^{\text{тр}} = -\sum_k \alpha_{ik}\dot{x}_k.$$

Коэффициенты α_{ik} определяются исключительно свойствами среды, а используя средства статистической физики, можно показать их симметричность по индексам. Обобщенные силы трения весьма органично вписываются в уравнения Лагранжа, если ввести так называемую **диссипативную функцию**

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i,k} \alpha_{i,k}\dot{x}_i\dot{x}_k$$

и определить обобщенные силы в виде производных:

$$f_i^{\text{тр}} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}.$$

Тогда эти силы просто добавляются в правую часть уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}.$$

Помимо этого диссипативная функция имеет существенный физический смысл - ею определяется интенсивность диссипации энергии в системе. В этом легко убедиться, подсчитав производную по времени от энергии:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{x}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L\right) = \sum_i \dot{x}_i\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i}\right) = -\sum_i \dot{x}_i\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}.$$

Поскольку диссипативная функция – квадратичная функция скоростей, согласно теореме Эйлера об однородных функциях, получаем

$$\frac{dE}{dt} = -2F,$$

т.е. скорость изменения энергии системы во времени равна удвоенной диссипативной функции. Это соотношение показывает, что диссипативная функция – положительно определенная квадратичная форма, т.к. диссипативные процессы всегда приводят к уменьшению энергии.

Теперь, добавив обобщенные силы трения, мы без труда выпишем уравнения малых колебаний при наличии трения в виде

$$\sum_k (m_{ik}\ddot{x}_k + \alpha_{ik}\dot{x}_k + k_{ik}x_k) = 0.$$

В одномерном случае

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0,$$

или после деления на m получим

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad \frac{\alpha}{m} = 2\lambda, \qquad \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

- линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Согласно принятым правилам решение таких уравнений ищут подстановкой $x = e^{rt}$. Тогда для r имеем характеристическое уравнение

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0,$$

а общим решением дифференциального уравнения будет

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad \text{где} \quad r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}.$$

По причине, которая выяснится в ходе дальнейшего изложения, λ называют коэффициентом затухания, и в зависимости от его значения будем различать три случая:

(a) $\lambda > \omega_0$. Тогда оба значения r вещественны и отрицательны:

$$x = C_1 exp[-(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t] + C_2 exp[-(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t].$$

В этом случае, когда трение достаточно велико, x убывает, асимптотически приближаясь к положению равновесия. Такой тип движения называют **апериодическим затуханием.**

(b) $\lambda = \omega_0$. В этом случае характеристическое уравнение имеет только один корень $r = -\lambda$, а решение дифференциального уравнения имеет вид

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-\lambda t}.$$

И вновь мы пришли к апериодическому затуханию.

(c) $\lambda < \omega_0$. В этом случае корни характеристического уравнения комплексно сопряжены, а решение дифференциального уравнения записывается в виде

$$x = Re\{Aexp(-\lambda t + it\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2})\}.$$

Выделив действительную часть, получим

$$x = ae^{-\lambda t}cos(\omega t + \alpha), \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}.$$

Таким образом, в этом случае движение можно рассматривать как гармонические колебания с экспоненциально убывающей амплитудой $ae^{-\lambda t}$, иначе говоря, как **затухающие колебания**, причем частота колебаний меньше частоты свободных колебаний в отсутствие трения, а скорость убывания амплитуды определяется коэффициентом затухания λ.

6. **Вынужденные колебания при наличии трения.** Допустим, что на механическую систему, которая совершает затухающие колебания (колеблется в среде с трением), действует нестационарная, т.е. зависящая от времени, сила. Предположим, что эта внешняя сила зависит от времени согласно

$$f = f_0 e^{\alpha t} cos\gamma t.$$

Уравнения движения задачи в этом случае принимают вид

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m}e^{\alpha t}cos\gamma t$$

или в удобной для расчетов комплексной записи

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m}e^{\alpha t + i\gamma t}.$$

Решение этого уравнения $x = x_0 + x_1$ есть сумма общего решения однородного уравнения, которое, как известно, имеет характер колебаний $x_0 = ae^{-\lambda t}cos(\omega t + \beta)$ только при $\lambda < \omega_0$, где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$, и какого-либо частного решения неоднородного уравнения x_1. Будем искать частное решение в виде $x_1 = Be^{\alpha t + i\gamma t}$. Подставив в исходное уравнение, получим

$$B = \frac{f_0}{m[\omega_0^2 - \gamma^2 + \alpha^2 + 2\alpha\lambda + 2i\gamma(\lambda + \alpha)]}.$$

Поскольку B - комплексная величина, представим ее в виде $B = be^{i\delta}$, определим b и δ. Для этого необходимо представить B в обычном виде $u + iv$, помножив числитель и знаменатель B на величину, комплексно сопряженную знаменателю, тогда, как известно, $b = \sqrt{u^2 = v^2}$, а $tg\delta = v/u$. Выделив затем вещественную часть x_1, в результате получим

$$x_1 = be^{\alpha t} cos(\gamma t + \delta),$$

где

$$b = \frac{f_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2 + \alpha^2 + 2\alpha\lambda)^2 + 4\gamma^2(\lambda + \alpha)^2}},$$

$$tg\delta = -\frac{2\gamma(\lambda + \alpha)}{\omega_0^2 - \gamma^2 + \alpha^2 + 2\alpha\lambda}.$$

Как уже было сказано, общее решение задачи есть сумма $x = x_0 + x_1$, однако общее решение однородного уравнения x_0 затухает со временем, поэтому через достаточно большой промежуток времени решением задачи будет

$$x = x_1 = be^{\alpha t} cos(\gamma t + \delta).$$

Амплитуда вынужденных колебаний при наличии трения при совпадении частоты вынуждающей силы γ с частотой собственных колебаний ω_0 растет, но не обращается в бесконечность, как это было при резонансе в отсутствие трения. При заданной амплитуде силы f_0 амплитуда колебаний становится максимальной при частоте $\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$ (для упрощения расчетов здесь и далее примем $\alpha = 0$).

Рассмотрим область вблизи резонанса $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$ ($\varepsilon \ll \omega_0$), будем считать также $\lambda \ll \omega_0$, тогда

$$\gamma^2 - \omega_0^2 = (\gamma + \omega_0)(\gamma - \omega_0) \approx 2\omega_0\varepsilon, \qquad 2i\gamma\lambda = 2i\lambda\omega_0,$$

поэтому

$$B = -\frac{f_0}{2m\omega_0(\varepsilon - i\lambda)}, \qquad b = \frac{f_0}{2m\omega_0\sqrt{\varepsilon^2+\lambda^2}}, \qquad tg\delta = \frac{\lambda}{\varepsilon}.$$

При установившемся движении

$$x = bcos(\gamma t + \delta)$$

энергия системы остается неизменной. В то же время система непрерывно поглощает энергию от источника вынуждающей силы, которая диссипируется благодаря трению. Если обозначить посредством $I(\gamma)$ количество энергии, поглощаемой в среднем в единицу времени, то, как было показано в предыдущем пункте,

$$I(\gamma) = 2\bar{F},$$

где $\bar{F}$ – среднее за период значение диссипативной функции. В одномерном случае $F = \alpha\dot{x}^2/2 = \lambda m\dot{x}^2$ или $F = \lambda m b^2\gamma^2 sin^2(\gamma t + \delta)$, тогда, имея в виду, что среднее от квадрата синуса за период есть $1/2$, имеем

$$I(\gamma) = \lambda m b^2\gamma^2.$$

Подставив сюда выражение амплитуды колебаний вблизи резонанса, получим

$$I(\varepsilon) = \frac{f_0^2}{4m}\frac{\lambda}{\varepsilon^2+\lambda^2}.$$

Такой вид зависимости поглощения от частоты называют **дисперсионным**. $I(\varepsilon)$ максимально при $\varepsilon = 0$:

$$I(0) = \frac{f_0^2}{4m\lambda}.$$

Таким образом, при резонансе поглощение наибольшее, а при уменьшении коэффициента затухания резонансная кривая становится уже и выше. Полушириной резонансной кривой называют значение ε, при котором

$$I(\varepsilon) = I(0)/2.$$

Из формулы для $I(\varepsilon)$ легко заметить, что эта полуширина совпадает с показателем затухания (см. рис. 16).

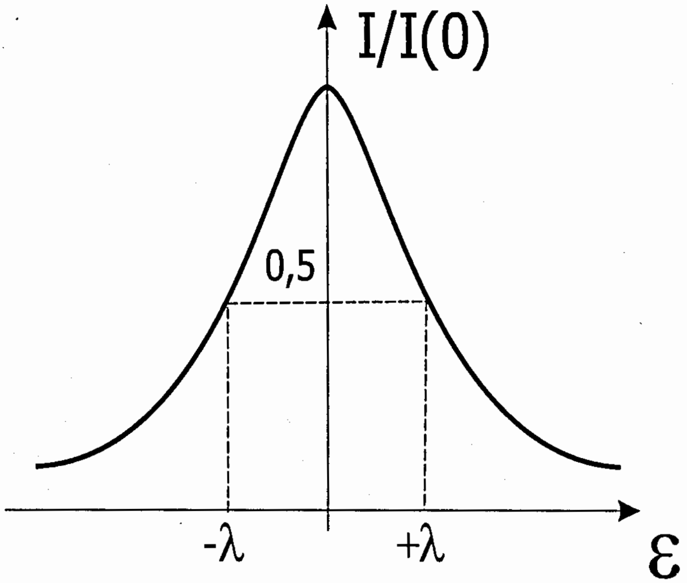

Рис. 16

7. **Движение в быстро осциллирующем поле.** Рассмотрим движение частицы, которая находится одновременно под действием постоянного поля U и силы

$$f = f_1 \cos \omega t + f_2 \sin \omega t.$$

Предположим, что частота ω изменения этой силы со временем много больше частоты собственных колебаний, которые частица совершала бы только в поле U. Предположим также, что вызванное силой f колебательное смещение частицы (будем обозначать его ξ) мало.

Уравнение движения частицы

$$m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} + f.$$

Характер поля, действующего на частицу, подсказывает, что движение частицы должно представлять из себя перемещение вдоль некоей плавной траектории с одновременными малыми осцилляциями (с частотой ω) вокруг этой траектории. В соответствии со сказанным

$$x(t) = X(t) + \xi(t).$$

Усредним это выражение по периоду изменения $\xi(t)$. Ясно, что $<\xi(t)>= 0$, тогда $< x(t) >= X(t)$, т.е. $X(t)$ описывает усредненное по быстрым осцилляциям "плавное" движение частицы. Подставив теперь $x(t)$ в уравнение движения и разложив по степеням ξ с точностью до членов первого порядка малости, получим

$$m\ddot{X} + m\ddot{\xi} = -\frac{dU}{dX} - \xi\frac{d^2U}{dX^2} + f(X,t) + \xi\frac{df}{dX}.$$

В этом уравнении фигурируют члены различного характера – быстро осциллирующие и плавные. Приравнивая величины одинакового характера, для осциллирующих имеем

$$m\ddot{\xi} = f(X,t)$$

(отброшены содержащие малый множитель ξ члены, а $\ddot{\xi}$ пропорционально ω^2 и достаточно велико). Рассматривая X как постоянную, найдем

$$\xi = \frac{f}{m\omega^2}.$$

После усреднения, учитывая, что $< f >=< \xi >= 0$, получим уравнение, определяющее $X(t)$:

$$m\ddot{X} = -\frac{dU}{dX} + < \xi\frac{df}{dX} >= -\frac{dU}{dX} + \frac{1}{m\omega^2} < f\frac{df}{dX} >,$$

которое можно переписать в виде

$$m\ddot{X} = -\frac{dU_{\text{эфф}}}{dX},$$

где

$$U_{\text{эфф}} = U + \frac{1}{2m\omega^2} < f^2 >= U + \frac{1}{4m\omega^2}(f_1^2 + f_2^2) = U + \frac{m}{2} < \dot{\xi}^2 > .$$

Итак, дополнительный по отношению к полю U член представляет собой среднюю кинетическую энергию осцилляционного движения. Другими словами, усредненное по быстрым осцилляциям движение частицы происходит так, как если бы помимо постоянного поля U действовало бы еще одно постоянное поле, квадратично зависящее от амплитуды переменного поля.

8. **Нарушение симметрии при колебаниях в поле симметричного потенциала.** В приближенных к реальным задачах о колебаниях линейного осциллятора часто полагают, что потенциальная энергия зависит также и от некоторых дополнительных параметров.

Примером таких колебаний может служить движение в потенциальном поле:

$$U(x,k) = \frac{kx^2}{2} + \frac{\gamma x^4}{4}, \qquad \gamma > 0. \tag{60}$$

Положение равновесия в таком поле определяется корнями уравнения

$$\frac{dU}{dx} = kx + \gamma x^3 = 0. \tag{61}$$

(a) Если $k > 0$, то (61) имеет единственный корень $x_0 = 0$, который соответствует положению устойчивого равновесия

$$\left| d^2U/dx^2 \right|_{x_0} > 0.$$

(b) Если $k < 0$, то уравнение (61) имеет три корня:

$$x_2 = 0, \qquad \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_2} = -|k| < 0$$

и

$$x_{1,3} = \pm\sqrt{\frac{|k|}{\gamma}}, \qquad \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_{1,3}} = 2|k| > 0.$$

В случае (b) возможны два симметричных положения устойчивого равновесия x_1 и x_3. При непрерывном изменении параметра k от положительных значений к отрицательным устойчивое равновесие в точке x_0 превращается в неустойчивое в x_2. Эта неустойчивость нарушает симметрию, присущую энергии взаимодействия $U(x,k) = U(-x,k)$, поскольку при движении с $E < 0$ частица может оказаться как в левой, так и в правой потенциальных ямах (см. рис. 17, $k = 2A$). В окрестности точки x_3 при движении с $E < 0$

$$x(t) = x_3 + a \cdot cos(\omega_0 t + \alpha), \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{2\mid k\mid}{m}}$$

решение не обладает симметрией взаимодействия. Таким образом, если при своем изменении один из параметров потенциальной энергии (в данном случае k) проходит через критическое значение (в данном случае $k = 0$), происходит качественная перестройка системы. Явление такого типа принято называть **бифуркацией** (от английского bifurcation – раздвоение).

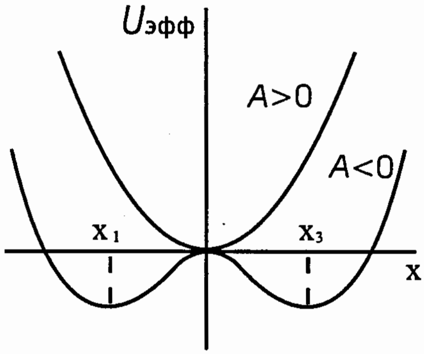

Рис. 17

- **Примечание. Механическая модель фазовых переходов второго рода.** Железный шарик массой m может колебаться вдоль оси y на пружине, потенциальная энергия которой

$$U(y) = -Cy^2 + By^4.$$

Электромагнит возбуждает колебания шарика по закону $y_0 \cos \gamma t$, причем γ много больше частоты собственных колебаний шарика. Какова частота колебаний шарика в зависимости от параметра $T = y_0^2$?

Уравнение движения шарика

$$m\ddot{y} = -\frac{dU(y)}{dy} + f(t).$$

Собственное движение шарика под действием пружины описывается "низкочастотным" смещением $x = y - y_0 \cos \gamma t$. Для этого смещения (см. пункт 7)

$$m\ddot{x} = -\frac{dU(x + y_0 \cos \gamma t)}{dx}.$$

Усредняя по периоду $2\pi/\gamma$ высокочастотного движения и учитывая, что $< \cos^2 \gamma t >= 1/2$, $< \cos^4 \gamma t >= 3/8$, $< \cos^{2n+1} \gamma t >= 0$, получаем соответствующую эффективную потенциальную энергию

$$U_{эфф} = Ax^2 + Bx^4, \quad \text{где} \quad A = -C + \frac{9}{4}By_0^2.$$

График функции $U_{эфф}(x)$ изображен на рис.17.

При $A > 0$ или $y_0^2 = T > T_c = 4C/9B$ шарик колеблется вокруг положения устойчивого равновесия $x = 0$ с частотой $\omega = \sqrt{2A/m} \sim$

$\sqrt{T - T_c}$. При $A < 0$ или $T < T_c$ минимумы $U_{\text{эфф}}(x)$ расположены в точках $\pm\sqrt{-A/2B}$ и шарик колеблется вблизи одного из них с частотой $\omega = \sqrt{-A/m} \sim \sqrt{T_c - T}$.

Эта картина достаточно близка к картине фазовых переходов второго рода. Быстрые вынужденные колебания являются аналогом теплового движения, соответствующего тем модам колебаний системы, которые не связаны с фазовым переходом. $T = y_0^2$ – аналог температуры. При больших T система колеблется вокруг единственного положения равновесия и существует симметрия относительно замены $x \mapsto -x$. При уменьшении температуры до значений $T < T_c$ шарик начинает колебаться вокруг одного из двух новых положений равновесия, при этом симметрия $x \mapsto -x$ разрушается. Значение T_c – аналог температуры фазового перехода второго рода.

VIII. ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Совокупность материальных точек образует **твердое тело**, если расстояние между любыми парами этих точек остается неизменным при их движении. Реально существующие тела удовлетворяют этому условию приближенно, но большинство твердых тел так незначительно изменяют свою форму и размеры, что этими изменениями обычно пренебрегают.

В механике твердые тела обычно рассматривают как сплошные, не интересуясь их внутренней структурой, однако в дальнейшем для упрощения выводов твердое тело в некоторых случаях будет рассматриваться как дискретная совокупность материальных точек. Формулы, содержащие суммирование по дискретным точкам, переводятся в формулы для сплошных тел простой заменой

$$\sum_a m_a \to \int \rho dV = \int dm,$$

где суммирование распространено по всем частицам тела, интеграл берется по его объему, а ρ – плотность массы.

Расстояние между любыми парами точек твердого тела не меняется при движении, поэтому если заданы координаты трех его точек, не лежащих на одной прямой, то положение остальных будет определено. Как отмечалось выше, число степеней свободы твердотельного треугольника, в вершинах которого расположены частицы, равно шести. Следовательно, число степеней свободы твердого тела будет также равно шести.

Для описания движения твердого тела обычно используют две системы координат (СК): неподвижную (инерциальную) XYZ (в дальнейшем будем называть ее K_0) и жестко связанную с твердым телом, участвующую во всех его движениях, $x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z$ (в дальнейшем – K_ω). Начало K_ω обычно совмещают с центром инерции тела и определяют заданием радиуса-вектора $\vec{R}$ этой точки в K_0. Ориентация осей K_ω относительно осей K_0 определится заданием оставшихся трех независимых величин. В некоторых случаях удобно вводить СК, начало которой совмещено с началом K_ω, а оси остаются параллельными осям K_0 при любом перемещении твердого тела (эту СК в дальнейшем будем называть K).

1. **Теоремы Эйлера и Шаля о движении твердого тела.** Изменение ориентации твердого тела не может изменить расстояния между точками или длину радиуса-вектора точки в жестко связанной с твердым телом СК, поэтому ориентацию твердого тела в некоторый момент времени можно задать ортогональным преобразованием, элементы которого выражены через подходящие параметры. Матрица такого ортогонального преобразования меняется со временем вместе с изменением ориентации, кроме того, ясно, что если при $t = 0$ оси движущейся вместе с твердым телом системы K_ω совпадают с осями K, то преобразование начинается с тождественного:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A(t)}, \quad \mathbf{A(0)} = \mathbf{I}.$$

Матрица $\mathbf{A}$ – непрерывная функция времени.

- **Справка. Ортогональные преобразования.** *Ортогональными называют преобразования координат*

$$x^i = A^i_k \acute{x}^k, \qquad \acute{x}^i = B^i_k x^k,$$

сохраняющие расстояние между двумя точками. Исходя из определения получим

$$x^i x_i = A^i_l \acute{x}^l A^m_i \acute{x}_m = \acute{x}^m \acute{x}_m \quad \Rightarrow \quad A^i_l A^m_i = \delta^m_l.$$

Последнее соотношение, которое является условием ортогональности преобразования, можно переписать в матричном виде

$$\tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Помножив справа на $\mathbf{A}^{-1}$, *получим эквивалентное условие*

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{-1}.$$

(Здесь тильда означает транспонирование.) Ортогональные преобразования образуют группу симметрии функций $f(x^2 + y^2 + z^2)$*, что непосредственно следует из их определения. Иногда матрицу ортогонального преобразования называют просто ортогональной матрицей.*

После этих предварительных замечаний сформулируем и докажем положение, известное как **теорема Эйлера о движении твердого тела: произвольное перемещение твердого тела с одной закрепленной точкой является вращением.**

Примем, что закрепленным является начало системы K_ω, жестко связанной с телом, тогда перемещение твердого тела может привести лишь к изменению ориентации осей этой СК. Теорема Эйлера утверждает, что новая ориентация осей получается поворотом их начальной ориентации, совмещенной с положением осей K. Другими словами, согласно теореме Эйлера, операция, которую осуществляет матрица $\mathbf{A}$, есть вращение. Для вращения характерны

(a) неизменное направление оси вращения, означающее, что любой вектор, направленный вдоль оси вращения, имеет пропорциональные компоненты в начальном и конечном положениях СК,

(b) неизменность величины (модуля) векторов.

Следовательно, для доказательства теоремы Эйлера достаточно показать, что существует вектор $\mathbf{R}$, который имеет одинаковые составляющие в начальном и конечном положениях твердого тела, т.е.

$$\acute{\mathbf{R}} = \mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{R},$$

или в более общем виде

$$\acute{\mathbf{R}} = \mathbf{A}\mathbf{R} = \lambda\mathbf{R}.$$

Как было отмечено в пункте 4 предыдущей главы, значения константы λ, при которых уравнение имеет нетривиальные решения, называют **собственными значениями** матрицы $\mathbf{A}$, а векторы $\mathbf{R}$, удовлетворяющие этому уравнению, – ее **собственными векторами**. Таким образом, теорему Эйлера можно переформулировать следующим образом: **одним из собственных значений ортогональной матрицы A, определяющей движение твердого тела с одной закрепленной точкой, является** +1.

Матричное уравнение

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{R} = \mathbf{0}$$

представляет собой систему трех однородных уравнений относительно $\mathbf{R}$ и поэтому определяет собственные векторы с точностью до их отношений. Это уравнение имеет отличные от нуля решения, лишь если детерминант

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0.$$

Корни последнего алгебраического уравнения есть собственные значения. Напомним, что такие уравнения обычно называют характеристическими. Теорема Эйлера утверждает, что один из корней характеристического уравнения равен +1.

Обозначим компоненты собственного вектора $\mathbf{R}$ через X_{ik}, где первый индекс – это номер компоненты, а второй – номер самого собственного вектора. Тогда исходное матричное уравнение перепишется в виде

$$\mathbf{AX} = \mathbf{X}\Lambda \;\Rightarrow\; \Lambda = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{AX}; \quad \text{где} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Итак, задача определения собственных значений матрицы свелась к задаче о ее диагонализации. Элементы получившейся диагональной матрицы будут искомыми собственными значениями $\mathbf{A}$. Докажем несколько лемм, относящихся к собственным значениям ортогональной матрицы $\mathbf{A}$.

(a) **Модуль каждого собственного значения равен 1.** Модуль вектора является инвариантом ортогональных преобразований, которые осуществляет матрица $\mathbf{A}$, т.е. $\acute{\mathbf{R}}^*\acute{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^*\mathbf{R}$, и т.к. $\acute{\mathbf{R}} = \lambda\mathbf{R}$, то $\lambda^*\lambda = 1$.

(b) **Ортогональная матрица A вещественна, поэтому одно из ее собственных значений также вещественно.** Действительно, вследствие вещественности $\mathbf{A}$ вещественны коэффициенты характеристического уравнения

$$\nu(\lambda) \equiv \lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0.$$

При больших отрицательных значениях λ многочлен $\nu < 0$, а при больших положительных λ многочлен $\nu > 0$, следовательно, $\nu(\lambda)$ по крайней мере один раз пересекает вещественную ось между $\lambda \to -\infty$ и $\lambda \to \infty$. Учитывая содержание предыдущей леммы, заключаем, что этот вещественный корень равен $+1$ или -1.

(c) **Число, комплексно-сопряженное собственному значению, есть также собственное значение.** Пусть λ – корень характеристического уравнения $\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0$. Эквивалентное комплексно-сопряженное уравнение имеет решение λ^*, ясно, что оно также будет решением исходного уравнения.

(d) **Произведение корней характеристического уравнения равно** $+1$:

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det \mathbf{\Lambda}.$$

Детерминант матрицы – инвариант преобразования подобия, поэтому $\det \mathbf{\Lambda} = \det \mathbf{A}$, а детерминант матрицы ортогонального преобразования $\mathbf{A}$ равен $+1$ или -1. Матрица с детерминантом -1 пропорциональна матрице инверсии, но инверсия не может быть осуществлена перемещением СК, жестко связанной с твердым телом, одна из точек которого закреплена. Поэтому $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = +1$.

Приступим к доказательству теоремы Эйлера, для чего выясним, какими могут быть возможные собственные значения вещественной ортогональной матрицы с детерминантом, равным $+1$. Эти три собственных значения не могут быть вещественными и различными, т.к. вещественные корни характеристического уравнения равны $+1$ или -1 (см. лемму (b)). Далее, если собственные значения вещественны и два из них равны друг другу, то третий корень непременно должен быть равен $+1$, чтобы детерминант был равен $+1$. Соответствующий тождественному преобразованию случай, когда все три корня равны $+1$, исключается. Единственной оставшейся возможностью является существование одного вещественного и двух комплексных собственных значений, но комплексные корни всегда должны быть сопряженными, и их произведение будет равно $+1$, следовательно, чтобы обеспечить нужную величину детерминанта, третий корень будет равен $+1$.

Теорема Эйлера доказана: при любом нетривиальном физическом преобразовании рассматриваемого тела по крайней мере одно из собственных значений матрицы преобразования равно +1.

Непосредственным следствием теоремы Эйлера является **теорема Шаля: произвольным перемещением твердого тела в пространстве является поступательное движение плюс вращение**. Доказательство этой теоремы вряд ли необходимо, т.к. интуитивно ясно, что если, изменив условия теоремы Эйлера, освободить закрепленную точку, то появятся три степени свободы для начала жестко связанной с твердым телом СК, а перемещение этой точки сведется к поступательному движению твердого тела как целого.

2. **Угловая скорость.** Бесконечно малое произвольное перемещение твердого тела можно представить в виде суммы бесконечно малого параллельного переноса тела, в результате которого центр инерции переходит из начального положения в конечное при неизменной ориентации осей, и бесконечно малого поворота вокруг центра инерции, в результате которого твердое тело оказывается в конечном положении.

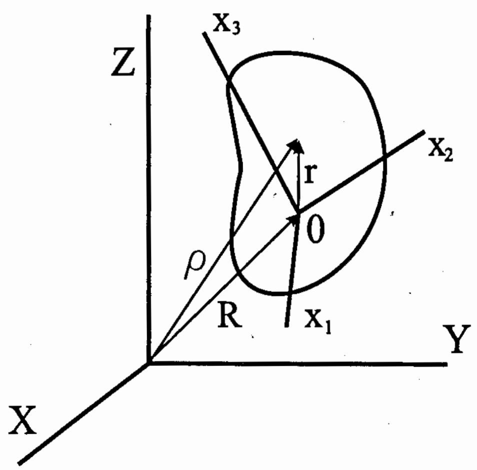

Рис. 18

Обозначим радиус-вектор произвольной точки твердого тела в K_ω посредством $\vec{r}$, радиус-вектор той же точки в K_0 – $\vec{\varrho}$ (см. рис. 18), тогда если $\vec{R}$ – радиус-вектор центра инерции тела в K_0, то

$$d\vec{\varrho} = d\vec{R} + [d\vec{\varphi}, \vec{r}].$$

Нетрудно убедиться, что перемещение точки относительно центра инерции на бесконечно малый угол $d\vec{\varphi}$ есть $[d\vec{\varphi}, \vec{r}]$. Для этого покажем, во-первых, что матрица бесконечно малого поворота системы координат может быть представлена в виде $\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{I}} + \hat{\varepsilon}$, где $\hat{\varepsilon}$ – антисимметричная матрица. Действительно, при повороте на угол $\varphi = 0$ матрица $\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{I}}$ есть матрица тождественного преобразования, а если угол поворота мал, то $\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{I}} + \hat{\varepsilon}$, причем элементы $\varepsilon_{ik} \ll 1$. Длина произвольного радиуса-вектора

$$x^i x_i = A^i_k \acute{x}^k A^l_i \acute{x}_l = (\delta^i_k + \varepsilon^i_k)\acute{x}^k(\delta^l_i + \varepsilon^l_i)\acute{x}_l \approx$$
$$\delta^i_k \delta^l_i \acute{x}^k \acute{x}_l + \delta^i_k \varepsilon^l_i \acute{x}^k \acute{x}_l + \delta^l_i \varepsilon^i_k \acute{x}^k \acute{x}_l$$

не меняется при вращениях $(x^i x_i = \acute{x}^k \acute{x}_l)$, поэтому

$$\delta^i_k \varepsilon^l_i \acute{x}^k \acute{x}_l + \delta^l_i \varepsilon^i_k \acute{x}^k \acute{x}_l = 0 \quad \text{или} \quad \varepsilon_{kl} \acute{x}^k \acute{x}^l = -\varepsilon_{lk} \acute{x}^k \acute{x}^l \Longrightarrow \varepsilon_{kl} = -\varepsilon_{kl}.$$

Итак, матрица $\hat{\varepsilon}$ антисимметрична. Теперь можно показать, что эта матрица описывает бесконечно малый поворот системы координат. Введем для этого вектор, дуальный ε_{ik}, согласно

$$\delta\varphi^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ikl}\varepsilon_{kl},$$

тогда

$$2\epsilon_{mni}\delta\varphi^i = \epsilon^{kli}\epsilon_{mni}\varepsilon_{kl} = (\delta^k_m \delta^l_n - \delta^k_n \delta^l_m)\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{mn} - \varepsilon_{nm} = 2\varepsilon_{mn}.$$

Следовательно,

$$\varepsilon^{ik} = \epsilon^{ikl}\delta\varphi_l.$$

Ввиду того, что

$$x^i = (\delta^i_k + \varepsilon^i_k)\acute{x}^k = \acute{x}^i + \varepsilon^{ik}\acute{x}_k = \acute{x}^i + \epsilon^{ikl}\acute{x}_k \delta\varphi_l,$$

для δx^i в векторных обозначениях получим

$$\delta\vec{r} = [\delta\vec{\varphi} \cdot \vec{r}].$$

Таким образом, антисимметричная матрица $\hat{\varepsilon}$ описывает бесконечно малый поворот системы координат, а дуальный ей псевдовектор $\delta\vec{\varphi}$ есть угол бесконечно малого поворота, величина которого совпадает с $\delta\varphi$, а направление – с направлением базисного вектора оси вращения.

Введем скорости

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\varrho}}{dt}, \quad \vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}, \quad \vec{\Omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt},$$

тогда

$$\vec{v} = \vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{r}],$$

где $\vec{V}$ – скорость центра инерции тела (скорость поступательного движения), $\vec{\Omega}$ – вектор угловой скорости вращения твердого тела, направление которого совпадает с направлением оси вращения. (Точнее, $\vec{\Omega}$ – псевдовектор).

Допустим, что начало координат O жестко связанной с твердым телом K_ω смещено в точку $\acute{O}$ так, что $\vec{r} = \vec{r}\,'+\vec{a}$, где $\vec{r}\,'$ – радиус-вектор точки относительно нового начала координат. В этом случае, с одной стороны, подставив последнее соотношение в связь между скоростями, выведенную для СК с началом в точке O, имеем

$$\vec{v} = \vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{a}] + [\vec{\Omega}, \vec{r}\,'],$$

с другой стороны,

$$\vec{v}\,' = \vec{V}\,' + [\vec{\Omega}\,', \vec{r}\,'].$$

Сравнивая, получаем

$$\vec{v}\,' = \vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{a}], \quad \vec{\Omega} = \vec{\Omega}\,'.$$

Таким образом, угловая скорость, с которой вращается в каждый данный момент жестко связанная с телом СК, оказывается не зависящей от выбора СК. Все жестко связанные с телом СК вращаются вокруг параллельных осей с одинаковой по величине угловой скоростью.

- **Замечание**. Допустим, что в одной и той же точке заданы две ортогональные СК, одна из которых с базисом $\vec{k}_i$ неподвижна, а ориентация второй, с базисом $\vec{e}_i$, изменяется со временем, причем

  $$\vec{e}_i = A_{im}(t)\vec{k}_m.$$

  A_{im} – элементы ортогональной матрицы. Действительно,

  $$\vec{e}_i\vec{e}_m = A_{in}A_{ml}\vec{k}_n\vec{k}_l,$$

  а базисы ортогональны, поэтому $A_{in}A_{mn} = \delta_{im}$, или $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{-1}$. Продифференцируем по времени связь между базисными векторами

  $$\frac{d\vec{e}_i}{dt} = \frac{dA_{im}}{dt}\vec{k}_m = \frac{dA_{im}}{dt}\tilde{A}_{mn}\vec{e}_n = \omega_{in}\vec{e}_n, \quad \omega_{in} = \frac{dA_{im}}{dt}\tilde{A}_{mn}.$$

ω_{in} – элементы антисимметричной матрицы, в чем легко убедиться, дифференцируя условие ортогональности $A_{im}\tilde{A}_{mn} = \delta_{in}$:

$$\frac{dA_{im}}{dt}\tilde{A}_{mn} + A_{im}\frac{d\tilde{A}_{mk}}{dt} =$$

$$\frac{dA_{im}}{dt}\tilde{A}_{mn} + \frac{dA_{nm}}{dt}\tilde{A}_{mi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{in} = -\omega_{ni}.$$

Три независимых элемента антисимметричной матрицы ω_{in} определяют компоненты дуального ей псевдовектора согласно

$$\Omega_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ikl}\omega_{kl}, \quad \omega_{kl} = \frac{dA_{km}}{dt}\tilde{A}_{ml},$$

который по смыслу предыдущих операций и по аналогии со случаем бесконечно малого поворота назовем вектором угловой скорости базиса $\vec{e}_i$ относительно $\vec{k}_i$. В частности, если $\vec{k}_i$ – базис введенной ранее системы координат K, а $\vec{e}_i$ – системы K_ω, то $\vec{\Omega}$ – угловая скорость поворота K_ω относительно K.

