

С 322(07)  
П-175



Учебно-  
методические  
пособия  
Учебно-научного  
центра ОИЯИ  
Дубна

УНЦ-2002-13

В. В. Папоян

ИЗБРАННЫЕ ЛЕКЦИИ  
ПО КЛАССИЧЕСКОЙ  
ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

2002

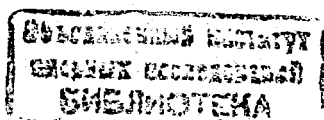
Учебно-научный центр ОИЯИ

С 322/6  
П-17

В. В. Папоян

ИЗБРАННЫЕ ЛЕКЦИИ  
ПО КЛАССИЧЕСКОЙ  
ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

*Учебно-методическое пособие*



Дубна 2002

## МЕТОД ФУНКЦИЙ ГРИНА. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

### 1. Механические колебания

Введем понятие функций Грина и продемонстрируем их возможности на простом примере – колебаниях гармонического осциллятора, на который действует внешняя сила  $f(t)$ :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m} \equiv F(t). \quad (1)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде фурье-разложения

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{x}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad F(t) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{F}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (2)$$

Обратив интегралы, имеем

$$\tilde{x}(\omega) = \int x(t) e^{i\omega t} dt, \quad \tilde{F}(\omega) = \int F(t) e^{i\omega t} dt. \quad (3)$$

Для фурье-образов дифференциальное уравнение (1) превращается в алгебраическое:

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \tilde{x}(\omega) = \tilde{F}(\omega) \implies \tilde{x}(\omega) = \frac{\tilde{F}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (4)$$

Возникающая при  $\omega = \omega_0$  особенность может привести к потере информации, поэтому используют формальный прием, добавляя к  $\tilde{F}(\omega)$  в (4) нуль:  $C(\omega_0^2 - \omega^2)\delta(\omega_0^2 - \omega^2)$ ,  $C = const$ . Тогда

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{\tilde{F}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2} + C\delta(\omega_0^2 - \omega^2). \quad (5)$$

Отметим, что хотя к  $\tilde{F}(\omega)$  в (4) добавлен нуль, однако в решение (5) слагаемое  $C\delta(\omega_0^2 - \omega^2)$  привносит конечную добавку – вклад с частотами  $\omega = \pm\omega_0$ , т.е. с частотой собственных колебаний свободного осциллятора. (Это обстоятельство в определенном смысле оправдывает выбор добавки в (4).) Итак, второе слагаемое правой части (5) приводит к общему решению однородного уравнения (1), причем, поскольку  $\delta$ -функция

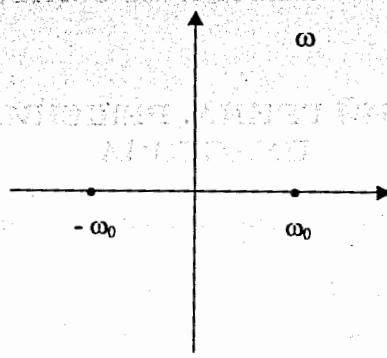


Рис. 1

имеет два корня, константы можно выбрать для каждого из корней в отдельности. Слагаемое, пропорциональное  $\tilde{F}(\omega)$  в (5), дает частное решение неоднородного уравнения, т.е. фактически (5) есть общее решение поставленной задачи.

Для того чтобы найти частное решение задачи, подставим (5) с учетом (3) в (2):

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int F(\dot{t}) d\dot{t} \int \frac{e^{-i\omega(t-\dot{t})} d\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad x(t) = \int F(\dot{t}) G(t, \dot{t}) d\dot{t}. \quad (6)$$

Здесь

$$G(t, \dot{t}) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{-i\omega(t-\dot{t})} d\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (7)$$

— функция Грина уравнения (1).

Нетрудно убедиться, что функция Грина удовлетворяет уравнению

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2 \right) G(\dot{t}, t) = \delta(t - \dot{t}), \quad (7a)$$

которое отличается от (1) тем, что в правой части содержит  $\delta$ -образный внешний источник. Поэтому легко представить смысл решения (6) уравнения (1). Это решение, по существу, является суперпозицией решений того же уравнения, в котором внешние силы заменяются кратковременными в разные моменты времени импульсами. Интеграл (7) в обычном смысле не существует. При  $\omega = \pm\omega_0$  он имеет полюса вдоль вещественной оси в комплексной плоскости  $\omega$  (см. рис. 1). Интегралу (7) можно придать смысл, если исключить особенности из области интегрирования,

возможных операций такого рода – деформация контура интегрирования, выводящая его в комплексную плоскость с последующим предельным возвратом на вещественную ось. Неизбежно возникает вопрос – как деформировать контур, т.е. как обходить полюса? Для ответа на этот вопрос обойдем вокруг полюсов так, как показано на рис. 2. Такой об-

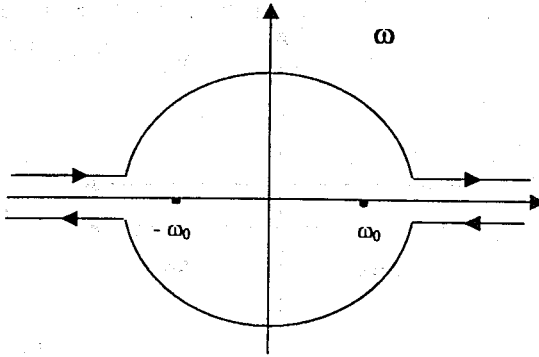


Рис. 2

ход отвечает разности интегралов: одного по контуру  $(-\infty, +\infty)$  над вещественной осью и второго по контуру  $(+\infty, -\infty)$  под вещественной осью. Тогда для изображенного на рисунке контура согласно теореме о вычетах имеем

$$\frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{e^{-i\omega\tau} d\omega}{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)} = \frac{2\pi i}{2\pi} \left[ \left( e^{-i\omega_0\tau} / 2\omega_0 \right) + \left( e^{i\omega_0\tau} / (-2\omega_0) \right) \right] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{e^{-i\omega\tau} d\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\sin(\omega_0\tau)}{\omega_0} \equiv D(\tau), \quad \tau = t - i.$$

Таким образом, подсчет интеграла по замкнутому контуру  $C$ , который представляет разницу в выборе обхода полюсов, в одном случае над вещественной осью, в другом – под нею, дает решение однородного уравнения поставленной задачи, т.е. к частному решению неоднородного уравнения (6) при одном обходе полюсов добавляется общее решение однородного уравнения (свободный осциллятор), а при другом обходе – нет. Поскольку нас интересует лишь частное решение неоднородного уравнения, для наших целей принципиально безразлично, как обходить полюса. Практически выбор конкретного обхода может дать определенные преимущества, в частности избавить от необходимости добавлять к общему решению

решение однородной задачи и т.п. Остановимся далее на нескольких физически интересных возможностях в выборе контура интегрирования.

### 1. Запаздывающая функция Грина

Запаздывающая функция Грина возникает в случае, если контур интегрирования провести над вещественной осью и обойти оба полюса сверху (см. рис.3). Экспонента подынтегрального выражения (7)

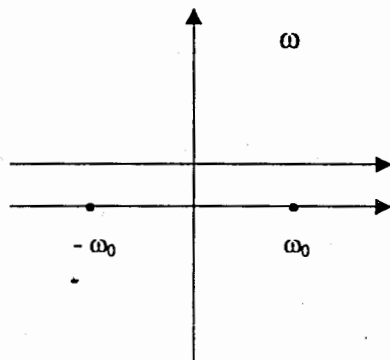


Рис. 3

содержит " $-i\omega\tau$ ", поэтому при  $\tau > 0$  замкнем контур снизу. Тогда оба полюса окажутся внутри контура и результат интегрирования будет таким же, как и в рассмотренном выше случае. (Заметим, что интеграл по замкнутому таким образом контуру совпадает с исходным (7), пределы интегрирования которого заключены в интервале  $-\infty < \omega < +\infty$  ввиду того, что вклад в интеграл по нижней половине большого круга, в силу леммы Жордана, равен 0.) При  $\tau < 0$  замкнем контур сверху, тогда, поскольку полюса оказываются вне контура, интегрирование дает 0. Итак,

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{\exp(-i\omega\tau) d\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = D^{ret}(\tau) \equiv \vartheta(\tau) \frac{\sin\omega_0\tau}{\omega_0},$$

получившаяся при таком выборе контура функция Грина  $D^{ret}(\tau)$  называется запаздывающей (retarded) функцией Грина, а  $\vartheta(\tau)$  является ступенчатой функцией Хевисайда, которая есть 1 при  $\tau > 0$  или 0 при  $\tau < 0$ . Физический смысл  $D^{ret}(\tau)$  прозрачен. Действительно, заметим, что в выражении

$$x^{ret}(t) = \int F(t') D^{ret}(t - t') dt'$$

интегрирование распространяется на интервал  $-\infty < t < t$ , поэтому запаздывающая функция Грина в момент  $t$  выражает влияние внешней силы, действующей в предыдущие моменты  $t < t$ . Понятно, что  $D^{ret}$  естественно пользоваться, если начальные условия заданы в прошлом.