3. **Кинетическая энергия твердого тела. Тензор моментов инерции.** Для вычисления кинетической энергии будем рассматривать твердое тело как дискретный набор материальных точек, тогда

$$T = \sum \frac{mv^2}{2},$$

где суммирование распространено на все частицы тела. (Здесь и ниже индекс такого суммирования опущен.) Если совместить начало подвижной СК с центром инерции тела, то с точки зрения неподвижного наблюдателя скорость перемещения твердого тела будет суммой скорости вращения K_ω относительно K и скорости поступательного движения системы K относительно K_0:

$$\vec{v} = \vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{r}],$$

подставив которое в выражение для T и учитывая, что скорости $\vec{V}$ и $\vec{\Omega}$ одинаковы для всех частиц, получим

$$T = \frac{1}{2}V^2\sum m + [\vec{V}, \vec{\Omega}]\sum m\vec{r} + \frac{1}{2}\sum m[\vec{\Omega}, \vec{r}]^2 =$$

$$\frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}\sum m\left(\Omega^2 r^2 - (\vec{\Omega}\cdot\vec{r})^2\right), \quad \mu = \sum m.$$

Слагаемое, пропорциональное $\sum m\vec{r}$, обращается в нуль, т.к. начало координат выбрано в центре инерции твердого тела. Итак, кинетическая энергия твердого тела представлена в виде суммы двух слагаемых:

(a) кинетической энергии поступательного движения (она имеет такой вид, как если бы вся масса тела была сосредоточена в центре инерции, который перемещается со скоростью V);

(b) кинетической энергии вращательного движения с угловой скоростью $\vec{\Omega}$ вокруг оси, проходящей через центр инерции.

Уместно подчеркнуть, что такое разделение обусловлено выбором начала системы координат K_ω в центре инерции тела. Используя тождество $\Omega_i = \sum_k \delta_{ik}\Omega_k \equiv \delta_{ik}\Omega_k$ (здесь, как и ранее, по дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование), перепишем выражение кинетической энергии вращения в тензорных обозначениях:

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2}\sum m\left(\Omega_i^2 x_l^2 - \Omega_i x_i \Omega_k x_k\right) = \frac{1}{2}\sum m\left(\Omega_i\Omega_k\delta_{ik}x_l^2 - \Omega_i\Omega_k x_i x_k\right) =$$

$$\frac{1}{2}\Omega_i\Omega_k\sum m\left(x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k\right).$$

Теперь, если ввести тензор

$$I_{ik} = \sum m\left(x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k\right),$$

выражение для кинетической энергии твердого тела приобретает вид

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}I_{ik}\Omega_i\Omega_k.$$

Тензор I_{ik} называется **тензором моментов инерции твердого тела**. По определению он аддитивен и симметричен $I_{ik} = I_{ki}$, а его компоненты в явном виде представляет матрица

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} \sum m(y^2+z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(x^2+z^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2+y^2) \end{pmatrix}.$$

Как всякий симметричный тензор второго ранга, тензор моментов инерции можно привести к диагональному виду путем выбора направления осей x_1, x_2, x_3. Эти оси называют **главными осями**

инерции, а соответствующие значения компонент тензора I_1, I_2, I_3 – главными моментами инерции. Понятно, что в этом случае

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2).$$

Легко заметить, что каждый из трех главных моментов инерции не превышает суммы двух других:

$$I_1 + I_2 = \sum m(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) \geq \sum m(x_1^2 + x_2^2) = I_3.$$

Если есть необходимость рассматривать твердое тело как сплошное, в определении тензора моментов инерции сумма должна быть заменена интегралом

$$I_{ik} = \int \rho \left(x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k\right) dV = \int dm \left(x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k\right).$$

- **Замечание**. Тензор моментов инерции

$$I_{ik} = \sum m \left(x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k\right)$$

определен в СК, начало которой совмещено с центром инерции твердого тела O. В некоторых случаях проще вычислить тензор

$$\acute{I}_{ik} = \sum m \left(\acute{x}_l^2\delta_{ik} - \acute{x}_i \acute{x}_k\right),$$

аналогичный I_{ik}, но определенный в СК с началом в точке $\acute{O}$, смещенным по сравнению с O на $\vec{a}$ так, что $\acute{x}_i = x_i + a_i$. Подставив эту связь в определение вспомогательного тензора $\acute{I}_{ik}$ и учитывая, что $\sum m\vec{r} = 0$, получим

$$I'_{ik} = I_{ik} + \mu(a^2\delta_{ik} - a_i a_k),$$

что позволяет, зная I'_{ik}, найти I_{ik}. Это соотношение устанавливает связь между моментами инерции относительно параллельных осей, одна из которых проходит через центр инерции:

$$\acute{I} = I + \mu l^2.$$

Момент инерции тела относительно какой-либо оси $\acute{k} = \{\acute{x}, \acute{y}, \acute{z}\}$ равен моменту инерции относительно параллельной оси $k = \{x, y, z\}$, проходящей через центр масс, сложенному с величиной μl^2, где l - расстояние между этими осями (теорема Гюйгенса - Штейнера).

4. **Момент импульса твердого тела.** Величина момента импульса зависит от выбора точки, относительно которой он определен. Ниже мы будем понимать под $\vec{M}$ момент импульса, определенный относительно центра инерции твердого тела, поэтому $\vec{M}$ будет связан только с движением точек тела относительно центра инерции, т.е. в определении $\vec{M} = \sum m[\vec{r}, \vec{v}]$ надо принять $\vec{v} = [\vec{\Omega}, \vec{r}]$:

$$\vec{M} = \sum m[\vec{r}, [\vec{\Omega}, \vec{r}]] = \sum m(r^2\Omega - \vec{r}(\vec{r}\vec{\Omega})),$$

или в тензорных обозначениях

$$M = \Omega_k \sum m \left(x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k\right) = I_{ik}\Omega_k.$$

Если оси подвижной СК направлены вдоль главных осей инерции, то

$$M_1 = I_1\Omega_1, \quad M_2 = I_2\Omega_2, \quad M_3 = I_3\Omega_3.$$

В общем случае тела произвольной формы вектор момента импульса $\vec{M}$ не совпадает по направлению с вектором $\vec{\Omega}$. В частном случае вращения тела вокруг какой-либо из главных осей инерции $\vec{M}$ и $\vec{\Omega}$ имеют одинаковые направления.

Рассмотрим движение тела, на которое не действуют внешние силы, предполагая исключенным не представляющее интереса равномерное поступательное движение. Иначе говоря, рассмотрим свободное вращение твердого тела.

(a) **Шаровой волчок.** Так называют твердое тело, три главных момента инерции которого равны. Ясно, что для шарового волчка

$$\vec{M} = I\vec{\Omega}.$$

Условие $\vec{M} = const$ для свободного движения приводит к заключению – свободное вращение шарового волчка – это равномерное вращение вокруг постоянной оси.

(b) **Ротатор.** Так называют систему частиц, расположенных по одной прямой. Если выбрать эту прямую в качестве оси x_3, то для всех частиц $x_1 = x_2 = 0$, поэтому

$$I_1 = I_2 = \sum m x_3^2, \quad I_3 = 0.$$

Характерной особенностью ротатора является наличие только двух вращательных степеней свободы. Вращение имеет смысл вокруг осей x_1 и x_2, но не вокруг самой себя (оси x_3).

Для ротатора, как и для шарового волчка,

$$\vec{M} = I\vec{\Omega},$$

поэтому свободное вращение ротатора – это равномерное вращение в плоскости вокруг постоянного направления, перпендикулярного этой плоскости.

(c) **Симметрический волчок.** Так называют твердое тело с двумя равными друг другу главными моментами инерции:

$$I_1 = I_2 \neq I_3.$$

В этом случае выбор главных осей в плоскости x_1x_2 произволен.

Закон сохранения момента импульса позволяет определить свободное вращение и для симметрического волчка. Как отмечалось, если x_3 – ось симметрии волчка, то выбор главных осей x_1, x_2 произволен и мы можем выбрать x_2 перпендикулярной к плоскости, определяемой постоянным вектором $\vec{M}$ и мгновенным положением оси x_3. Тогда $M_2 = 0 \Rightarrow \Omega_2 = 0$, а это означает, что направления векторов $\vec{M}$, $\vec{\Omega}$ и оси волчка x_3 в каждый момент времени лежат в одной плоскости (см. рис. 19). Следовательно, скорости $\vec{v} = [\vec{\Omega}, \vec{r}]$ всех точек на оси волчка в

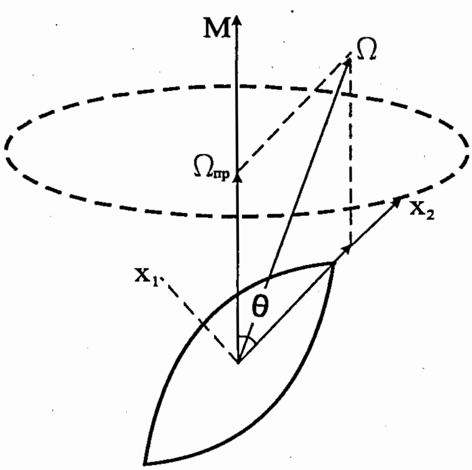

Рис. 19

каждый момент перпендикулярны к плоскости $\vec{M}$, $\vec{\Omega}$, а это, в свою очередь, означает, что ось волчка равномерно вращается вокруг направления $\vec{M}$, описывая круговой конус. Это явление называют **регулярной прецессией волчка**. Одновременно с этим волчок равномерно вращается вокруг собственной оси. Нетрудно определить угловые скорости этих вращений. Угловая скорость вращения волчка вокруг своей оси есть просто проекция $\vec{\Omega}$ на ось x_3:

$$\Omega_3 = \frac{M_3}{I_3} = \frac{M\cos\theta}{I_3}.$$

Для определения скорости прецессии $\Omega_{\text{пр}}$ разложим $\vec{\Omega}$ на составляющие вдоль x_3 и $\vec{M}$. Составляющая вдоль x_3 не может привести к какому-либо перемещению оси волчка, поэтому вторая составляющая будет искомой скоростью прецессии. Построение на рис. 19 показывает, что

$$\Omega_{\text{пр}}\sin\theta = \Omega_1 = \frac{M_1}{I_1} = \frac{M\sin\theta}{I_1} \Rightarrow \Omega_{\text{пр}} = \frac{M}{I_1}.$$

5. **Углы Эйлера.** Наиболее удобными величинами, которые определяют ориентацию осей K_ω относительно осей системы K, являются **углы Эйлера**. Переход от системы координат K к системе K_ω может быть выполнен посредством трех последовательных поворотов.

   (a) Начнем с поворота вокруг Z на некоторый угол φ против часовой стрелки. В результате получим СК $\xi = \{\xi, \eta, \zeta\}$, причем

   $$\xi = \mathbf{D}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X} = \{X, Y, Z\}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Подвижная плоскость x_1x_2 пересекает неподвижную XY по некоторой прямой ON (см. рис. 20), которую назовем **линией узлов**.

   (b) Промежуточную систему $\xi\eta\zeta$ повернем вокруг ξ на угол θ против часовой стрелки. В результате получим СК $\acute{\xi}\acute{\eta}\acute{\zeta}$, причем

   $$\xi' = \mathbf{C}\xi, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

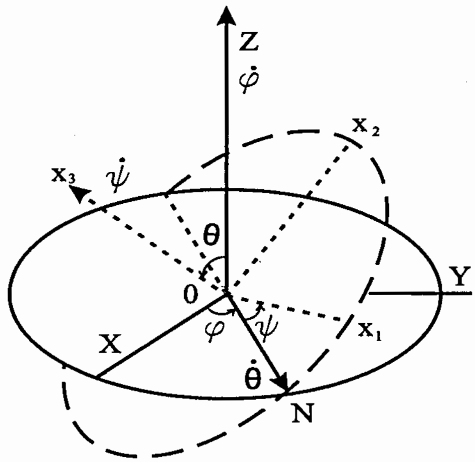

Рис. 20

(c) Наконец, повернув СК $\acute{\xi}\acute{\eta}\acute{\zeta}$ против часовой стрелки на угол ψ вокруг оси $\acute{\xi}$, получим требуемую систему xyz:

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}\acute{\xi}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, положение осей подвижной системы K_ω относительно осей неподвижной системы координат K определяется тремя углами Эйлера φ, θ, ψ. Углы φ и ψ пробегают значения от 0 до 2π, а угол θ – от 0 до π,

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{D}.$$

Матрица $\mathbf{A}$, как произведение ортогональных матриц, описывающих вращение, ортогональна:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{-1}, \quad \mathbf{X} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}$$

(напомним, что *тильда* означает транспонирование).

Выразим компоненты вектора угловой скорости $\vec{\Omega}$ по подвижным осям $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ через эйлеровы углы и их производные:

$$\Omega_i = \frac{1}{2}\,\epsilon_{ikl}\,\omega_{kl}, \quad \omega_{kl} = \frac{dA_{km}}{dt}\tilde{A}_{ml},$$

$$\omega = \dot{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{A}} = (\dot{\mathbf{B}}\mathbf{C}\mathbf{D} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{C}}\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{C}\dot{\mathbf{D}})\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{B}} =$$

$$\dot{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{B}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{B}} + \mathbf{B}\mathbf{C}\dot{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{B}}.$$

Для упрощения расчета удобно в первую очередь найти произведения

$$\dot{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \dot\psi & 0 \\ -\dot\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \dot{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot\theta \\ 0 & -\dot\theta & 0 \end{pmatrix}, \ \dot{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} 0 & \dot\varphi & 0 \\ -\dot\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перемножив затем нужные матрицы, получим

$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot\theta\sin\psi \\ 0 & 0 & \dot\theta\cos\psi \\ -\dot\theta\sin\psi & -\dot\theta\cos\psi & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}\mathbf{C}\dot{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \dot\varphi\cos\theta & -\dot\varphi\sin\theta\cos\psi \\ -\dot\varphi\cos\theta & 0 & \dot\varphi\sin\theta\sin\psi \\ \dot\varphi\sin\theta\cos\psi & -\dot\varphi\sin\theta\sin\psi & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, компоненты вектора угловой скорости в жестко связанной с твердым телом системе координат

$$\Omega_x = \Omega_1 = \omega_{23} = \dot\theta\cos\psi + \dot\varphi\sin\theta\sin\psi,$$

$$\Omega_y = \Omega_2 = \omega_{31} = -\dot\theta\sin\psi + \dot\varphi\sin\theta\cos\psi,$$

$$\Omega_z = \Omega_3 = \omega_{12} = \dot\psi + \dot\varphi\cos\theta.$$

Если оси подвижной системы координат выбраны по главным осям инерции тела, то кинетическая энергия вращения симметрического волчка, выраженная через эйлеровы углы, имеет простой вид:

$$T_{\text{вр}} = \frac{I_1}{2}(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)^2.$$

В качестве иллюстрации применения эйлеровых углов рассмотрим еще раз свободное вращение симметрического волчка. Выберем ось Z неподвижной СК в направлении $\vec{M} = const$, ось x_3 подвижной СК направим по оси симметрии волчка, а ось x_1 пусть в данный момент совпадает с линией узлов (что означает $\psi = 0$). Тогда

$$M_1 = I_1\Omega_1 = I_1\dot\theta, \ \ M_2 = I_2\Omega_2 = I_1\dot\varphi\sin\theta, \ \ M_3 = I_3\Omega_3 = I_3(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta).$$

Поскольку линия узлов, а вместе с ней и ось x_1 перпендикулярны оси Z, имеем

$$M_1 = 0, \quad M_2 = M\sin\theta, \quad M_3 = M\cos\theta.$$

Сравнивая, получаем $\dot\theta = 0 \;\Rightarrow\; \theta = const$, что означает постоянство угла наклона оси волчка к направлению $\vec{M}$, $\dot\varphi = M/I_1$, что определяет угловую скорость прецессии, а $\Omega_3 = M\cos\theta/I_3$ дает угловую скорость вращения волчка вокруг своей оси.

Найдем выраженные через эйлеровы углы компоненты вектора угловой скорости в неподвижной системе координат, обозначив их Ω_i^0. Соотношение, связывающее вектор угловой скорости с антисимметричной матрицей ω_{ik}, имеет тензорный характер, поэтому сохраняет свой вид

$$\Omega_i^0 = \frac{1}{2}\,\epsilon_{ikl}\,\omega_{kl}^0,$$

где ω_{kl}^0 – элементы матрицы

$$\omega^0 = \tilde{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{A}},$$

в чем нетрудно убедиться, если учесть, что ω_{kl}^0 преобразуются как компоненты тензора при преобразованиях $\vec{k}_i = \mathbf{A}^{-1}\vec{\mathbf{e}}_i$, т.е. $\omega_{kl}^0 = \tilde{A}_{ki}\tilde{A}_{lm}\omega_{im} = \tilde{A}_{ki}\tilde{A}_{lm}\dot{A}_{ip}\tilde{A}_{pm} = \tilde{A}_{ki}\tilde{A}_{lm}A_{mp}\dot{A}_{ip}$, откуда с учетом ортогональности $\mathbf{A}$ получаем искомое условие. После подсчета произведений матриц, аналогично тому как это было сделано выше, получим

$$\Omega_x^0 = \omega_{23}^0 = \dot\theta\cos\varphi + \dot\psi\sin\theta\sin\varphi,$$
$$\Omega_y^0 = \omega_{31}^0 = \dot\theta\sin\varphi - \dot\psi\sin\theta\cos\varphi,$$
$$\Omega_z^0 = \omega_{12}^0 = \dot\varphi + \dot\psi\cos\theta.$$

6. **Лагранжевы уравнения движения твердого тела.** С точки зрения наблюдателя, связанного с неподвижной инерциальной системой отсчета K_0, произвольное перемещение твердого тела представляет собой поступательное движение центра инерции плюс вращение. Функция Лагранжа, описывающая такое перемещение, имеет вид

$$L = T - U, \quad T = T_{\text{пост}} + T_{\text{вр}} = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}I_{ik}\Omega_i\Omega_k.$$

Здесь по-прежнему μ – суммарная масса частиц, составляющих тело, V – скорость перемещения центра инерции относительно неподвижного наблюдателя, Ω_i – компоненты вектора угловой скорости, I_{ik} – тензор моментов инерции. Потенциальная энергия в общем случае является функцией шести независимых переменных, определяющих положение твердого тела в пространстве. В качестве этих шести величин обычно выбирают три компоненты радиуса-вектора центра инерции $\vec{R}\ (X, Y, Z)$ и три угла $\vec{\varphi}\ (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$, которые определяют ориентацию осей движущейся вместе с телом системы координат K_ω относительно неподвижной K. Пусть $\vec{\rho}$ – радиус-вектор какой-либо точки твердого тела в неподвижной СК, а $\vec{r}\ (x, y, z)$ – радиус-вектор той же точки в СК, жестко связанной с телом, тогда

$$\delta\vec{\rho} = \delta\vec{R} + [\delta\vec{\varphi}, \vec{r}].$$

Поэтому

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial \vec{\rho}} \delta\vec{\rho} = \sum \frac{\partial U}{\partial \vec{\rho}} \delta\vec{R} + \sum \frac{\partial U}{\partial \vec{\rho}} [\delta\vec{\varphi}, \vec{r}] =$$

$$-\delta\vec{R} \sum \vec{f} - \delta\vec{\varphi} \sum [\vec{r}, \vec{f}] = -\vec{F}\delta\vec{R} - \vec{K}\delta\vec{\varphi}.$$

$\vec{F} = \sum \vec{f}$ – фактически сумма сил, действующих со стороны внешних источников, т.к. силы взаимодействия между частицами взаимно сокращаются. Вектор $[\vec{r}, \vec{f}]$ называется **моментом силы** $\vec{f}$, **действующей на частицу с радиусом-вектором** $\vec{r}$, так что

$$\vec{K} = \sum [\vec{r}, \vec{f}]$$

есть полный момент сил, действующих на тело, причем в сумме должны быть учтены только внешние силы. Итак,

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{R}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{R}} = \vec{F}; \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{\varphi}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{\varphi}} = \vec{K}.$$

Подставив теперь L в лагранжевы уравнения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{R}}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{\Omega}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{\varphi}},$$

получим уравнения движения в виде

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}; \quad \frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K}.$$

Здесь $\vec{P} = \sum \vec{p} = \mu\vec{V}$ – суммарный импульс, $\vec{M} = \sum\ [\vec{r}\vec{p}]$ – момент импульса. Момент силы $\vec{K}$ зависит от выбора начала координат, относительно которого он определен. Перенесем начало координат так, чтобы $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{a}$, тогда

$$\vec{K} = \sum [\vec{r}, \vec{f}] = \sum [\vec{r}\,', \vec{f}] + \sum [\vec{a}, \vec{f}] = \vec{K}' + [\vec{a}, \vec{F}].$$

В случае равенства нулю суммарной силы $\vec{F} = 0$ момент силы не зависит от выбора начала координат и говорят, что к телу приложена **пара сил**.

Лагранжевы уравнения движения относятся к неподвижной инерциальной системе координат: производные $d\vec{P}/dt$ и $d\vec{M}/dt$ представляют изменения векторов $\vec{P}$ и $\vec{M}$ относительно этой системы. Связь между компонентами вращательного момента импульса и угловой скорости выглядит особенно просто в жестко связанной с телом системе K_ω, оси которой направлены по главным осям инерции. Этой связью можно будет воспользоваться, предварительно преобразовав лагранжевы уравнения к координатам подвижной системы K_ω.

7. **Уравнения Эйлера.** Рассмотрим связанный с телом вектор $\vec{G}$. Движение приводит к изменению вектора и, вообще говоря, зависит от того, с точки зрения какой СК этот вектор рассматривается. Каковы приращения, которые за время dt получают составляющие произвольного вектора $\vec{G}$? В подвижной системе K_ω, жестко связанной с твердым телом, эти приращения будут отличаться от соответствующих приращений в неподвижной системе K, которая имеет общее начало с K_ω, и это отличие вызывается вращением последней относительно K. Если $d\vec{G}_{\text{пространство}}$ – изменение вектора в неподвижной системе K, а $d\vec{G}_{\text{тело}}$ – его изменение во вращаюшейся СК, то ввиду того, что при повороте на угол $d\vec{\varphi}$

$$d\vec{G}_{\text{вращение}} = [d\vec{\varphi}, \vec{G}] \;\Rightarrow\; d\vec{G}_{\text{пространство}} = d\vec{G}_{\text{тело}} + [d\vec{\varphi}, \vec{G}],$$

скорость изменения вектора будет иметь вид

$$\left.\frac{d\vec{G}}{dt}\right._{\text{пространство}} = \left.\frac{d\vec{G}}{dt}\right._{\text{тело}} + [\vec{\Omega}, \vec{G}].$$

На вектор $\vec{G}$ не было наложено никаких условий, поэтому последнее соотношение имеет смысл рассматривать не как формулу, относящуюся к конкретному вектору, а как операторное уравнение преобразования производной по времени от одной СК к другой:

$$\left(\frac{d...}{dt}\right)_{\text{пространство}} = \left(\frac{d...}{dt}\right)_{\text{тело}} + [\vec{\Omega}, ...]\ .$$

Эта операторная формула позволяет сразу записать лагранжевы уравнения движения в подвижной СК:

$$\left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{\text{тело}} + [\vec{\Omega}, \vec{P}] = \vec{F}, \qquad \left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{\text{тело}} + [\vec{\Omega}, \vec{M}] = \vec{K},$$

а затем спроецировать эти уравнения на оси подвижной системы:

$$\left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_i^{\text{тело}} = \frac{dP_i}{dt}, \qquad \left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_i^{\text{тело}} = \frac{dM_i}{dt},$$

где индексы $i = 1, 2, 3$ обозначают компоненты по осям x, y, z системы K_ω. Заменив теперь $\vec{P}$ на $\mu\vec{V}$, получим

$$\mu\left(\frac{dV_i}{dt} + \epsilon_{ikl}\Omega_k V_l\right) = F_i.$$

Предполагая, что оси x, y, z являются главными осями инерции, и учитывая связь $M_1 = I_1\Omega_1$ и т.д., имеем

$$I_1\frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 = K_1,$$

$$I_2\frac{d\Omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\Omega_3\Omega_1 = K_2,$$

$$I_3\frac{d\Omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 = K_3.$$

Последние три уравнения называются **уравнениями Эйлера**. В качестве примера применения уравнений Эйлера рассмотрим еще раз свободное ($K = 0$) вращение симметрического волчка ($I_1 = I_2 \neq I_3$). Третье уравнение дает $\Omega_3 = const$. Введем константу

$$\omega = \Omega_3\frac{I_3 - I_1}{I_1}$$

и перепишем первые два уравнения в виде

$$\dot{\Omega}_1 = -\omega\Omega_2, \quad \dot{\Omega}_2 = -\omega\Omega_1,$$

сложив которые, предварительно умножив второе на i, имеем

$$\frac{d}{dt}(\Omega_1 + i\Omega_2) = i\omega(\Omega_1 + i\Omega_2)$$

с решением

$$\Omega_1 + i\Omega_2 = A\exp^{i\omega t} \quad \Leftrightarrow \quad \Omega_1 = A\cos\omega t, \quad \Omega_2 = A\sin\omega t.$$

Итак, проекция угловой скорости на плоскость, перпендикулярную оси волчка, вращается в этой плоскости с угловой скоростью ω, оставаясь постоянной по величине ($A = \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}$). Поскольку постоянна также проекция Ω_3 на ось волчка, мы заключаем, что вектор $\vec{\Omega}$ равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг оси волчка, оставаясь постоянным по величине. Известная связь между компонентами $\vec{M}$ и $\vec{\Omega}$ позволяет заключить, что такое же движение по отношению к оси волчка совершает и вектор момента импульса. Эта картина, несомненно, представляет собой лишь другой аспект рассмотренного выше свободного движения симметрического волчка по отношению к неподвижной СК.

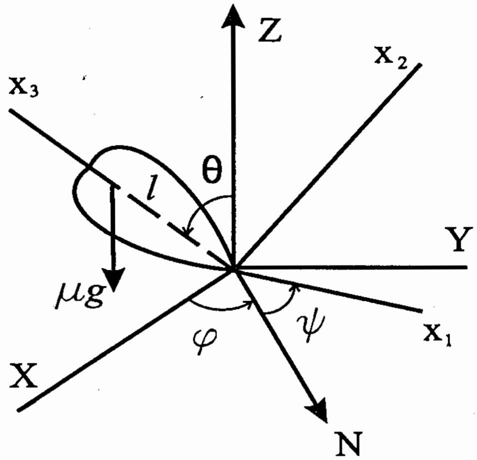

Рис. 21

8. **Тяжелый симметрический волчок.** Рассмотрим движение симметричного тела в поле тяжести, полагая, что нижняя точка тела неподвижна и находится на оси симметрии (тяжелый симметрический волчок). Допустим, что ось симметрии волчка является главной осью инерции, и в этом же направлении выберем ось z подвижной системы координат K_ω. Ориентацию главных осей инерции вполне определяют три эйлеровых угла – угол θ задает отклонение оси симметрии от вертикали, угол ψ характеризует поворот волчка

вокруг собственной оси, а угол φ – азимутальный угол (см. рис. 21). Расстояние от неподвижной точки волчка до центра инерции обозначим через l. Потенциальная энергия волчка в поле тяжести

$$U = \mu g l \cos\theta,$$

что вместе с полученной ранее формулой для выраженной через эйлеровы углы кинетической энергии вращения симметрического волчка дает для функции Лагранжа

$$L = \frac{I_1}{2}(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)^2 - \mu g l \cos\theta.$$

Углы φ и ψ – циклические, поэтому сохраняются соответствующие им обобщенные импульсы. Известно, что обобщенный импульс, соответствующий углу какого-либо вращения, есть компонента момента импульса относительно оси этого вращения (для угла φ это вертикальная ось, а для ψ – ось симметрии волчка z). Итак,

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = I_3(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta) = I_3\Omega_3 = M_3,$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = (I_1\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta)\dot\varphi + I_3\dot\psi\cos\theta = M_Z$$

являются первыми интегралами уравнений движения. Как следствия этих соотношений имеем

$$\Omega_3 = \frac{M_3}{I_3} = const,$$

$$\dot\varphi = \frac{M_Z - M_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta},$$

$$\dot\psi = \frac{M_3}{I_3} - \frac{M_Z - M_3\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}\cos\theta,$$

что позволяет по известной зависимости $\theta(t)$ определить φ и ψ как функции времени. Рассматриваемая система консервативна, т.е. ее лагранжиан не зависит от времени явно, а это означает, что существует еще один интеграл уравнений движения – энергия

$$E = \frac{I_1}{2}(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)^2 + \mu g l \cos\theta.$$

Исключив теперь $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ из этого выражения и замечая, что ввиду постоянства Ω_3 сохраняющейся оказывается также величина

$$\acute{E} = E - \frac{M_3^2}{2I_3} - \mu g l,$$

получим

$$\acute{E} = \frac{I_1\dot{\theta}^2}{2} + U_{\text{эфф}}(\theta),$$

где

$$U_{\text{эфф}}(\theta) = \frac{(M_Z - M_3\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} - \mu g l(1-\cos\theta).$$

Таким образом, решение задачи свелось к вычислению эллиптического интеграла

$$t = \int \sqrt{\frac{I_1}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\acute{E} - U_{\text{эфф}}(\theta)}},$$

определяющего зависимость $\theta = \theta(t)$, которая позволит выразить углы φ и ψ как функции θ в виде квадратур.

Как отмечалось, угол θ пробегает значения от 0 до π. В этих точках функция $U_{\text{эфф}}(\theta)$ (при $M_3 \neq M_Z$) стремится к бесконечности, а в промежутке между ними проходит через минимум. Для каждого конкретного (в зависимости от начальных условий) значения $\acute{E}$ угол θ изменяется в области, определяемой условием $\acute{E} \geq U_{\text{эфф}}(\theta)$. Поэтому уравнение $\acute{E} = U_{\text{эфф}}(\theta)$ имеет два корня θ_1 и θ_2, которые определяют пределы изменения угла наклона оси волчка к вертикали при его движении.

При изменении угла θ от θ_1 до θ_2 знак производной $\dot{\varphi}$ зависит от знака разности $M_Z - M_3\cos\theta$. Если в интервале изменения угла θ знак разности $M_Z - M_3\cos\theta$ остается неизменным, то угол φ меняется монотонно и ось волчка прецессирует вокруг вертикальной оси. Однако эта прецессия отличается от известной нам регулярной прецессии свободного симметрического волчка, т.к. ось тяжелого волчка не только прецессирует вокруг вертикали, но и колеблется вверх и вниз между граничными углами θ_1 и θ_2 – волчок **нутирует** при прецессии так, как это изображено на рис. 22,а. (*Обычно движение волчка изображают кривой, которую описывает так называемый* **апекс** *– конец единичного вектора, отложенного от начала координат в направлении оси z подвижной СК. Траектория апекса является сферической кривой, полярные координаты*

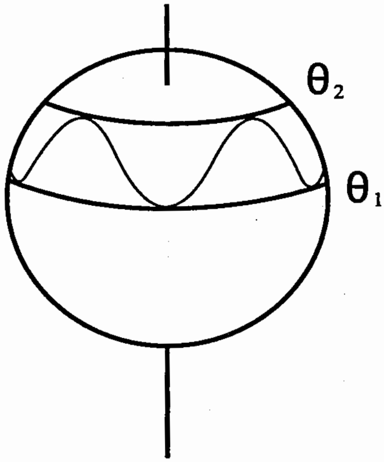

Рис. 22,a

ее точки совпадают с углами Эйлера θ и φ. В нашем случае тяжелого волчка траектория апекса лежит между двумя окружностями θ_1 и θ_2, причем на этих окружностях $\dot{\theta} = 0$.)

Когда знак разности $M_Z - M_3 \cos\theta$ изменяется при изменении θ, прецессия будет иметь противоположные направления на двух граничных окружностях, так что ось волчка перемещается вокруг вертикали, описывая петли (см. рис. 22,b). Наконец, если одно из

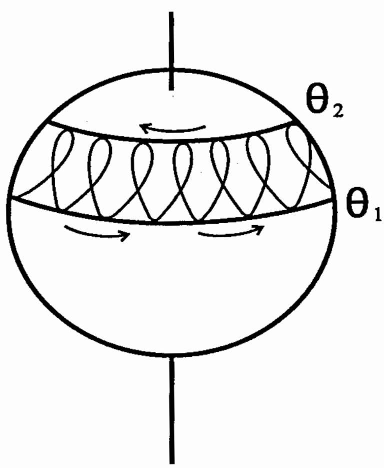

Рис. 22,b

предельных значений θ приводит к обращению в нуль разности $M_Z - M_3 \cos\theta$, то на соответствующей окружности $\dot{\varphi}$ и $\dot{\theta}$ одновременно обращаются в нуль, поэтому в этих местах траектории апекса появятся заострения (см. рис. 22,c). Последний случай не является

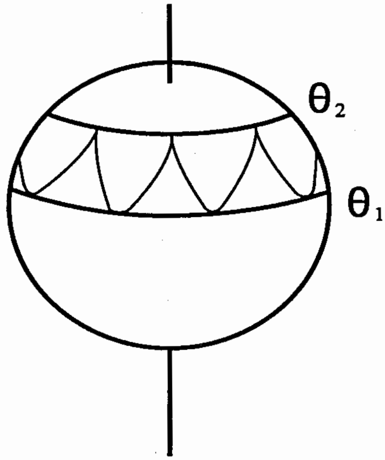

Рис. 22,c

чем-то исключительным, т.к. соответствует естественным начальным условиям. Действительно, обычно предполагают, что волчок закручивается вокруг своей неподвижной оси, которая затем освобождается, и волчок начинает интересующее нас движение. Такой картине адекватны следующие начальные условия:

$$\theta_{t=0} = 0, \ \dot{\theta}_{t=0} = \dot{\varphi}_{t=0} = 0.$$

Изложенные качественные соображения дают общую картину движения тяжелого симметрического волчка. В рамках нашего курса останавливаться на более подробном рассмотрении нет необходимости.