Вместо деформации контура смещением его вверх можно было оставить его на вещественной оси, но сместить полюса вниз. Это достигается бесконечно малой мнимой добавкой  $-i\epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ) к полюсам  $\pm\omega_0$ , а после интегрирования устремлением  $\epsilon$  к 0. Учитывая

$$\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{-1}{[\omega - (\omega_0 - i\epsilon)][\omega - (-\omega_0 - i\epsilon)]} = \frac{-1}{(\omega^2 - \omega_0^2 + 2i\epsilon\omega)}$$

для фурье-образа запаздывающей функции Грина, получаем

$$\tilde{D}^{ret}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\epsilon\omega}$$

Последнее выражение включает также и указание о способе обхода особенностей, а необходимость выполнить предельное устранение добавки ( $\epsilon \mapsto 0$ ) после интегрирования будем держать в уме.

## 2. Опережающая функция Грина

Проведем путь интегрирования под вещественной осью (см. рис.

4). Аналогично случаю предыдущего пункта имеем

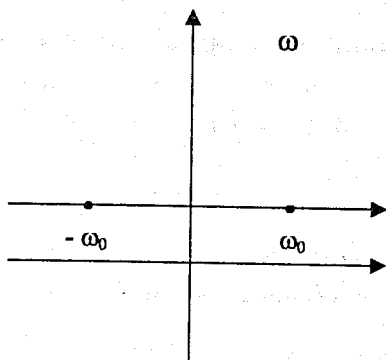


Рис. 4

$$D^{adv}(\tau) = -\vartheta(-\tau) \frac{\sin\omega_0\tau}{\omega_0}$$

– опережающую (advanced) функцию Грина, которая отлична от нуля только для отрицательных аргументов, т.е. приводит к частному решению, зависящему в некоторый момент времени от действия силы в ”последующие моменты”. Поэтому опережающая функция Грина находит применение в таких задачах, в которых конечные условия предписываются в момент  $t \rightarrow +\infty$ . Как и ранее, сдвигающая полюса вверх, для фурье-образа опережающей функции Грина имеем

$$\tilde{D}^{adv}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\epsilon\omega}.$$

### 3. $D$ -функция Паули

По определению  $D$ -функция Паули

$$D(\tau) = \frac{\sin \omega_0 \tau}{\omega_0} = D^{ret}(\tau) - D^{adv}(\tau).$$

Линейность преобразования Фурье позволяет заключить, что аналогичное соотношение должно существовать и между фурье-образами:

$$\tilde{D}(\omega) = \tilde{D}^{ret}(\omega) - \tilde{D}^{adv}(\omega) = 2\pi i \cdot \text{sgn } \omega \cdot \delta(\omega^2 - \omega_0^2).$$

В последнем соотношении использовано определение знаковой функции

$$\text{sgn } \omega = \frac{\omega}{|\omega|}$$

и одно полезное символическое представление  $\delta$ -функции

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}.$$

### 4. Задача Коши

Пусть начальные условия заданы в некоторый конечный момент  $t = t_0$ . В этом случае удобной функцией Грина будет следующая:

$$G(t, \hat{t} | t_0) = [\vartheta(t - \hat{t}) - \vartheta(t_0 - \hat{t})]D(t - \hat{t}),$$

производная которой

$$\dot{G}(t, \hat{t} | t_0) = [\vartheta(t - \hat{t}) - \vartheta(t_0 - \hat{t})]\cos\omega_0(t - \hat{t}) + \delta(t - \hat{t})D(t - \hat{t}).$$



(Напомним, что  $\delta(\tau) = d\vartheta(\tau)/d\tau$ .)

Ясно, что при  $t = t_0$  как  $G(t, \dot{t} | t_0)$ , так и  $\dot{G}(t, \dot{t} | t_0)$  обращаются в ноль. Тогда общее решение уравнения (1) запишется в виде

$$x(t) = x_0(t) + \int G(t, \dot{t} | t_0) F(\dot{t}) d\dot{t}, \quad (8)$$

где  $x_0(t)$  – решение однородного уравнения. С учетом вышесказанного при  $t = t_0$  из соотношения (8) следует

$$t = t_0, \quad x(t) = x_0(t), \quad \dot{x}(t) = \dot{x}_0(t).$$

Допустим, поставлена задача Коши, т.е. при

$$t = t_0 \quad x(t) |_{t=t_0} = f_1, \quad \dot{x}(t) |_{t=t_0} = f_2.$$

Для того чтобы получить ее решение, заметим, что при  $t = t_0$  функция Паули и ее производные обладают следующими свойствами:

$$D(t - t_0) |_{t=t_0} = 0, \quad \dot{D}(t - t_0) |_{t=t_0} = 1, \quad \ddot{D}(t - t_0) |_{t=t_0} = 0.$$

Поэтому

$$x_0(t) = f_1 \cdot \dot{D}(t - t_0) + f_2 \cdot D(t - t_0),$$

и общее решение задачи Коши уравнения (1) запишется в виде

$$x(t) = f_1 \cdot \dot{D}(t - t_0) + f_2 \cdot D(t - t_0) + \int G(t, \dot{t} | t_0) F(\dot{t}) d\dot{t}.$$

## 5. Причинная функция Грина

Для полноты введем причинную функцию Грина, которая обычно используется при решении задач рассеяния в квантовой механике. Контур интегрирования выбирается так, чтобы обойти отрицательный полюс снизу, а положительный сверху (см. рис. 5). Такой обход эквивалентен смещению полюсов в точки  $-(\omega_0 - i\epsilon)$ ,  $+(\omega_0 - i\epsilon)$ , что для фурье-образа причинной функции Грина приводит к

$$\tilde{D}^c = -\frac{1}{[\omega - (\omega_0 - i\epsilon)][\omega + (\omega_0 - i\epsilon)]} = -\frac{1}{\omega^2 - (\omega_0 - i\epsilon)^2}.$$

Вычисление соответствующего интеграла дает

$$D^c(\tau) = \frac{i}{2\omega_0} \left[ \theta(\tau) e^{-i\omega_0\tau} + \theta(-\tau) e^{i\omega_0\tau} \right] = \frac{i}{2\omega_0} e^{-i\omega_0|\tau|},$$

причем

$$\text{Re} D^c(\tau) = \frac{\sin \omega_0 |\tau|}{2\omega_0}.$$

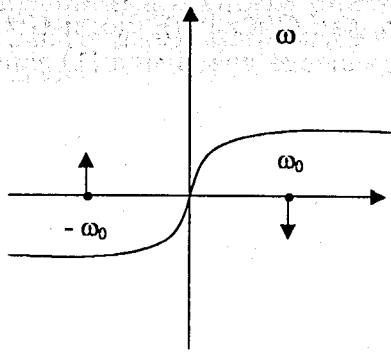


Рис. 5

**Дополнение 1. Вычеты. Теорема о вычетах.** Вычет однозначной аналитической функции  $f(z)$  в изолированной особой точке  $z_0$  — это комплексное число, равное значению интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz,$$

взятого в положительном направлении по окружности достаточно малого радиуса  $\gamma = \{|z - z_0| = r\}$  с центром в изолированной особой точке  $z_0$  этой функции. Обозначают вычет символом

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z).$$

- Если при  $z = z_0$  полюс  $f(z)$  — простой (первого порядка), то вычет

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0) f(z)].$$

- Если  $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$ , где  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  — аналитические функции, причем  $\varphi(z_0) \neq 0$ , а для  $\psi(z)$  точка  $z = z_0$  — нуль первого порядка (т.е.  $\psi'(z_0) \neq 0$ ), то вычет в этом полюсе первого порядка

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

- В полюсе порядка  $m$  вычет вычисляется по формуле

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} [(z - z_0)^m \cdot f(z)].$$

**Изолированная особая точка** – это такая особая точка аналитической функции, для которой существует окрестность без других особых точек.

**Полюс функции** – изолированная особая точка  $z_0$  аналитической функции  $f(z)$  комплексной переменной  $z$ , в окрестности которой выполняется предельное соотношение

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty.$$

Если  $z_0$  есть полюс  $f(z)$ , то эта же точка есть нуль функции  $1/f(z)$ , причем порядок полюса  $f(z)$  совпадает с порядком нуля для  $1/f(z)$ . Полюс порядка  $m = 1$  называется простым, а при  $m > 1$  –  $m$ -кратным.

**Теорема о вычетах.** Пусть однозначная функция  $f(z)$  аналитична в области  $D$ , за исключением конечного числа изолированных особых точек, а простая замкнутая кривая (замкнутый контур)  $C$  вместе со своей внутренностью принадлежит области  $D$ , содержит внутри себя конечное число особых точек  $z_1, z_2, \dots, z_n$  функции  $f(z)$  и не проходит ни через одну из них. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z).$$

Определенный интеграл от действительной функции

$$\int_a^b f(x) dx$$

часто вычисляют, рассматривая его как часть комплексного контурного интеграла

$$\int_C f(z) dz,$$

при условии что контур  $C$  включает интервал действительной оси  $(a, b)$ .

При вычислении интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

можно применить формулу теоремы о вычетах к контуру  $C$ , состоящему из интервала  $(-R, +R)$  действительной оси и дуги  $C_R$  окружности  $|z| = R$ . При этом в следующих случаях интегралы по дуге  $C_R$  при  $R \rightarrow \infty$  оказываются равными нулю.

1. Если  $f(z)$  аналитична при  $|z| > R_0$  и  $zf(z)$  стремится к нулю при  $z \rightarrow \infty$ , когда мнимая часть комплексной переменной  $z$  неотрицательна, то

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

Заметим, что  $zf(z)$  стремится к нулю при больших  $|z|$ , если

$$|f(z)| < \frac{\text{const}}{|z|^{1+\alpha}},$$

где  $\alpha > 0$ .

2. **Лемма Жордана.** Если функция  $F(z)$  всюду аналитична, за возможным исключением конечного числа полюсов, и стремится к нулю при  $|z| \rightarrow \infty$ , когда мнимая часть комплексной переменной  $z$  неотрицательна, то для любого действительного положительного числа  $m$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} F(u) e^{imu} du = 0.$$

## II. Граничные задачи электростатики

1. Электростатические явления характеризуются постоянством во времени всех полевых переменных ( $\partial/\partial t = 0$ ) и отсутствием движения зарядов ( $\vec{j} = 0$ ). Уравнения Максвелла в этом случае распадаются на две независимые пары, одна из которых

$$\text{rot} \vec{H} = 0, \quad \text{div} \vec{H} = 0$$

отражает очевидный ( $\vec{j} = 0$ ) факт отсутствия магнитного поля. Электрическое поле определяется другой парой

$$\text{rot} \vec{E} = 0, \tag{9}$$

$$\text{div} \vec{E} = 4\pi\rho. \tag{10}$$

Второе из этих уравнений является другой формой записи закона взаимодействия зарядов ( $f \sim 1/r^2$ ), а первое отражает факт потенциальности электростатического поля. Потенциал  $\varphi$  вводится соотношением

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi,$$

которое автоматически удовлетворяет уравнению (9), а уравнение (10) приводит к уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \tag{11}$$

Как и следовало ожидать, электростатический потенциал определен с точностью до постоянной

$$\varphi = \dot{\varphi} + const,$$

как  $\varphi$ , так и  $\dot{\varphi}$  приводят к одному и тому же значению напряженности электрического поля. Обычно эта неоднозначность используется для того, чтобы удовлетворить физическому требованию исчезновения полей на бесконечности. Другими словами, в случае, когда рассматривается система неподвижных зарядов, расположенных в конечной области пространства, внутри которой выбирают обычно начало координат, в качестве граничного условия на решение уравнения Пуассона принимают

$$\varphi|_{r \rightarrow \infty} \sim O(1/r). \quad (12)$$

(Здесь уместно подчеркнуть, что систему любой конфигурации на достаточно большом удалении можно рассматривать как сферически-симметричную.) Итак, решения уравнения Пуассона (11) должны удовлетворять граничному условию (12) и лишь в особых частных случаях, продиктованных постановкой задачи, граничное условие выбирают иначе.

2. Найдем решение уравнения Пуассона с граничным условием (12). Представим для этого  $\varphi$  и  $\rho$  в виде фурье-разложений:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{\varphi}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}, \quad \rho(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{\rho}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}.$$

Подставив эти разложения в (11), получим

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{\varphi}(\vec{k}) \Delta \left( e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right) d\vec{k} = -\frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int \tilde{\rho}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k},$$

откуда

$$\tilde{\varphi}(\vec{k}) = \frac{4\pi}{k^2} \tilde{\rho}(\vec{k}) \implies$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\vec{k}\vec{r}} \left( \frac{4\pi}{k^2} \tilde{\rho}(\vec{k}) \right) d\vec{k} = \frac{1}{2\pi^2} \int \rho(\vec{r}') d\vec{r}' \int e^{-i\vec{k}\vec{R}} \frac{d\vec{k}}{k^2}.$$

(Последнее равенство получено подстановкой фурье-образа  $\tilde{\rho}(\vec{k})$  в подынтегральное выражение.) Введем угол  $\theta$  между  $\vec{k}$  и  $\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}'$ ,

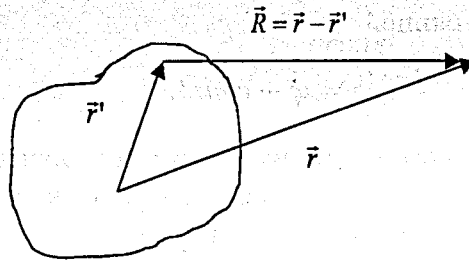


Рис. 6

тогда

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{2\pi^2} \int \rho(\vec{r}') d\vec{r}' \int e^{-ikR \cos\theta} \sin\theta d\theta d\psi dk = \\ &= \frac{2}{\pi} \int \rho(\vec{r}') d\vec{r}' \int \frac{\sin(kR)}{kR} dk = \frac{2}{\pi} \int \rho(\vec{r}') \frac{d\vec{r}'}{R} \int \frac{\sin x}{x} dx = \int \frac{\rho(\vec{r}') d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \end{aligned}$$

(Вычисление интегралов по  $\theta$  и  $k$  вынесено в дополнение 2.) Итак,

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}') d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (13)$$

Для дискретного распределения зарядов

$$\rho(r) = \sum e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \implies \varphi(\vec{r}) = \sum \int \frac{e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum \frac{e_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}.$$

Попутно получено одно полезное соотношение: для точечного заряда, расположенного в точке  $\vec{r}_0$ , имеем  $\varphi(\vec{r}) = e/|\vec{r} - \vec{r}_0|$ . С другой стороны,  $\Delta\varphi = -4\pi e\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ , поэтому

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_0). \quad (14)$$

(В дополнении 3 соотношение (14) выводится исходя из других соображений.)

3. Представим уравнение Пуассона в виде интегрального уравнения, воспользовавшись для этого теоремой Грина (вывод см. в дополнении 4):

$$\int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV = \oint_S \left[ \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] dS. \quad (15)$$

Выберем функцию  $\varphi$  тождественной скалярному потенциалу, который удовлетворяет уравнению Пуассона (11), а  $\psi = 1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ ; где  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки наблюдения,  $\vec{r}'$  – переменная интегрирования. Учитывая (14), перепишем теорему Грина для  $\varphi$  и  $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ :

$$\int_{\dot{V}} \left[ -4\pi\varphi(\vec{r}')\delta(\vec{r} - \vec{r}') + \frac{4\pi\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] d\dot{V} =$$

$$\oint_S \left[ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] dS$$

или

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\dot{V}} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\dot{V} + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dS, \quad (16)$$

здесь  $\partial/\partial n$  – производная по направлению внешней нормали к поверхности  $S$ , охватывающей объем  $\dot{V}$ . Если удалить поверхность  $S$  в бесконечность и считать, что электрическое поле убывает на ней быстрее чем  $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ , то поверхностный интеграл обращается в нуль и (16) превращается в уже известное выражение (13). Интересно отметить, что если в объеме интегрирования нет зарядов, то потенциал в любой точке внутри этого объема согласно (16) выражается только через значение потенциала и его нормальной производной на поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем.

4. **Формальное решение граничных задач электростатики с помощью функций Грина.** Решение уравнения Пуассона (11) в конечном объеме  $\dot{V}$ , на ограничивающей поверхности которого заданы граничные условия, можно получить, используя соответствующую функцию Грина, определяемую решением уравнения

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (17)$$

Учитывая соотношение (14) для  $G(\vec{r}, \vec{r}')$ , получим

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + F(\vec{r}, \vec{r}'), \quad \Delta F(\vec{r}, \vec{r}') = 0. \quad (18)$$

Выберем  $\psi$  в теореме Грина так, чтобы  $\psi = G(\vec{r}, \vec{r}')$ , тогда

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\dot{V}} \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') d\dot{V} + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[ G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} \right] dS \quad (19)$$

обобщает интегральную форму уравнения Пуассона (16) в том смысле, что позволяет, пользуясь свободой в определении функции Грина, оставить в поверхностном интеграле те граничные значения, которые соответствуют постановке физической задачи. Вопрос в том, при каких граничных условиях внутри конечного объема существует единственное и физически разумное решение уравнения Пуассона (или Лапласа). На основании экспериментальных данных можно полагать, что задание потенциала на замкнутой поверхности единственным образом определяет его распределение по объему. Это так называемая **задача Дирихле**, или **граничные условия Дирихле**. Аналогично можно ожидать, что задание электрического поля, т.е. нормальной производной от потенциала на граничной поверхности, также однозначно определяет решение. Такие граничные условия называют **задачей Неймана** или **граничными условиями Неймана**. В дополнении 5 доказывается единственность решения уравнения Пуассона в объеме  $V$  при граничных условиях Дирихле или Неймана, заданных на поверхности  $S$ , ограничивающей этот объем. Сказанное служит достаточным основанием для того, чтобы считать, что уравнение Пуассона не имеет решений, которые допускают заданные значения потенциала и его производной в направлении нормали к ограничивающей рассматриваемый объем замкнутой поверхности. (Одновременное задание  $\varphi$  и  $d\varphi/dn$  на  $S$  составляет **граничные условия Коши**, а вместе с уравнением — **задачу Коши**.) Действительно, как условия Дирихле, так и условия Неймана в отдельности определяют решение уравнения Пуассона (или Лапласа) единственным образом и эти решения в общем случае не совпадают.