IX. ДВИЖЕНИЕ В НЕИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА. ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Как определяется неинерциальная система отсчета (НСО)? Ответ на этот вопрос в названии – любая СО, которая не удовлетворяет определению инерциальной системы отсчета (ИСО), является неинерциальной. Из достаточно большого числа такого рода "отрицающих" определений выделим одно – СО, в которой при движении изолированной частицы зависимость ее радиуса-вектора от времени нелинейна, назовем неинерциальной. Попробуем выяснить, какими будут уравнения движения частицы в НСО. Понятно, что мы не можем пользоваться лагранжевой функцией

$$L_0 = \frac{mv_0^2}{2} - U,$$

вид которой был установлен с привлечением принципа относительности, т.е. при этом существенно использовалась инерциальность СО. Однако уравнения Лагранжа были получены как следствие принципа наименьшего действия, который сформулирован безотносительно к СО, поэтому лагранжевы уравнения движения имеют один и тот же вид в ИСО и в НСО:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0.$$

Таким образом, для того чтобы выписать уравнения движения в НСО, необходимо преобразовать функцию Лагранжа. Проделаем это в два этапа. Во-первых, перейдем от ИСО K_0 к НСО K', движущейся относительно K_0 поступательно, но со скоростью, которая является произвольной функцией времени. Подставив

$$\vec{v}_0 = \vec{v}' + \vec{V}(t)$$

в выражение L_0, найдем

$$L' = \frac{mv'^2}{2} + \frac{mV^2}{2} + m\vec{V}(t)\vec{v}' - U.$$

Отбросим второе слагаемое, которое есть функция от времени и поэтому может быть представлена как полная производная по времени от другой функции, тогда, замечая, что $m\vec{V}(t)\vec{v}' + m\vec{W}(t)\vec{r}' = d(m\vec{V}(t)\vec{r}')/dt$, имеем

$$L' = \frac{mv'^2}{2} - m\vec{W}(t)\vec{r}' - U,$$

где $\vec{W}(t)$ – ускорение поступательного движения СО K' относительно K_0. Подставив это выражение в уравнение Лагранжа, получим уравнение движения частицы в K':

$$m\frac{d\vec{v}'}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}'} - m\vec{W}(t).$$

Итак, ускоренное поступательное движение СО равноценно наличию однородного силового поля, причем действующая в этом поле сила есть

$m\vec{W}$, направление которой противоположно направлению ускорения. Эта эквивалентность однородного силового поля и неинерциальности системы отсчета привела Эйнштейна к формулировке **принципа эквивалентности**, одного из краеугольных камней релятивистской теории тяготения – общей теории относительности.

- **Примечание. Принцип эквивалентности.** Какова реакция физической системы на воздействие внешнего гравитационного поля? Ответ на этот вопрос в общем виде дает принцип эквивалентности (ПЭ). Основой ПЭ служит гипотеза о равенстве инертной и гравитационной масс (Галилей, Гюйгенс, Ньютон), проверенная экспериментально с большой точностью (Бессель, Этвеш, Дикке, Брагинский). Утверждается, что **никакое внешнее статическое и однородное гравитационное поле не может быть обнаружено в свободно падающем лифте, поскольку наблюдатель, пробные тела и сам лифт приобретают в этом поле одинаковые ускорения независимо от их массы** ($m_{\text{инерц}} = m_{\text{грав}}$). Это нетрудно продемонстрировать для системы N частиц, движущихся с нерелятивистскими скоростями под действием силы $F(\vec{r}_a - \vec{r}_b)$ и внешнего гравитационного поля. Уравнения движения в инерциальной системе отсчета (наблюдатель К) имеют вид

$$m_a \frac{d^2\vec{r}_a}{dt^2} = m_a\vec{g} + \sum_b F(\vec{r}_a - \vec{r}_b).$$

Перейдем в свободно падающую относительно К неинерциальную систему отсчета (наблюдатель $\acute{K}$) согласно

$$\acute{\vec{r}} = \vec{r} - \frac{\vec{g}t^2}{2}, \qquad \acute{t} = t,$$

тогда

$$m_a \frac{d^2\acute{\vec{r}}_a}{dt^2} = \sum_b F(\acute{\vec{r}}_a - \acute{\vec{r}}_b).$$

Итак, наблюдатель К и его свободно падающий коллега $\acute{K}$ не обнаружат никаких различий в законах движения за исключением того, что К будет фиксировать действие гравитационного поля, а $\acute{K}$ не будет его фиксировать – **гравитационная сила скомпенсирована неинерциальностью наблюдателя**.

Принцип эквивалентности утверждает, что компенсация (т. е. эквивалентность) гравитационной силы и силы инерции возникает в строго однородных гравитационных полях во всех свободно падающих системах отсчета независимо от того, насколько простыми уравнениями описывается ситуация. В неоднородных или меняющихся со временем гравитационных полях такой компенсации нет, однако можно ожидать их приближенной компенсации, если ограничить рассмотрение настолько малыми областями пространства и промежутками времени, чтобы изменения гравитационного поля можно было считать пренебрежимо малыми. С учетом этого обстоятельства перефразируем ПЭ следующим образом: **в каждой точке пространства-времени в произвольном гравитационном поле можно выбрать локально-инерциальную систему отсчета так, чтобы в достаточно малой окрестности рассматриваемой точки физические законы имели такую же форму, как и в не ускоренных декартовых системах координат.**

Отметим глубокую аналогию между ПЭ и аксиомой, которую Гаусс заложил в основу своей геометрии. Гаусс предполагал, что в окрестности любой точки искривленной поверхности можно задать декартову систему координат, в которой выполняются соотношения евклидовой геометрии (например, теорема Пифагора).

Перейдем теперь от системы отсчета $\acute{K}$, движущейся поступательно с произвольной скоростью $V(t)$, к СО K, которая имеет общее с $\acute{K}$ начало координат (т.е. $\acute{\vec{r}} = \vec{r}$) и вращается с зависящей от времени угловой скоростью $\Omega(t)$ относительно общего начала НСО $\acute{K}$ и K. В этом случае

$$\acute{\vec{v}} = \vec{v} + [\vec{\Omega}, \vec{r}].$$

Подставив последнее в выражение для $\acute{L}$, получим общий вид функции Лагранжа частицы в произвольной неинерциальной системе отсчета:

$$L = \frac{mv^2}{2} + m \cdot \vec{v}[\vec{\Omega}, \vec{r}] + \frac{m \cdot [\vec{\Omega}, \vec{r}]^2}{2} - m\vec{W}(t)\vec{r} - U.$$

Для того чтобы выписать уравнения движения, найдем полный дифференциал последнего выражения:

$$dL = m\vec{v}d\vec{v} + md\vec{v}[\vec{\Omega}, \vec{r}] + m \cdot \vec{v}[\vec{\Omega}, d\vec{r}] + m \cdot [\vec{\Omega}, \vec{r}][\vec{\Omega}, d\vec{r}] - m\vec{W}(t)d\vec{r} - \frac{dU}{d\vec{r}}d\vec{r}$$

$$= m\vec{v}d\vec{v} + md\vec{v}[\vec{\Omega}, \vec{r}] + md\vec{r}[\vec{v}, \vec{\Omega}] + m[[\vec{\Omega}, \vec{r}]\vec{\Omega}]d\vec{r} - m\vec{W}(t)d\vec{r} - \frac{dU}{d\vec{r}}d\vec{r},$$

что позволяет выписать искомое уравнение движения:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{dU}{d\vec{r}} - m\vec{W} + m[\vec{r}, \dot{\vec{\Omega}}] + 2m[\vec{v}, \vec{\Omega}] + m[\vec{\Omega}, [\vec{r}, \vec{\Omega}]].$$

Первый член в правой части этого уравнения – сила, обусловленная взаимодействием, остальные слагаемые вызваны неинерциальностью СО и исчезают при переходе к ИСО. Первое такое слагаемое пропорционально ускорению W поступательно движущейся неинерциальной СО, второе обязано своим происхождением изменению со временем угловой скорости вращения НСО, третье, пропорциональное первой степени Ω, называют **кориолисовой силой**, и последнее – **центробежная сила**, направленная в плоскости, проходящей через r и Ω, перпендикулярно к оси вращения, по величине она равна $m\rho\Omega^2$, где ρ – расстояние от оси вращения.

Рассмотрим особо случай равномерно вращающейся СО, не имеющей поступательного ускорения. Функция Лагранжа в такой ИСО

$$L = \frac{mv^2}{2} + m \cdot \vec{v}[\vec{\Omega}, \vec{r}] + \frac{m \cdot [\vec{\Omega}, \vec{r}]^2}{2} - U,$$

а уравнения движения

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{dU}{d\vec{r}} + 2m[\vec{v}, \vec{\Omega}] + m[\vec{\Omega}, [\vec{r}, \vec{\Omega}]].$$

Вычислим энергию в этом случае:

$$E = \vec{v}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = \frac{mv^2}{2} - m \cdot [\vec{\Omega}, \vec{r}]^2 + U.$$

Линейный по Ω член отсутствует, т.е. **изменение энергии, обусловленное вращением СО, происходит за счет центробежной, но не кориолисовой силы**. Эту дополнительную энергию называют центробежной.

X. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрим систему с одной степенью свободы, на которую действуют заданные силы, предполагая, что система движется около положения устойчивого равновесия. Разложение кинетической и потенциальной энергии в окрестности этого положения вплоть до членов второго порядка малости приводит к линейному уравнению. Однако в некоторых задачах возникает необходимость исследовать колебания с достаточно большими амплитудами и скоростями. В этих случаях линейное приближение оказывается недостаточным и приходится учитывать последующие члены разложения, что приводит к нелинейным уравнениям. Если при этом считать, что отклонения от положения равновесия и скорости колеблющейся частицы не слишком велики, то соответствующие уравнения будут описывать **малые нелинейные колебания**.

Попробуем разобраться в особенностях нелинейных колебаний на примере математического маятника массой m и длиной l, помещенного в среду с "линейным" сопротивлением. Если выбранный в качестве обобщенной координаты угол φ отсчитывать от равновесного (вертикального) положения маятника, то

$$T = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2, \quad U = mgl(1-\cos\varphi), \quad F = \frac{\alpha l^2}{2}\dot{\varphi}^2$$

– кинетическая, потенциальная энергии и диссипативная функция соответственно. Разложив эти величины в окрестности положения устойчивого равновесия вплоть до членов четвертого порядка малости и используя лагранжевы уравнения движения при наличии диссипативных процессов (см. пункт 5 главы VII), найдем

$$\ddot{\varphi} + 2\lambda\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \frac{\omega_0^2}{3!}\varphi^3, \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}, \quad 2\lambda = \frac{\alpha}{m}.$$

Если пренебречь нелинейным членом, пропорциональным φ^3, то получим линейное уравнение, решение которого в случае $\lambda < \omega_0$ есть

$$\varphi = a_0 e^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi_0), \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2.$$

Если оставить нелинейный член, то, учитывая его малость по сравнению с пропорциональным φ линейным членом, можно предположить, что решение, описывающее нелинейные колебания, имеет такой же вид, что и решение линейного уравнения, т.е.

$$\varphi \approx a\cos\psi,$$

где ψ и a – неизвестные фаза и амплитуда нелинейных колебаний. При одном и том же отклонении от положения равновесия разность между действующими на маятник силами в линейном и нелинейном приближениях пропорциональна $\varphi^3/6$, мала и зависит от отклонения маятника от вертикали. Следовательно, частота нелинейных колебаний маятника $\dot{\psi}$ будет меньше собственной частоты ω_0 его линейных колебаний и будет зависеть от амплитуды. В связи с этим уместно допустить, что для нелинейных колебаний

$$\dot{\psi} = \omega(a),$$

где $\omega(a)$ – неизвестная функция, вид которой определяется заданием действующей силы.

Допущение о "близости" нелинейных и линейных колебаний позволяет сделать определенные заключения об изменении амплитуды нелинейного колебания. В линейном приближении амплитуда маятника изменяется по закону

$$a = a_0 e^{-\lambda t} \;\Rightarrow\; \dot{a} = -\lambda a,$$

поэтому предположим, что амплитуда нелинейных колебаний тоже зависит от a:

$$\dot{a} = f(a).$$

Ввиду того, что

$$\varphi^3 \approx a^3 \cos^3\psi = \frac{a^3}{4}(3\cos\psi + \cos 3\psi),$$

можно заключить, что наличие **обертонов** (так называют частоты, кратные основной) также является характерной чертой нелинейных колебаний. И, наконец, подчеркнем, что в случае нелинейных колебаний нарушается принцип суперпозиции – общее решение нелинейного уравнения не сводится к сумме частных решений. О малых нелинейных колебаниях, характерные черты которых мы перечислили выше, говорят как о **слабонелинейных колебаниях**.

1. **Метод Крылова – Боголюбова**. Одним из распространенных методов решения уравнений слабонелинейных колебаний является метод Крылова – Боголюбова. Изложим его суть на примере уравнения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon f(x, \dot{x}) = 0. \tag{62}$$

Если устремить малый параметр ϵ к нулю, то уравнение (62) описывает линейные колебания и допускает решение

$$x = a\sin\psi \equiv a\sin(\omega_0 t + \beta), \tag{63}$$

$$\dot{x} = a\omega_0 \cos\psi \tag{64}$$

с постоянными амплитудой a и начальной фазой β. В соответствии с вышеизложенным предположим, что a и β – новые неизвестные функции времени, которые должны быть определены так, чтобы (63) стало решением (62), тогда

$$\dot{x} = \dot{a}\sin\psi + a\dot{\beta}\cos\psi + a\omega_0\cos\psi,$$

откуда, учитывая (63), получим

$$\dot{a}\sin\psi + a\dot{\beta}\cos\psi = 0. \tag{65}$$

Подставив теперь вторую производную x в уравнение (62), перепишем его в виде

$$\dot{a}\omega_0\cos\psi - a\omega_0\dot{\beta}\sin\psi = -\epsilon f(a\sin\psi, a\omega_0\cos\psi). \tag{66}$$

Складывая результат умножения (65) на $\sin\psi$ и (66) на $\cos\psi$, а затем вычитая помноженное на $\cos\psi$ соотношение (66) из помноженного на $\sin\psi$ соотношения (65), получаем

$$\dot{a} = -\frac{\epsilon}{\omega_0} f(a\sin\psi, a\omega_0\cos\psi)\cos\psi, \tag{67}$$

$$\dot{\beta} = \frac{\epsilon}{a\omega_0} f(a\sin\psi, a\omega_0\cos\psi)\sin\psi. \tag{68}$$

Итак, вместо одного дифференциального уравнения 2-го порядка относительно неизвестной x нам удалось получить два дифференциальных уравнения 1-го порядка относительно a и β. Заметим, что правые части уравнений (67) и (68) – периодические функции времени с периодом $T = 2\pi/\omega_0$ и, кроме того, как $\dot{a}$, так и $\dot{\beta}$ пропорциональны малому параметру ϵ, следовательно, a и β будут медленно меняющимися функциями времени, а это означает, что за время порядка T в первом приближении можно считать a и β постоянными. Исходя из этого очевидного замечания, укажем простой интуитивный способ построения приближенного решения уравнений (67) и (68). Разложим правые части этих уравнений в ряд Фурье:

$$\left.\begin{aligned} f\cos\psi &= K_0(a) + \textstyle\sum_{n>0}(K_n(a)\cos\ n\psi + L_n(a)\sin\ n\psi), \\ f\sin\psi &= P_0(a) + \textstyle\sum_{n>0}(P_n(a)\cos\ n\psi + Q_n(a)\sin\ n\psi), \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

где

$$K_0(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\cos\psi d\psi, \quad P_0(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\sin\psi d\psi. \tag{70}$$

• **Справка. Ряд Фурье.** *Ряд*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$$

назовем **рядом Фурье** *функции $f(x)$ по ортонормированной на промежутке (a, b) системе функций $\{\varphi_k(x)\}$. Коэффициенты*

$$c_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx$$

называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$. Предполагается, что функция $f(x)$ вместе со своим квадратом интегрируема на (a, b).

Ряд Фурье по тригонометрической системе функций для каждой $f(x)$, интегрируемой на $(0, 2\pi)$, определяется следующим образом:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx,$$

$$c_k = c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx.$$

Если функция $f(t)$ имеет период T и интегрируема в интервале $(0 < t < T)$, то в этом интервале ее разложение в ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t},$$

где

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(\tau)\cos k\omega_0\tau d\tau,$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(\tau)\sin k\omega_0\tau d\tau,$$

$$c_k = c_{-k} = \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau)e^{-ik\omega_0\tau}d\tau,$$

здесь $k = 0, 1, ...,\quad \omega_0 = 2\pi/T$.

Коэффициенты Фурье связаны с функцией $f(x)$ равенством Парсеваля

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} | f(x) |^2\, dx = \frac{| a_0 |^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(| a_k |^2 + | b_k |^2\Big).$$

Перепишем уравнения (67) и (68) в виде

$$\left.\begin{aligned} \dot a &= -\tfrac{\epsilon}{\omega_0}K_0(a) - \tfrac{\epsilon}{\omega_0}\textstyle\sum_{n>0}(K_n(a)\cos\ n\psi + L_n(a)\sin\ n\psi), \\ \dot\beta &= \tfrac{\epsilon}{a\omega_0}P_0(a) + \tfrac{\epsilon}{a\omega_0}\textstyle\sum_{n>0}(P_n(a)\cos\ n\psi + Q_n(a)\sin\ n\psi) \end{aligned}\right\} \quad (71)$$

и проинтегрируем по t в пределах от t до $t+T$, пренебрегая в правой части уравнений изменениями a и β, в результате получим

$$\frac{\Delta a}{T} = -\frac{\epsilon}{\omega_0}K_0(a),\quad \frac{\Delta\beta}{T} = \frac{\epsilon}{a\omega_0}P_0(a). \quad (72)$$

Приращения $\Delta a = a(t+T) - a(t)$ и $\Delta\beta = \beta(t+T) - \beta(t)$ малы, поэтому их можно заменить на производные, что дает

$$\dot a = -\frac{\epsilon}{\omega_0}K_0(a),\quad \dot\beta = \frac{\epsilon}{a\omega_0}P_0(a). \quad (73)$$

Сравнивая (73) с точным уравнением (71), легко увидеть, что **уравнения первого приближения получаются из точных путем усреднения правых частей точных уравнений по времени.** (Последнее утверждение называют принципом усреднения, который можно считать общим правилом получения первых приближений.)

Часто вместо начальной фазы β в качестве неизвестной удобно пользоваться $\psi = \omega_0 t + \beta$, для которой из (73) имеем

$$\dot\psi = \omega_0 + \frac{\epsilon}{a\omega_0}P_0(a). \quad (74)$$

Подставив далее в выражения для $\dot a$ и $\dot\psi$ значения K_0 и P_0 из (70), получим

$$\dot a = -\frac{\epsilon}{2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi} f(a\sin\varphi, a\omega_0\cos\varphi)\cos\varphi d\varphi, \quad (75)$$

$$\dot\psi = \omega_0 + \frac{\epsilon}{2\pi a\omega_0}\int_0^{2\pi} f(a\sin\varphi, a\omega_0\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi. \quad (76)$$

Итак, решение уравнения (62) в первом приближении имеет вид

$$x = a\cos\psi, \tag{77}$$

где амплитуда a и фаза ψ определяются уравнениями (75) и (76). Предположим теперь, что в уравнении (62) функция f не зависит от $\dot{x}$, тогда вместо (75) и (76) будем иметь

$$\dot{a} = -\frac{\epsilon}{2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi} f(a\sin\varphi)\cos\varphi d\varphi, \tag{78}$$

$$\dot{\psi} = \omega(a) \equiv \omega_0 + \frac{\epsilon}{2\pi a\omega_0}\int_0^{2\pi} f(a\sin\varphi)\sin\varphi d\varphi. \tag{79}$$

Введем $\Phi(x)$ так, чтобы $f(x) = d\Phi(x)/dx$, тогда

$$\int_0^{2\pi} f(a\sin\varphi)\cos\varphi d\varphi = \frac{1}{a}\int_0^{2\pi} d\Phi(a\sin\varphi) =$$

$$\frac{1}{a}[\Phi(a\sin 2\pi) - \Phi(a\sin 0)] = 0,$$

откуда

$$\dot{a} = 0, \quad a = a_0 = const, \quad \psi = \omega(a)t + \psi_0,$$

следовательно, в случае $f = f(x)$ колебания в первом приближении будут гармоническими

$$x = a\sin(\omega(a)t + \psi_0), \tag{80}$$

а нелинейный характер уравнения сказывается лишь в том, что частота зависит от амплитуды. Возведем обе части (80) в квадрат, тогда с точностью до величин порядка ϵ получим

$$\omega^2(a) = \omega_0^2 + \frac{\epsilon}{\pi a}\int_0^{2\pi} f(a\sin\varphi)\sin\varphi d\varphi, \tag{81}$$

если ввести $F(x) = x\omega_0^2 + \epsilon f(x)$, то (81) можно переписать в виде

$$\omega^2(a) = \frac{\epsilon}{\pi a}\int_0^{2\pi} F(a\sin\varphi)\sin\varphi d\varphi. \tag{82}$$

Для иллюстрации метода рассмотрим несколько примеров:

- Наиболее простым примером нелинейной системы является обычный маятник. Если пренебречь трением, то уравнение колебаний маятника имеет вид

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}\sin x = 0,$$

где x – угол отклонения маятника от вертикали. Для малых углов отклонения $\sin x \sim x$ уравнение становится линейным:

$$x = a\sin(\omega_0 t + \alpha), \quad T = 2\pi\sqrt{l/g},$$

а колебания – гармоническими с периодом, не зависящим от начальных скорости и отклонения.

Для больших отклонений маятника ($x \sim 1$ рад) $\sin x$ с достаточной степенью точности может быть представлен как

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6},$$

тогда

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}\left(x - \frac{x^3}{6}\right) = 0$$

и из (§2) с $F = g/l \ \left(a\sin\varphi - a^3\sin^3\varphi/6\right)$ получим

$$\omega^2(a) = \frac{g}{l}\frac{1}{\pi a}\int_0^{2\pi}\left(a\sin\varphi - \frac{a^3\sin^3\varphi}{6}\right) = \frac{g}{l}\left(1 - \frac{a^2}{8}\right),$$

откуда следует, что чем больше амплитуда колебаний, тем меньше их частота, а период, наоборот, увеличивается:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{1/(1-a^2/8)} \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{a^2}{16}\right).$$

- **Уравнение Ван-дер-Поля.** В реальных задачах всегда возникает необходимость учета диссипативных процессов, что в механике достигается введением сил "трения" (диссипативных сил). В результате воздействия этих сил на систему колебания со временем затухают. Они могут стать незатухающими в случае наличия источника энергии, который компенсирует расход энергии, обусловленный диссипативными процессами.

Таким источником может оказаться периодическая сила, однако источник энергии может и не иметь никакой периодичности, важно лишь, чтобы его воздействие на колебательную систему играло роль "отрицательного" трения, которое компенсирует "положительное" трение, связанное с диссипативными силами. Колебания такого типа обладают рядом существенных отличий, их обычно называют **автоколебаниями**. Для того чтобы представить себе характер возбуждения автоколебаний, вернемся к решению уравнения, описывающего малые колебания с учетом сил трения:

$$x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha), \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2.$$

При положительном коэффициенте затухания λ амплитуда колебаний будет затухать по экспоненциальному закону, при $\lambda < 0$ амплитуда экспоненциально растет. Ясно, что ее рост должен быть ограничен, поэтому естественно предположить наличие условий, благодаря которым начиная с некоторого момента λ меняет знак. Это можно отразить в дифференциальном уравнении

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

заменив постоянный коэффициент затухания на

$$2\lambda = -A + B\dot{x}^2$$

(константы A и B положительны). В результате получим новое уравнение

$$\ddot{x} + \left(-A + B\dot{x}^2\right)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

которое известно как **уравнение Рэлея**. По виду уравнения можно заключить, что затухание отрицательно для малых по абсолютной величине значений скорости $\dot{x}$ и положительно для больших. Другими словами, колебания малой амплитуды будут раскачиваться, а большой – затухать, т.е. существует незатухающее колебание, к которому стремятся колебания как с малой, так и с большой амплитудой.

Заменой переменных

$$t = \tau/\omega_0 \;\text{ и }\; x = \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{A}{3B}}\int y d\tau$$

уравнение Рэлея приводится к виду

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \epsilon\left(1 - y^2\right)\frac{dy}{dt} + y = 0, \quad \epsilon = \frac{A}{\sqrt{km}},$$

которое называют **уравнением Ван-дер-Поля**. Оно достаточно хорошо (во всяком случае, качественно) описывает автоколебания в электронных генераторах. Перепишем его в привычных обозначениях:

$$\ddot{x} - \epsilon\left(1 - x^2\right)\dot{x} + x = 0$$

и, заметив, что $\omega_0 = 1$, $f(x, \dot{x}) = -(1 - x^2)\dot{x}$, займемся его решением согласно изложенной выше схеме:

$$x = a\sin\psi, \quad f = -a(1 - a^2\sin^2\psi)\cos\psi =$$

$$a\left(\frac{a^2}{4} - 1\right)\cos\psi - \frac{a^3}{4}\cos 3\psi,$$

поэтому

$$-\frac{1}{2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi} f\cos\psi d\psi = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{a^2}{4}\right),$$

$$\frac{1}{2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi} f\sin\psi d\psi = 0.$$

Таким образом, из (75) и (76) в первом приближении

$$\dot{a} = \frac{\epsilon a}{2}\left(1 - \frac{a^2}{4}\right), \quad \dot{\psi} = 1.$$

После интегрирования этих уравнений окончательно получаем

$$x = \frac{2a_0e^{\epsilon t/2}}{\sqrt{4 + a^2(e^{\epsilon t} - 1)}}\sin(t + t_0).$$

Отметим две интересные особенности амплитуды этих колебаний

$$a = \frac{2a_0e^{\epsilon t/2}}{\sqrt{4 + a^2(e^{\epsilon t} - 1)}}.$$

Во-первых,

$$\lim_{t\to\infty} a = 2,$$

и, во-вторых, если $a_0 = 2$, то для всех $t > 0$ $a = 2$.

Тривиальное решение $x = 0$ соответствует отсутствию колебаний, но этот режим неустойчив, поскольку, как бы мало ни было начальное значение a, оно все равно будет возрастать, приближаясь к предельному значению 2. Таким образом, т.к. случайные малые толчки практически неизбежны, в колебательной системе, описываемой уравнением Ван-дер-Поля, автоматически возбуждаются колебания с возрастающей амплитудой – система самовозбуждается. Если начальные условия таковы, что $a_0 = 2$, то $x = 2\sin(t + t_0)$ – решение, соответствующее **динамическому режиму**. Этот режим обладает сильной устойчивостью, т.к. для любого $a_0 \neq 0$ при $t \to \infty$ амплитуда $a \to 2$. В консервативных системах, которые описываются уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon f(x) = 0,$$

колебания могут происходить с любой, но постоянной амплитудой, тогда как в системах, колеблющихся в соответствии с уравнением Ван-дер-Поля, колебания с постоянной амплитудой возможны лишь при некотором определенном ее значении. В самовозбуждающихся (автоколебательных) системах амплитуда возрастает, если энергия, доставляемая источником, превышает количество энергии, рассеиваемой диссипативными силами, и наоборот. Постоянное же значение амплитуды сохраняется в том случае, когда количество энергии от источника и количество энергии, рассеиваемой диссипативными силами, в точности равны.

- **Уравнение Рэлея.** Для того чтобы найти решение уравнения Рэлея

$$\ddot{x} + \left(-A + B\dot{x}^2\right)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

заметим, что в отличие от предыдущего случая здесь $f(x, \dot{x})$ зависит только от скорости:

$$f = f(\dot{x}) = \left(-A + B\dot{x}^2\right)\dot{x},$$

что позволяет переписать (75) и (76) в виде

$$\dot{a} = -\frac{1}{2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi} f(a\omega_0\cos\varphi)\cos\varphi d\varphi,$$

$$\dot{\psi} = \omega_0 + \frac{1}{2\pi a\omega_0}\int_0^{2\pi} f(a\omega_0\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi.$$

Если ввести $\Phi(z = a\omega_0\cos\varphi)$, так чтобы $f(z) = d\Phi/dz$, то интеграл в выражении для $\dot{\psi}$ обращается в нуль, поэтому

$$x = a\sin(\omega_0 t + \alpha), \quad \alpha = const.$$

Подставив

$$f(a\omega_0\cos\varphi) = -a\omega_0\left(A - a^2\omega_0^2 B\cos^2\varphi\right)\cos\varphi$$

в выражение для $\dot{a}$, найдем

$$\dot{a} = \frac{a}{2}\left(A - \frac{3}{4}Ba^2\omega_0^2\right),$$

интегрируя которое получим амплитуду колебаний в режиме перехода к стационарному

$$a(t) = \frac{a_0 e^{At/2}}{\sqrt{1 + \frac{3B}{4A}\omega_0^2 a_0^2\left(e^{At} - 1\right)}}.$$

Тривиальное решение $a = 0$ неустойчиво, но, т.к. $A > 0$, происходит самовозбуждение колебаний, которые в итоге переходят в стационарный режим. Условие $\dot{a} = 0$ позволяет найти стационарное значение амплитуды

$$a = \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{4A}{3B}},$$

к которому независимо от начального значения $a_0 \neq 0$ спустя некоторое время стремится амплитуда $a(t)$. Итак, решение уравнения Рэлея в первом приближении

$$x = \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{4A}{3B}}\sin(\omega_0 t + \alpha).$$

Возвратимся к уравнению (62) и его приближенному решению $x = a\sin\psi$, приняв, что

$$\dot{a} = \Phi(a), \quad \dot{\psi} = \omega(a), \tag{83}$$

где

$$\Phi(a) = -\frac{\epsilon}{2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi} f(a\sin\phi, a\omega_0\cos\phi)\cos\phi d\phi,$$

$$\omega(a) = \omega_0 + \frac{\epsilon}{2\pi a\omega_0}\int_0^{2\pi} f(a\sin\phi, a\omega_0\cos\phi)\sin\phi d\phi,$$

возведем последнее в квадрат, отбросим члены, пропорциональные ϵ^2, и в результат введем

$$F(x,\dot{x}) = \omega_0^2 x + \epsilon f(x,\dot{x}),$$

тогда

$$\omega^2(a) = \frac{1}{\pi a}\int_0^{2\pi} F(a\sin\phi, a\omega_0\cos\phi)\sin\phi d\phi. \tag{84}$$

Учитывая, что

$$\int_0^{2\pi}\sin\phi\cos\phi d\phi = 0,$$

для $\Phi(a)$ получим

$$\Phi(a) = \frac{1}{2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi} F(a\sin\phi, a\omega_0\cos\phi)\cos\phi d\phi. \tag{85}$$

Исходя из (83) можно показать, что не существует такого a^*, для которого $\Phi(a) > 0$ при $a > a^*$. Действительно, если бы такое a^* существовало, то в соответствии с (83) мы получили бы $a \to \infty$ при $t \to \infty$, что недопустимо из физических соображений. Из уравнения (83) видно, что если начальное значение амплитуды не удовлетворяет условию стационарности $\Phi(a) = 0$, то с течением времени амплитуда $a(t)$ монотонно приближается к стационарному значению.

Если $\Phi(a) \equiv 0$, то переходных режимов нет и всякое колебание является стационарным. Этот случай осуществляется, если система консервативна, т.е. F не зависит от $\dot{x}$. Тогда уравнение (62) запишется в виде

$$\ddot{x} + F(x) = 0,$$

решение которого сводится к квадратуре, поскольку энергия

$$E = \frac{x^2}{2} + U(x), \quad \text{где} \quad U(x) = \int_0^x F(x)dx,$$

является первым интегралом этого уравнения.

Практически никакая колебательная система не является консервативной, т.к. всегда существуют диссипативные процессы, а в автоколебательных системах также и источники энергии.

При определенных условиях всякое колебание приближается к стационарному. Этот факт выявляет особую роль высокочастотных колебаний, т.к. в таких системах переходный режим очень быстро приближается к стационарному и поэтому всякое высокочастотное колебание можно рассматривать как стационарное.

Исследуем устойчивость стационарных колебаний. Пусть a_1 – корень уравнения $\Phi(a) = 0$. Для бесконечно близкого к a_1 значения $a = a_1 + \delta a$ из (83) имеем

$$\frac{d\delta a}{dt} = \left.\frac{d\Phi}{da}\right|_{a=a_1} \delta a.$$

Поэтому ясно, что амплитуда a_1 соответствует устойчивому стационарному колебанию, если

$$\left.\frac{d\Phi}{da}\right|_{a=a_1} < 0,$$

в противном случае

$$\left.\frac{d\Phi}{da}\right|_{a=a_1} > 0$$

оно будет неустойчивым. В частности, статический режим ($a = 0$) будет неустойчив всякий раз, когда

$$\left.\frac{d\Phi}{da}\right|_{a=0} > 0,$$

поэтому это неравенство можно считать **условием возникновения автоколебаний**.