Таким образом, электростатические задачи имеют однозначное решение при задании граничных условий Дирихле или Неймана на замкнутой поверхности, ограничивающей объем, в котором находятся заряды, причем эта поверхность частично или вся может находиться в бесконечности. Условия Коши в электростатике оказываются избыточными, а задача — переопределенной.

Вернемся к выражению (19), определяющему потенциал  $\varphi(\vec{r})$ , с тем чтобы отразить в поверхностном интеграле граничные условия. В задаче Дирихле потребуем выполнения условия

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \text{ для всех } \vec{r}' \text{ на } S,$$

тогда решение задачи с граничными условиями Дирихле записыва-



ется в виде

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V \rho(\vec{r}') G_D(\vec{r}, \vec{r}') dV - \frac{1}{4\pi} \oint_S \varphi(\vec{r}') \frac{\partial G_D}{\partial n} dS. \quad (19a)$$

Если постановка задачи требует использования граничных условий Неймана, то надо потребовать, чтобы

$$\frac{\partial G_N(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} = \frac{4\pi}{\sigma} \text{ для всех } \vec{r}' \text{ на } S,$$

где  $\sigma$  - полная площадь граничной поверхности. Тогда решение задачи Неймана будет иметь вид

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V \rho(\vec{r}') G_N(\vec{r}, \vec{r}') dV + \frac{1}{4\pi} \oint_S G_N \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \quad (19b)$$

Функция Грина, удовлетворяющая граничным условиям Дирихле или Неймана, подчиняется условию взаимности

$$G(x, \acute{x}) = G(\acute{x}, x).$$

144075  
Это свойство симметрии отражает физический факт возможности перестановки источника и точки наблюдения (напомним, что функция Грина, если рассматривать ее как функцию одной из переменных, описывает потенциал единичного точечного источника - заряда). Доказательство соотношения взаимности приводится в дополнении 6. Заметим, что определенная соотношением (18) функция  $F(\vec{r}, \vec{r}')$  также должна быть симметричной функцией своих аргументов. Функция  $F(\vec{r}, \vec{r}')$  имеет прозрачный физический смысл - это решение уравнения Лапласа внутри объема  $V$  - и, следовательно, описывает потенциал системы зарядов, расположенных вне этого объема. В частности,  $F(\vec{r}, \vec{r}')$  можно представить себе как потенциал такого внешнего распределения зарядов, которое вместе с точечным единичным зарядом, расположенным в точке  $\vec{r}'$ , удовлетворяет на поверхности  $S$  граничному условию Дирихле или Неймана.

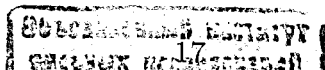
## • Дополнение 2

### 1. Подсчет интеграла

$$I_1 = \int_0^\pi e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|\cos\theta} \sin\theta d\theta.$$

Введем  $t = -\cos\theta$  и  $a = k|\vec{r}-\vec{r}'|$ , тогда

$$I_1 = \int_{-1}^{+1} e^{iat} dt = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{ia} = \frac{2\sin a}{a}.$$



## 2. Подсчет интеграла

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Введем вспомогательный интеграл

$$Y(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx, \text{ здесь } \alpha > 0;$$

$$\begin{aligned} \frac{dY(\alpha)}{d\alpha} &= - \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx = -Im \int_0^{\infty} e^{(i-\alpha)x} dx = \\ &= -Im \left. \frac{e^{ix} e^{-\alpha x}}{i-\alpha} \right|_0^{\infty} = Im \frac{1}{i-\alpha} = Im \frac{i+\alpha}{-1-\alpha^2} = -\frac{1}{1+\alpha^2}, \end{aligned}$$

$$Y(\alpha) = - \int \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} + C = -\arctg \alpha + C.$$

В пределе при  $\alpha \rightarrow \infty$  имеем  $Y(\alpha) = 0$ , поэтому

$$Y(\infty) = -\frac{\pi}{2} + C = 0, \text{ т.е. } C = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом,

$$Y(0) = I_2 = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

### • Дополнение 3. Доказательство соотношения

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\vec{r}),$$

$$\frac{1}{r} = \int c(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}; \quad c(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{r} e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r}.$$

Направим полярную ось по вектору  $\vec{k}$  и проинтегрируем по азимутальному углу  $\varphi$ , тогда

$$\begin{aligned} c(\vec{k}) &= \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} \frac{r^2 dr}{r} \int_0^{\pi} e^{-ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{r^2 dr}{ikr \cdot r} \int_0^{\pi} e^{-ikr \cos \theta} d(ikr \cos \theta) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{ik} \int_0^{\infty} (e^{ikr} - e^{-ikr}) dr = \frac{i}{k} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} (e^{-ikr} - e^{ikr}) dr. \end{aligned}$$

Подсчитаем вспомогательный интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha r} (e^{-ikr} - e^{ikr}) dr$$

с последующим устремлением  $\alpha$  к нулю:

$$\int_0^{\infty} (e^{(-\alpha-ik)r} - e^{(ik-\alpha)r}) dr = \frac{e^{(-\alpha-ik)r}}{-\alpha-ik} \Big|_0^{\infty} - \frac{e^{(-\alpha+ik)r}}{-\alpha+ik} \Big|_0^{\infty} =$$

$$\frac{1}{ik+\alpha} + \frac{1}{ik-\alpha}.$$

Устремив  $\alpha$  к нулю, получим

$$c(\vec{k}) = \frac{2}{k^2} \frac{1}{(2\pi)^2}.$$

Тогда

$$\frac{1}{r} = \frac{2}{(2\pi)^2} \int \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}}{k^2},$$

а

$$\Delta \frac{1}{r} = -\frac{2}{(2\pi)^2} \int e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}.$$

Одно из представлений  $\delta$ -функции

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k} \implies \Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\vec{r}).$$

• Дополнение 4. Формулы Грина. В формуле Гаусса

$$\int_V \operatorname{div} \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} d\vec{S} = \oint_S \vec{A} \vec{n} dS.$$

положим  $\vec{A} = \varphi \operatorname{grad} \psi$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  – произвольные скалярные функции. Ввиду того что

$$\operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \psi) = \varphi \Delta \psi + \nabla \varphi \nabla \psi, \quad \vec{n}(\varphi \operatorname{grad} \psi) = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n},$$

где  $\partial/\partial n$  – производная по направлению внешней нормали к поверхности  $S$ , охватывающей объем интегрирования  $V$ , формула Гаусса переписется следующим образом:

$$\int_V (\varphi \Delta \psi + \nabla \varphi \nabla \psi) dV = \oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS.$$

Это соотношение известно как первая формула Грина. Поменяем местами  $\varphi$  и  $\psi$ , получится аналогичная формула, вычитая ее из исходной, получим

$$\int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV = \oint_S \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS$$

– так называемую теорему Грина.

- **Дополнение 5.** Докажем единственность решения задач Дирихле и Неймана (решения уравнения Пуассона  $\Delta \varphi = -4\pi\rho$  с граничными условиями Дирихле или Неймана на поверхности  $S$ , ограничивающей объем  $V$ , содержащий заряды плотностью  $\rho$ ).

Предположим, существует два решения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  уравнения Пуассона, которые подчиняются одним и тем же граничным условиям. Введем

$$u = \varphi_2 - \varphi_1,$$

тогда внутри объема  $V$  функция  $u$  подчиняется уравнению  $\Delta u = 0$ ; а на граничной поверхности согласно условиям Дирихле или Неймана  $u = 0$  или  $\partial u / \partial n = 0$  соответственно. Полагая в первой формуле Грина  $\varphi = \psi = u$ , имеем

$$\int_V (u \Delta u + |\text{grad } u|^2) dV = \oint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

Учитывая оба граничных условия на  $u$ , получим

$$\int_V |\text{grad } u|^2 dV = 0 \implies \text{grad } u = 0.$$

Таким образом, внутри объема  $u = \text{const}$ . В случае граничных условий Дирихле на границе  $u = 0$ , поэтому везде внутри объема  $\varphi_1 = \varphi_2$  и решение единственно. В случае граничных условий Неймана решение единственно с точностью до несущественной аддитивной постоянной. Легко понять, что доказательство единственности решения электростатических задач Дирихле и Неймана можно распространить на случай смешанной задачи, когда на одной части граничной поверхности заданы условия Дирихле, а на другой – условия Неймана. Иначе говоря, смешанная электростатическая задача (Дирихле + Неймана) тоже имеет единственное решение.

- **Дополнение 6.** Докажем соотношение взаимности для функции Грина. Выберем в теореме Грина  $\varphi = G(\vec{r}, \vec{R})$ ,  $\psi = G(\vec{r}', \vec{R})$  и  $\vec{R}$  в качестве переменной интегрирования, тогда

$$\int_V [G(\vec{r}, \vec{R}) \Delta G(\vec{r}', \vec{R}) - G(\vec{r}', \vec{R}) \Delta G(\vec{r}, \vec{R})] dV =$$

$$\oint_S \left( G(\vec{r}, \vec{R}) \frac{\partial G(\vec{r}', \vec{R})}{\partial n} - G(\vec{r}', \vec{R}) \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{R})}{\partial n} \right) dS,$$

и если  $G(\vec{r}, \vec{R})$  и  $G(\vec{r}', \vec{R})$  удовлетворяют условиям Дирихле или Неймана, то, учитывая (16), получим

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}', \vec{r}).$$

- **Дополнение 7.** Ряд и интеграл Фурье. Фурье-преобразование. Ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$$

назовем **рядом Фурье** функции  $f(x)$  по ортонормированной на промежутке  $(a, b)$  системе функций  $\{\varphi_k(x)\}$ . Коэффициенты

$$c_k = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx$$

называются коэффициентами Фурье функции  $f(x)$ . Предполагается, что функция  $f(x)$  интегрируема вместе со своим квадратом на  $(a, b)$ .

Ряд Фурье по тригонометрической системе для каждой функции  $f(x)$ , интегрируемой на  $(0, 2\pi)$ , определяется следующим образом:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx,$$

$$c_k = c_{-k} = \frac{1}{2} (a_k - ib_k).$$

Если функция  $f(x)$  имеет период  $2T$ , то ее разложение в ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{\pi k x}{T} + b_n \sin \frac{\pi k x}{T} \right) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi k x / T},$$

где

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \cos \frac{\pi n x}{T} dx, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \sin \frac{\pi n x}{T} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Коэффициенты Фурье связаны с функцией  $f(x)$  равенством Парсеваля

$$\frac{1}{T} \int_{-T}^T |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

**Интеграл Фурье** представляет собой разложение непериодической функции по гармоническим компонентам, частоты которых пробегают непрерывную совокупность значений. Если  $f(x)$  абсолютно интегрируема на каждом конечном отрезке и если сходится

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx,$$

то

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iu(x-t)} f(t) dt$$

или

$$f(x) = \int_0^{\infty} [a(u) \cos(ux) + b(u) \sin(ux)] du,$$

где

$$a(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(ut) dt, \quad b(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(ut) dt.$$

Иногда интеграл Фурье удобно представить в виде

$$f(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\sin(\lambda(x-t))}{x-t} dt.$$

**Фурье-преобразование** (ф.п.) заданной функции  $f(x)$  — это функция  $g(k)$ , которая выражается через  $f(x)$  согласно

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

и является разновидностью интегральных преобразований.

Если  $f(x)$  – четная функция, то

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(kx) dx.$$

Если же  $f(x)$  – нечетная функция, то

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin(kx) dx.$$

Вообще говоря, все вышеприведенные формулы обратимы:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{ikx} dk,$$

точно так же

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} g(k) \cos(kx) dk \quad \text{для четных } f(x);$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} g(k) \sin(kx) dk \quad \text{для нечетных } f(x).$$

Каждой операции над функциями соответствует операция над ее ф.п., которая во многих случаях проще соответствующей операции над  $f(x)$ . Например,

$$\frac{df}{dx} = ikf(x).$$

Если существует

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx, \quad \text{то} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(k)|^2 dk$$

– теорема Планшереля (обобщение равенства Парсеваля на ф.п.).

Отображение  $F : f(x) \mapsto g(k)$  является унитарным оператором в гильбертовом пространстве функций  $f(x)$  для любых  $x$ .

## ДИПОЛЬНЫЙ И КВАДРУПОЛЬНЫЙ МОМЕНТЫ СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ

Потенциал системы неподвижных зарядов, распределенных по объему  $V$  с плотностью  $\rho(\vec{r})$ , определяется решением уравнения Пуассона:

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{или} \quad \varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{e_i}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|}$$

( $\vec{r}$  — радиус-вектор точки наблюдения,  $\vec{r}'_i$  — радиус-вектор  $i$ -го заряда). Если число зарядов системы велико, то сумма содержит большое число слагаемых и формула становится малоприменимой для практических расчетов. Значительного упрощения удается достичь на расстояниях, намного превышающих собственную протяженность системы зарядов:

$$|\vec{r}| \gg |\vec{r}'_i|, \quad \vec{R} = |\vec{r} - \vec{r}'_i|, \quad \vec{r} = (x_\alpha), \quad \vec{r}'_i = (x'_{i\alpha}), \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|} = 1 / \sqrt{\sum_\alpha (x_\alpha - x'_{i\alpha})^2},$$

поэтому

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \sum_\alpha x'_{i\alpha} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{1}{r} \right\} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} x'_{i\alpha} x'_{i\beta} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r} \right\} + \dots$$

Это разложение позволяет представить потенциал в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots, \quad \text{где} \quad \varphi_0 = \frac{\sum e_i}{r}, \quad \varphi_1 = - \sum_\alpha \left( \sum_i e_i x'_{i\alpha} \right) \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{1}{r} \right\},$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \left( \sum_i e_i x'_{i\alpha} x'_{i\beta} \right) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r} \right\}.$$

Заметим, что два последовательных члена разложения относятся друг к другу как линейный размер системы зарядов к расстоянию до точки наблюдения.

Для электронейтральной системы ( $\sum e_i = 0$ ) разложение начинается с  $\varphi_1$ :

$$\varphi_1 = - \sum e_i \vec{r}'_i \nabla \frac{1}{r} = - \vec{d} \cdot \text{grad} \frac{1}{r} = \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3},$$

где

$$\vec{d} = \sum e_i \vec{r}'_i \iff \vec{d} = \int \rho' \vec{r}' dV'$$



– вектор дипольного момента системы.

Для электронейтральной системы дипольный момент не зависит от выбора начала координат. Действительно, сместив начало координат на  $\vec{a}$ , т.е.  $\vec{r}'_i = \vec{r}_i + \vec{a}$ , получим  $\vec{d} = \sum e_i \vec{r}'_i = \sum e_i \vec{r}_i + \vec{a} \sum e_i$ , и если  $\sum e_i = 0$ , то  $\vec{d} = \vec{d}$ .

Для двух равных зарядов с противоположными знаками

$$\vec{d} = e_1 \vec{r}_1 + e_2 \vec{r}_2 = |e| (\vec{r}_1 - \vec{r}_2).$$

Вычислим напряженность электрического поля:

$$\vec{E} = -grad \varphi \approx -grad \varphi_1 = -grad \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3} = -\frac{\vec{d}}{r^3} + \frac{3\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{d})}{r^5}.$$

Введем единичный вектор  $\vec{n} = \vec{r}/r$ , тогда

$$\varphi = \frac{\vec{d} \cdot \vec{n}}{r^2} = \frac{d \cdot \cos \theta}{r^2}, \quad \theta - \text{угол между } \vec{d} \text{ и } \vec{r},$$

$$\vec{E} = \frac{3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{d}) - \vec{d}}{r^3}.$$

Выражение для напряженности электрического поля аксиально-симметрично относительно  $\vec{d}$ . Направим ось  $z$  по  $\vec{d}$ , тогда в плоскости, содержащей эту ось,

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{2d \cdot \cos \theta}{r^3}, \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{d \cdot \sin \theta}{r^3}.$$

Если дипольный момент электронейтральной системы равен нулю (например, для квадрупольной – двух одинаковых по величине, но противоположно направленных диполей, находящихся бесконечно близко друг от друга), то  $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$  и

$$\varphi \approx \varphi_2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \left( \sum_i e_i x_{i\alpha} x_{i\beta} \right) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r} \right\}.$$

Имея в виду, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r} &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{1}{\sqrt{\sum x_\beta^2}} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{x_\beta}{r^3} = -\frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3} + \frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5} = \\ &= \frac{3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}}{r^5}, \end{aligned}$$

а также что

$$\Delta \frac{1}{r} = \sum_{\alpha, \beta} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r} = 0$$

(т.к.  $r$  – не равное нулю и конечное расстояние до точки наблюдения), добавив этот нуль в выражение для  $\varphi_2$ , найдем

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \left[ \sum_i e_i \left( x'_{i\alpha} x'_{i\beta} - \frac{r_i'^2}{3} \delta_{\alpha\beta} \right) \right] \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r} =$$

$$\frac{1}{6} \sum_{\alpha, \beta} D_{\alpha\beta} \left( \frac{3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}}{r^5} \right),$$

где

$$D_{\alpha\beta} = \sum_i e_i \left( 3x'_{i\alpha} x'_{i\beta} - r_i'^2 \delta_{\alpha\beta} \right)$$

– тензор квадрупольного момента системы. По определению  $D_{\alpha\beta}$  – симметричный тензор, а сумма его диагональных элементов равна нулю. Это означает, что квадрупольный момент в общем случае определяется 5-ю функциями, которые зависят только от расположения и величины зарядов системы. Кроме того, т.к.  $\sum D_{\alpha\alpha} = 0$ ,

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \frac{D_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta}{r^5} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \frac{D_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}{r^3},$$

где  $n_\alpha = x_\alpha / r$  – единичный вектор в направлении  $x_\alpha$ .