- **Примечание.** Между механическими и электрическими колебаниями существует формальная аналогия. Описывающие их уравнения вместе со своими решениями получаются одно из другого формальной заменой определяющих колебания величин согласно следующей таблице:

Механические колебания	Электрические колебания
Перемещение x	Заряд e
Скорость v	Ток I
Сила F	Напряжение U
Масса m	Самоиндукция L
Коэффициент трения α	Сопротивление R
Коэффициент упругости k	Обратная емкость $1/C$

2. **Метод Крылова – Боголюбова. Резюме.** Используем изложенные выше идеи, для того чтобы "улучшить" первое приближение и наметить путь построения решения во втором и в высших приближениях. Решение исходного уравнения (62) будем искать в виде

$$x = a\sin\psi + \epsilon x_1(a,\psi) + \epsilon^2 x_2(a,\psi) + ..., \tag{86}$$

где ϵx_1, $\epsilon^2 x_2$... – неизвестные функции амплитуды a и периодические функции фазы ψ, которые, в свою очередь, являются неизвестными функциями времени и подчиняются уравнениям типа (75) и (76):

$$\left.\begin{aligned} \dot a &= \epsilon u_1(a) + \epsilon^2 u_2(a) + ... \\ \dot\psi &= \omega_0 + \epsilon\omega_1(a) + \epsilon^2\omega_2(a) + ... \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

Ряд (86) с a и ψ из (87) должен удовлетворять уравнению (62), что дает возможность найти все неизвестные функции $\epsilon^n x_n$, $\epsilon^n u_n$, $\epsilon^n\omega_n$. Допустим, выражения этих функций найдены. Заменим переменные так, чтобы

$$a = b + \epsilon\alpha_1(b) + \epsilon^2\alpha_2(b) + ...,$$

где $\alpha_n(b)$ – произвольные функции, и подставим в (87). В результате получим уравнения такого же типа (87). Это означает, что $\epsilon^n x_n$, $\epsilon^n u_n$ и $\epsilon^n\omega_n$ определяются с некоторым произволом. Для однозначного определения этих неизвестных наложим на них дополнительное условие. Исходя из физических предпосылок, потребуем, чтобы a было амплитудой основной гармоники, тогда функции $\epsilon^n x_n$ не должны содержать членов, пропорциональных $\sin\psi$ и $\cos\psi$, т.е. дополнительным условием может служить

$$\int_0^{2\pi} \epsilon^n x_n \sin\psi d\psi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \epsilon^n x_n \cos\psi d\psi = 0, \quad n = 1, 2, ... \tag{88}$$

Найдем теперь $\dot x$ и $\ddot x$ как функции a и ψ с точностью до членов первого порядка по ϵ, используя (87):

$$\dot x = a\omega_0\cos\psi + \epsilon\left(u_1\sin\psi + a\omega_1\cos\psi + \omega_0\frac{dx_1}{d\psi}\right), \tag{89}$$

$$\ddot x = -a\omega_0^2\sin\psi + \epsilon\left(2\omega_0 u_1\cos\psi - 2a\omega_0\omega_1\sin\psi + \omega_0^2\frac{d^2x_1}{d\psi^2}\right). \tag{90}$$

Для дальнейшего удобно переписать исходное уравнение (62) так, чтобы

$$\ddot x + \omega_0^2 x = \epsilon f(a\sin\psi, a\omega_0\cos\psi). \tag{91}$$

Подставим в это уравнение (86) и (90), тогда, ограничиваясь величинами, пропорциональными ϵ, получим

$$\omega_0^2\left(\epsilon x_1 + \frac{d^2(\epsilon x_1)}{d\psi^2}\right) = 2a\omega_0(\epsilon\omega_1)\sin\psi -$$
$$2\omega_0(\epsilon u_1)\cos\psi + \epsilon f(a\sin\psi, a\omega_0\cos\psi). \tag{92}$$

Уравнение (92) позволяет определить искомые функции ϵx_1, ϵu_1 и $\epsilon\omega_1$ по ϵf. Действительно, представим заданную ϵf и неизвестную ϵx_1 функции в виде рядов Фурье (напомним, по определению ϵx_1 – периодическая функция ψ):

$$\epsilon f(a,\psi) = \sum_{n=0}^{\infty}[\epsilon\alpha_n(a)\sin(n\psi) + \epsilon\beta_n(a)\cos(n\psi)], \tag{93}$$

$$\epsilon x_1(a,\psi) = \sum_{n=0}^{\infty}[\epsilon\gamma_n(a)\sin(n\psi) + \epsilon\nu_n(a)\cos(n\psi)], \tag{94}$$

здесь $\epsilon\alpha_n$ и $\epsilon\beta_n$ – коэффициенты Фурье известных функций, а $\epsilon\gamma_n$ и $\epsilon\nu_n$ – коэффициенты Фурье функций, подлежащих определению, причем согласно (88)

$$\epsilon\gamma_1 = \epsilon\nu_1 = 0.$$

Подставим теперь (93) и (94) в (92) и приравняем коэффициенты при одинаковых гармониках. В результате получим

$$\epsilon u_1 = \frac{\epsilon\beta_1}{2\omega_0}, \quad \epsilon\omega_1 = -\frac{\epsilon\alpha_1}{2a\omega_0}, \quad \epsilon\nu_0 = \frac{\epsilon\beta_0}{\omega_0^2}, \tag{95}$$

$$\epsilon\gamma_n = \frac{\epsilon\alpha_n}{\omega_0^2(1-n^2)}, \quad \epsilon\nu_n = \frac{\epsilon\beta_n}{\omega_0^2(1-n^2)}, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{96}$$

Следовательно, в первом приближении дифференциальные уравнения для амплитуды и фазы

$$\dot{a} = \frac{\epsilon\beta_1}{2\omega_0}, \quad \dot{\psi} = \omega_0 - \frac{\epsilon\alpha_1}{2a\omega_0}. \tag{97}$$

Таким образом, в первом приближении производная амплитуды по времени и частота определяются коэффициентами Фурье заданной функции ϵf, т.е. коэффициентами Фурье правой, вообще говоря нелинейной, части исходного уравнения, взятого с точностью до ϵ.

Из (94), учитывая (97), имеем

$$\epsilon x_1 = \frac{\epsilon\beta_0}{\omega_0^2} + \frac{1}{\omega_0^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{1-n^2}[\epsilon\alpha_n(a)\sin(n\psi) + \epsilon\beta_n(a)\cos(n\psi)].$$

Уравнения (97) позволяют найти амплитуду a и фазу ψ как функции времени и начальных значений, поэтому решением исходного уравнения будет

$$x = a(t)\sin\psi(t) + \epsilon x_1(a(t), \psi(t)).$$

Аналогичные вычисления с точностью до ϵ^2 и выше приводят к решению задачи во втором и более высоких приближениях.

- **Пример 1.** Рассмотрим консервативную систему, колебания которой описываются уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon f(x).$$

В этом случае

$$f(x) = f(a\sin\psi) = \sum_0^\infty \alpha_n \sin(n\psi).$$

Поэтому

$$x = a\sin(\omega t + \psi_0) - \frac{\epsilon}{\omega_0^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\alpha_n \sin\ n(\omega t + \psi_0)}{n^2 - 1},$$

$$\omega = \omega_0 - \frac{\epsilon\alpha_1}{2a\omega_0} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\epsilon\alpha_1}{a}.$$

В частности, в случае малых колебаний маятника

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}, \quad \epsilon f(x) = \frac{g}{l}\frac{x^3}{6},$$

т.е.

$$f(a\sin\psi) = a^3\sin^3\psi \quad \Rightarrow \quad \epsilon\alpha_1 = \frac{g}{l}\frac{3a^3}{24}, \quad \epsilon\alpha_3 = -\frac{g}{l}\frac{a^3}{24}.$$

Поэтому

$$x = a\sin(\omega t + \psi_0) + \frac{a^3}{192}\sin 3(\omega t + \psi_0), \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\left(1 - \frac{a^2}{16}\right)$$

в полном соответствии с тем, что было получено ранее.

В другом частном случае положим $f(x) = -\beta x^3$:

$$f(a\sin\psi) = -\beta a^3\sin^3\psi \quad \Rightarrow \quad \epsilon\alpha_1 = -\frac{3\beta a^3}{4}, \quad \epsilon\alpha_3 = \frac{\beta a^3}{4},$$

следовательно,

$$x = a\sin(\omega t + \psi_0) - \frac{\beta a^3}{32\omega_0^2}\sin 3(\omega t + \psi_0),$$

$$\omega = \omega_0 - \frac{3\beta a^2}{8\omega_0}.$$

• **Пример 2.** Рассмотрим систему с диссипацией, колебания которой подчиняются уравнению

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon \dot{x} f(x).$$

В этом случае

$$f(a\sin\varphi, a\omega_0\cos\varphi) = a\omega_0\cos\varphi f(a\sin\varphi).$$

Введем функцию $F(y)$ так, чтобы

$$F(y) = \int_0^y f(y)dy,$$

и представим ее в виде фурье-разложения:

$$F(a\cos\varphi) = \sum F_n^* \cos(n\varphi).$$

Продифференцируем обе части по φ:

$$a\sin\varphi f(a\cos\varphi) = \sum nF_n^* \sin(n\varphi),$$

положив затем $\varphi = \psi + 3\pi/2$, получим

$$a\cos\psi f(a\sin\psi) = -\sum nF_n^* \sin[n(\omega_0 t + \psi_0 + 3\pi/2)].$$

Тогда

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\epsilon\omega_0 \sum nF_n^* \sin[n(\omega_0 t + \psi_0 + 3\pi/2)],$$

решение которого в первом приближении имеет вид

$$x = a\sin(\omega_0 t + \psi_0) + \frac{\epsilon}{\omega_0}\sum_{n>1}\frac{n}{n^2-1}F_n^*(a)\sin[n(\omega_0 t + \psi_0 + \frac{3\pi}{2})].$$

Переобозначив фазовую постоянную $\psi_0 = \beta_0 + \pi/2$, перепишем это выражение в более компактной форме:

$$x = a\cos(\omega_0 t + \beta_0) + \frac{\epsilon}{\omega_0}\sum_{n>1}\frac{n}{n^2-1}F_n^*(a)\sin[n(\omega_0 t + \beta_0)].$$

Согласно (32) и (36) амплитуда a удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{a} = \frac{\epsilon F_1^*(a)}{2},$$

а корень уравнения $F_1^*(a) = 0$ есть стационарная амплитуда.

В качестве иллюстрации рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + x = \epsilon(1 - x^2)\dot{x}, \quad f(x) = 1 - x^2, \quad F(x) = x - \frac{x^3}{3},$$

$$F(a\cos\phi) = a\cos\phi - \frac{(a\cos\phi)^3}{3} = a\left(1 - \frac{a^2}{4}\right)\cos\phi - \frac{a^3}{12}\cos 3\phi,$$

следовательно,

$$F_1^*(a) = a\left(1 - \frac{a^2}{4}\right), \quad F_3^*(a) = -\frac{a^3}{12}, \quad F_n^*(a) \text{ для } n \neq 0.$$

Таким образом,

$$x = a\cos(t + t_0) - \frac{a^3}{32}\sin 3(t + t_0).$$

Амплитуда изменяется со временем согласно

$$\dot{a} = \frac{\epsilon a}{2}\left(1 - \frac{a^2}{4}\right),$$

поэтому для стационарных колебаний $a = 2$, т.е.

$$x = 2\cos(t + t_0) - \frac{1}{4}\sin 3(t + t_0).$$

Существенно отметить, что частота колебаний в первом приближении равна ω_0, т.к. в разложении $\omega(a)$ по степеням ϵ отсутствует величина, пропорциональная ϵ (см. (97)). Другими словами, в задачах рассмотренного в примере 2 типа поправки к ω_0 возникают лишь во втором приближении.

3. **Особенности резонанса в нелинейных колебаниях.** Проанализируем физические особенности вынужденных нелинейных колебаний на примере системы с одной степенью свободы, на которую действует периодическая сила $F = \epsilon F_0 \cos\Omega t$. Средняя мощность этой силы за некоторое время δt равна

$$P = \frac{1}{\delta t}\int_t^{t+\delta t} \dot{x}\epsilon F_0 \cos\Omega t dt.$$

Будем считать, что интервал δt много больше периода собственных колебаний $2\pi/\omega_0$, но, с другой стороны, предположим, что за время δt форма колебаний не претерпевает заметных изменений. Если принять эти ограничения на δt, то нелинейные колебания можно по-прежнему считать "близкими" к линейным

$$x \approx a \sin\psi, \quad \psi = \omega_0 t = \beta(t), \quad \dot{x} = a\omega_0 \cos\psi.$$

Поскольку изменения функций $a(t)$ и $\beta(t)$ за время δt малы, то для средней мощности действующей силы получим

$$P = \frac{\epsilon a(t)\omega_0 F_0}{2\delta t} \left\{ \frac{\sin[(\Omega + \omega_0)t + \beta(t)]}{\Omega + \omega_0} + \frac{\sin[(\Omega - \omega_0)t - \beta(t)]}{\Omega - \omega_0} \right\}_t^{t+\delta t}.$$

В нерезонансном случае $\Omega \neq \omega_0$ мощность вынуждающей силы исчезающе-мала. Действительно, знаменатель выражения P содержит ω_0^2, а согласно нашему предположению $\delta t \ll 2\pi/\omega_0$, поэтому из-за ограниченности выражения в фигурных скобках $P \ll 1$. В резонансном случае P становится порядка ϵ, в чем легко убедиться, подставив $\Omega = \omega_0 + \delta\omega_0$ в выражение для P и устремив $\delta\omega_0$ к нулю. При этом превалирующую роль играет второе слагаемое в фигурных скобках, и в результате

$$P \approx \epsilon a(t)\omega_0 F_0 \cos\beta(t).$$

Таким образом, в случае резонанса средняя мощность вынуждающей силы является функцией амплитуды и "расстройки" фазы, что позволяет предположить – **в резонансном случае изменение амплитуды и частоты колебаний зависит от амплитуды и расстройки фазы**.

Другой особенностью вынужденных нелинейных колебаний является **резонанс на комбинационных частотах**. Действительно, решения уравнений таких колебаний содержат обусловленные нелинейными членами высшие гармоники с фазами, пропорциональными $n\omega_0$. В этом случае возможен резонанс на частоте, примерно равной $n\omega_0$. В общем случае, когда высшие гармоники содержатся и в выражении для вынуждающей силы, может возникнуть резонанс на комбинационных частотах $n\omega_0 + m\Omega$, где n и m – целые числа, если при этом $\Omega \approx \omega_0$ – резонанс называют **главным**.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ. ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

1. К главе "Введение. Основные понятия и принципы"

1. Определите понятия "материальная точка", "событие", "система отсчета", "галилеево пространство". Как изображаются неподвижная частица, равномерно движущаяся частица в плоскости (t, x) галилеева пространства?

2. Перечислите отличия в определениях декартовых и обобщенных координат? Поясните преимущества использования обобщенных координат на конкретных примерах. Сравните число декартовых и обобщенных координат для механической системы N частиц.

3. Сколько степеней свободы у двух жестко скрепленных частиц, если движение одной из них ограничено шаровой поверхностью, а другой – линией. (Ответ: две.)

4. Определите понятия "состояние механической системы", "функция Лагранжа", "действие".

   Сформулируйте принцип наименьшего действия. Сформулируйте основную задачу механики. Покажите, что уравнения Лагранжа являются уравнениями движения механической системы.

5. Дайте определение инерциальной системы отсчета. Сформулируйте принцип относительности. Покажите, что расширенная (10-параметрическая) группа Галилея является группой преобразований, сохраняющих инерциальность системы отсчета.

6. Какой вид имеет функция Лагранжа

   (a) замкнутой механической системы взаимодействующих частиц в декартовых координатах, в обобщенных координатах;

   (b) механической системы в заданном внешнем поле.

   Как обосновывается асимптотическая аддитивность функции Лагранжа? Чем отличаются лагранжевы функции, соответствующие одним и тем же уравнениям движения?

7. Покажите, что ньютоновское определение инерциальной системы отсчета и определение, использующее общие свойства пространства и времени, эквивалентны.

8. Представьте функцию Лагранжа

$$L = \frac{mv^2}{2} - U(x, y, z)$$

(a) в цилиндрических координатах,

(b) в сферических координатах,

(c) в параболических координатах

$$x = u - v, \qquad y = 2\sqrt{uv}.$$

Решение: В произвольной системе координат расстояние между двумя бесконечно близкими точками

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \quad i, k = 1, 2, 3.$$

Если координатные линии ортогональны, то отличны от нуля только диагональные компоненты метрического тензора g_{ik}. В этом случае обычно вводят "истинное" расстояние между близкими точками

$$dl^i = \sqrt{g_{kk}} dx^i \quad \text{(суммирования по } k \text{ нет)},$$

так, чтобы

$$ds^2 = \delta_{ik} dl^i dl^k = (dl^1)^2 + (dl^2)^2 + (dl^3)^2.$$

Каждому из этих элементов длины соответствуют "физические" (наблюдаемые) компоненты вектора скорости

$$v^i = \sqrt{g_{kk}}\, \frac{dx^i}{dt}.$$

Вектор скорости

$$\vec{v} = v^i \hat{e}_i,$$

где $\hat{e}_i$ – "физические" компоненты базисных векторов системы координат z^i:

$$\hat{e}_i = \frac{1}{\sqrt{g_{kk}}}\, \frac{\partial x^l}{\partial z^i} \vec{k}_l,$$

$x^l(x, y, z)$ – декартовы координаты, а $\vec{k}_x = (1, 0, 0)$, $\vec{k}_y = (0, 1, 0)$, $\vec{k}_z = (0, 0, 1)$ – орты декартовой системы.

(a) в цилиндрических координатах (ρ, φ, z)

$$x = \rho \cdot \cos\varphi, \quad y = \rho \cdot \sin\varphi, \quad z = z;$$

$$dx = d\rho \cdot \cos\varphi - \rho \cdot \sin\varphi \, d\varphi, \quad dy = d\rho \cdot \sin\varphi + \rho \cdot \cos\varphi \, d\varphi, \quad dz = dz;$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

$$g_{\rho\rho} = 1, \quad g_{\varphi\varphi} = \rho^2, \quad g_{zz} = 1;$$

Компоненты вектора скорости

$$v^\rho = \dot{\rho}, \quad v^\varphi = \rho\dot{\varphi}, \quad v^z = \dot{z},$$

поэтому

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(\rho, \varphi, z).$$

(b) в сферических координатах (r, θ, φ)

$$x = r \ \sin\theta \ cos\varphi, \quad y = r \ \sin\theta \ \sin\varphi, \quad z = r \ \cos\theta,$$

аналогично предыдущему получаем

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2;$$

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta.$$

Компоненты вектора скорости

$$v^r = \dot{r}, \quad v^\theta = r\dot{\theta}, \quad v^\varphi = r\dot{\varphi}\sin\theta,$$

поэтому

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \ \dot{\theta}^2 + r^2 \ \sin^2\theta \ \dot{\varphi}^2) - U(r, \theta, \varphi).$$

(c) в параболических координатах (u, v)

$$x = u - v, \qquad y = 2\sqrt{uv},$$

$$dx = du - dv, \qquad dy = \sqrt{v/u}\, du + \sqrt{u/v}\, dv,$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (1 + v/u)du^2 + (1 + u/v)dv^2 \ ;$$

$$g_{uu} = 1 + v/u, \quad g_{vv} = 1 + u/v \ .$$

Компоненты вектора скорости

$$v^u = \dot{u} \ \sqrt{1 + v/u}, \quad v^v = \dot{v} \ \sqrt{1 + u/v} \ ,$$

поэтому

$$L = \frac{m}{2}[(1 + v/u)\dot{u}^2 + (1 + u/v)\dot{v}^2] - U(u, v).$$

9. Запишите компоненты вектора ускорения частицы в цилиндрической и сферической системе координат.

Решение: В сферических координатах

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\ \dot{\theta}^2 + r^2\ \sin^2\theta\ \dot{\varphi}^2) - U(r, \theta, \varphi)$$

уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} - \frac{\partial L}{\partial z_i} = 0, \quad z_1 = r, \quad z_2 = \theta, \quad z_3 = \varphi$$

приобретают вид

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) = -\frac{\partial U}{\partial r},$$

$$m \cdot r(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2) = -\frac{\partial U}{\partial \theta},$$

$$m \cdot r\sin\theta(r\sin\theta\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\sin\theta\dot{\varphi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}) = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}.$$

По определению сила есть градиент потенциальной энергии с отрицательным знаком. Компоненты вектора градиента в сферических координатах

$$F_r = -\frac{\partial U}{\partial r}, \quad F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}, \quad F_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \theta},$$

поэтому компоненты ускорения есть

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta,$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta,$$

$$a_\varphi = r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta.$$

Точно так же в цилиндрических координатах

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(\rho, \varphi, z),$$

и для уравнений движения имеем

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = -\frac{\partial U}{\partial \rho},$$

$$m\rho(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) = -\frac{\partial U}{\partial \varphi},$$

$$m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Компоненты силы

$$F_\rho = -\frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad F_\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

поэтому

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}, \quad a_z = \ddot{z}.$$

Другой способ решения задачи "офизичен" в меньшей степени и тесно связан с содержанием задачи 8.

В цилиндрических координатах

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi + \dot{z}\hat{e}_z.$$

Для "физических" компонент базисных векторов и их временных производных имеем

$$\hat{e}_\rho = \vec{k}_x \cos\varphi + \vec{k}_y \sin\varphi, \quad \hat{e}_\varphi = -\vec{k}_x \sin\varphi + \vec{k}_y \cos\varphi, \quad \hat{e}_z = \vec{k}_z;$$

$$\frac{d\hat{e}_\rho}{dt} = \dot{\varphi}\hat{e}_\varphi, \quad \frac{d\hat{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\hat{e}_\rho ,$$

поэтому компоненты вектора ускорения $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ есть

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}, \quad a_z = \ddot{z} .$$

В сферических координатах

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\hat{e}_\varphi.$$

"Физические" компоненты базисных векторов и их временные производные имеют вид

$$\hat{e}_r = \vec{k}_x \sin\theta\cos\varphi + \vec{k}_y \sin\theta\sin\varphi + \vec{k}_z\cos\theta,$$

$$\hat{e}_\theta = \vec{k}_x \cos\theta\cos\varphi + \vec{k}_y \cos\theta\sin\varphi - \vec{k}_z\sin\theta,$$

$$\hat{e}_\varphi = -\vec{k}_x \sin\varphi + \vec{k}_y \cos\varphi;$$

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\hat{e}_\varphi , \quad \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\hat{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\hat{e}_\varphi ,$$

$$\frac{d\hat{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}(\vec{k}_x \cos\varphi + \vec{k}_y \sin\varphi),$$

$$\vec{k}_z = \hat{e}_r \cos\theta - \hat{e}_\theta \sin\theta,$$

поэтому компоненты вектора ускорения

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta,$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta,$$

$$a_\varphi = r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta.$$

10. Найдите ускорение, если задана функция Лагранжа:

    (a) $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (x\dot{y} + y\dot{x})$;

    (b) $L = m(t)\dot{x}^2/2$.

    Решение: Уравнения Лагранжа имеют вид $\dot{p}_i = f_i$, где $p_i = \partial L/\partial\dot{q}_i$ – обобщенный импульс, а $f_i = \partial L/\partial q_i$ – обобщенная сила, соответствующие i-й обобщенной координате. Поэтому

    (a)
    $$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}} = \dot{x} - y; \quad \frac{\partial L}{\partial\dot{y}} = \dot{y} + x; \quad \frac{\partial L}{\partial x} = \dot{y};$$
    $$\frac{\partial L}{\partial y} = -\dot{x} \;\Rightarrow\; \ddot{x} = 2\dot{y}; \quad \ddot{y} = -2\dot{x}.$$

    (b)
    $$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}} = m(t)\dot{x}; \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0; \quad \frac{d(m(t)\dot{x})}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; m\ddot{x} = -\dot{m}\dot{x}.$$

    Положим $m(t) = t$, тогда $\ddot{x} = -\dot{x}/t$. Если $m(t) = m_0 \cdot exp(-\alpha t)$, то $\ddot{x} = \alpha\dot{x}$.

11. Найдите функцию Лагранжа для

    (a) точки массой m на шаровой поверхности в поле тяжести (сферический маятник).

    Решение: В сферических координатах кинетическая энергия точки, перемещающейся по поверхности сферы фиксированного радиуса r (см. задачу 8b),

    $$T = \frac{m}{2}(r^2\,\dot{\theta}^2 + r^2\,\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2).$$

Потенциальная энергия в поле тяжести $U = mgh$, где h – высота поднятия точки над некоторым уровнем, выбор которого несущественен, т.к. отсчет потенциальной энергии от разных уровней приводит к отличающимся на константы функциям Лагранжа. Выбрав в качестве уровня отсчета экваториальную плоскость, имеем $h = r\cos\,\theta$. Тогда

$$L = \frac{m}{2}(r^2\,\dot\theta^2 + r^2\,\sin^2\theta\,\dot\varphi^2) - mgr\cos\,\theta.$$

(b) точки массой m на поверхности конуса с углом 2α при вершине. Потенциальная энергия обратно пропорциональна расстоянию до вершины.

Решение: Выберем начало сферических координат в вершине конуса, а угол θ будем отсчитывать от его оси. Тогда, ввиду того что на поверхности конуса $\dot\theta = 0$ ($\theta = \alpha = const$) и если расстояние от вершины конуса есть r, имеем

$$L = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\,\dot\theta^2 + r^2\,\sin^2\theta\,\dot\varphi^2) - \frac{\alpha}{r}.$$

(c) двойного плоского маятника (рис. 1).

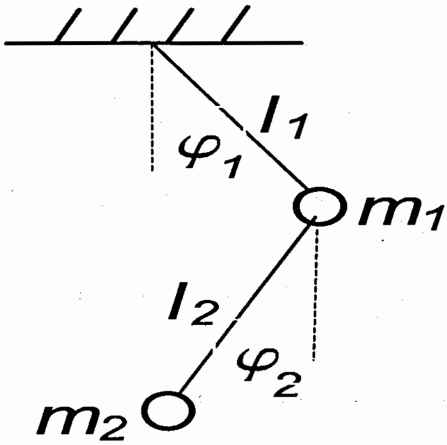

Рис. 1

Решение: В качестве обобщенных координат выберем углы φ_1 и φ_2, которые образуют нити l_1 и l_2 с вертикалью. Тогда для точки m_1 имеем

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot\varphi_1^2, \quad U = -m_1 g l_1\cos\varphi_1.$$

(Начало координат находится в точке подвеса, ось y направлена по вертикали вниз, потенциальная энергия отсчитывается от оси x). Чтобы найти кинетическую энергию второй точки, выразим ее декартовы координаты x_2, y_2 через углы φ_1, φ_2:

$$x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2, \quad y_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2.$$

После этого получим

$$T_2 = \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2}[l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 2l_1l_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2].$$

Окончательно

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) +$$

$$(m_1 + m_2) g l_1 \cos\varphi_1 + m_2 g l_2 \cos\varphi_2.$$

(d) плоского маятника массой m_2, точка подвеса которого (массы m_1 в ней) может передвигаться по горизонтальной прямой.

Решение: Введем координату x точки m_1 и угол φ между нитью маятника и вертикалью, тогда

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi) + m_2 g l \cos\varphi.$$

(e) плоского маятника, точка подвеса которого равномерно движется по вертикальной окружности с постоянной частотой γ.

Решение: Координаты точки m

$$x = a\cos\gamma t + l\sin\varphi, \quad y = -a\sin\gamma t + l\cos\varphi,$$

а функция Лагранжа

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2\sin(\varphi - \gamma t) + mgl\cos\varphi;$$

здесь опущены члены, зависящие только от времени, и исключена полная производная по времени от $mal\gamma\cos(\varphi - \gamma t)$.

(f) плоского маятника, точка подвеса которого колеблется по закону $a\cos\gamma t$ в вертикальном направлении.

Решение: Координаты точки m

$$x = l\sin\varphi, \quad y = a\cos\gamma t + l\cos\varphi.$$

После исключения полных производных

$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mla\gamma^2 \cos\gamma t \cos\varphi + mgl\cos\varphi.$$

(g) плоского маятника массой m_1, причем по его стержню длиной l движется точка массой m_2 со скоростью v.

Решение: Введем угол φ между l и вертикалью, а также $r = r_0 + vt$ – расстояние от точки m_2 до точки подвеса маятника. Кинетическая энергия точки m_1

$$T_1 = \frac{m_1}{2}l^2\dot{\varphi}^2,$$

а точки m_2 $(\dot{r} = v)$

$$T_2 = \frac{m_2}{2}\Big(v^2 + \dot{\varphi}^2(r_0 + vt)^2\Big).$$

Опуская постоянные, для потенциальной энергии имеем

$$U_1 = -m_1 glcos\varphi,$$

$$U_2 = -m_2 g(r_0 + vt)cos\varphi.$$

Поэтому

$$L = \frac{m_1}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\varphi}^2(r_0 + vt)^2 + m_1 glcos\varphi + m_2 g(r_0 + vt)cos\varphi.$$

Постоянная $m_2v^2/2$ опущена.

2. К главе "Интегралы движения. Теорема Нетер. Законы сохранения"

1. Определите понятие "интегралы движения". Каково их число для замкнутой механической системы с s степенями свободы? Какова роль аддитивных интегралов движения?

2. Какие соображения приводят к закону сохранения энергии? С какими преобразованиями связан этот закон? Как определить энергию по заданной функции Лагранжа? Сохраняется ли энергия механической системы во внешнем поле? Как преобразуется энергия при преобразованиях от одной ИСО к другой?

3. Какие соображения приводят к закону сохранения импульса? С какими преобразованиями связан этот закон? Как определяется обобщенный импульс? Каков формальный признак сохранения обобщенного импульса? В каких внешних полях сохраняются компоненты импульса? Как преобразуется импульс при преобразованиях от одной ИСО к другой? Как движется центр инерции замкнутой механической системы?

4. Покажите, что законы Ньютона можно получить как следствия принципа относительности и принципа наименьшего действия.

5. Найдите изменение направления движущейся со скоростью v_1 частицы массой m, если она перемещается из полупространства, где ее потенциальная энергия $U_1 = const$, в полупространство с потенциальной энергией $U_2 = const$.

   Решение: Выберем координаты в плоскости движения, направив ось x по линии раздела. Потенциальная энергия не зависит от x, поэтому в этом направлении сохраняется импульс, т.е. $v_{1x} = v_{2x}$, или если ввести углы θ_1 и θ_2 между направлением движения частицы и нормалью к оси x, то

$$v_1 \ \sin\theta_1 = v_2 \ \sin\theta_2.$$

   Скорости связаны законом сохранения энергии, что дает

$$v_2^2 = v_1^2 + \frac{2(U_1 - U_2)}{m},$$

   поэтому "показатель преломления"

$$n \equiv \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \sqrt{1 + \frac{2(U_1 - U_2)}{mv_1^2}}.$$

6. Какие соображения приводят к закону сохранения момента импульса? С какими преобразованиями связан этот закон? В каких внешних полях сохраняются компоненты момента импульса? Докажите, что в сферически-симметричном поле сохраняется вектор момента импульса. Как преобразуется момент импульса при преобразованиях от одной ИСО к другой? Как зависит момент импульса от выбора начала координат?

7. Найдите выражения для декартовых компонент и абсолютной величины момента импульса частицы

   (a) в цилиндрических координатах ρ, φ, z.

   Ответ: $M_x = m \sin\varphi(\dot{\rho} z - z\dot{\rho}) - m\rho z\dot{\varphi}\cos\varphi$,

$$M_y = m\cos\varphi(\rho\dot{z} - \rho\dot{z}) - m\rho z\dot{\varphi}\sin\varphi,$$

$$M_z = m\rho^2\dot{\varphi},$$

$$M^2 = m^2\rho^2\dot{\varphi}^2(\rho^2 + z^2) + m^2(\rho\dot{z} - z\dot{\rho})^2.$$

   (b) в сферических координатах r, θ, φ.

   Ответ: $M_x = -mr^2(\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi)$,

$$M_y = mr^2(\dot{\theta}\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi),$$

$$M_z = mr^2\sin\theta\cdot\dot{\varphi},$$

$$M^2 = m^2 r(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2).$$

8. Какие компоненты импульса $\vec{P}$ и момента $\vec{\mathrm{M}}$ сохраняются при движении в следующих полях:

   (a) Поле бесконечной однородной плоскости.

   Ответ: P_x, P_y, M_z (бесконечная плоскость - плоскость (x, y)).

   (b) Поле бесконечного однородного цилиндра.

   Ответ: M_z, P_z (ось цилиндра - ось z).

   (c) Поле бесконечной однородной призмы.

   Ответ: P_z (ребра призмы параллельны оси z).

   (d) Поле двух точек.

   Ответ: M_z (точки находятся на оси z).

   (e) Поле бесконечной однородной полуплоскости.

   Ответ: P_y (бесконечная полуплоскость - часть плоскости (x, y), ограниченная осью y).

   (f) Поле однородного конуса.

   Ответ: M_z (ось конуса - ось z).

   (g) Поле однородного кругового тора.

   Ответ: M_z (ось тора - ось z).

(h) Поле бесконечной однородной цилиндрической винтовой линии.

Решение: Функция Лагранжа не меняется при повороте вокруг оси винта (ось z) на угол $\delta\varphi$ и одновременном переносе вдоль этой оси на расстояние $\delta\varphi \cdot h/2\pi$ (h - шаг винта). Поэтому

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial z}\delta z + \frac{\partial L}{\partial \varphi}\delta\varphi = (\dot{P}_z \frac{h}{2\pi} + \dot{M}_z)\delta\varphi = 0,$$

откуда

$$M_z + \frac{h}{2\pi}P_z = const.$$

9. Найдите закон преобразования действия при переходе от одной инерциальной системы к другой.

Решение: Функция Лагранжа, равная разности кинетической и потенциальной энергии, очевидно, преобразуется согласно закону преобразования энергии, который выведен в тексте лекций, т.е.

$$L = L' + \vec{V}\vec{P}' + \frac{1}{2}\mu V^2.$$

Интегрируя это равенство по времени, найдем искомый закон преобразования действия:

$$S = S' + \mu\vec{V}\vec{R}' + \frac{1}{2}\mu V^2 t,$$

где $\vec{R}'$ - радиус-вектор центра инерции в системе K$'$.

3. К главе "Механическое подобие. Теорема вириала. Одномерное движение"

1. В каких случаях уравнения движения допускают геометрически подобные траектории? Как относятся времена движения по этим траекториям в общем случае, в некоторых частных случаях? Докажите теорему вириала.

2. Оцените внутреннюю температуру Солнца.

Решение: Согласно утверждению теоремы вириала

$$2 < T >= k < U > .$$

Предполагая Солнце однородным шаром, для его собственной гравитационной энергии (см. пункт 3 главы IV) имеем

$$U = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R},$$

а закон равнораспределения кинетической энергии по степеням свободы дает

$$< T >= \frac{3}{2}\kappa TN.$$

Здесь κ – постоянная Больцмана, N – число частиц Солнца (в основном атомов водорода и гелия). Поскольку U – однородная функция координат степени $k = -1$, то

$$2 \cdot \frac{3}{2}\kappa TN = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \longrightarrow T = \frac{GMm}{5\kappa R},$$

где m – средняя масса атома. Для оценок примем $M = 2 \cdot 10^{33}$ г, $R = 7 \cdot 10^{10}$ см, $m = 3 \cdot 10^{-24}$ г, тогда $T = 10^7$ К.

3. Оцените внутреннюю энергию Метагалактики.