Как и всякий симметричный тензор 2-го ранга,  $D_{\alpha\beta}$  может быть приведен к главным осям, для чего перейдем к новому набору координат, требуя, чтобы в новых координатах недиагональные компоненты  $D_{\alpha\beta}$  обратились в нуль. В результате получим

$$D_{11} = \sum e_i (2x_{i1}^2 - x_{i2}^2 - x_{i3}^2),$$

$$D_{22} = \sum e_i (2x_{i2}^2 - x_{i1}^2 - x_{i3}^2),$$

$$D_{33} = \sum e_i (2x_{i3}^2 - x_{i1}^2 - x_{i2}^2).$$

Очевидно,

$$D_{33} = -(D_{11} + D_{22}).$$

Допустим, что рассматриваемая система зарядов обладает аксиальной симметрией. Если выбрать в качестве оси симметрии  $z = x_3$ , то  $\sum e_i x_{i1}^2 = \sum e_i x_{i2}^2$  и

$$D_{33} = 2 \sum e_i (x_{i3}^2 - x_{i1}^2) \equiv D,$$

$$D_{11} = \sum e_i(x_{i1}^2 - x_{i3}^2) = -\frac{D}{2},$$

$$D_{22} = \sum e_i(x_{i1}^2 - x_{i3}^2) = -\frac{D}{2}.$$

В этом случае

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \frac{D_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta}{r^5} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{D}{r^5} \left( \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} - x_3^2 \right) \right] =$$

$$-\frac{D}{4r^5} (r^2 - 3x_3^2) = \frac{D(3\cos^2\theta - 1)}{4r^3},$$

здесь  $\theta$  — угол между осью симметрии ( $z$ ) и  $r$ . Поле квадруполь убывает по закону  $\varphi_2 \sim 1/r^3$ , а  $|\vec{E}| \sim 1/r^4$ .

Было показано, что если система зарядов не электронейтральна, то величина дипольного момента зависит от выбора начала координат. Таким же свойством обладает квадрупольный момент (доказательство аналогично случаю дипольного момента). Для систем, полный заряд которых не равен нулю, обычно удобно поместить начало координат в центр зарядов системы:

$$\vec{R} = \frac{\sum e_i \vec{r}_i}{\sum e_i} = 0.$$

При этом дипольный момент системы автоматически становится равным нулю ( $\sum e_i \vec{r}_i = 0$ ) и разложение потенциала начинается с величины, содержащей квадрупольный момент. Наличие у системы зарядов квадрупольного момента позволяет судить о характере симметрии этой системы. В частности, характерным для аксиальной симметрии является рассмотренное выше распределение поля. Обнаружение квадрупольного момента у ряда ядер свидетельствует об отклонении их формы от сферической.

Итак, потенциал электростатического поля на расстояниях, много больших линейных размеров системы, создающих это поле зарядов, может быть представлен в виде

$$\varphi = \frac{\sum e_i}{r} + \frac{\vec{d} \cdot \vec{n}}{r^2} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \frac{D_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}{r^3} + \dots, \quad \vec{d} = \sum e_i \vec{r}_i,$$

$$D_{\alpha\beta} = \sum_i e_i (3x_{i\alpha} x_{i\beta} - r_i^2 \delta_{\alpha\beta}).$$

# ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ. ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Энергия электростатического поля, созданного системой зарядов,

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV.$$

Подставив  $E = -\text{grad } \varphi$ , получим

$$U = -\frac{1}{8\pi} \int \vec{E} \cdot \text{grad } \varphi dV = \frac{1}{8\pi} \int \varphi \cdot \text{div } \vec{E} dV - \frac{1}{8\pi} \int \text{div}(\vec{E} \cdot \varphi) dV = \\ \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV - \frac{1}{8\pi} \oint \vec{E} \cdot \varphi d\vec{S}.$$

Поверхностный интеграл исчезает на бесконечности, поэтому окончательно

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \cdot \varphi dV,$$

или, учитывая  $\int \rho dV = \sum e_a$ , получим

$$U = \frac{1}{2} \sum e_a \varphi_a,$$

где  $\varphi_a$  – потенциал, созданный всеми зарядами в точке расположения заряда  $e_a$ .

Попробуем применить полученную формулу к одной заряженной частице, скажем электрону. Результат очевиден – электрон (подразумевается любая заряженная частица) обладает "собственной" потенциальной энергией  $e\varphi/2$ , где  $\varphi$  – потенциал, созданный электроном в месте своего расположения. Однако при  $r \rightarrow 0$   $\varphi \rightarrow \infty$  ( $\varphi = e/r$ ) и электрон должен обладать бесконечной собственной энергией и, следовательно, бесконечной массой. Таким образом, представление о заряженной частице как о точечном объекте приводит к физически бессмысленному результату – бесконечной собственной массе, с другой стороны, теория относительности не позволяет строить электродинамику протяженных объектов. Итак, на малых расстояниях  $r \rightarrow 0$  электродинамика становится внутренне противоречивой. Это противоречие можно разрешить, ограничивая применимость электродинамики определенными конечными расстояниями. Оценим это расстояние, считая собственную энергию электрона

( $\sim m_e c^2$ ) величиной того же порядка, что и собственная потенциальная энергия ( $e^2/R_0$ ), откуда

$$R_0 \sim \frac{e^2}{m_e c^2} \sim 10^{-13} \text{ см.}$$

$R_0$  называют **классическим радиусом электрона**. Согласно воззрениям классической электродинамики именно такими расстояниями ограничена ее применимость. В действительности из-за квантовых эффектов применимость классической электродинамики ограничена гораздо большими расстояниями ( $\hbar/m_e c \sim 10^{-8}$  см). Нет ничего удивительного в том, что электродинамика качественно устанавливает факт ограничения своей применимости на малых расстояниях, но количественная оценка оказывается ошибочной. Действительно, из общих соображений ясно, что установить границы применимости теории, не выходя за ее пределы, если и возможно, то весьма и весьма приближенно.

Теперь понятно, что из формулы

$$U = \frac{1}{2} \sum e_a \varphi_a$$

необходимо исключить не представляющую физического интереса собственную энергию, что достаточно просто – суммировать надо по всем частицам, создающим поле в данной точке, кроме находящейся в этой точке частицы, т.е.

$$\varphi_a = \sum_{b \neq a} \frac{e_b}{r_{ab}} \implies U = \frac{1}{2} \sum_{b \neq a} \frac{e_a e_b}{r_{ab}}, \text{ или } U = \frac{1}{2} \int \frac{\rho(r) \rho(r') dV dV'}{|r - r'|}.$$

Для двух зарядов  $U = e_1 e_2 / r_{12}$ , что лишний раз подтверждает необходимость наличия в формулах фактора  $1/2$ .

Пусть система зарядов, заключенная в некотором конечном объеме, помещена во внешнее электростатическое поле. Предположим, что

- внешнее поле много больше поля, созданного системой зарядов, поэтому полем зарядов можно пренебречь;
- внешнее поле квазиоднородно, т.е. внутри распределения зарядов его потенциал изменяется достаточно медленно.

По определению потенциала энергия заряда  $e_a$ , расположенного в точке  $\vec{r}_a$ , есть  $e_a \varphi(\vec{r}_a)$ , ясно, что полная энергия системы зарядов во внешнем поле с потенциалом  $\varphi$  будет

$$U = \sum e_a \varphi(\vec{r}_a).$$

Выберем начало координат внутри рассматриваемой системы зарядов и разложим медленно меняющуюся функцию  $\varphi(\vec{r}_a)$  в ряд вокруг начала координат:

$$\varphi(\vec{r}_a) = \varphi(0) + \sum_{\alpha} x_{\alpha} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\alpha}} \right)_0 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} x_{\alpha} x_{\beta} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \right)_0 + \dots$$

Соответственно,

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \dots, \quad U_0 = \varphi(0) \sum_{\alpha} e_{\alpha}, \quad U_1 = (\text{grad} \varphi)_0 \sum_{\alpha} e_{\alpha} \vec{r}_a,$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \left( \sum_i e_i x_{i\alpha} x_{i\beta} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \right)_0.$$

Для электронейтральной системы .

$$U_0 = 0, \quad U_1 = -\vec{E}(0) \cdot \vec{d} = -dE \cos \theta$$

( $\theta$  – угол между  $\vec{E}$  и  $\vec{d}$ ). В случае если  $\sum e_{\alpha} \neq 0$ , сила, действующая на систему,

$$\vec{F} = -\text{grad} U = \vec{E}(0) \sum e_{\alpha} + \text{grad}(\vec{E} \vec{d}) = e \vec{E} + (\vec{d} \cdot \nabla) \vec{E} \quad (\text{rot} \vec{E} = 0).$$

Если система электронейтральна, то в однородном поле ( $\vec{E} = \text{const}$ ) на систему зарядов с дипольным моментом  $\vec{d}$  никаких сил не действует. Силы появляются лишь в квазиоднородном поле.