Справка: *Метагалактика – это видимая часть Вселенной, которая содержит* $\sim 10^{20}$ *звезд. Наблюдения показывают, что*

(a) *Метагалактика в среднем однородна,*

(b) *Метагалактика нестационарна – скопления галактик и отдельные галактики разбегаются со скоростями, пропорциональными расстоянию между ними и одинаковыми по всем направлениям. По закону, открытому Хабблом, относительная скорость разбегания i-й и k-й галактик*

$$\vec{v}_{ik} = H\vec{r}_{ik}, \quad \vec{r}_{ik} = \vec{r}_i - \vec{r}_k, \quad \vec{v}_{ik} = \vec{v}_i - \vec{v}_k;$$

$H = 50 \div 100$ Мпс $\cdot$ км/с – *постоянная Хаббла.*

Решение: Внутренняя энергия Метагалактики

$$E = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 - \frac{G}{2}\sum_{i,k}\frac{m_i m_k}{r_{ik}}.$$

Воспользовавшись законом Хаббла и полагая, что a – радиус объема, который занимает Метагалактика, для кинетической энергии T имеем

$$\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i H^2 r_i^2 = \frac{1}{2}H^2\rho\int_0^a r^2 dV =$$

$$\frac{4\pi}{2}H^2\rho\int_0^a r^4dr = \frac{3}{10}MH^2a^2, \quad M = \frac{4\pi}{3}a^3\rho.$$

Для потенциальной энергии U

$$-G\sum_{i>k}\frac{m_im_k}{r_{ik}} = -G\int\frac{mdm}{r} = -G\int_0^a\frac{4\pi\rho r^2dr}{r}\left(\frac{4\pi}{3}r^3\rho\right) = -\frac{3}{5}G\frac{M^2}{a}.$$

Следовательно,

$$E = \frac{4\pi}{5}GMa^2\left(\frac{3H^2}{8\pi G} - \rho\right).$$

Согласно теореме о вириале для гравитационных систем

$$< T >= -\frac{1}{2} < U >, \quad - < T >= E < 0$$

движение происходит в ограниченной области пространства. Поэтому, если плотность Метагалактики ρ меньше критического значения $\rho_{\text{кр}} = 3H^2/8\pi G \sim 10^{-29}\text{г}\cdot\text{см}^3$, то $E > 0$ и Метагалактика будет неограниченно расширяться. Если же $\rho > \rho_{\text{кр}}$, то $E < 0$ и, поскольку объем не может расти неограниченно, расширение сменится сжатием.

4. Найдите траекторию заряженной частицы с массой m и зарядом e в электрическом поле $E = E_0 cos\omega t$, если при $t = 0$ скорость ее равна v_0 и направлена перпендикулярно полю.

Решение: Выберем ось y по направлению поля, тогда первое интегрирование ньютоновских уравнений движения

$$m\ddot{x} = 0, \qquad m\ddot{y} = eE_0 cos\omega t$$

с учетом начальных условий дает

$$\dot{x} = v_0, \qquad \dot{y} = \frac{eE_0}{m\omega}\sin\omega t.$$

После второго интегрирования имеем

$$x = v_0t; \qquad y = -\frac{eE_0}{m\omega^2}\cos\omega t = -\frac{eE_0}{m\omega^2}\cos\left(\omega\cdot\frac{x}{v_0}\right).$$

Аддитивные постоянные опущены, т.к. они определяют только выбор начала координат.

5. Частица массой m за время τ перемещается из точки $x = 0$ в точку $x = a$ в однородном поле $U = -Fx$. Предположив, что закон движения частицы имеет вид $x(t) = At^2+Bt+C$, подберите коэффициенты A, B, C так, чтобы соответствующее действие имело экстремальное значение.

   Решение: Если отсчитывать время ($t = 0$) от момента, когда положение тела совпадает с точкой $x = 0$, то $C = 0$. При $t = \tau$ тело находится в точке $x = a$, что дает $B = -A\tau + a/\tau$, и тогда

$$x(t) = At^2 + \left(\frac{a}{\tau} - A\tau\right)t.$$

   Действие

$$W = \int_0^\tau \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + Fx\right)dt = \frac{mA^2\tau^3}{6} - \frac{FA\tau^3}{6} + \frac{Fa\tau}{2} + \frac{ma^2}{2\tau}.$$

   Условие $\partial W/\partial A = 0$ определяет экстремум и дает $A = F/2m$, поэтому

$$x(t) = \frac{F}{2m}t^2 + \left(\frac{a}{\tau} - \frac{F\tau}{2m}\right)t.$$

6. Покажите, что для замкнутых одномерных систем энергия является первым интегралом уравнений движения. В каких случаях одномерное движение финитно, инфинитно? Покажите, что финитное одномерное движение периодично.

7. Частица с энергией E движется в поле $U = U(x)$. Найдите изменение времени инфинитного движения частицы (от $x = -\infty$ до $x = \infty$) по сравнению со временем свободного движения с той же энергией, если

   (a) $U = U_0/ch^2(kx), \quad E > U_0.$

   Решение: Введем

$$v_0 = \sqrt{\frac{2E}{m}} \quad \text{и} \quad v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_0/\cosh^2 kx\right)}.$$

   Изменение искомого времени движения частицы определится как

$$\tau = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v}\right)dx = \frac{1}{v_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1 - \frac{\sqrt{E}\cosh kx}{\sqrt{E\cosh^2 kx - U_0}}\right)dx.$$

После замены $\sinh kx = y$ получим

$$\tau = \frac{2}{kv_0}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{y^2+(E-U_0)/E}}\right]dy =$$

$$\frac{2}{kv_0}\ln\left[\frac{y+\sqrt{y^2+1}}{y+\sqrt{y^2+(E-U_0)/E}}\right]_0^{\infty} = -\frac{2}{kv_0}\ln\frac{1}{\sqrt{(E-U_0)/E}}.$$

Итак,

$$\tau = \frac{1}{kv_0}\ln\frac{E-U_0}{E}.$$

(b) $U = -U_0/ch^2(kx)$, $E > 0$.

Решение: Совершенно аналогично предыдущему получаем

$$\tau = \frac{1}{kv_0}\ln\frac{E+U_0}{E}.$$

Любопытно сравнить оба случая. По определению $\tau = t_0 - t$, где t_0 – время свободного движения, t – время движения в поле. В случае a) $\tau < 0$, т.е. $t > t_0$, в случае b) $\tau > 0$, т.е. $t < t_0$.

8. Найдите место остановки системы, если

(a) $L = -\sqrt{1-\dot{x}^2} + x$ с начальными условиями $x_0 = 1, \quad \dot{x}_0 = 1/2$;

(b) $L = (\dot{x}^2 - x^2 + 1)/x$ с начальными условиями $x_0 = 1, \quad \dot{x}_0 = 1$.

Решение: Место остановки системы определяется как решение алгебраического уравнения

$$E \equiv \sum_i \dot{x}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L = U(x).$$

Если функция Лагранжа не зависит от времени явно, то энергия сохраняется. Начальные условия позволяют найти численное значение энергии и решить уравнение $E = U(x)$ для конкретной задачи. Иногда бывает непросто выделить потенциальную энергию в заданной функции Лагранжа. В этих случаях в выражении для энергии достаточно положить $\dot{x} = 0$.

(a)

$$E = \frac{1}{\sqrt{1-\dot{x}^2}} - x = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1,$$

положив $\dot{x}=0$, имеем

$$x = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

(b)

$$E = \frac{\dot{x}^2}{x} + \frac{x^2-1}{x} = 1.$$

Место остановки определится решением уравнения

$$x^2 - x - 1 = 0; \quad x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

9. Проинтегрируйте уравнения движения, если

(a) $L = \dot{x}^2 - 1/x$ при $t=0$, $\quad x_0 = 1$, $\quad \dot{x}_0 = 0$;

(b) $L = (\dot{x}^2 + \dot{x}x - 1)/x^2$ при $t=0$, $\quad x_0 = 1$, $\quad \dot{x}_0 = 0$;

(c) $L = -\sqrt{1-\dot{x}^2} + x$ при $t=0$, $\quad x_0 = 2$, $\quad \dot{x}_0 = 0$.

Решение: Во всех трех случаях лагранжиан не зависит от времени явно, поэтому удобно исходить из первого интеграла уравнений движения – энергии.

(a)

$$E = \dot{x}^2 - 1/x = 1 \quad \Rightarrow \quad t = \int \frac{dx}{\sqrt{1-1/x}} + C =$$

$$\sqrt{x(x-1)} + \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}) + C.$$

Начальные условия дают $C=0$.

(b)

$$E = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = \frac{\dot{x}^2+1}{x^2} = 1 \Longrightarrow$$

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} + C = arc\cosh x + C.$$

Подставив начальные условия, получим $C=0$,

$$x = \cosh t.$$

(c)

$$E = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = \frac{1}{\sqrt{1-\dot{x}^2}} - x = -1 \Longrightarrow$$

$$t = \int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{(x-1)^2-1}} + C = \sqrt{x^2-2x} + C.$$

Подставив начальные условия, получим $C = 0$,

$$x = 1 + \sqrt{1+t^2}.$$

10. Укажите условия финитности движения и найдите период колебаний в зависимости от энергии, если

$$L = \dot{x}^2 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

Решение: Потенциальная энергия

$$U = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}.$$

Уравнение

$$E = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$$

позволяет определить границы движения:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+E}}{E}.$$

При $E \geq 0$ движение инфинитно и финитно при $-1 < E < 0$. Для границ финитного движения, считая $E = |E|$, имеем

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{1-E}}{E}, \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{1-E}}{E}.$$

Период финитного движения

$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2x - Ex^2 - 1}} = \frac{2}{\sqrt{E}} \arcsin \frac{Ex-1}{\sqrt{1-E}}\Bigg|_{x_1}^{x_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{E}}.$$

11. Проинтегрируйте уравнения движения, если

(a) $L = t^2\dot{x}^2/2$ при $t = 1, \quad x = 0, \quad \dot{x} = 1;$

(b) $L = \sqrt{t + \dot{x}^2}$ при $t = 3, \quad x = 0, \quad \dot{x} = 1;$

(c) $L = (\dot{x}^2 + \dot{y}\dot{z})/x$;

(d) $L = (\dot{x}^2 + 2x\dot{y} + \dot{y}^2)/2x$;

(e) $L = -\sqrt{1 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} + x$.

Решение: Если функции Лагранжа не содержат одной или нескольких координат, то соответствующий этим циклическим координатам сохраняющийся импульс является первым интегралом уравнений движения.

(a)

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = t^2\dot{x} = 1 \implies x = -\frac{1}{t} + C.$$

Из начальных условий С = 1, т.е.

$$x = 1 - \frac{1}{t}\ .$$

(b)

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{t + \dot{x}^2}} = \frac{1}{2} \implies x = \frac{2}{3\sqrt{3}}\, t^{3/2} + C.$$

Из начальных условий С = −2, т.е.

$$x = \frac{2}{3\sqrt{3}}\, t^{3/2} - 2.$$

(c) В этом случае первыми интегралами уравнений движения являются

$$E = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}\dot{z}}{x}; \quad p_y = \frac{\dot{z}}{x}; \quad p_z = \frac{\dot{y}}{x},$$

поэтому

$$t - t_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{Ex - p_y p_z \cdot x^2}} = \frac{1}{\sqrt{p_y p_z}} \arcsin \frac{2p_y p_z x - E}{E},$$

$$x = \frac{E}{2p_y p_z}\left[\sin\sqrt{p_y p_z}(t - t_0) + 1\right].$$

(d)

$$E = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2x}; \quad p_y = \frac{\dot{y}}{x} + 1,$$

Подставив $\dot{y} = x(p_y - 1)$ в E, получим

$$t - t_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{2Ex - x^2(p_y - 1)^2}} =$$

$$\frac{1}{p_y - 1} \arcsin \frac{x(p_y - 1)^2 - E}{E} \quad \Longrightarrow$$

$$x = \frac{E}{(p_y - 1)^2} \Big[\sin(p_y - 1)(t - t_0) + 1 \Big].$$

Далее,

$$y = \int x(p_y - 1)dt = \frac{E}{(p_y - 1)^2} \left[(t - t_0) - \frac{\cos(p_y - 1)(t - t_0)}{p_y - 1} \right].$$

(e) Для энергии имеем

$$E = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - L = \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2}} - x = const,$$

а ввиду цикличности y

$$p_y = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2}} = const.$$

Подставив $\dot{y}$ в E, получим

$$\dot{x} = \frac{\sqrt{(E + x)^2} - (1 + p_y^2)}{E + x} \quad \Longrightarrow$$

$$t = \int \frac{(E + x)dx}{\sqrt{(E + x)^2 - (1 + p_y^2)}} + t_0 = \sqrt{(E + x)^2 - (1 + p_y^2)} + t_0,$$

откуда следует

$$x = \sqrt{(t - t_0)^2 + (1 + p_y^2)}.$$

12. Определите период колебаний плоского математического маятника (точка m на конце нити длиной l в поле тяжести) в зависимости от амплитуды колебаний.

Решение: Энергия маятника

$$E = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mgl\cos\varphi = -mgl\cos\varphi_0,$$

где φ - угол отклонения нити от вертикали; φ_0 - максимальный угол отклонения. Вычисляя период как учетверенное время прохождения интервала углов от нуля до φ_0, находим

$$t = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}}.$$

Подстановкой $\sin\frac{\varphi}{2}/\sin\frac{\varphi_0}{2} = \sin\xi$ этот интеграл приводится к виду

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K(\sin\frac{\varphi_0}{2}),$$

где

$$K(k) = \int_0^{\pi/2}\frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}}$$

– эллиптический интеграл первого рода. При $\sin(\varphi_0/2) \approx \varphi_0/2 \ll 1$ (малые колебания), разлагая функцию $K(k)$ в ряд, получаем

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\varphi_0^2 + \ldots\right).$$

Первый член этого разложения отвечает известной элементарной формуле.

13. Найдите закон движения частицы в поле $U(x)$ вблизи точки остановки $x = a$. Рассмотрите случаи

(a)

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=a} \neq 0,$$

(b)

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=a} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=a} \neq 0.$$

Решение: Разложим $U(x)$ в ряд Тейлора вблизи точки остановки $x = a$:

$$U(x) = E - (x-a)F + \frac{(x-a)^2}{2}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=a} + \ldots$$

(Напомним, что $U(a) = E$, а $F = -\acute{U}(a)$.)

(a) Вблизи точки остановки можно приближенно считать, что движение происходит под действием постоянной силы $F = -\acute{U}(a)$. Считая, что в начальный момент частица находится в точке остановки $x(0) = a$, получаем

$$x(t) = a + \frac{Ft^2}{2m}.$$

Точность этой формулы убывает по мере удаления от точки остановки.

(b) Если $\acute{U}(a) = 0$, то

$$U(x) = E + \frac{(x-a)^2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\bigg|_{x=a} + ...$$

Поскольку энергия в таком постоянном поле является первым интегралом уравнения движения, имеем

$$\dot{x} = \pm k(x-a), \quad \text{где} \quad k^2 = -\frac{1}{m}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\bigg|_{x=a},$$

с решением

$$x = a + l\exp(\pm kt), \quad \text{где} \quad l = x(0) - a.$$

4. К главе "Задача двух тел. Общие свойства движения в центральном поле. Задача Кеплера"

1. Проинтегрируйте уравнения движения сферического маятника - материальной точки m, движущейся по поверхности сферы радиуса l в поле тяжести.

Решение: В сферических координатах с началом в центре сферы и полярной осью, направленной вертикально вниз, функция Лагранжа маятника

$$L = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}^2) + mgl\cos\theta.$$

Координата φ - циклическая, поэтому сохраняется обобщенный импульс p_φ, который совпадает с z-компонентой момента:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\sin^2\theta \cdot \dot{\varphi} = M_z = const.$$

Энергия

$$E = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}^2) - mgl\cos\theta = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + U_{\text{эфф}}(\theta),$$

где введена "эффективная потенциальная энергия"

$$U_{\text{эфф}}(\theta) = \frac{M_z^2}{2ml^2\sin^2\theta} - mgl\cos\theta.$$

Из выражения для $\dot{\theta}$

$$t = \sqrt{\frac{ml^2}{2}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{E - U_{\text{эфф}}(\theta)}} \; ,$$

а для угла φ, используя M_z, найдем

$$\varphi = \frac{M_z}{l\sqrt{2m}} \int \frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{E - U_{\text{эфф}}(\theta)}} \; .$$

Интегралы, определяющие t и φ, приводятся к эллиптическим интегралам первого и третьего рода соответственно. Область движения по углу θ определяется условием $E > U_{\text{эфф}}$, а ее границы - уравнением $E = U_{\text{эфф}}$. Траектория движения заключена между двумя параллельными окружностями на сфере, положение которых определяется находящимися в промежутке от -1 до $+1$ корнями следующего из $E = U_{\text{эфф}}$ кубического уравнения для $\cos\theta$.

2. Проинтегрируйте уравнения движения материальной точки, движущейся по поверхности конуса (с углом 2α при вершине). Конус находится в поле тяжести и расположен вертикально, вершиной вниз.

Решение: В сферических координатах с началом в вершине конуса и полярной осью, направленной вертикально вверх, функция Лагранжа

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\alpha \cdot \dot{\varphi}^2) - mgr\cos\alpha.$$

Координата φ - циклическая, поэтому сохраняется

$$p_\varphi = M_z = mr^2\sin^2\varphi \cdot \dot{\varphi}.$$

Энергия

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{\text{эфф}}(r), \qquad U_{\text{эфф}}(r) = \frac{M_z^2}{2mr^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha.$$

Так же, как и в предыдущей задаче, находим

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}\int\frac{dr}{E - U_{\text{эфф}}(r)}}\,,$$

$$\varphi = \frac{M_z}{\sqrt{2m}\sin^2\alpha}\int\frac{dr}{r^2\sqrt{E - U_{\text{эфф}}(r)}}\,.$$

Условие $\mathrm{E} = U_{\text{эфф}}(r)$ представляет собой (при $M_z \neq 0$) кубическое уравнение для r, имеющее два положительных корня, которые определяют положение двух горизонтальных окружностей на поверхности конуса, между которыми заключена траектория.

3. Сформулируйте задачу двух тел. К какой эквивалентной задаче она сводится? Как направлена сила в центральном поле? Покажите, что в центральном поле

   (a) сохраняется полный момент импульса,

   (b) движение плоское,

   (c) движение частицы подчиняется второму закону Кеплера.

4. Система состоит из одной частицы массой M и n частиц с одинаковыми массами m. Исключите движение центра инерции и сведите задачу к задаче о движении n частиц.

   Решение: Пусть $\vec{R}$ - радиус-вектор частицы M, а $\vec{R}_a$ $(a = 1, 2, ..., n)$ - радиусы-векторы частиц с массами m. Введем расстояния от частицы M до a-й частицы:

$$r_a = R_a - R$$

и поместим начало координат в центре инерции:

$$M\vec{R} + m\sum_a \vec{R}_a = 0.$$

Из этих равенств находим

$$\vec{R} = -\frac{m}{\mu}\sum_a \vec{r}_a, \quad \vec{R}_a = \vec{R} + \vec{r}_a,$$

где $\mu = M + nm$. Подставив эти выражения в функцию Лагранжа

$$L = \frac{M\dot{R}^2}{2} + \frac{m}{2}\sum_a \dot{R}_a^2 - U,$$

получим

$$L = \frac{m}{2}\sum_a v_a^2 - \frac{m^2}{2\mu}\Big(\sum_a v_a\Big)^2 - U,$$

где $\vec{v}_a \equiv \dot{\vec{r}}_a$.

Потенциальная энергия зависит лишь от расстояний между частицами и потому может быть представлена как функция от векторов $\vec{r}_a$.

5. Выведите формулы, определяющие

   (a) расстояние движущейся точки от центра поля $U(r)$ как неявную функцию времени,

   (b) уравнение траектории частицы в центральном поле $U(r)$.

   В каких областях допустимо движение в центральном поле и каковы условия финитности и инфинитности движения?

6. Покажите, что траектория частицы в центральном поле симметрична относительно луча, проведенного от центра поля через точку поворота r_{min}.
   Для каких полей возможно падение частицы в центр? При каком условии исчезает барьер, препятствующий проникновению частицы в центр?

7. Используя законы Кеплера, покажите, что

   (a) гравитационная сила обратно пропорциональна квадрату расстояния между взаимодействующими телами,

   (b) в гравитационном поле сохраняется момент импульса.

   Покажите также, что в поле ньютоновского притяжения уравнение, определяющее траекторию, по виду формально совпадает с уравнением, описывающим малые колебания частицы под действием внешней силы.

8. Используя выражение и график эффективной потенциальной энергии поля притяжения $U = -\alpha/r$, найдите условие движения частицы по окружности и определите радиус этой окружности.

9. Покажите, что в поле притяжения $U = -\alpha/r$ сохраняется вектор Лапласа–Рунге–Ленца и, используя его, найдите уравнение траектории движения в этом поле.

10. Используя результаты задачи Кеплера, найдите 1-ю и 2-ю космическую скорость.

11. Покажите, что в поле отталкивания $U = \alpha/r$ единственно возможной траекторией движения частицы является гипербола. Как расположен ее фокус?

12. Найдите траекторию частицы с нулевой полной энергией, движущейся в поле $U = -\alpha/r^6$.

Решение: Уравнение траектории определяется квадратурой

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{M dr/r^2}{\sqrt{2m(E - U_{\text{эфф}})}},$$

где

$$E = 0, \quad U_{\text{эфф}} = -\frac{\alpha}{r^6} + \frac{M}{2mr^2}.$$

Вычислив интеграл, для траектории движения частицы получим

$$r^2 = \frac{2m\alpha}{M} \cos 2(\varphi - \varphi_0),$$

которое известно как уравнение лемнискаты Бернулли.

13. Найдите траекторию материальной точки и смещение ее перигелия в поле

$$U = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}.$$

Решение: Интеграл

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{M dr/r^2}{\sqrt{2m[E + \alpha/r - (\beta + M^2/2m)/r^2]}}$$

вычисляется так же, как в задаче Кеплера, если ввести

$$\acute{M} = \sqrt{M^2 + 2m\beta}.$$

В результате уравнение траектории получим в виде

$$\frac{\acute{p}}{r} = 1 + \acute{\epsilon} \cos A(\varphi - \varphi_0),$$

где

$$\acute{p} = p + \frac{2\beta}{\alpha}, \quad \acute{\epsilon} = \sqrt{\epsilon^2 + 4E\beta/\alpha^2}, \quad A = \sqrt{1 + 2\beta/\alpha p},$$

p и ϵ – параметр и эксцентриситет орбиты задачи Кеплера.

За один оборот перигелий смещается на

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{M dr/r^2}{\sqrt{2m[E+\alpha/r - \acute{M}^2/2mr^2]}},$$

где

$$r_{\pm}^{-1} = \frac{\alpha m}{\acute{M}}\left(1 \pm \sqrt{1+2E\acute{M}/\alpha^2 m}\right), \quad r_+ = r_{min}, \quad r_- = r_{max}.$$

Тогда смещение перигелия

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi M}{\acute{M}}.$$

14. Точка массой m движется по круговой орбите радиуса r_0 под действием центральной силы. Сформулируйте критерий устойчивости кругового движения точки.

Решение: Модифицируем формулу Бине (см. замечание 2 главы IV текста лекций), переписав ее в виде

$$\frac{d^2 v}{d\varphi^2} = -\frac{m}{M^2}\frac{dU_{\text{эфф}}}{dv}, \quad U_{\text{эфф}} = U(v) + \frac{M^2 v^2}{2m}, \quad v = \frac{1}{r}.$$

Считая круговую орбиту слабо возмущенной, подставим

$$v = v_0 + \xi, \quad v_0 = \frac{1}{r_0}, \quad |\xi| \ll v_0$$

в модифицированную формулу Бине. Тогда с точностью до первого отличного от нуля члена найдем

$$\frac{d^2\xi}{d\varphi^2} = -\frac{m}{M^2}\xi\left.\frac{d^2 U_{\text{эфф}}}{dv^2}\right|_{v=v_0}.$$

(Напомним, что для кругового движения $\frac{dU_{\text{эфф}}}{dv}\big|_{v=v_0} = 0$.) Решение этого уравнения представляет гармонические колебания около невозмущенной орбиты, если только

$$\left.\frac{d^2 U_{\text{эфф}}}{dv^2}\right|_{v=v_0} > 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{m}{M^2}\frac{d^2 U}{dv^2} > 0.$$

Последнее неравенство, учитывая следующее из $dU_{эфф}/dv = 0$ условие $r^3F = -M^2/m$ для центральной силы $F = -dU/dr$, можно переписать в виде

$$3F + r\frac{dF}{dr} < 0.$$

В частности, для силы притяжения F, пропорциональной r^{-n}, следует, что движение по круговой орбите будет устойчивым только при $n < 3$.

15. Проинтегрируйте уравнения движения материальной точки в центральном поле $U = -\alpha/r^2,\ \alpha > 0$.

Решение: По формулам

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - U(r) - M^2/2mr^2}} + t_0;$$

$$\varphi = \int \frac{dr}{\sqrt{2m(E - U(r)) - M^2/r^2}} + \varphi_0,$$

выбирая соответствующим образом начало отсчета φ и t, найдем

$$\text{(a) при} \quad E > 0, \quad \frac{M^2}{2m} > \alpha \quad \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2mE}{M^2 - 2m\alpha}} \cos\left[\varphi\sqrt{1 - \frac{2m\alpha}{M^2}}\right],$$

$$(b) \text{ при} \quad E > 0, \quad \frac{M^2}{2m} < \alpha \quad \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2mE}{2m\alpha - M^2}} \sinh\left[\varphi\sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2} - 1}\right],$$

$$(c) \text{ при} \quad E < 0, \quad \frac{M^2}{2m} < \alpha \quad \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2m|E|}{2m\alpha - M^2}} \cosh\left[\varphi\sqrt{\frac{2m\alpha}{M^2} - 1}\right].$$

Во всех трех случаях

$$t = \frac{1}{E}\sqrt{\frac{m}{2}}\sqrt{Er^2 - \frac{M^2}{2m} + \alpha}.$$

В случаях (b) и (c) частица "падает" в центр по траектории, приближающейся к началу координат при $\varphi \to \infty$. Падение с заданного расстояния r происходит за конечное время, равное

$$\frac{1}{E}\sqrt{\frac{m}{2}}\left\{\sqrt{\alpha - \frac{M^2}{2m} + Er^2} - \sqrt{\alpha - \frac{M^2}{2m}}\right\}.$$

16. Если добавить к потенциальной энергии $U = -\alpha/r$ малую добавку $\delta U(r)$, то траектории финитного движения перестают быть замкнутыми и при каждом обороте перигелий орбиты смещается на малую угловую величину $\delta\varphi$. Определите $\delta\varphi$ для случаев

(a) $\delta U(r) = \beta/r^2$,

(b) $\delta U(r) = \gamma/r^3$.

Решение: За время, в течение которого r изменяется от r_{min} до r_{max} и снова до r_{min}, радиус-вектор повернется на угол

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{M dr/r^2}{\sqrt{2m(E - U(r)) - M^2/r^2}}\, dr.$$

Это выражение, с целью избежать наличия фиктивно расходящихся интегралов, удобно представить в виде

$$\Delta\varphi = -2\frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \sqrt{2m(E-U) - M^2/r^2}dr.$$

Положим $U = -\alpha/r + \delta U$ и разложим подынтегральное выражение по степеням δU. Нулевой член разложения дает 2π, а член первого порядка – искомое смещение $\delta\varphi$:

$$\delta\varphi = \frac{\partial}{\partial M}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{2m\delta U \cdot dr}{\sqrt{2m\left(E+\alpha/r\right) - M^2/r^2}} = \frac{\partial}{\partial M}\left(\frac{2m}{M}\int_0^{\pi} r^2\delta U d\varphi\right),$$

где от интегрирования по dr мы перешли к интегрированию по $d\varphi$ вдоль траектории "невозмущенного" движения. (Заметим, что $\Delta\varphi = 2\pi + \delta\varphi$.)

В случае (a) интегрирование дает

$$\delta\varphi = -\frac{2\pi\beta m}{M^2} = -\frac{2\pi\beta}{\alpha p}$$

($p = M^2/m\alpha$ – параметр невозмущенного эллипса).

В случае (b) $r^2\delta U = \gamma/r$, используя формулу невозмущенной траектории

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon\cos\varphi, \quad p = \frac{M^2}{m\alpha}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + 2EM^2/m\alpha^2},$$

получим

$$\delta\varphi = -\frac{6\pi\alpha\gamma m^2}{M^4} = -\frac{6\pi\gamma}{\alpha p^2}.$$

5. К главе "Распад и рассеяние частиц. Формула Резерфорда"

1. Дайте определения *ц*- и *л*-систем отсчета. Какова связь между углами вылета дочерней (распадной) частицы в *ц*- и *л*-системах? К чему сводится результат упругого столкновения частиц в *ц*-системе? Найдите скорость упругого столкновения в *л*-системе. Как выглядит упругое столкновение в случае "лобового" удара, в "бильярде"?

2. Частица движется в поле рассеивающего центра. Каким будет угол отклонения, если известна потенциальная энергия силового поля? Какие соображения приводят к понятию "эффективное сечение рассеяния"? Определите это понятие. Оцените качественно сечение рассеяния на абсолютно твердом шарике. Известно, что Резерфорд исследовал рассеяние на отталкивающем центре. Как изменятся его результаты, если поле отталкивания заменить полем притяжения?

3. Определите эффективное сечение рассеяния частиц от абсолютно твердого шарика радиуса a, т.е. в случае, если закон взаимодействия имеет вид

$$U = \begin{cases} \infty & \text{при} \quad r < a \\ 0 & \text{при} \quad r > a \end{cases} .$$

Решение: Т.к. вне шарика частица движется свободно, а внутрь него проникнуть не может, траектория складывается из двух прямых, расположенных симметрично относительно радиуса, проведенного в точку их пересечения с шариком (см. рис. 2). Как видно из рисунка,

$$\rho = a \sin \varphi_0 = a \sin \frac{\pi - \chi}{2} = a \cos \frac{\chi}{2}.$$

Подставив это выражение в

$$d\sigma = 2\pi \rho(\chi) \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\chi,$$

получим

$$d\sigma = \frac{\pi a^2}{2} \sin \chi d\chi = \frac{a^2}{4} d\Omega,$$

т.е. в *ц*-системе рассеяние изотропно. Интегрируя $d\sigma$ по всем углам, найдем, что полное сечение $\sigma = \pi a^2$ в соответствии с тем, что

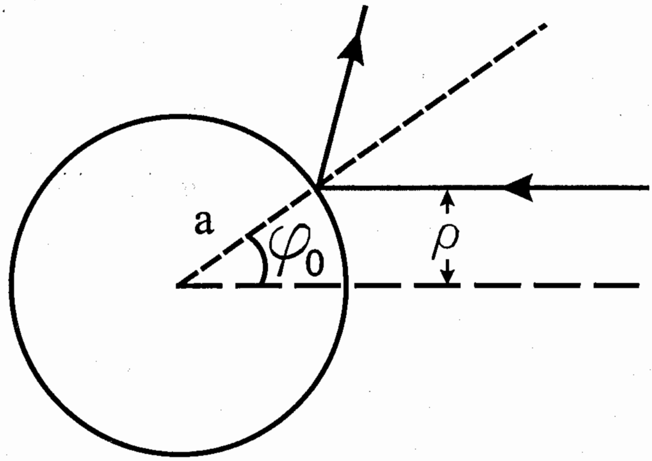

Рис. 2

прицельная площадь, в которую должна попасть частица для того, чтобы рассеяться, очевидно, есть площадь сечения шарика.

Для перехода к л-системе надо выразить χ через θ_1 согласно

$$tg\theta_1 = \frac{m_2 \sin\chi}{m_1 + m_2\cos\chi}, \qquad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}.$$

При $m_1 < m_2$ (m_1 - масса частиц, m_2 - масса шариков) получим

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{4}\left[\frac{2m_1}{m_2}\cos\theta_1 + \frac{1 + m_1^2\cos 2\theta_1/m_2^2}{\sqrt{1 - m_1^2\sin^2\theta_1/m_2^2}}\right] d\Omega_1$$

($d\Omega_1 = 2\pi\sin\theta_1 d\theta_1$). Если же $m_1 < m_2$, то

$$d\sigma_1 = \frac{a^2}{2}\,\frac{1 + m_1^2\cos 2\theta_1/m_2^2}{\sqrt{1 - m_1^2\sin^2\theta_1/m_2^2}} d\Omega_1.$$

При $m_1 = m_2$ имеем

$$d\sigma_2 = a^2|\cos\theta_2| d\Omega_1.$$

Для первоначально покоящегося шарика $\chi = \pi - 2\theta_2$, что дает

$$d\sigma_2 = a^2|\cos\theta_2| d\Omega_2,$$

4. Выразите эффективное сечение как функцию энергии ε, которая теряется рассеиваемыми частицами в условиях задачи 3.

Решение: Частица m_1 теряет столько же энергии, сколько приобретает частица m_2. Согласно известным формулам (см. лекции)

$$\acute{v}_1 = v\frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\cos\chi}}{m_1 + m_2}, \quad \acute{v}_2 = \frac{2m_1v}{m_1 + m_2}\sin\frac{\chi}{2},$$

$$E'_{2max} = \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}E_1, \quad E_1 = \frac{m_1v_1^2}{2}$$

имеем

$$\varepsilon = E'_2 = \frac{2m_1^2m_2}{(m_1 + m_2)^2}v_\infty^2\sin^2\frac{\chi}{2} = \varepsilon_{max}\sin^2\frac{\chi}{2},$$

откуда

$$d\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_{max}\sin\chi\, d\chi,$$

подставив которое в полученное при решении задачи 3 соотношение

$$d\sigma = \frac{\pi a^2}{2}\sin\chi d\chi,$$

получим

$$d\sigma = \pi a^2\frac{d\varepsilon}{\varepsilon_{max}}.$$

Распределение рассеянных частиц по значениям ε оказывается однородным во всем интервале ε от нуля до ε_{max}.

5. Как зависит эффективное сечение от скорости v_∞ частиц при рассеянии в поле $U \sim r^{-n}$?

Решение: Если потенциальная энергия есть однородная функция порядка $k = -n$, то уравнения движения допускают подобные траектории. При этом изменение линейных размеров в α раз влечет за собой изменение скорости в $\alpha^{-n/2}$ раз, и обратно, при изменении скорости в β раз размеры, в частности и прицельное расстояние ρ, меняются в $\beta^{-2/n}$ раз. Таким образом, для подобных траекторий $\rho \sim v^{-2/n}$, точнее,

$$\rho = v_\infty^{-2/n}f(\chi)$$

(углы отклонения χ для подобных траекторий одинаковы). Подставив этот результат в

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin\chi}\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right|d\Omega,$$

найдем

$$d\sigma \sim v_\infty^{-4/n} d\Omega.$$

6. Определите эффективное сечение для "падения" частиц в центр поля

   (a) $U = -\alpha/r^2$.