Найдем законы взаимодействия заряд – диполь и диполь – диполь:

- заряд – диполь:

$$U = -\vec{E} \vec{d} = -\frac{e \vec{d} \vec{R}}{R^3},$$

здесь  $\vec{R}$  – радиус-вектор от точечного диполя (размеры системы зарядов считаем пренебрежимо малыми) к заряду.

- диполь ( $\vec{d}_1$ ) – диполь ( $\vec{d}_2$ ):

$$U = -\vec{d}_2 \vec{E}_1,$$

$\vec{E}_1$  – поле, созданное диполем  $\vec{d}_1$  в точке расположения  $\vec{d}_2$  (напомним, диполи точечные, т.е. их размеры пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием  $R$  между ними), поэтому

$$U = -\vec{d}_2 \vec{E}_1 = \frac{(\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2) R^2 - 3(\vec{d}_1 \vec{R})(\vec{d}_2 \vec{R})}{R^5}.$$

Если система электронейтральна и ее дипольный момент равен нулю, то

$$U \approx U_2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \left( \sum_i e_i x_{i\alpha} x_{i\beta} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right)_0.$$

Добавив к этому выражению нуль (потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа):

$$\sum \delta_{\alpha, \beta} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right)_0 = 0,$$

получим

$$U_2 = \frac{1}{6} \sum_{\alpha, \beta} D_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right)_0.$$

## КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Рассмотрим поле, созданное системой медленно (со скоростями  $v \ll c$ ) движущихся зарядов. Предположение о медленности движения зарядов означает, что конечностью скорости распространения электромагнитных возмущений можно пренебречь и приближенно считать, что поле в каждый момент времени определяется мгновенным положением зарядов. Будем считать также, что заряды сосредоточены в некоторой конечной области пространства, за пределы которой они не могут выйти. В этом случае движение зарядов может быть или периодическим, или квазипериодическим, поскольку за достаточно большое время заряды пройдут через последовательность тех же самых или довольно близких состояний. Назовем такое движение зарядов **квазистационарным**, а созданное ими поле — **квазистационарным полем**. Для того чтобы выписать систему уравнений Максвелла для квазистационарных полей, оценим по порядку величины все слагаемые максвелловских уравнений. Пусть  $T$  — характерный период квазистационарного движения зарядов, тогда

$$\left| \frac{\partial E}{\partial t} \right| \sim \frac{E}{T}, \quad \left| \frac{\partial H}{\partial t} \right| \sim \frac{H}{T},$$

здесь  $E$  и  $H$  — средние за период значения напряженностей электрического и магнитного полей. Будем полагать, что пространственные производные по разным координатам имеют одинаковый порядок:

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_k} \sim \frac{\partial E_k}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial H_i}{\partial x_k} \sim \frac{\partial H_k}{\partial x_i},$$

и если  $L$  – характерный линейный размер рассматриваемой системы, то

$$\frac{\partial E}{\partial x} \sim \frac{\partial E}{\partial y} \sim \frac{\partial E}{\partial z} \sim \frac{E}{L}, \quad \frac{\partial H}{\partial x} \sim \frac{\partial H}{\partial y} \sim \frac{\partial H}{\partial z} \sim \frac{H}{L}.$$

Так как  $v \ll c \implies L/T \ll c$ , поэтому если даже  $E \sim H$ , то

$$\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} \ll \frac{\partial E_i}{\partial x_k}, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} \ll \frac{\partial H_i}{\partial x_k}.$$

Таким образом, уравнения Максвелла для квазистационарных полей, созданных квазистационарным движением зарядов ( $v \ll c$  или  $T \gg L/c$ ), имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}; & \operatorname{div} \vec{H} &= 0; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= 0; & \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho. \end{aligned}$$

Заметим, что т.к. движение ограничено и имеет стационарный характер, то тот же результат можно получить усреднением по периоду.

Малость тока смещения по сравнению с током проводимости приводит к соленоидальному характеру линий тока:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \implies \operatorname{div} \vec{j} = 0,$$

что, как и должно было быть, совпадает с соотношением, следующим из уравнения непрерывности для квазистационарного движения. Таким образом, при квазистационарном движении зарядов внутри области движения каждая из линий тока замкнута сама на себя. Частицы не могут выйти из области движения, поэтому  $j_n = 0$ . Действительно,  $\operatorname{div} \vec{j} = 0 \implies \oint j_n dS = 0$ . Ясно также, что

$$\int \vec{j} dV = \int \vec{j} dS dl = \int j dS dl = \int \oint dY dl = \int dY \oint dl = 0,$$

где  $dS$  – сечение трубки,  $dl$  – элемент длины замкнутой на себя трубки тока.

Система уравнений Максвелла для квазистационарных явлений распадается на уравнения для независимых полей – магнитного поля токов и электрического поля зарядов, причем ясно, что решение уравнений для электрического поля таково, что в каждый момент времени квазистационарное электрическое поле совпадает с электростатическим полем данной конфигурации зарядов. Введем вектор-потенциал согласно

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}.$$



Понятно, что он будет удовлетворять уравнению Пуассона

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \text{причем} \quad \text{div} \vec{A} = 0.$$

(Последнее соотношение есть условие Лоренца для квазистационарных явлений.) Решение уравнения Пуассона вместе с вполне физически обоснованным граничным условием

$$A \sim 0 \left( \frac{1}{r} \right) \Big|_{r \rightarrow \infty} \mapsto 0$$

имеет вид

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{R}, \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'|.$$

Теперь нетрудно найти  $\vec{H}$  в точке наблюдения:

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \text{rot} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{R}.$$

Операция *rot* – дифференцирование по координатам точки наблюдения, поэтому, т.к.

$$\text{rot} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} = \left[ \text{grad} \frac{1}{R}, \vec{j} \right] = \frac{[\vec{j}, \vec{R}]}{R^3},$$

для напряженности квазистационарного магнитного поля получим

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \int \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), \vec{R}]}{R^3} dV', \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

– закон Био – Савара. Аналитически вычислить интеграл в этой формуле удастся лишь для некоторых простейших систем.

- Поле медленно ( $v_0 \ll c$ ) и равномерно движущегося заряда.

В этом случае

$$\rho(\vec{r}, t) = e \delta(\vec{r} - \vec{v}_0 t), \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = e \vec{v}_0 \delta(\vec{r} - \vec{v}_0 t),$$

$$\varphi = e \int \frac{\delta(\vec{r}' - \vec{v}_0 t) dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{e}{|\vec{r} - \vec{v}_0 t|},$$

$$\vec{E} = \frac{e(\vec{r} - \vec{v}_0 t)}{|\vec{r} - \vec{v}_0 t|^3},$$

$$\vec{H} = \frac{e}{c} \int \frac{[\vec{v}_0, \vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \delta(\vec{r}' - \vec{v}_0 t) dV' = \frac{e}{c} \frac{[\vec{v}_0, \vec{r} - \vec{v}_0 t]}{|\vec{r} - \vec{v}_0 t|^3} = \frac{1}{c} [\vec{v}_0, \vec{E}].$$

- Таким образом, для медленно и равномерно движущегося заряда
- 1) как и для неподвижного заряда, поле сферически-симметрично;
  - 2) точка с данным значением напряженности перемещается равномерно вместе с зарядом;
  - 3) электрическое поле формально совпадает с полем неподвижного заряда, но вместо фиксированного расстояния от точки наблюдения до заряда фигурирует переменное во времени  $|\vec{r} - \vec{v}_0 t|$ ;
  - 4) вектор  $\vec{H}$  перпендикулярен как  $\vec{E}$ , так и  $\vec{v}_0$  по порядку величины:

$$|\vec{H}| \sim \frac{v_0}{c} |\vec{E}| \implies |\vec{H}| \ll |\vec{E}|.$$

- Поле системы квазистационарно движущихся зарядов на больших расстояниях от системы. Как и в электростатике, подставив разложение

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r} - \dot{\vec{r}} \text{grad} \frac{1}{r}$$

в определяющую вектор-потенциал формулу

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{R},$$

получим

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}') dV' - \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}') (\dot{\vec{r}} \text{grad} \frac{1}{r}) dV' = -\frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}') (\dot{\vec{r}} \text{grad} \frac{1}{r}) dV'.$$