   Решение: Известно, что в полях притяжения $U = U(r)$ только в случаях

   $$U \sim 1/r^n \ \text{ с } \ n > 2 \quad \text{или} \quad U \sim \alpha/r^2 \ \text{ с } \ \alpha > M^2/2m,$$

   при движении к центру поля частицы могут преодолеть энергетический барьер, обусловленный моментом импульса $M \neq 0$. В условиях данной задачи "падают" в центр частицы с $2\alpha > m\rho^2 v_\infty^2$ т.е. те, у которых прицельное расстояние не превышает значения $\rho_{max} = \sqrt{2\alpha/mv_\infty^2}$. Поэтому искомое эффективное сечение

   $$\sigma = \pi\rho_{max}^2 = \frac{2\pi\alpha}{mv_\infty^2}.$$

   (b) $U = -\alpha/r^n$ $(n > 2, \alpha > 0)$.

   Решение: Зависимость эффективной потенциальной энергии

   $$U_{\text{эфф}} = \frac{m\rho^2 v_\infty^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r^n}$$

   от r изображена на рис. 3, причем

   $$(U_{\text{эфф}})_{max} \equiv U_0 = \frac{(n-2)\alpha}{2}\left(\frac{m\rho^2 v_\infty^2}{\alpha n}\right)^{n/(n-2)}.$$

   Падают в центр лишь те частицы, у которых $E > U_0$. Определяя ρ_{max} из условия

   $$U_0 = E,$$

   получаем

   $$\sigma = \pi n(n-2)^{(2-n)/n}\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^{2/n}.$$

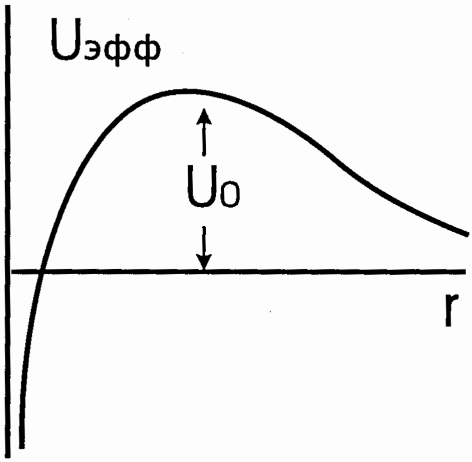

Рис. 3

7. Определите эффективное сечение для падения частиц (с массами m_1) на поверхность сферического тела (массой m_2 и радиусом R), к которому они притягиваются по закону Ньютона.

Решение: Условие падения заключается в неравенстве $r_{min} < R$, где r_{min}– ближайшая к силовому центру (центру сферы) точка траектории частицы. Наибольшее допустимое значение ρ определяется условием $r_{min} = R$, что сводится к решению уравнения $U_{эфф}(R) = E$ или

$$\frac{m_1 v_\infty^2 \rho_{max}^2}{2R^2} - \frac{\alpha}{R} = \frac{m_1 v_\infty^2}{2},$$

причем $\alpha = Gm_1m_2$ (G - гравитационная постоянная), и мы положили $m \approx m_1$, считая, что $m_2 \gg m_1$. Найдем отсюда ρ_{max}^2, что дает

$$\sigma = \pi R^2 \left(1 + \frac{2Gm_2}{Rv_\infty^2}\right).$$

При $v_\infty \to \infty$ эффективное сечение стремится, как и следовало ожидать, к геометрической площади сечения сферы.

8. Найдите эффективное сечение рассеяния в поле $U = \alpha/r^2$ $(\alpha > 0)$.

Решение: Угол отклонения

$$\chi = \pi \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2\alpha/m\rho^2 v_\infty^2}}\right].$$

Эффективное сечение

$$d\sigma = \frac{2\pi^2\alpha}{mv_\infty^2} \frac{\pi - \chi}{\chi^2(2\pi - \chi)^2} \frac{d\Omega}{\sin\chi}.$$

9. Найдите эффективное сечение рассеяния сферической "потенциальной ямой" радиуса a и "глубины" U_0

$$U = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r > a \\ -U_0 & \text{при} \quad r < a \end{cases}.$$

Решение: Траектория частицы "преломляется" при входе в яму и при выходе из нее. Согласно задаче 4 к главе II углы падения α и преломления β (см. рис. 4) связаны соотношением

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n, \quad n = \sqrt{1 + 2U_0/mv_\infty^2}.$$

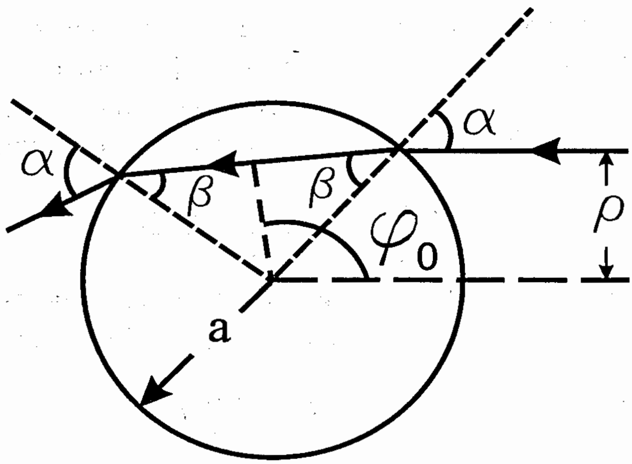

Рис. 4

Угол отклонения $\chi = 2(\alpha - \beta)$. Поэтому имеем

$$\frac{\sin(\alpha - \chi/2)}{\sin\alpha} = \cos\frac{\chi}{2} - ctg\alpha \sin\frac{\chi}{2} = \frac{1}{n}.$$

Исключив α из этого равенства и очевидного из рисунка соотношения

$$a\sin\alpha = \rho,$$

получим связь между ρ и χ в виде

$$\rho^2 = a^2 \frac{n^2 \sin^2 \chi/2}{n^2 + 1 - 2n \cos \chi/2}.$$

Наконец, дифференцируя это равенство, получим эффективное сечение

$$d\sigma = \frac{a^2 n^2}{4 \cos \frac{\chi}{2}} \frac{\left(n \cos \frac{\chi}{2} - 1\right)\left(n - \cos \frac{\chi}{2}\right)}{\left(1 + n^2 - 2n \cos \frac{\chi}{2}\right)^2} d\Omega.$$

Угол χ меняется в пределах от нуля (при $\rho = 0$) до значения χ_{max} (при $\rho = \alpha$), которое определяется из

$$\cos \frac{\chi_{max}}{2} = \frac{1}{n}.$$

Полное эффективное сечение, получающееся интегрированием $d\sigma$ по всем углам внутри конуса $\chi < \chi_{max}$, равно, как и должно было быть, площади геометрического сечения πa^2.

10. Нейтроны и протоны, налетающие на неподвижные ядра, вызывают ядерные реакции лишь при непосредственном столкновении с ядрами. Допуская, что ядра представляют собой заряженные сферы одинакового радиуса a, вычислите сечение реакций, вызываемых этими столкновениями.

Решение: Допустим, что энергии нуклонов недостаточно, для того чтобы проникнуть внутрь ядра, и они рассеиваются, только соприкасаясь с ядрами. В этом случае нейтроны, если пренебречь чрезвычайно малым гравитационным взаимодействием, рассеиваются на ядрах, как на твердых шариках, поэтому сечение рассеяния $\sigma_n = \pi a^2$ (см. задачу 3). Наименьшее расстояние между рассеивающимся протоном и центром ядра определяется как решение уравнения

$$E_0 = U_{\text{эфф}}, \quad U_{\text{эфф}} = \frac{\alpha}{a} + \frac{M_0^2}{2ma^2},$$

где

$$E_0 = \frac{mv_\infty^2}{2}, \quad M_0 = m\rho v_\infty, \quad \alpha = Ze^2$$

(Ze – заряд ядра). Таким образом, протон, вызывающий ядерную реакцию, движется по траектории, минимальное удаление которой от центра есть a. По условию задачи протоны, прицельное расстояние которых больше определенного условием $E_0 = U_{эфф}$, не вызывают реакций. Подставив в это условие момент импульса протона $M_0 = \rho_{max}\sqrt{2mE_0}$, получим

$$E_0 = \frac{\alpha}{a} + \frac{\rho_{max}^2 E_0}{a^2} \implies \rho_{max}^2 = a^2\left(1 - \frac{Ze^2}{aE_0}\right).$$

Сечение реакции

$$\sigma = \begin{cases} \pi a^2\left(1 - \frac{Ze^2}{aE_0}\right) & \text{при} \quad E_0 > \frac{Ze^2}{a} \\ 0 & \text{при} \quad E_0 \le \frac{Ze^2}{a} \end{cases}.$$

(Сравните с ответом задачи 7.)

6. К главе "Гамильтонов формализм"

1. Какая функция служит производящей для преобразования Лежандра от "лагранжева" к "гамильтонову" набору переменных?

   Покажите, что для замкнутых систем или систем, находящихся в постоянном внешнем поле, гамильтониан и полная энергия совпадают.

   Сравните роль циклических координат в лагранжевом и гамильтоновом подходах.

2. Как функции состояния механической системы выражаются через производные действия? В чем различие этих функций?

   Чем отличаются конфигурационное и фазовое пространства? Сколько фазовых траекторий проходит через каждую изображающую точку?

3. Найдите функцию Гамильтона для материальной точки в декартовых, цилиндрических и сферических координатах.

   Решение: В сферических координатах r, θ, φ функция Лагранжа частицы имеет вид

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2 + r^2\,\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2) - U(r,\theta,\varphi)$$

(см. задачу 8(b) к главе I) $H = T + U$, и все скорости необходимо заменить соответствующими импульсами, используя соотношение $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$. В сферических координатах

$$p_r = m\dot{r}; \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta}; \quad p_\varphi = mr^2 \sin^2\theta\dot{\varphi},$$

поэтому

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) + U(r, \theta, \varphi).$$

В декартовых координатах x, y, z

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z).$$

В цилиндрических координатах ρ, φ, z

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} + p_z^2\right) + U(\rho, \varphi, z).$$

4. Найдите функцию Гамильтона частицы, если ее функция Лагранжа имеет вид
$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (лагранжиан свободной релятивистской частицы).

Решение:

$$H = v\frac{\partial L}{\partial v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\ .$$

При $v \ll c$

$$H \approx mc^2(1 - v^2/2c^2) = mc^2 + mv^2/2 = p^2/2m.$$

(Отброшена постоянная mc^2, поскольку в определении энергии она несущественна.)

5. Найдите функцию Гамильтона системы n частиц с массами m и одной частицы массой M с исключенным движением центра инерции (см. задачу 4 к главе IV).

Решение: Энергия E получается из найденной в задаче 4 к главе IV функции Лагранжа

$$L = \frac{m}{2}\sum_a v_a^2 - \frac{m^2}{2\mu}\left(\sum_a v_a\right)^2 - U$$

изменением знака перед U (здесь $\mu = M + nm$). Обобщенные импульсы

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial v_a} = mv_a - \frac{m^2}{\mu} \sum v_a \quad \Rightarrow \quad v_a = \frac{p_a}{m} + \frac{m^2}{\mu} \sum_a v_a.$$

Отсюда

$$\sum p_a = m \sum v_a - \frac{nm^2}{\mu} \sum v_a = \frac{mM}{\mu} \sum v_a,$$

$$v_a = \frac{p_a}{m} + \frac{1}{M} \sum p_a.$$

Подставив в H, найдем

$$H = \frac{1}{2m} \sum p_a^2 + \frac{1}{2M} \left(\sum p_a\right)^2 + U.$$

6. Найдите решение канонических уравнений Гамильтона для

   (a) частицы в однородном поле $U = Fx$.

   Решение: Подставив гамильтониан частицы в однородном поле $H = p_x^2/2m + Fx$ в канонические уравнения, получим

   $$\dot{x} = \frac{p_x}{m}; \quad \dot{p_x} = F \quad \Rightarrow \quad p_x = p_0 + Ft, \quad \dot{x} = \frac{Ft + p_0}{m},$$

   поэтому

   $$x = x_0 + \frac{p_0}{m} t + \frac{F}{2m} t^2.$$

   (b) линейного гармонического осциллятора.

   Решение: Подставив гамильтониан $H = p_x^2/2m + kx^2/2$ в канонические уравнения Гамильтона, получим

   $$\dot{x} = \frac{p_x}{m}; \quad \dot{p_x} = -kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m} x$$

   с решением

   $$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad \text{где} \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}.$$

7. Функция Гамильтона H системы частиц не изменяется при бесконечно малом переносе (повороте). Выведите отсюда закон сохранения импульса (момента импульса).

Решение: Пусть $\vec{\varepsilon}$ – вектор бесконечно малого смещения

$$\vec{r}_a \mapsto \vec{r}_a' = \vec{r}_a + \vec{\varepsilon};$$

$$\vec{p}_a \mapsto \vec{p}_a' = \vec{p}_a.$$

По условию задачи

$$H(\vec{r}_a, \vec{p}_a) = H(\vec{r}_a', \vec{p}_a'),$$

$$\delta H = \sum_a \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{r}_a} \vec{\varepsilon} + \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_a} \delta \vec{p}_a \right) = \vec{\varepsilon} \sum_a \frac{\partial H}{\partial \vec{r}_a} = 0.$$

Используя уравнения Гамильтона, получим

$$\frac{dP}{dt} = \sum_a \frac{d\vec{p}_a}{dt} = -\sum_a \frac{\partial H}{\partial \vec{r}_a} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{P} = const.$$

При бесконечно малом повороте на угол $\delta\vec{\varphi}$

$$\vec{r}_a \mapsto \vec{r}_a' = \vec{r}_a + [\delta\vec{\varphi}, \vec{r}_a];$$

$$\vec{p}_a \mapsto \vec{p}_a' = \vec{p}_a + [\delta\vec{\varphi}, \vec{p}_a];$$

$$\delta H = \sum_a \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{r}_a} [\delta\vec{\varphi}, \vec{r}_a] + \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_a} [\delta\vec{\varphi}, \vec{p}_a] \right) =$$

$$\sum_a \left(-\frac{d\vec{p}_a}{dt} [\delta\vec{\varphi}, \vec{r}_a] + \frac{d\vec{r}_a}{dt} [\delta\vec{\varphi}, \vec{p}_a] \right) = -\delta\vec{\varphi} \sum_a \frac{d}{dt} [\vec{r}, \vec{p}_a] = 0$$

$$\Rightarrow\; \vec{M} = \sum_a [\vec{r}, \vec{p}_a] = const.$$

8. Найдите траекторию линейного гармонического осциллятора в фазовом пространстве.

Решение: Гамильтониан гармонического осциллятора

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$$

не зависит от времени явно и совпадает с энергией E, поэтому

$$\frac{q^2}{2E/k} + \frac{p^2}{2mE} = 1.$$

Таким образом, траектория линейного гармонического осциллятора в фазовом пространстве – эллипс с полуосями

$$a = \sqrt{2E/k}, \quad b = \sqrt{2mE}.$$

9. Докажите теорему Пуассона. Вычислите фундаментальные скобки Пуассона: $[q_i, q_k]$, $[p_i, p_k]$ и $[q_i, p_k]$.

10. Докажите, что скобки Пуассона – инвариант канонических преобразований.

11. Вычислите скобки Пуассона, составленные из декартовых компонент импульса $\vec{p}$ и момента импульса $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}]$ частицы.

    Решение: Используя формулу $[f\ p_k] = -\partial f/\partial q_k$, находим

$$[M_x p_y] = -\frac{\partial[\vec{r}, \vec{p}]_x}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(yp_z - zp_y) = -p_z$$

    и аналогично

$$[M_x p_x] = 0, \quad [M_x p_z] = p_y.$$

    Остальные скобки получаются в результате циклической перестановки индексов x, y, z в полученных выше формулах.

12. Вычислите скобки Пуассона, составленные из компонент $\vec{M}$.

    Решение: Прямое вычисление по формуле

$$[f\ g] = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right)$$

    дает

$$[M_x M_y] = -M_z, \quad [M_y M_z] = -M_x, \quad [M_z M_x] = -M_y.$$

13. Используя скобки Пуассона, покажите, что при движении в центральном поле $U(r)$ сохраняется момент импульса.

    Решение: По определению момент импульса $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}]$, а его i-я компонента $M_i = \epsilon_{ikl} x_k p_l$ (напомним – по дважды повторяющимся индексам идет суммирование). Скобка Пуассона

$$[H, M_i] = \frac{\partial H}{\partial p_l} \frac{\partial M_i}{\partial x_l} - \frac{\partial H}{\partial x_l} \frac{\partial M_i}{\partial p_l} =$$

$$\dot{x}_l \epsilon_{ikn} \frac{\partial (x_k p_n)}{\partial x_l} + \dot{p}_l \epsilon_{ikn} \frac{\partial (x_k p_n)}{\partial p_l} = \frac{p_l}{m} \epsilon_{ikn} \delta_{kl} p_n - \frac{\partial U}{\partial r} \frac{x_l}{r} \epsilon_{ikn} x_k \delta_{nl} =$$

$$\epsilon_{iln} \frac{p_l p_n}{m} - \epsilon_{ikl} x_k x_l \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r}.$$

Оба последних слагаемых обращаются в нуль, т.к. это свертки симметричных по индексам произведений и антисимметричного тензора, поэтому

$$[H, M_i] = 0 \implies \frac{dM_i}{dt} = [H, M_i] = 0,$$

что и требовалось доказать.

14. Пусть функция Гамильтона зависит от переменных q_1, p_1 лишь посредством функции $f(q_1, p_1)$:

$$H = H(f(q_1, p_1),\ q_2, p_2, ..., q_s, p_s).$$

Докажите, что $f(q_1, p_1)$ есть интеграл движения.

Решение: Докажем равенство

$$[f(q_1, p_1),\ \Phi(\phi(q_1, p_1),\ q_2, p_2, ...)] = \frac{\partial\Phi}{\partial\phi}[f, \phi].$$

$$[f, \Phi] = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial\Phi}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\right) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial q_1} + \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial p_1} = \frac{\partial\Phi}{\partial\phi}[f, \phi].$$

Далее,

$$\frac{df}{dt} = [H, f] = -\frac{\partial H}{\partial f}[f, f] = 0,$$

что и требовалось доказать.

15. Известно, что значение любой функции $f(t) = f(p(t),\ q(t))$ выражается через p и q в момент $t = 0$ формулой

$$f(p(t), q(t)) = f_0 + \frac{t}{1!}[H_0, f_0] + \frac{t^2}{2!}[H_0, [H_0, f_0]] + ...,$$

где

$$f_0 = f(p(0),\ q(0)),\quad H_0 = H(p(0),\ q(0)),$$

H - функция Гамильтона. (Ряд предполагается сходящимся.)

Вычислите с помощью этой формулы $q(t),\ p(t)$ для

а) линейного гармонического осциллятора;

б) частицы в однородном поле.

Решение: Перепишем формулу для $f(t)$ в виде

$$f(t) = \sum_n \frac{t^n}{n!} f^{(n)}, \quad f^{(n+1)} = [H_0, f^{(n)}], \quad f^{(0)} \equiv f_0, \quad n = 0, 1, 2...$$

Для осциллятора

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

Положим $f = x(t)$ и вычислим

$$f^{(1)} = [H, x] = \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{p}{m},$$

$$f^{(2)} = [H, f^{(1)}] = \frac{1}{m}[H, p] = -\omega^2 x,$$

$$f^{(3)} = [H, f^{(2)}] = -\omega^2 [H, x] = -\frac{p}{m}\omega^2,$$

$$f^{(4)} = [H, f^{(3)}] = -\frac{\omega^2}{m}[H, p] = \omega^4 x,$$

$$f^{(5)} = [H, f^{(4)}] = \omega^4 [H, x] = \frac{p}{m}\omega^4.$$

Тогда

$$x(t) = x(0) + \frac{t}{1!}\frac{p(0)}{m} - \frac{t^2}{2!}\omega^2 x(0) - \frac{t^3}{3!}\frac{\omega^2 p(0)}{m} + \frac{t^4}{4!}\omega^4 x(0) + \frac{t^5}{5!}\frac{\omega^4 p(0)}{m} ... =$$

$$x(0)\left(1 - \frac{t^2}{2!}\omega^2 + \frac{t^4}{4!}\omega^4 - ...\right) + \frac{p(0)}{m\omega}\left(\frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!}\omega^3 + \frac{t^5}{5!}\omega^5 - ...\right) \Longrightarrow$$

$$x(t) = x(0)\cos\,\omega t + \frac{p(0)}{m\omega}\sin\,\omega t.$$

Точно так же получим

$$p(t) = p(0)\cos\,\omega t - m\omega x(0)\sin\,\omega t.$$

Разумеется, эти величины можно было вычислить гораздо проще, но предложенный метод расчета оказывается полезным в квантовой механике.

Для частицы в однородном поле $U = -Fx$, $F = const$:

$$H = \frac{p^2}{2m} - Fx.$$

Положим $f = x(t)$ и вычислим

$$f^{(1)} = [H, x] = \frac{p}{m},$$

$$f^{(2)} = [H, f^{(1)}] = \frac{1}{m}[H, p] = \frac{F}{m} = const; \quad f^{(n)} = 0 \text{ для всех } n > 2.$$

Получим

$$x(t) = x(0) + \frac{p(0)}{m}t + \frac{F}{m}\frac{t^2}{2}.$$

Положим $f = p(t)$ и вычислим

$$f^{(1)} = [H, p] = F = const; \quad f^{(n)} = 0 \text{ для всех } n > 1.$$

Получим

$$p(t) = p(0) + Ft.$$

16. Какова цель канонических преобразований? Перечислите возможные типы генераторов канонических преобразований. Приведите примеры канонических преобразований.

17. Рассмотрите бесконечно малое каноническое преобразование и покажите, что движение можно рассматривать как каноническое преобразование.
Генератором какого канонического преобразования является полный интеграл уравнения Гамильтона – Якоби?

18. Покажите, что гамильтониан является инвариантом бесконечно малого канонического преобразования с генератором

$$S(q, P) = \sum_i q_i P_i + \varepsilon f(q, P),$$

где $\varepsilon \ll 1$, а $f(q, P)$ – интеграл движения.

Решение: Каноническое преобразование, порождаемое заданным генератором, имеет вид

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = P_i + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial q_i},$$

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i} = q_i + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial P_i}.$$

С точностью до членов первого порядка малости это каноническое преобразование эквивалентно преобразованию

$$\delta p_i = P_i - p_i = -\varepsilon \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad \delta q_i = Q_i - q_i = \varepsilon \frac{\partial f}{\partial P_i}.$$

Изменение производящей функции F при таком каноническом преобразовании есть

$$\delta F = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \delta p_i \right) = \varepsilon \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) = -\varepsilon [F, f].$$

Положим, в частности, $F = H$, тогда $\delta H = -\varepsilon [H, f]$. По условию задачи система консервативна и f – интеграл движения, следовательно, $[H, f] = 0$. Тогда $\delta H = 0$.

19. Найдите уравнение, которому удовлетворяет производящая функция, порождающая каноническое преобразование к постоянным импульсам и координатам.

20. Найдите решение уравнения Гамильтона – Якоби для

    (a) свободной точки массой m,

    (b) линейного гармонического осциллятора,

    (c) центрального поля с $U = -\alpha/r$.

    Какова роль циклических координат в методе Гамильтона – Якоби?

21. Найдите решение уравнения Гамильтона – Якоби для частицы в однородном гравитационном поле.

Решение: В декартовых координатах функция Гамильтона частицы

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \right) + mgz.$$

Соответствующее уравнение Гамильтона – Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + mgz = 0.$$

Все переменные в этом уравнении разделяются, т.е. его полный интеграл

$$S = -Et + p_x x + p_y y + p_z z + W(z),$$

и для $W(z)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{2m}\left[p_x^2+p_y^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right]+mgz=E,$$

интегрируя которое, находим

$$S=-Et+p_x x+p_y y-\frac{1}{3m^2g}\left[2m\,(E-mgz)-p_x^2-p_y^2\right]^{3/2}.$$

Согласно известной процедуре, дифференцируя по E, найдем закон движения

$$t+t_0=-\frac{1}{mg}\sqrt{2m\,(E-mgz)-p_x^2-p_y^2},$$

а траекторию определят производные S по p_x и p_y:

$$x-\frac{p_x}{m^2g}\sqrt{2m\,(E-mgz)-p_x^2-p_y^2}=x_0,$$

$$y-\frac{p_y}{m^2g}\sqrt{2m\,(E-mgz)-p_x^2-p_y^2}=y_0.$$

Траектория частицы в однородном гравитационном поле – парабола.

22. Найдите действие для линейного гармонического осциллятора, который при движении проходит через точки $x_1=x(t_1)$ и $x_2=x(t_2)$.

Решение: Функция Лагранжа такого осциллятора

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{kx^2}{2}.$$

Решение уравнения движения

$$\ddot{x}+\omega^2x=0,\quad \omega^2=\frac{k}{m}$$

имеет вид

$$x=a\cos\omega t+b\sin\omega t.$$

Определим постоянные интегрирования a и b так, чтобы удовлетворить условиям $x(t_1)=x_1$ и $x(t_2)=x_2$. Простые вычисления дают

$$x(t)=\frac{x_1\sin\omega(t_2-t)+x_2\sin\omega(t-t_1)}{\sin\omega(t_2-t_1)},$$

$$L = \frac{m\omega^2}{2\sin^2\omega(t_2 - t_1)}[x_1^2\cos 2\omega(t_2 - t) + x_2^2\cos 2\omega(t - t_1) -$$
$$2x_1x_2\cos\omega(t_1 + t_2 - 2t)].$$

Интегрируя L по времени, получим

$$S = \int_{t_1}^{t_2} Ldt = \frac{m\omega}{2\sin\omega(t_2 - t_1)}[(x_1^2 + x_2^2)\cos\omega(t_2 - t_1) - 2x_1x_2].$$

При $\omega \mapsto 0$ действие совпадает с действием для свободной частицы, которая при движении проходит через заданные точки:

$$S = \frac{m(x_2 - x_1)^2}{2(t_2 - t_1)}.$$

7. К главе "Малые колебания"

1. Найдите вид функции Лагранжа и уравнения движения многомерной механической системы при малых колебаниях вокруг положения устойчивого равновесия.

2. Как найти частоту одномерных колебаний по заданному лагранжиану? Как по заданным начальным условиям найти амплитуду и начальную фазу колебаний линейного гармонического осциллятора?

3. Найдите общее решение задачи о вынужденных колебаниях осциллятора под действием произвольной силы. Опишите явления резонанса и биений.

4. Определите зависимость координаты от времени вблизи положения неустойчивого равновесия.

   Решение: В положении неустойчивого равновесия

$$k = \left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0} < 0,$$

поэтому уравнение движения будет иметь вид

$$\ddot{x} - \gamma^2 x = 0, \quad \text{где} \quad \gamma^2 = \frac{|\,k\,|}{m} > 0,$$

с решением

$$x = C_1e^{\gamma t} + C_2e^{-\gamma t}.$$

5. Определите, какой степени амплитуды пропорционален период колебаний, если в положении равновесия x_0

$$\left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0} = 0.$$

Решение: Если $d^2U(x)/dx^2|_{x=x_0} = 0$, то для наличия минимума в точке x_0 необходимо, чтобы

$$\left.\frac{d^3U(x)}{dx^3}\right|_{x=x_0} = 0, \quad \left.\frac{d^4U(x)}{dx^4}\right|_{x=x_0} > 0.$$

Тогда разложение $U(x)$ будет пропорционально четвертой степени отклонения x от положения равновесия: $U(x) \approx Ax^4$, где $A = const$, т.е. $U(x)$ оказывается однородной функцией четвертого порядка. В этом случае согласно полученному в лекциях соотношению (см. пункт 1 главы III)

$$\frac{\acute{t}}{t} = \left(\frac{\acute{l}}{l}\right)^{1-k/2}$$

период обратно пропорционален амплитуде.

6. Определите смещение положения равновесия под влиянием постоянной внешней силы, выразив его через массу и частоту.

Решение: Когда внешней силы нет, потенциальная энергия $U = m\omega^2x^2/2$ и точка равновесия $x_0 = 0$.

При наличии силы потенциальная энергия

$$U = \frac{m\omega^2\acute{x}^2}{2} - F\acute{x}$$

и положение равновесия определится из $m\omega^2\acute{x} - F = 0$, т.е. смещение точки равновесия, обусловленное постоянной внешней силой,

$$\acute{x} = \frac{F}{m\omega^2}.$$

7. Найдите частоты малых колебаний системы, если ее функция Лагранжа имеет вид

   (a) $L = \dot{x}^2/2 + sinx$,

   (b) $L = (\dot{x}^2 - x^2 - 1)/2x$,

(c) $L = chx(\dot{x}^2 - 1)$,

(d) $L = \dot{x}^2/x - x/lnx$.

Решение: Частота малых колебаний ω по заданной функции Лагранжа

$$L = \frac{m(x)\dot{x}^2}{2} - U(x)$$

определяется согласно следующему алгоритму:

- определяют положение равновесия x_0 как корень уравнения

$$\frac{dU(x)}{dx} = 0,$$

- при условии положительности второй производной потенциальной энергии в положении равновесия приравнивают ее k:

$$\left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0} = k,$$

- определяют $m = m(x_0)$ и находят частоту $\omega = \sqrt{k/m}$.

(a) $m(x) = 1,\ U(x) = -\sin \dot{x}$

$$\frac{dU(x)}{dx} = 0 \ \text{ дает } \ x_0 = \frac{\pi}{2}, \quad k = \left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0} = 1,$$

следовательно, $\omega = \sqrt{k/m} = 1$.

(b) $m(x) = 1/x,\ U(x) = (x^2+1)/2x$

$$\frac{dU(x)}{dx} = 0 \ \text{ дает } \ x_0 = \pm 1, \quad \frac{d^2U(x)}{dx^2} = \frac{1}{x^3}.$$

Устойчивому равновесию соответствует $x_0 = 1$, поэтому

$$k = \left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0} = 1, \quad m(x_0) = 1,$$

следовательно, $\omega = \sqrt{k/m} = 1$.

(c) $m(x) = 2\cosh x,\ U(x) = \cosh x$

$$\frac{dU(x)}{dx} = 0 \ \text{ дает } \ x_0 = 1, \quad k = \left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0} = 1, \quad m(x_0) = 2,$$

следовательно, $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{2}/2$.

(d) $m(x) = 2/x$, $U(x) = x/\ln x$

$$\frac{dU(x)}{dx} = 0 \text{ дает } x_0 = e, \quad k = \left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0} = 1/e, \quad m(x_0) = 2/e,$$

следовательно, $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{2}/2$.

8. Найдите частоту колебаний точки массой m, движущейся по горизонтальной прямой и прикрепленной к пружине, другой конец которой закреплен на расстоянии l от прямой, если

   (a) пружина, имея длину l, натянута с силой F,

   (b) k – жесткость пружины, а l_0 – длина в ненапряженном состоянии.

Решение: (a) Потенциальная энергия пружины (с точностью до малых величин высшего порядка) равна произведению силы F на удлинение δl пружины. При $x \ll 1$ имеем

$$\delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l \approx \frac{x^2}{2l},$$

так что $U = Fx^2/2l$. Поскольку кинетическая энергия есть $m\dot{x}^2/2$, то

$$\omega = \sqrt{\frac{F}{ml}}.$$

(b) В качестве обобщенной координаты удобно выбрать угол φ между пружиной и вертикалью. Смещение точки $x = l \cdot tg\varphi$, кинетическая энергия $T = ml^2\dot{\varphi}^2/2\cos^4\varphi$, а потенциальная

$$U(\varphi) = \frac{k}{2}\left(\frac{l}{\cos\varphi} - l_0\right)^2.$$

Положение равновесия определяется уравнением

$$k\left(\frac{l}{\cos\varphi} - l_0\right)\frac{l\sin\varphi}{\cos^2\varphi} = 0.$$

Таким образом, имеем три положения равновесия

$$\varphi_1 = 0 \text{ при } l > l_0; \quad \cos\varphi_{2,3} = \frac{l}{l_0} \text{ при } l < l_0.$$

В первом положении

$$\left.\frac{d^2U}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_1} = kl(l-l_0) \;\Rightarrow\; \omega_1^2 = \frac{k(l-l_0)}{ml},$$

во втором и третьем

$$\left.\frac{d^2U}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_{2,3}} = k(l_0^2-l^2)\frac{l_0^2}{l^2} \;\Rightarrow\; \omega_{2,3}^2 = \frac{k}{m}\frac{l_0^2-l^2}{l_0^2}.$$

9. Найдите частоту колебаний точки массой m, которая может перемещаться по окружности радиуса r и прикреплена к пружине, другой конец которой закреплен на расстоянии l от окружности по лучу от центра к точке закрепления, если пружина, имея длину l, натянута с силой F.

Решение: Удлинение пружины (при $\varphi \ll 1$)

$$\delta l = \sqrt{r^2+(l+r)^2-2r(l+r)\cos\omega} - l \approx \frac{r(l+r)}{2l}\varphi^2.$$

Кинетическая энергия $T = mr^2\dot{\varphi}^2/2$. Отсюда частота

$$\omega = \sqrt{\frac{F(r+l)}{rlm}}.$$

10. По гладкой неподвижной окружности радиуса R может перемещаться точка массой m, соединенная с пружиной с жесткостью k. Другой конец пружины закреплен на расстоянии $a > R$ от ее центра. Длина ненапряженной пружины l_0. Найдите частоту колебаний точки.

Решение: В качестве обобщенной координаты выберем центральный угол φ, отсчитываемый от прямой, соединяющей центр окружности и точку закрепления пружины. Лагранжиан точки

$$L = \frac{mR^2\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{k}{2}\left[\sqrt{a^2-2aR\cos\varphi+R^2} - l_0\right]^2.$$

Минимуму потенциальной энергии соответствуют

$$\varphi_1 = 0 \text{ при } a > R+l_0, \quad \varphi_4 = \pi \text{ при } a < l_0 - R,$$

$$\varphi_{2,3} = \pm\arccos\frac{a^2+R^2-l^2}{2R} \text{ при } l_0 - R < a < l_0 + R.$$

Во всех этих точках равновесие устойчивое. Для частот колебаний имеем

$$\omega_1^2 = \frac{ka(a-R-l_0)}{mR(a-R)}, \quad \omega_4^2 = \frac{ka(l_0-a-R)}{mR(a+R)},$$

$$\omega_{2,3}^2 = \frac{k}{4mR^2l_0^2}[4a^2R^2 - (a^2+R^2-l_0^2)^2].$$

11. Найдите отношение частот ω и $\acute{\omega}$ колебаний двух молекул, состоящих из двух атомов различных изотопов каждая. Массы атомов равны соответственно m_1, m_2 и $\acute{m}_1, \acute{m}_2$.

Решение: Атомы изотопов в молекулах взаимодействуют одинаковым образом, поэтому $k = \acute{k}$. Роль же коэффициентов m в кинетических энергиях молекул играют их приведенные массы. Поскольку частота $\omega = \sqrt{k/m}$, находим

$$\frac{\acute{\omega}}{\omega} = \sqrt{\frac{\mu}{\acute{\mu}}} = \sqrt{\frac{m_1m_2(\acute{m}_1+\acute{m}_2)}{\acute{m}_1\acute{m}_2(m_1+m_2)}}.$$

12. Решите задачу о вынужденных колебаниях методом функции Грина? Какие условия определяют выбор контура интегрирования при расчете запаздывающей функции Грина? То же для опережающей функции Грина. Определите D-функцию Паули. Как выглядит решение задачи Коши о вынужденных колебаниях?

13. Определите вынужденные колебания системы под влиянием силы $F(t)$, если в начальный момент $t = 0$ система покоится в положении равновесия $(x = 0, \dot{x} = 0)$, для случаев

(a) $F = F_0 = const$,

(b) $F = at$,

(c) $F = F_0e^{-\alpha t}$.

Решение: Решение неоднородного уравнения

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m},$$

которое определяет вынужденные колебания под действием силы $F(t)$, имеет вид

$$x = x_0 + x_1,$$

где $x_0 = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t \equiv a\cos(\omega t + \alpha)$ – решение однородного уравнения, а x_1 – частное решение неоднородного уравнения.

(a) Частное решение $x_1 = F_0/m\omega^2$. Общее решение удовлетворяет начальным условиям, если $C_1 = -F_0/m\omega^2$, $C_2 = 0$, и имеет вид

$$x = \frac{F_0}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t).$$

Действие постоянной силы приводит к смещению положения равновесия.

(b) Если искать частное решение в виде $x_1 = bt$, то $b = a/m\omega^2$ и

$$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t + \frac{at}{m\omega^2}.$$

Начальные условия дают $C_1 = 0$, $C_2 = -a//m\omega^3$, поэтому

$$x = \frac{a}{m\omega^2}\left(t - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right).$$

(c) Ищем частное решение в виде be^{-at}. Подстановка в уравнение дает $b = F_0/m(\omega^2 + a^2)$, т.е.

$$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t + \frac{F_0 e^{-at}}{m(\omega^2 + a^2)}.$$

Из начальных условий следует

$$C_1 = -\frac{F_0}{m(\omega^2 + a^2)}, \quad C_2 = -\frac{aF_0}{m\omega(\omega^2 + a^2)} \implies$$

$$x = \frac{F_0}{m(\omega^2 + a^2)}\left(e^{-at} - \cos\omega t + \frac{a}{\omega}\sin\omega t\right).$$

14. Определите конечную амплитуду колебаний системы после действия внешней силы

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < 0, \\ F = F_0 t/T & \text{при} \quad 0 < t < T, \\ F_0 & \text{при} \quad t > T. \end{cases}$$

До момента $t = 0$ система покоится в положении равновесия.

Решение: В интервале времени $0 < t < T$ колебания, удовлетворяющие начальным условиям, имеют вид (см. задачу 12(b))

$$x = \frac{F_0}{mT\omega^3}(\omega t - \sin\omega t).$$

При $t > T$ ищем решение в виде

$$x = c_1 \cos\omega(t-T) + c_2 \sin\omega(t-T) + \frac{F_0}{m\omega^2}.$$

"Сшивая" решения, используя непрерывность x и $\dot{x}$ при $t = T$, находим

$$c_1 = -\frac{F_0}{mT\omega^3}\sin\omega T, \quad c_2 = \frac{F_0}{mT\omega^3}(1-\cos\omega T).$$

Искомая амплитуда колебаний

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \frac{2F_0}{mT\omega^3}\sin\frac{\omega T}{2}.$$

Отметим, что она тем меньше, чем медленнее "включается" сила F_0 (т.е. чем больше T).

15. Определите амплитуду колебаний частицы после того, как в течение ограниченного времени T на нее действовала постоянная сила F_0.

    Решение: Для переменной $\xi = \dot{x} + i\omega x$ в тексте лекций (см. пункт 2 главы VIII) получена формула

    $$\xi = exp(i\omega_0 t)\left[\int_0^t \frac{f(t)}{m} exp(-i\omega_0 t)dt + \xi_0\right].$$

    Амплитуда колебаний $x = a\cos(\omega t + \alpha)$, $\dot{x} = -a\sin(\omega t + \alpha)$ есть $a^2 = x^2 + \dot{x}^2/\omega^2$. С другой стороны, $|\xi|^2 = \dot{x}^2 + \omega^2 x^2$, т.е. $a^2 = |\xi|^2/\omega^2$. Итак, для решения задачи необходимо подсчитать ξ в пределах от 0 до T, подставив в интеграл $f(t) = F_0$, что дает

    $$\xi = \frac{F_0}{im\omega}\left(1 - e^{-i\omega T}\right)e^{i\omega t}.$$

    Окончательно

    $$a = \frac{2F_0}{m\omega^2}\sin\frac{\omega T}{2}.$$

16. Покажите, что представить многомерные колебания в нормальных координатах означает одновременно диагонализировать две квадратичные формы – кинетическую и потенциальную энергии механической системы.

17. Покажите, что нормальные координаты одной точки взаимно перпендикулярны.

Решение: Для описания движения одной точки вполне подходящими являются декартовы координаты, которые выберем так, чтобы потенциальная энергия, как квадратичная форма, имела диагональный вид. Кинетическая энергия во всех декартовых координатах является суммой квадратов проекций скорости на координатные оси. В таких координатах нормальные колебания точки – это колебания по взаимно перпендикулярным осям декартовой системы.

18. Покажите, что если все три частоты колебаний точки равны между собой, то движение плоское.

Решение: Если частоты нормальных колебаний точки равны между собой, то можно выбрать такие декартовы координаты, чтобы потенциальная энергия оказалась функцией $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, т.е. в случае равенства частот колебаний точки $U = U(r)$, а в центральном поле движение всегда плоское.

19. Найдите частоту малых колебаний точки массой m, прикрепленной к четырем взаимно перпендикулярным пружинам, которые натянуты с силой F и имеют коэффициент жесткости κ.

Решение: У такой системы два нормальных колебания, обусловленных, во-первых, пружинами, расположенными на одной прямой, и, во-вторых, взаимно перпендикулярными пружинами. В первом случае потенциальная энергия каждой из двух пружин $U_1 = \kappa x^2/2$, во втором – $U_2 = Fx^2/2l$ (см. задачу 7(а)), поэтому

$$U(x) = \left(\kappa + \frac{F}{l}\right) x^2.$$

Кинетическая энергия точки $T = m\dot{x}^2/2$, следовательно, частота ее колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{2(\kappa + F/l)}{m}}.$$

20. Найдите нормальные колебания и собственные частоты для систем

(а)

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\omega_0^2}{2}(x^2 + y^2) + \alpha xy$$

(два одинаковых осциллятора с собственной частотой ω_0, связанные взаимодействием – αxy).

(b)

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(x^2 - xy + y^2).$$

21. Найдите траекторию движения частицы в центральном поле $U = kr^2/2$ (так называемый *пространственный осциллятор*).

Решение: Как и во всяком центральном поле, движение плоское. В качестве плоскости движения выберем плоскость x, y. Изменение каждой из координат x, y - простое колебание с одинаковыми частотами $\omega = \sqrt{k/m}$:

$$x = a\cos(\omega t + \alpha), \quad y = b\cos(\omega t + \beta)$$

или

$$x = a\cos\varphi, \; y = b\cos(\varphi + \delta) = b\cos\delta\cos\varphi - b\sin\delta\sin\varphi,$$

где введены обозначения $\varphi = \omega t + \alpha, \quad \delta = \beta - \alpha$. Определив отсюда $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ и составив сумму их квадратов, получим уравнение траектории

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\delta = \sin^2\delta.$$

Это - эллипс с центром в начале координат. При $\delta = 0$ или π траектория вырождается в отрезки прямой. (Поле $U = kr^2/2$ – еще один пример центрального поля, в котором движение происходит по замкнутой кривой.)

22. Определите диссипативную функцию. Какие изменения претерпевают уравнения Лагранжа при наличии диссипативных процессов? Какой физический смысл имеет диссипативная функция? В каких случаях колебания осциллятора будут затухающими, апериодическими? Сравните амплитуду и частоту свободных и затухающих колебаний.

23. Найдите амплитуду и начальную фазу вынужденных колебаний при наличии трения в случае периодической внешней силы. Рассмотрите область дисперсионного поглощения. Сравните показатель затухания с полушириной резонансной кривой.

24. Найдите решение уравнения

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t),$$

описывающее вынужденные колебания при наличии трения, методом функций Грина.

Решение: Согласно пункту 3 главы VII лекций представим решение уравнения как

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,\acute{t}) f(\acute{t}) d\acute{t}.$$

Функция Грина $G(t,\acute{t})$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{G} + 2\lambda\dot{G} + \omega_0^2 G = \delta(t-\acute{t}),$$

решение которого будем искать в виде

$$G(t,\acute{t}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{-i\omega(t-\acute{t})} d\omega.$$

Подставив в предыдущее уравнение для $g(\omega)$, получим

$$g(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 + 2i\lambda\omega - \omega^2},$$

следовательно,

$$G(t,\acute{t}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega(t-\acute{t})}}{(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)} d\omega,$$

где

$$\omega_{1,2} = i\lambda \pm \Omega_0, \quad \Omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}.$$

При $t - t_0 < 0$ замкнем контур в верхней полуплоскости – интеграл даст нуль, а при $t - t_0 > 0$, замкнув контур в нижней полуплоскости и используя теорему о вычетах, получим

$$G(t,\acute{t}) = \begin{cases} e^{-\lambda(t-\acute{t})} sin\Omega_0(t-\acute{t})/\Omega_0 & \text{при} \quad t-\acute{t} > 0, \\ 0 & \text{при} \quad t-\acute{t} < 0. \end{cases}$$

Итак, решение исходного уравнения с начальными условиями $x(0) = \dot{x}_0 = 0$ имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{\Omega_0}\int_0^t f(\acute{t}) e^{-\lambda(t-\acute{t})} sin\Omega_0(t-\acute{t}) d\acute{t}.$$

25. Определите вынужденные колебания при наличии трения под действием внешней силы $f = f_0 e^{\alpha t}\cos\gamma t$.

8. К главе "Движение твердого тела"

1. Покажите, что число степеней свободы твердого тела равно 6. Какие системы координат принято использовать для описания движения твердого тела? Сформулируйте теоремы Эйлера и Шаля.

2. Докажите, что матрица бесконечно малого поворота системы координат может быть представлена в виде

$$\hat{A} = \hat{I} + \hat{\varepsilon}, \quad \varepsilon_{ik} = -\varepsilon_{ki}.$$

Определите понятие "вектор угловой скорости" вращения твердого тела. Какова причина псевдовекторного характера угловой скорости?

3. Пусть K – система координат, связанная с неподвижной инерциальной системой отсчета, которая имеет общее начало с жестко связанной с твердым телом системой координат $\acute{K}$. Пусть ориентация $\acute{K}$ изменяется со временем относительно K согласно

$$\vec{e}_i = A_{il}(t)\vec{k}_l$$

($\vec{e}_i$, $\vec{k}_l$ – базисные векторы $\acute{K}$ и K соответственно). Найдите связь угловой скорости поворота $\acute{K}$ относительно K с матрицей $\hat{A}$.

4. Почему компоненты момента инерции твердого тела образуют тензор? Докажите теорему Гюйгенса – Штейнера.

5. Сколько вращательных степеней свободы имеет ротатор? Опишите явление регулярной прецессии симметрического волчка и найдите ее скорость.

6. Найдите главные моменты инерции молекул, рассматриваемых как системы атомов, находящихся на неизменном расстоянии друг от друга в следующих случаях:

   (a) атомы расположены по одной прямой.

   Решение: Выберем координатную ось x по прямой расположения атомов и поместим ее начало в центре инерции, т.е. положим $\sum m_i x_i = 0$ (суммирование распространено на все атомы). Это условие вместе с очевидным $x_a = x_b + l_{ab}$, где l_{ab} – расстояние между атомами a и b, позволяет определить координату a-го атома:

$$m_a x_a + \sum_{b \neq a} m_b x_b \;\Rightarrow\; x_a(m_a + \sum_{b \neq a} m_b) = \sum_{b \neq a} m_b l_{ab},$$

поэтому

$$x_a = \frac{\sum_{b\neq a} m_b l_{ab}}{m},$$

где m – сумма масс всех атомов. Рассматриваемая молекула в виде линейной цепочки атомов – ротатор, т.е. $I_1 = I_2$; $I_3 = 0$, причем

$$I_1 = \sum m_i x_i^2 = m_a x_a^2 + \sum_{b\neq a} m_b x_b^2 =$$

$$x_a^2(m_a + \sum_{b\neq a} m_b) - 2x_a \sum_{b\neq a} m_b l_{ab} + \sum_{b\neq a} m_b l_{ab}^2 = -m x_a^2 + \sum_{b\neq a} m_b l_{ab}^2.$$

Подставив x_a, имеем

$$I_1 = \sum_{b\neq a} m_b l_{ab}^2 - \frac{(\sum_{b\neq a} m_b l_{ab}^2)^2}{m} = \frac{1}{m}\sum_{b\neq a} m_b l_{ab}\left[m l_{ab} - \sum_{b\neq a} m_b l_{ab}\right] =$$

$$\frac{1}{m}\sum_{b\neq a} m_b l_{ab}\left[m_a l_{ab} + \sum_{b\neq a} m_b l_{ab} - \sum_{b\neq a} m_b l_{ab}\right].$$

Итак,

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{m}\sum_{b\neq a} m_a m_b l_{ab}^2\ , \quad I_3 = 0.$$

В частном случае двухатомной молекулы имеем

$$I_1 = I_2 = \mu l^2,\ \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

где l – расстояние между атомами.

(b) атомы расположены в вершинах равнобедренного треугольника с основанием a и высотой h (рис. 5).

Решение: Можно считать, что в середине основания сосредоточена масса $2m_1$, поэтому выбор начала координат в центре инерции приводит к условию

$$-2m_1|y_1| + m_2 y_2 = 0,$$

которое вместе с очевидным $|y_1| + y_2 = h$ дает

$$|y_1| = \frac{m_2}{m}h, \quad y_2 = \frac{2m_1}{m}h.$$

Тогда

$$I_1 = 2m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2 = \frac{2m_1 m_2}{m}h^2.$$

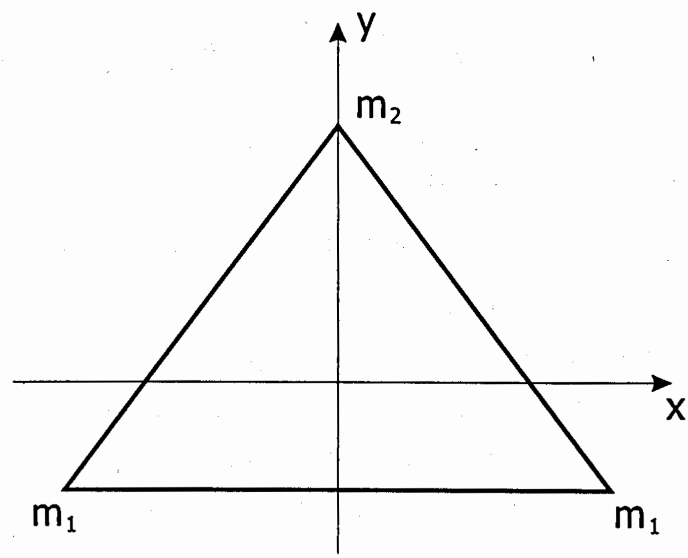

Рис. 5

$$I_2 = 2m_1 x_1^2 = \frac{1}{2} m_1 a^2.$$

Легко видеть, что $I_3 = I_1 + I_2$, поэтому

$$I_3 = \frac{m_1}{2} \left(\frac{4m_2}{m} h^2 + a^2 \right).$$

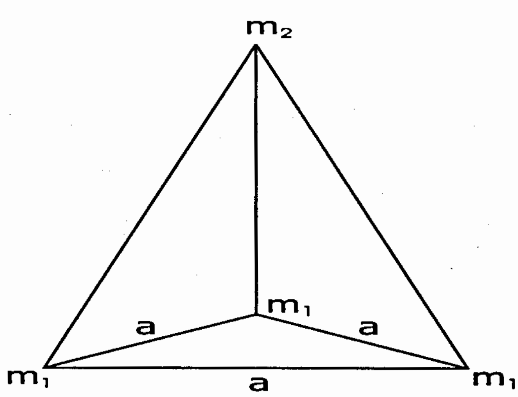

Рис. 6

(c) атомы расположены в вершинах правильной трехугольной пирамиды высотой h (рис. 6).

Ответ:

$$I_1 = I_2 = \frac{3m_1m_2}{m}h^2 + \frac{m_1}{2}a^2, \ I_3 = m_1a^2.$$

(Задача является пространственным вариантом предыдущей и решается аналогично.)

7. Найдите главные моменты инерции сплошных однородных тел:

   (a) тонкого стержня длиной L,

   (b) шара радиусом R,

   (c) кругового цилиндра высотой h, радиус основания которого R,

   (d) прямоугольного параллелепипеда, длина ребер которого a, b, c,

   (e) кругового конуса высотой h и радиусом основания R.

Решение: Напомним, что обычно одну из главных осей инерции симметричных тел направляют по оси симметрии, а начало координат выбирают в центре инерции тела, тогда главные моменты инерции вычисляются по формулам

$$I_1 = \int \rho(y^2 + z^2)dV, \quad I_2 = \int \rho(x^2 + z^2)dV, \quad I_3 = \int \rho(x^2 + y^2)dV,$$

где $x = x_1, \ y = x_2, \ z = x_3$.

(a) Направим ось z по стержню с началом в его центре инерции. Ясно,что $I_3 = 0$,

$$I_1 = I_2 = \kappa \int_{L/2}^{L/2} z^2 dz,$$

где $\kappa = m/L$ – линейная плотность стержня. Интегрируя, получаем

$$I_1 = I_2 = \frac{mL^2}{12}.$$

(b) Выберем начало координат в центре инерции шара. Поскольку для шара $I_1 = I_2 = I_3 = I$, то

$$I_1 + I_2 + I_3 = 3I = 2\rho \int r^2 dV = 2\rho \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

Окончательно

$$I = \frac{2}{5}mR^2; \quad m = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho.$$

(c) Выберем начало координат в центре инерции цилиндра и направим ось z по его оси. В цилиндрических координатах

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ z = z$$

имеем

$$I_3 = \int \rho r^2 \cdot r dr d\varphi dz = \rho \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{mR^2}{2},$$

$$I_1 = \int \rho(r^2\cos^2\varphi + z^2)dV = \frac{m}{4}\left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right), \quad I_2 = I_1.$$

(d) Выберем координатные оси x, y, z параллельно ребрам a, b, c, а их начало в центре инерции параллелепипеда.

$$I_1 = \rho \int_{-c/2}^{c/2} dz \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} (y^2 + z^2) dy dz = \frac{m}{12}(b^2 + c^2).$$

Точно так же

$$I_2 = \frac{m}{12}(a^2 + c^2), \quad I_3 = \frac{m}{12}(a^2 + b^2).$$

(e) Вычисления упрощаются, если выбрать начало координат в вершине конуса, ось z – в направлении его оси и перейти к цилиндрическим координатам

$$\acute{x} = r\cos\varphi, \quad \acute{y} = r\sin\varphi, \quad \acute{z} = z.$$

Тогда

$$I_3' = \int \rho(\acute{x}^2 + \acute{y}^2)dV = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \int_0^{zR/h} r^3 dr = \frac{3}{10} mR^2,$$

$$m = \rho\frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Совершенно аналогично вычисляются

$$I_1' = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \int_0^{zR/h} (r^2\sin^2\varphi + z^2) r dr;$$

$$I_2' = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \int_0^{zR/h} (r^2\cos^2\varphi + z^2) r dr.$$

В результате получаем

$$I_1{}' = I_2{}' = \frac{3}{5}m\left(\frac{R^2}{4} + h^2\right).$$

Центр инерции конуса находится на его оси, а его расположение вычисляется по формуле

$$a = \frac{\int \rho z dV}{\int \rho dV},$$

что дает $\vec{a} = (0, 0, 3h/4)$. Используя теперь известное соотношение

$$I'_{ik} = I_{ik} + m(a^2\delta_{ik} - a_i a_k),$$

получаем

$$I_1 = I_2 = I'_{11} - ma^2 = \frac{3}{20}m\left(R^2 + \frac{h^2}{4}\right), \quad I_3 = I_3{}'.$$

8. Как выражается кинетическая энергия симметрического волчка через эйлеровы углы? Найдите выражение компонент вектора угловой скорости в неподвижной системе координат через углы Эйлера.

9. Найдите кинетическую энергию системы, изображенной на рис. 7. Тонкие однородные стержни OA и AB с одинаковыми массой m и длиной l шарнирно скреплены в точке A. Стержень OA вращается в плоскости рисунка вокруг точки O, а конец стержня AB скользит вдоль оси Ox.

   Решение: Скорость центра инерции стержня OA, находящегося на его середине, есть $l\dot{\varphi}/2$, где φ – угол AOB. Кинетическая энергия стержня OA

$$T_1 = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{8} + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2.$$

Для того чтобы выписать кинетическую энергию стержня AB, найдем координаты и компоненты скорости его центра инерции. Легко видеть (см. рис. 7), что координаты центра инерции стержня AB есть

$$x = \frac{3l}{2}\cos\varphi, \quad y = \frac{l}{2}\sin\varphi,$$

поэтому

$$T_2 = \frac{ml^2}{8}(1 + 8\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2 + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2.$$

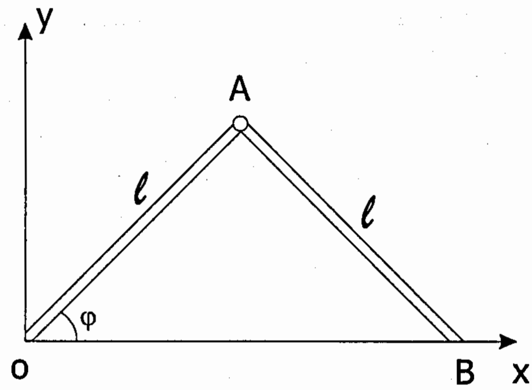

Рис. 7

Подставив момент инерции (см. задачу 7(а)), для кинетической энергии системы, получим

$$T = \frac{ml^2}{8}(1 + 3\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2.$$

10. Найдите кинетическую энергию цилиндра радиуса R, катящегося по неподвижной плоскости. Масса цилиндра распределена по его объему так, что одна из главных осей инерции параллельна оси цилиндра и проходит на расстоянии a от нее. Момент инерции относительно этой оси есть I.

Решение: Введем угол φ между вертикалью и перпендикуляром, опущенным из центра инерции на ось цилиндра. В каждый момент

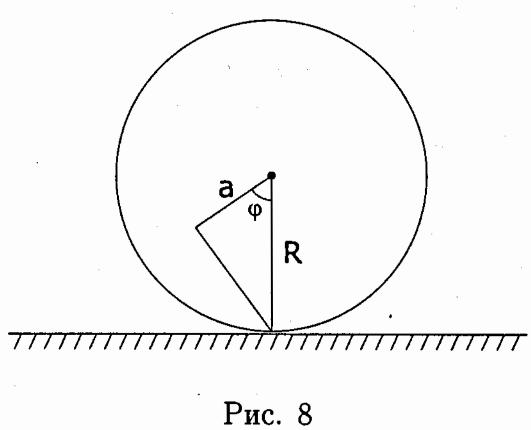

Рис. 8

времени движение цилиндра можно рассматривать как чистое вращение вокруг мгновенной оси, совпадающей с линией соприкосновения с неподвижной плоскостью. Известно, что угловая скорость вращения твердого тела вокруг параллельных осей одинакова, поэтому угловая скорость вращения вокруг мгновенной оси есть $\dot\varphi$. Центр инерции цилиндра находится на расстоянии $\sqrt{a^2+R^2-2aR\cos\varphi}$ от мгновенной оси (см. рис. 8), а его скорость

$$V=\dot\varphi\sqrt{a^2+R^2-2aR\cos\varphi},$$

поэтому

$$T=\frac{m}{2}\dot\varphi^2(a^2+R^2-2aR\cos\varphi)+\frac{I}{2}\dot\varphi^2.$$

11. Найдите кинетическую энергию однородного цилиндра радиуса a, катящегося по внутренней стороне цилиндрической поверхности радиуса R (рис. 9).

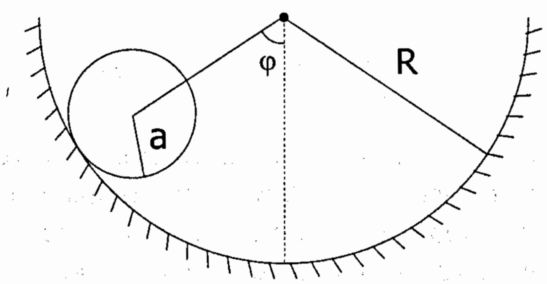

Рис. 9

Решение: Введем угол φ между вертикалью и линией, соединяющей центры обоих цилиндров. Центр инерции катящегося цилиндра находится на его оси, а его скорость $V=(R-a)\dot\varphi$. Как и в предыдущей задаче, угловую скорость будем вычислять как скорость чистого вращения вокруг мгновенной оси, совпадающей с линией соприкосновения цилиндров:

$$\Omega=\frac{V}{a}=\dot\varphi\frac{R-a}{a}.$$

Тогда

$$T=\frac{m}{2}(R-a)^2\dot\varphi^2+\frac{I_3}{2}\Omega^2=\frac{3m}{4}(R-a)^2\dot\varphi^2,$$

здесь I_3 – момент инерции относительно оси цилиндра, который согласно результатам задачи 7(c) равен $ma^2/2$.

12. Найдите кинетическую энергию однородного конуса, катящегося по плоскости (рис. 10).

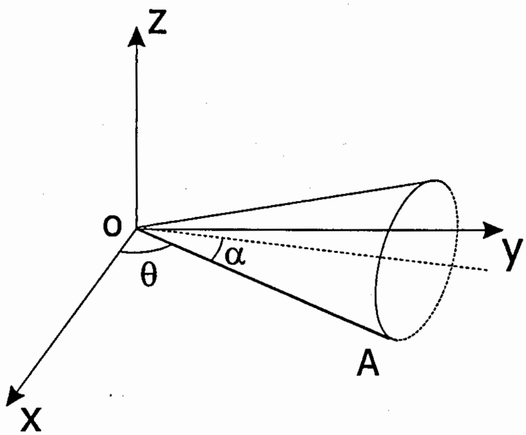

Рис. 10

Решение: Введем угол θ между OA – линией соприкосновения конуса с плоскостью и каким-либо направлением в этой плоскости, с которым свяжем ось X неподвижной системы координат. Центр инерции конуса находится на его оси, а его скорость $V = \dot{\theta} a \cos\alpha$, где a – расстояние центра инерции от вершины конуса, α – угол его полураствора. Вычислим угловую скорость вращения как скорость чистого вращения вокруг мгновенной оси OA:

$$\Omega = \frac{V}{a \sin\alpha} = \dot{\theta} \cdot ctg\ \alpha.$$

Выберем одну из главных осей конуса – ось z в направлении оси конуса, а ось y – перпендикулярно как к оси конуса, так и к линии OA (напомним, что главные оси инерции являются осями жестко связанной с телом системы координат). Тогда проекции параллельного OA вектора $\vec{\Omega}$ на главные оси инерции есть $\Omega \sin\alpha$, 0, $\Omega \cos\alpha$. В результате для искомой кинетической энергии получаем

$$T = \frac{ma^2}{2}\dot{\theta}^2 \cos^2\alpha + \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 \cos^2\alpha + \frac{I_3}{2}\dot{\theta}^2 \frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha} =$$

$$\frac{3mh^2}{40}\dot{\theta}^2 (1 + 5\cos^2\alpha).$$

Здесь h – высота конуса, значения a, I_1, I_3 получены при решении задачи 7(е).

13. Найдите кинетическую энергию однородного конуса, основание которого катится по плоскости, а вершина постоянно находится в точке над плоскостью на высоте, равной радиусу основания, так что ось конуса при движении остается параллельной плоскости.

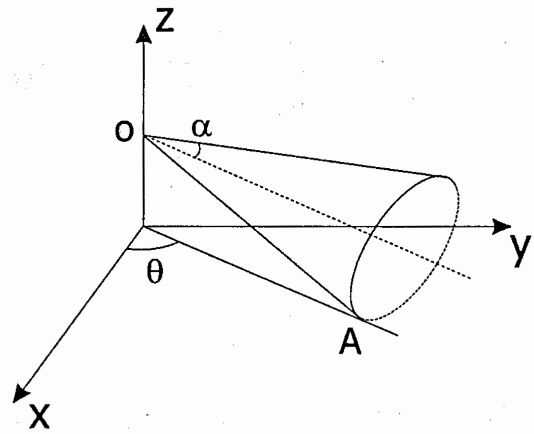

Рис. 11

Решение: Введем угол θ между заданным направлением в плоскости и проекцией на нее оси конуса (рис. 11). Используя обозначения предыдущей задачи, для скорости центра инерции имеем $V = a\dot{\theta}$. В качестве мгновенной оси вращения выберем образующую конуса OA, проведенную в точку его соприкосновения с плоскостью. Центр инерции находится на расстоянии $a \sin \alpha$ от мгновенной оси, и поэтому

$$\Omega = \frac{V}{a \sin \alpha} = \frac{\dot{\theta}}{\sin \alpha}.$$

Если выбрать ось y жестко связанной с конусом системы координат перпендикулярно оси конуса и линии OA, то для проекций вектора $\vec{\Omega}$ на главные оси инерции получим

$$\Omega \sin \alpha = \dot{\theta},\ 0,\ \Omega \cos \alpha = \dot{\theta} \cdot ctg\ \alpha.$$

Поэтому кинетическая энергия

$$T = \frac{ma^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{I_3}{2}\dot{\theta}^2 ctg^2\alpha = \frac{3mh^2}{40\cos^2\alpha}\dot{\theta}^2(1 + 5\cos^2\alpha).$$

14. Определите понятие момент сил. В каком случае момент сил, приложенных к системе n частиц, не зависит от выбора точки, относительно которой он определен?

15. Опишите движение тяжелого симметрического волчка. В чем суть и причина явления нутации?

9. К главе "Движение в неинерциальной системе отсчета. Принцип эквивалентности"

1. Запишите функцию Лагранжа материальной точки

   (a) в равномерно ускоренной системе отсчета.

   Решение: Пусть система $\acute{K}(\acute{x}, \acute{y}, \acute{z})$ движется с ускорением $a = const$ вдоль оси x системы $K(x, y, z)$, тогда

$$\dot{x} = (\dot{x})' + at, \quad y = \acute{y}, \quad z = \acute{z};$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U = \frac{m}{2}(\acute{v}^2 + 2\dot{x}'at + a^2t^2) - U.$$

   Опуская a^2t^2 как полную производную от $a^2t^3/3$ и учитывая, что

$$2\dot{x}'at = \frac{d}{dt}(2a\acute{x}t) - 2a\acute{x},$$

   окончательно получаем

$$L = \frac{m\acute{v}^2}{2} - ma\acute{x} - U,$$

   т.е. постоянное ускорение системы отсчета проявляется как наличие дополнительного однородного поля.

   (b) в равномерно вращающейся системе отсчета.

   Решение: В цилиндрических координатах с осью z вдоль оси вращения координаты неподвижной системы отсчета и системы, вращающейся относительно нее с угловой скоростью ω, связаны согласно

$$\rho = \acute{\rho}, \quad z = \acute{z}, \quad \varphi = \acute{\varphi} + \omega t,$$

$$L = \frac{m}{2}\left[v_\rho^2 + v_z^2 + \rho^2 v_\varphi^2\right] - U = \frac{m}{2}\left[\acute{v_\rho}^2 + \acute{v_z}^2 + \acute{\rho}\left(\acute{\varphi}' + \omega\right)^2\right] - U.$$

2. Запишите функцию Лагранжа материальной точки, движущейся свободно по поверхности равномерно вращающихся

   (a) плоскости, расположенной под углом α к оси вращения;

   (b) цилиндра, ось которого перпендикулярна оси вращения;

   (c) конуса, ось которого перпендикулярна оси вращения.

Решение: Функция Лагранжа свободно движущейся точки в равномерно вращающейся системе отсчета имеет вид

$$L = \frac{mv^2}{2} + m\vec{v}[\vec{\Omega}\vec{r}] + \frac{m[\vec{\Omega}\vec{r}]^2}{2}$$

(см. главу IX лекций).

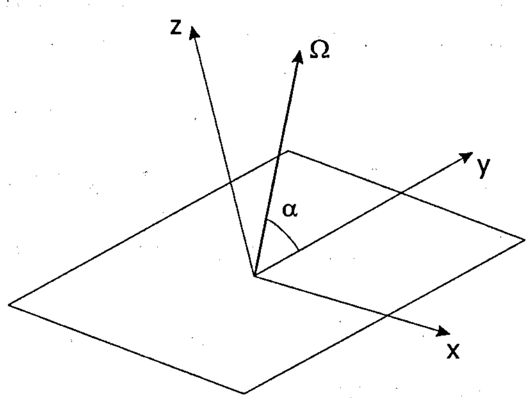

Рис. 12

(a) Выберем оси x, y жестко связанной с плоскостью системы координат так, как показано на рис. 12. Тогда

$$\vec{r}\{x, y, 0\}; \quad \vec{v}\{\dot{x}, \dot{y}, 0\}; \quad \vec{\Omega}\{0, \Omega\cos\alpha, \Omega\sin\alpha\}.$$

Поэтому

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + m\Omega\sin\alpha(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{m\Omega^2}{2}(x^2 + y^2\sin^2\alpha).$$

(b) Выберем ось x жестко связанной с цилиндром системы координат по оси вращения, а ось z по оси цилиндра (см. рис. 13).

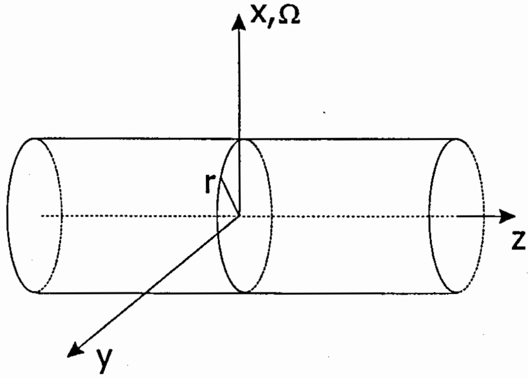

Рис. 13

Тогда

$$\vec{r}\{r\cos\varphi, r\sin\varphi, z\}; \quad \vec{v}\{-r\dot{\varphi}\sin\varphi, r\dot{\varphi}\cos\varphi, \dot{z}\}; \quad \vec{\Omega}\{\Omega, 0, 0\}.$$

Поэтому

$$L = \frac{m}{2}\left(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) + mr\Omega(\dot{z}\sin\varphi - z\dot{\varphi}\cos\varphi) + \frac{m\Omega^2}{2}(z^2 + r^2\sin^2\varphi).$$

(c) Направим ось x жестко связанной с конусом системы координат по оси вращения, а ось z по оси конуса (см. рис. 14).

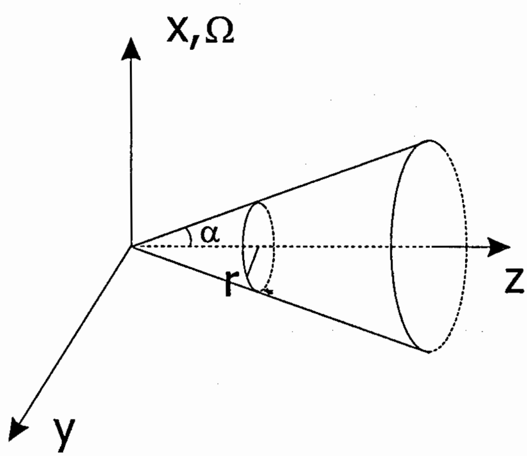

Рис. 14

Тогда $\vec{\Omega}\{\Omega, 0, 0\}$,

$$x = r\sin\alpha\sin\varphi, \;\; y = r\sin\alpha\cos\varphi, z = r\cos\alpha;$$

$$v_x = \dot r \sin\alpha \sin\varphi + r\dot\varphi \sin\alpha \cos\varphi,\ v_y = \dot r \sin\alpha \cos\varphi - r\dot\varphi \sin\alpha \sin\varphi,$$

$$v_z = \dot r \cos\alpha.$$

Поэтому

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 \sin^2\alpha\right) + mr^2\Omega\dot\varphi \sin\varphi \sin\alpha \cos\alpha +$$

$$\frac{m}{2}\Omega^2 r^2 (cos^2\alpha + sin^2\alpha \cos^2\varphi).$$

3. Какие силы действуют на тело, движущееся со скоростью v в неинерциальной СО? Какой рельс железной дороги изнашивается больше при движении поездов в южном направлении? Как изменяется энергия тела из-за вращения СО с постоянной угловой скоростью?

4. Найдите отклонение свободно падающего тела от вертикали, обусловленное вращением Земли.

Решение: Найдем уравнение движения частицы массой m вблизи поверхности Земли. Выберем инерциальную систему отсчета (ИСО) $\acute K$ с началом $\acute O$ в центре инерции (ЦИ) Солнца и с осями, направленными на "неподвижные" звезды. Относительно этой ИСО ЦИ Земли движется по эллипсу под действием силы притяжения Солнца, кроме того, Земля меняет свою ориентацию относительно $\acute K$ с угловой скоростью $\omega \approx 7,3 \cdot 10^{-5} c^{-1}$, которую будем считать постоянной. Введем также СО K, жестко связанную с Землей, с началом O в ЦИ Земли. Уравнение движения частицы в этой СО имеет вид

$$m\vec a = \vec F - m\vec a_З - 2m[\vec\omega, \vec v] - m[\vec\omega, [\vec\omega, \vec r]].$$

Здесь $\vec F = \vec F_З + \vec F_С + \vec\Phi$,

$$\vec F_З = -G\frac{mM_З}{r^3}\vec r$$

– сила притяжения частицы к Земле;

$$\vec F_С = -G\frac{mM_С}{\acute r^3}\vec{\acute r}$$

– сила притяжения частицы к Солнцу;

Φ – другие силы, в том числе и диссипативные, например сила сопротивления воздуха;

$$a_З = -\frac{GM_с}{r^3_{ЗС}}\vec r_{ЗС}$$

– ускорение ЦИ Земли относительно $\acute{K}$, а $r_{\text{ЗС}}$ – расстояние Земля–Солнце (между точками O и $\acute{O}$); $\vec{r}$ и $\acute{\vec{r}}$ – радиусы-векторы частицы относительно K и $\acute{K}$.

Частица движется вблизи поверхности Земли, поэтому приближенно можно полагать $r \sim R_{\text{З}} \ll r_{\text{ЗС}}$. В этом случае сила притяжения к Солнцу $\vec{F}_{\text{С}}$ и сила, обуславливающая ускорение $\vec{a}_{\text{З}}$, компенсируют друг друга, что исключает рассмотрение связанных с Солнцем приливных явлений. В таком предположении уравнение движения частицы перепишется в виде

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{З}} - 2m[\vec{\omega}, \vec{v}] - m[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] + \vec{\Phi}.$$

Если линейные размеры области, в которой происходит движение, много меньше радиуса Земли, то с точки зрения наблюдателя, находящегося на земной поверхности, можно положить $\vec{r} \approx R_{\text{З}}\vec{n}$, где $\vec{n} = \vec{R}_{\text{З}}/R_{\text{З}}$, и для уравнения движения в этой СО получим

$$m\vec{a} = m\vec{w} - 2m[\vec{\omega}, \vec{v}] + \vec{\Phi},$$

где

$$\vec{w} = -\vec{n} \cdot \frac{GM_{\text{З}}}{R_{\text{З}}^2} + \vec{n}_{\rho} \cdot \omega^2 R_{\text{З}} \cos\theta$$

– ускорение свободного падения. Здесь $\vec{n}_{\rho}$ – единичный вектор, направленный от точки на оси вращения Земли перпендикулярно ей, к движущейся частице, θ – геоцентрическая широта, угол между экваториальной плоскостью и направлением от центра Земли к частице. В большинстве задач, отбрасывая малую поправку ($\sim \omega^2$), полагают

$$w \approx g = \frac{GM_{\text{З}}}{R_{\text{З}}^2} \approx 9.8 \text{ м/с}^2,$$

чего мы будем придерживаться в дальнейшем (g – ускорение силы тяжести).

Справка: *Отношения максимальных величин центробежного и кориолисова ускорений к ускорению силы тяжести соответственно равны*

$$\frac{\omega^2 R_{\text{З}}^3}{GM_{\text{З}}} \approx 0,003, \qquad \frac{2\omega R_{\text{З}}^2}{GM_{\text{З}}} v \approx 1,5 \cdot 10^{-5} v.$$

Влияние кориолисовой силы становится сравнимым с влиянием центробежной, если скорость движения тела

$$v_0 \sim \frac{\omega R_{\text{З}}}{2} \approx 2,3 \cdot 10^2 \text{ м/с}.$$

Для всех $v \ll v_0$ кориолисова сила мала по сравнению с центробежной.

Для решения уравнения движения

$$\dot{\vec{v}} = 2[\vec{v}, \vec{\omega}] + \vec{g}, \quad \vec{g} = g \cdot \vec{n} \tag{1}$$

воспользуемся методом последовательных приближений, положив для этого $\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$, где $\vec{v_1}$ – решение уравнения $\dot{\vec{v}}_1 = \vec{g}$, т.е. $\vec{v}_1 = \vec{g}t + \vec{v}_0$ ($\vec{v_0}$ – начальная скорость). Подставляя $\vec{v_1} + \vec{v_2}$ в (1) и оставляя справа только $\vec{v_1}$, получаем уравнение для $\vec{v_2}$:

$$\dot{\vec{v}}_2 = 2[\vec{v_1}, \vec{\omega}] = 2t[\vec{g}, \vec{\omega}] + 2[\vec{v_0}, \vec{\omega}].$$

Результат интегрирования этого уравнения подставим в $\dot{\vec{r}} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$, интегрируя которое получаем

$$\vec{r} = \vec{h} + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2} + \frac{t^3}{3}[\vec{g}, \vec{\omega}] + t^2[\vec{v_0}, \vec{\omega}]. \tag{2}$$

Здесь $\vec{h}$ – вектор начального положения частицы.

Выберем ось z по вертикали вверх, а ось x – по меридиану к полюсу; тогда

$$g_x = g_y = 0, \quad g_z = -g; \quad \omega_x = \omega \cos\lambda, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega \sin\lambda,$$

где λ – широта (которую для определенности предполагаем северной). Положив в (2) $\vec{v}_0 = 0$, найдем

$$x = 0, \quad y = -\frac{t^3}{3} g\omega \cos\lambda.$$

Подставив сюда время падения $t \approx \sqrt{2h/g}$, получим окончательно

$$x = 0, \quad y = -\frac{1}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} g\omega \cos\lambda$$

(отрицательные значения y соответствуют отклонению на восток).

5. Тело брошено с поверхности Земли с начальной скоростью $\vec{v_0}$. Найдите отклонение от плоскости при его движении.

Решение: Выберем плоскость (x, z) так, чтобы $\vec{v}_0$ находился в ней. Согласно уравнению (2) предыдущей задачи (начальная высота $\vec{h} = 0$) для бокового отклонения получим

$$y = -\frac{t^3}{3} g\omega_x + t^2(\omega_x v_{0z} - \omega_z v_{0x}),$$

или, подставив время полета $t \approx 2v_{0z}/g$,

$$y = \frac{4v_{0z}^2}{g^2}\left(\frac{1}{3}v_{0z}\omega_x - v_{0x}\omega_z\right).$$

6. Определите влияние, оказываемое вращением Земли на малые колебания маятника (маятник Фуко).

   Решение: Пренебрегая вертикальным смещением маятника как малой величиной второго порядка, будем считать, что маятник движется в горизонтальной плоскости xy. Запишем уравнения движения в виде

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = 2\omega_z \dot{y}, \quad \ddot{y} + \Omega^2 y = -2\omega_z \dot{x},$$

   где Ω – частота колебаний маятника без учета вращения Земли. Умножив второе уравнение на i и сложив с первым, получим уравнение

$$\ddot{\xi} + 2i\omega_z\dot{\xi} + \Omega^2\xi = 0$$

   для комплексной величины $\xi = x + iy$. При $\omega_z << \Omega$ решение этого уравнения имеет вид

$$\xi = e^{-i\omega_z t}(A_1 e^{i\Omega t} + A_2 e^{-i\Omega t})$$

   или

$$x + iy = e^{-i\omega_z t}(x_0 + iy_0),$$

   где функции $x_0(t)$, $y_0(t)$ дают траекторию маятника без учета вращения Земли. Влияние этого вращения сводится, следовательно, к повороту плоскости траектории вокруг вертикали. Угловая скорость такого поворота есть ω_z.

7. Покажите, что в свободно падающем лифте гравитационная сила компенсируется неинерциальностью наблюдателя. Сформулируйте принцип эквивалентности.

- **БЕССЕЛЬ Фридрих (BESSEL Friedrich)** (1784–1846) – немецкий астроном, механик и математик. Родился в Миндене, член Берлинской АН.

  Бессель подтвердил равенство инертной и гравитационной массы в маятниковых экспериментах с достаточно большой для того времени точностью ($\sim 2 \cdot 10^{-5}$). Его имя носят цилиндрические функции 1-го рода (функции Бесселя) и дифференциальное уравнение, которым они удовлетворяют, а также неравенство для коэффициентов ряда Фурье (неравенство Бесселя).

- **БИНЕ Жак Филипп (BINET Jacques Pilippe)** (1786–1856) – французский математик, механик и астроном. Родился в Рене. Член Парижской академии наук.

  Ввел термин "бета-функция". Изучал линейные разностные уравнения с переменными коэффициентами. Известна формула, названная его именем, которая позволяет найти траекторию движения тела в центральном поле по заданной потенциальной энергии или определить потенциальную энергию по известной траектории.

- **БОГОЛЮБОВ Николай Николаевич** (1909–1992) – выдающийся физик-теоретик и математик, академик. Родился в Нижнем Новгороде. Работал в Киевском университете, в институтах АН Украины, в МГУ, в Математическом институте РАН, в Объединенном институте ядерных исследований.

  Разработал (совместно с Н.М.Крыловым) новые методы в теории нелинейных колебаний и асимптотического интегрирования нелинейных уравнений. Предложил общий способ получения кинетических уравнений для квантовых систем и эффективный прием построения цепочек уравнений для функций распределения коллективов частиц. Сформулировал микроскопическую теорию сверхтекучести и сверхпроводимости. Дал строгое доказательство дисперсионных соотношений в теории сильных взаимодействий. Предложил трехтриплетную кварковую модель и ввел новое кварковое число – цвет. Создатель крупных научных школ по нелинейной механике, статистической механике и квантовой теории поля.

- **ГАЛИЛЕЙ Галилео (GALILEI Galileo)** (1564–1642) – выдающийся итальянский физик и астроном, один из основателей научного естествознания, член Академии дейи Линчеи. Родился в Пизе.

Самостоятельно изучил труды Архимеда и Евклида. Профессор Пизанского (с 1589 года), а затем Падуанского университетов. В дальнейшем придворный философ герцога Козимо II Медичи.

Оказал значительное влияние на развитие научной мысли. Именно от него берет начало физика как наука. Сформулировал два принципа – принцип относительности и принцип эквивалентности, которые сыграли значительную роль в развитии физики. Установил закон инерции (1608), законы свободного падения, движения тела по наклонной плоскости, тела, брошенного под углом к горизонту (1604–1609), и закон постоянства периода колебаний маятника. Изобрел подзорную трубу, а затем создал первый телескоп. Выдвинул идею применения маятника в часах. Определил удельный вес воздуха. Подвергался гонениям инквизиции за отстаивание гелиоцентрической системы Коперника.

- **ГАМИЛЬТОН Вильям Роуан (HAMILTON William Rowan)** (1805–1865) – ирландский математик и физик, президент Ирландской академии в Дублине. Родился в Дублине. Окончил Тринити-колледж Дублинского университета, с 1827 года профессор Дублинского университета и директор астрономической обсерватории.

  Развитая Гамильтоном аналогия между волновой и корпускулярной оптикой почти через сто лет была использована Шредингером при формулировке основ квантовой механики. Установленная Гамильтоном аналогия между классической механикой и геометрической оптикой привела его к разработке вариационного принципа наименьшего действия и аналитического аппарата классической механики. Впервые ввел понятие групповой скорости.

- **ГАУСС Карл Фридрих (GAUSS Carl Friedrich)** (1777–1855) – немецкий математик, названный современниками королем математики. Родился в Брауншвейге в семье водопроводчика. Учился в Геттингенском университете.

  Удивительные математические способности Гаусса обнаружились, когда ему исполнилось три года. Вычислительную технику, в которой он был непревзойденным мастером, совершенствовал всю жизнь. После обнаружения малой планеты Церера, предвычисленной Гауссом, он стал считаться величайшим математиком мира и получил почетное звание "геттингенского колосса". Изложил основы теории потенциала, пришел к мысли о конечности скорости распространения электромагнитных взаимодействий, построил (совместно с Вебером) первый в Германии электромагнитный телеграф. Гаусс вошел в историю математики как один из создателей неевклидовой геометрии, однако боязнь быть непонятым и осмеянным невежественными людьми помешала ему опубликовать работы в этом направлении. Гаусс дал несколько доказательств основной теоремы алгебры (первое – в 1799 году). Трудно указать такую область чистой и прикладной математики, в которую Гаусс не внес существенного вклада.

- **ГРИН Джордж (GREEN George)** (1793–1841) – английский математик и физик, самоучка. Лишь в сорокалетнем возрасте Грин поступил в Кембриджский университет, который окончил в 1837 году.

  В 1828 году Грин опубликовал книгу "Опыт применения математического анализа в теории электричества и магнетизма". В ней он впервые ввел в науку понятие и термин "потенциал" и развил теорию электромагнетизма. Книга Грина, вышедшая незначительным тиражом, оставалась неизвестной до ее переиздания (1845) даже в самой Англии. За это время другими учеными были переоткрыты некоторые результаты Грина.

- **ГЮЙГЕНС Христиан (HUYGENS Christian)** (1629–1695) – голландский физик, математик и астроном. Родился в Гааге, учился в университетах Лейдена и Бреда. В 1665–1681 годах жил в Париже и был избран в Парижскую академию наук.

  Сконструировал первые маятниковые часы и разработал их теорию. Установил закономерности движения при наличии центростремительной силы. Исследовал столкновения упругих тел. Разработал волновую теорию света и сформулировал принцип, известный в оптике как принцип Гюйгенса. Совместно с Гуком установил постоянные точки термометра – точки таяния льда и кипения воды. Показал, что вода при замерзании расширяется. Был близок к открытию закона всемирного тяготения. Выдвинул идею об измерении ускорения свободного падения с помощью секундного маятника.

- **ДЕКАРТ Рене (DESCARTES Rene**, латинизированное имя – **CARTESIUS)** – выдающийся французский математик, физик, философ и физиолог. Родился в 1596 году в Лаэ, в дворянской семье. С 1629 по 1649 год прожил в Голландии. Умер в 1650 году в Стокгольме.

Математические исследования Декарта тесно связаны с его философскими и физическими работами. Заложил основы аналитической геометрии. Декарт впервые ввел понятие координат, переменной величины и функции, что составило его основную заслугу в математике.

- **ДИККЕ Роберт (DICKE Robert)** (1916–1997) – американский физик, экспериментатор и теоретик. Родился в Сент-Луисе. Окончил Принстонский и Рочестерский университеты. Работал в Массачусетском технологическом институте, с 1957 года был профессором Принстонского университета.

  В 1946 году изобрел радиометр и измерил радиоизлучение Луны на волне 1,25 см. В 1953 году наблюдал лазерную накачку (независимо от А. Каспера). Предсказал сверхизлучение атомных систем, находящихся в когерентном состоянии (1953). Независимо от А. Прохорова предложил использовать открытый резонатор для наблюдения квантовой генерации в инфракрасной области. Разработал скалярно-тензорную теорию гравитации (теорию Бранса – Дикке). Обнаружил сплющенность Солнца (точность эксперимента 10^{-4}). В 1964 году провел эксперимент по доказательству равенства инертной и гравитационной массы с точностью до 10^{-11}). Осуществил проверку принципа эквивалентности путем лазерной локации Луны. Выполнил ряд важных экспериментов по исследованию спектра и изотропии реликтового излучения.

- **ДИРАК Поль Адриен Морис (DIRAC Paul Adrien Maurice)** (1902–1984) – английский физик-теоретик, один из основателей квантовой механики, член Лондонского королевского общества. Родился в Бристоле, учился в Бристольском и Кембриджском университетах.

  Усовершенствовал математический аппарат квантовой механики, разработав теорию преобразований. Предложил метод вторичного квантования. Совместно с Гейзенбергом открыл обменное взаимодействие. Независимо от Э.Ферми разработал статистику частиц с полуцелым спином. Объединив квантовые и релятивистские идеи, построил теорию релятивистского электрона. На основе открытого им уравнения предположил существование позитрона и античастиц. Выдвинул гипотезу о существовании элементарного магнитного заряда (монополь Дирака). Предложил метод квантования гравитационного поля. Высказал гипотезу об изменении гравитационной константы со временем.

За создание квантовой механики вместе с Э.Шредингером был удостоен Нобелевской премии (1933).

- **ЕВКЛИД** ($E\upsilon'\kappa\lambda\varepsilon\iota\delta\eta\varsigma$) – древнегреческий математик, автор первого из дошедших до нас теоретических трактатов по математике. Его научная деятельность протекала в Александрии в начале III века до нашей эры. Главная работа Евклида "Начала" составила целую эпоху в развитии элементарной геометрии. В "Началах" Евклида, состоящих из 13 книг, дан образец дедуктивного изложения геометрического материала на основе предпосланной системы аксиом. По свидетельствам современников, Евклид был мягким, очень скромным и независимым человеком.

- **КЕПЛЕР Иоганн (KEPLER Johann)** (1571–1630) – немецкий ученый, один из творцов небесной механики. Родился в Вейль-дер-Штадте (Вюртемберг). Окончил Тюбингенский университет (1593). Работал в Граце, Праге, Линце и Ульме. Был придворным математиком императора Рудольфа II. Последние годы жизни провел в странствиях и бедности.

  Известны его работы в области астрономии, механики, оптики, математики. Используя наблюдения Тихо Браге и свои, открыл законы движения планет. Законы Кеплера стали основой для открытия Ньютоном закона всемирного тяготения. Предложил понятие силы как причины ускорения. Сформулировал закон обратно пропорциональной зависимости освещенности от квадрата расстояния до источника света.

- **КОРИОЛИС Густав (CORIOLIS Gustav)** (1792–1843) – французский физик и инженер, член Парижской академии наук. Родился в Париже, учился в Политехнической школе, где и работал в дальнейшем.

  Ввел в механику понятие работы и сформулировал теорему "живых" сил, за меру которых принял половину произведения массы на квадрат скорости. Разработал теорию относительного движения. Показал, что вращение системы отсчета приводит к возникновению "кориолисовых" ускорения и силы. Открыл явление ползучести.

- **КРОНЕКЕР Леопольд (KRONECKER Leopold)** (1823–1891) – немецкий математик. С 1861 года член Берлинской академии наук и профессор Берлинского университета. Родился в Лигнице (ныне Легница, Польша).

Основные работы Кронекера относятся к алгебре и теории чисел, к теории квадратичных форм и теории групп. Кронекер был сторонником "арифметизации" математики, которая, по его мнению, должна быть сведена к арифметике целых чисел, так как только последняя, как он утверждал, обладает подлинной реальностью. Защищая эти взгляды, Кронекер вел упорную борьбу с последователями теоретико-функциональной школы Вейерштрасса и теоретико-множественной школы Кантора.

- **ЛАГРАНЖ Жозеф Луи (LAGRANGE Josef Luis)** (1736–1813) – французский математик и механик, член Парижской академии наук. Родился в Турине. Математику изучал самостоятельно. Профессор Нормальной, а затем Политехнической школ в Париже.

  Наиболее видные результаты получены в исследованиях по механике и вариационному исчислению. Разработал и обобщил в аналитической форме удобный алгоритм решения вариационных задач. Ввел понятие обобщенных координат, придал уравнениям движения форму, названную его именем. Ему принадлежит ряд выдающихся исследований по вопросам математического анализа и дифференциальных уравнений (формула конечных приращений, формула остаточного члена ряда Тейлора, метод множителей Лагранжа, метод вариации постоянной).

- **ЛАПЛАС Пьер Симон (LAPLACE Pierre Simon)** – французский математик и механик. Родился в Бомоне в 1749 году, умер в Париже в 1827 году. Член Парижской академии наук, один из основателей Нормальной и Политехнической школ.

  Основные работы Лапласа относятся к области небесной механики, в которой он достиг выдающихся результатов – решил сложные проблемы движения планет и их спутников, доказал устойчивость Солнечной системы в течение очень длительного времени. Предложил гипотезу происхождения Солнечной системы. Исследования Лапласа по физике касаются вопросов акустики, электромагнетизма и теории капиллярности, в частности, он установил закон изменения плотности воздуха с высотой. Известен оператором Лапласа, уравнением Лапласа, интегралом Лапласа, преобразованием Лапласа. Ему принадлежит ряд фундаментальных работ по дифференциальным уравнениям и теории вероятности.

- **ЛЕЖАНДР Адриен Мари (LEGENDRE Adrien Mari)** (1752–1833) – французский математик, член Парижской академии наук. Родился в Париже.

  Открыл и применил в вычислениях метод наименьших квадратов. В математический анализ им введены многочлены Лежандра, преобразования Лежандра. Доказал приводимость эллиптических интегралов к каноническим формам, составил таблицы их значений.

- **НЕТЕР Амали Эмми (NOETHER Amali Emmy)** (1882–1935) – немецкий математик. Родилась в Эрлангене. Работала в Геттингенском университете.

  Основные труды по алгебре способствовали созданию нового направления, известного под названием "абстрактная алгебра". Именем Нетер названа фундаментальная теорема теоретической физики, связывающая симметрии системы с законами сохранения.

- **НЬЮТОН Исаак (NEWTON Isaak)** (1643–1727) – выдающийся английский ученый, заложивший основы современного естествознания, создатель классической физики, член Лондонского королевского общества и его президент. Родился в Вулсторпе, окончил Кембриджский университет.

  Сформулировал основные законы классической механики, открыл закон всемирного тяготения, дисперсию света. Исследовал интерференцию и дифракцию света. Независимо от Лейбница разработал дифференциальное и интегральное исчисление. Его огромный труд "Математические начала натуральной философии" (1687) содержал основные понятия и аксиомы классической механики, в частности понятия массы, количества движения, силы, ускорения, центростремительной силы, три известных закона движения, закон всемирного тяготения. Ньютон установил закон внутреннего трения в жидкостях и газах. Созданная Ньютоном физическая картина мира (абсолютность пространства и времени, мгновенность распространения взаимодействий) длительное время господствовала в науке.

- **ПУАНКАРЕ Анри (POINCARE Henri)** – крупнейший французский математик. Родился в Нанси в 1854 году, умер в Париже в 1912 году. Обучался в Политехнической и Горной школах в Париже. С 1886 года - профессор Парижского университета. Член Парижской академии наук.

Исследования Пуанкаре об устойчивости движения и о фигурах равновесия жидкой вращающейся массы открыли новые горизонты в астрономии и космогонии, позволяя применять более совершенные методы современного анализа. В 1904 году высказал принцип относительности в качестве всеобщего и строгого положения. Независимо от Эйнштейна и до него заложил основы специальной теории относительности. Построил первый вариант релятивистской теории гравитации. Работы Пуанкаре обогатили почти все разделы математики и математической физики результатами первостепенного значения.

- **ПУАССОН Симеон Дени (POISSON Simeon Deni)** (1781–1840) – французский механик, математик и физик, член Парижской академии наук. Родился в Питавье, окончил Политехническую школу в Париже. Профессор Парижского университета.

  Применил математическую теорию потенциала к электростатическим явлениям, затем распространил ее на магнитостатику. Впервые записал уравнения аналитической динамики в составляющих импульса. Разработал теорию распространения звука в воздухе. Дал вывод уравнения адиабаты. Считается одним из основателей теории упругости.

- **РЕЗЕРФОРД Эрнест (RUTHERFORD Ernest)** (1871–1937) – английский физик, основатель ядерной физики, член Лондонского королевского общества и его президент. Родился в Спринг-Броуве (сейчас Брайтуотер) в Новой Зеландии. Окончил Кентерберийский колледж Новозеландского университета. Работал в Кавендишской лаборатории и впоследствии стал ее директором. Профессор Кембриджского университета.

  Своими фундаментальными открытиями в атомной и ядерной физике заложил основы учения о радиоактивности и теории строения атома. Разработал теорию радиоактивного распада и установил законы радиоактивных превращений. Предсказал существование трансурановых элементов. Наблюдал рассеяние альфа-частиц при прохождении через вещество и установил закон рассеяния. Создал планетарную модель атома. Открыл протон и предсказал существование нейтрона и дейтрона. Выдвинул идею об искусственном превращении атомных ядер. Впервые осуществил искусственную ядерную реакцию, превратив азот в кислород.

За исследования по искусственному превращению элементов удостоен Нобелевской премии (1908).

- **РЭЛЕЙ Джон Уильям (RAYLEIGH (Strutt) John William)** (1842–1919) – английский физик, член Лондонского королевского общества и его президент. После смерти отца унаследовал титул лорда Рэлея. Президент Кембриджского университета, директор Кавендишской лаборатории.

  Автор работ по теории колебаний, акустике, молекулярной физике, гидродинамике, оптике. Первым обратил внимание на автоколебания. Изучал диффузное рассеяние и поглощение волн. Заложил основы молекулярного рассеяния света. Установил закон, согласно которому интенсивность рассеянного средой света обратно пропорциональна четвертой степени длины волны падающего света. Независимо от Хевисайда создал теорию скин-эффекта. Вывел закон распределения энергии излучения в спектре абсолютно черного тела в зависимости от температуры (закон Рэлея – Джинса).

  За открытие аргона удостоен Нобелевской премии (1904).

- **ФОК Владимир Александрович** (1898–1974) – физик-теоретик, академик. Родился в Петербурге, окончил Петроградский университет. Работал в Ленинградском физико-техническом институте, Государственном оптическом институте, Институте физических проблем АН и Ленинградском университете.

  Работы относятся к квантовой механике, квантовой электродинамике, квантовой теории поля, теории гравитации, статистической физике, математической физике. Разработал метод приближенного описания системы взаимодействующих фермионов (метод Хартри – Фока). Вскрыл скрытую симметрию в атоме водорода. Предложил метод вторичного квантования систем с переменным числом частиц в конфигурационном пространстве (пространстве Фока). Предложил особый способ формулировки уравнений квантовой теории поля и квантовой теории многих тел – метод функционалов Фока. Исследовал ряд сложных задач теории гравитации, в частности, показал, что уравнения движения тел следуют из полевых уравнений теории гравитации Эйнштейна.

- **ФУРЬЕ Жан Батист (FOURIER Jean Baptiste)** (1768–1830) – французский математик и физик, член Парижской академии наук и ее секретарь. Родился в Осере, там окончил военную школу, где впоследствии преподавал.

Основные работы в области математической физики. Основатель учения о теплопроводности. Развил метод представления функций тригонометрическими рядами (ряды Фурье). Вывел уравнение распределения тепла внутри твердого тела. Независимо от Эрстеда открыл термоэлектрический эффект. Первый использовал метод размерностей.

- **ХАББЛ Эдвин (HUBBLE Edwin)** (1889–1953) – американский астроном, член Национальной академии наук США. Родился в Маршфилде (штат Миссури). Окончил Чикагский университет. Работал в Йеркской обсерватории, а затем в обсерватории Маунт-Вилсон.

  Предложил первую классификацию галактик. Обнаружил линейную зависимость между скоростями галактик и расстоянием до них (закон Хаббла). Определил значение коэффициента пропорциональности этой зависимости (постоянная Хаббла). Открытие Хаббла явилось наблюдательной основой концепции расширяющейся Вселенной.

- **ХЕВИСАЙД Оливер (HEAVISIDE Oliver)** (1850–1925) – английский физик и математик, член Лондонского королевского общества. Родился в Лондоне. Работал в телеграфной компании. Оставил работу из-за прогрессирующей глухоты.

  Развил теорию электромагнитного поля, особо выделяя симметрию электрического и магнитного полей. Независимо от Пойнтинга ввел понятие потока энергии электромагнитного поля. Независимо от Рэлея построил теорию скин-эффекта. Постулировал существование ионосферы как слоя, отражающего электромагнитные волны. Один из создателей операционного исчисления.

- **ЭЙЛЕР Леонард (EULER Leonard)** (1707–1783) – математик, механик, физик. Родился в Базеле. Учился в Базельском университете у братьев Якоба и Иоганна Бернулли. Долгое время работал в Петербурге. Общее количество работ Эйлера превышает 850, среди которых 20 фундаментальных книг.

  Эйлер заложил основы теории функций комплексного переменного, вариационного исчисления, теории специальных функций. Пытался построить единую картину мира и физических процессов. Установил закон сохранения момента импульса и развил теорию моментов инерции. Сформулировал основные законы движения идеальной жидкости. Исследовал задачи о колебаниях струн, пластин, мембран. По выражению Лапласа, Эйлер являлся "общим учителем математиков".

- **ЭЙНШТЕЙН Альберт (EINSTEIN Albert)** – один из выдающихся физиков со времен Ньютона. Родился в 1879 году в Ульме (Германия), умер в 1955 году в Принстоне (США). Окончил Цюрихский политехникум. Начал работать экспертом в патентном бюро, затем работал в Цюрихском политехникуме, Пражском и Берлинском университетах. В 1933 году переехал в Принстон (США).

  В истории естествознания занимает совершенно особое место. Созданием специальной и общей теории относительности Эйнштейн завершил классическую физику и одновременно заложил основы нового учения о пространстве, времени и тяготении. Его фундаментальные исследования по квантовой теории света, развивающие известную идею Планка о дискретной природе теплового излучения, положили начало новой эре – эре физики атома и атомного ядра. Исходя из квантовых представлений, объяснил уменьшение теплоемкости твердых тел при низких температурах. Предсказал явление индуцированного излучения. Развил молекулярно-статистическую теорию броуновского движения и создал квантовую статистику частиц с целым спином.

  За объяснение фотоэффекта удостоен Нобелевской премии (1921).

- **ЭТВЕШ Роланд (EÖTVÖS Roland)** (1848–1919) – венгерский физик, член Венгерской академии наук и ее президент. Родился в Будапеште. Учился в Будапештском и Гейдельбергском университетах.

  Сконструировал крутильные весы и с высокой точностью установил равенство гравитационной и инертной масс.

- **ЯКОБИ Карл Густав Якоб (JACOBI Carl Gustav Jacob)** – немецкий математик, родился в Потсдаме в 1804 году, умер в Берлине в 1852 году. Профессор Берлинского университета, член Берлинской академии наук.

  Якоби получены фундаментальные результаты в области уравнений с частными производными. В своих лекциях по динамике и в ряде исследований по теории эллиптических функций он решил ряд важнейших вопросов чистой и прикладной математики. Якоби усовершенствовал предложенный Гамильтоном метод интегрирования дифференциальных уравнений динамики, известный как метод Гамильтона – Якоби.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Получено 27 сентября 2002 г.

50 р.

Учебное издание

В. В. Папоян

Классическая механика
Лекции, задачи и решения

Редактор *А. Н. Шабашова*

Подписано в печать 28.12.2002.
Формат 70 × 100/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 22,02. Уч.-изд. л. 19,44. Тираж 210 экз. Заказ № 53702.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@pds.jinr.ru
www.jinr.ru/publish/