(В квазистационарном случае  $\int \vec{j}(\vec{r}') dV' = 0$ .) Воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned} j(\dot{\vec{r}}) (\dot{\vec{r}} \text{grad} \frac{1}{r}) &= \frac{1}{2} \left[ j(\dot{\vec{r}}) (\dot{\vec{r}} \text{grad} \frac{1}{r}) - \dot{\vec{r}} (j(\dot{\vec{r}}) \text{grad} \frac{1}{r}) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[ j(\dot{\vec{r}}) (\dot{\vec{r}} \text{grad} \frac{1}{r}) + \dot{\vec{r}} (j(\dot{\vec{r}}) \text{grad} \frac{1}{r}) \right] = \\ &- \left[ \dot{\vec{r}}, \vec{j} \right] \frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \left[ j(\dot{\vec{r}}) (\dot{\vec{r}} \text{grad} \frac{1}{r}) + \dot{\vec{r}} (j(\dot{\vec{r}}) \text{grad} \frac{1}{r}) \right]. \end{aligned}$$

Тогда

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2c} \int \frac{[\dot{\vec{r}}, \vec{j}] \vec{r}}{r^3} dV' - \frac{1}{2c} \int \left[ j(\dot{\vec{r}}) (\dot{\vec{r}} \text{grad} \frac{1}{r}) + \dot{\vec{r}} (j(\dot{\vec{r}}) \text{grad} \frac{1}{r}) \right] dV'.$$

Второй интеграл этого выражения обращается в нуль. Действительно, ввиду того, что  $\int \vec{j} dV' = dY d\vec{l} = dY d\vec{r}'$  ( $d\vec{r}'$  - изменение положения заряда при движении по трубке тока, что и есть  $d\vec{l}$  по

смыслу), перейдем от интегрирования по объему к интегрированию по  $\hat{r}$ . Тогда, поскольку дифференциал относится к штрихованным координатам, искомый интеграл можно представить в виде  $\int dY \oint d\left(\hat{r}(\hat{r}, \text{grad } \frac{1}{r})\right)$ , который обращается в нуль, как интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала. Итак,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2c} \int \frac{[\hat{r}, \vec{j}]\vec{r}}{r^3} dV.$$

Введем

$$\vec{M} = \frac{1}{2c} \int [\hat{r}, \vec{j}] dV$$

и назовем его **магнитный момент системы зарядов**. Этот вектор определяется геометрией системы и распределением токов по объему. Учитывая это определение, имеем

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{[\vec{M}, \vec{r}]}{r^3},$$

поэтому, так же как и в электростатике,

$$\vec{H} = \frac{3\vec{r}(\vec{M}\vec{r}) - r^2\vec{M}}{r^5}, \text{ или } \vec{H} = \frac{3\vec{n}(\vec{n}\vec{M}) - \vec{M}}{r^3}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}.$$

## • Свойства магнитного момента

1. Сместим начало координат:

$$\hat{r} = \hat{r} + \vec{a},$$

тогда

$$\vec{M} = \hat{M} + \frac{1}{2c} \int [\vec{a}, \vec{j}] dV, \quad \int [\vec{a}, \vec{j}] dV = \left[ \vec{a}, \int \vec{j} dV \right] = 0 \implies$$

$$\vec{M} = \hat{M}.$$

Подобно дипольному моменту, магнитный момент электронной системы не зависит от выбора начала координат, а зависит только от свойств системы зарядов.

2. Имея в виду, что  $\vec{j} = \rho\vec{v}$ , перепишем вектор магнитного момента:

$$\vec{M} = \frac{1}{2c} \int [\vec{r}', \rho\vec{v}] dV = \frac{1}{2c} \sum [\vec{r}'_i, e\vec{v}_i],$$

и если система составлена из зарядов, имеющих одинаковое отношение  $e/m$ , то

$$\vec{M} = \frac{e}{2mc} \sum [\vec{r}'_i, m\vec{v}_i] = \frac{e}{2mc} \vec{L},$$

здесь  $\vec{L}$  — момент импульса системы.

Для двух частиц

$$\vec{M} = \frac{1}{2c} \left( e_1 [\vec{r}'_1, \vec{v}_1] + e_2 [\vec{r}'_2, \vec{v}_2] \right).$$

Поместим начало координат в центр инерции и введем относительную скорость

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \quad \vec{v}_1 = \vec{v} \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{v}_2 = -\vec{v} \frac{m_1}{m_1 + m_2}; \quad \vec{r}' = \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2,$$

тогда

$$\vec{M} = \frac{\mu}{2c} \left( \frac{e_1}{m_1^2} + \frac{e_2}{m_2^2} \right) \vec{L}, \quad \text{где } \mu = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}$$

— приведенная масса,  $\vec{L}$  — момент импульса относительного движения.

## ТЕОРЕМА ЛАРМОРА

Рассмотрим систему тождественных заряженных частиц во внешнем электрическом аксиально-симметричном поле. Каким будет влияние слабого однородного магнитного поля, направленного вдоль оси симметрии, на такую систему?

Ответ на поставленный вопрос дает теорема Лармора: в слабом однородном магнитном поле рассматриваемая система частиц начинает вращаться как целое вокруг направления поля с угловой скоростью

$$\vec{\Omega}_L = \frac{e\vec{H}}{2mc}.$$

Такое движение называется **ларморовской прецессией**. Проще всего доказательство теоремы Лармора получается сравнением функции Лагранжа системы частиц в магнитном поле с функцией Лагранжа той же системы без магнитного поля, но рассматриваемой с точки зрения вращающейся системы координат. В отсутствие магнитного поля

$$L_0 = \sum_a \frac{mv_a^2}{2} - U,$$

где  $U$  – потенциальная энергия, включающая энергию взаимодействия частиц друг с другом и с внешним полем. При включении магнитного поля функция Лагранжа, как известно, приобретает добавку  $\sum_a e_a \vec{v}_a \cdot \vec{A}_a / c$ , где  $\vec{A}_a$  – векторный потенциал в точке, в которой находится частица. Магнитное поле однородно, поэтому представим  $\vec{A}$  в виде

$$\vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{H}, \vec{r}].$$

Легко убедиться в том, что такое представление допустимо:

$$\text{rot } \vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{\nabla} [\vec{H}, \vec{r}]] = \frac{1}{2} \vec{H} (\vec{\nabla} \vec{r}) - \frac{1}{2} (\vec{H} \vec{\nabla}) \vec{r} = \frac{3}{2} \vec{H} - \frac{1}{2} \vec{H} = \vec{H}.$$

Учитывая это замечание, запишем функцию Лагранжа системы зарядов в магнитном поле в виде

$$L_H = \sum_a \frac{mv_a^2}{2} + \frac{e}{2c} \sum_a \vec{v}_a \cdot [\vec{H}, \vec{r}] - U.$$

Теперь перепишем функцию Лагранжа  $L_0$  в системе координат, вращающихся с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси симметрии внешнего электрического поля. Известно, что скорости частицы в неподвижной  $\vec{v}_a$  и во вращающейся  $\vec{v}'_a$  системах отсчета связаны соотношением

$$\vec{v}_a = \vec{v}'_a + [\vec{\Omega}, \vec{r}'_a].$$

Предположим, вращение медленным настолько, что

$$[\vec{\Omega}, \vec{r}'_a] \ll \vec{v}'_a,$$

т.е. в функции Лагранжа достаточно сохранить линейные по  $\Omega$  члены, тогда

$$L_\Omega = \sum_a \frac{m\dot{v}'_a{}^2}{2} + \sum_a m\vec{v}'_a \cdot [\vec{\Omega}, \vec{r}'_a] - U.$$

Легко заметить, что функции Лагранжа  $L_H$  и  $L_\Omega$  станут одинаковыми, если  $\vec{\Omega} = e\vec{H}/2mc$ , а это, в свою очередь, означает, что поведение частиц, описываемых этими функциями Лагранжа, также одинаково, т.е. система заряженных частиц, находящихся во внешнем аксиально-симметричном электрическом поле, при наложении направленного вдоль оси симметрии магнитного поля начинает вращаться с угловой скоростью

$$\vec{\Omega}_L = \frac{e\vec{H}}{2mc}.$$

Уточним смысл пренебрежения квадратичными по  $\Omega$  величинами. Пусть частицы без магнитного поля совершают финитное квазипериодическое движение, как, например, электроны в атомах. Тогда можно положить  $\dot{v}_a \approx \omega_a \dot{r}_a$ , где  $\omega_a$  — частота вращения  $a$ -й частицы, а условие пренебрежения квадратичными по  $\Omega$  величинами сводится к неравенству

$$\omega_a \gg \Omega_L,$$

т.е. частота ларморовской прецессии должна быть мала по сравнению с собственными частотами частиц (электронов в атомах). В тех случаях, когда это условие не выполнено, теорема Лармора неверна. Из приведенного доказательства следует, что теорема справедлива и для системы частиц, у которых одинаково отношение  $e/m$ .

## ПОЛЕ РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА

Найдем поле, созданное зарядом  $e$ , равномерно движущимся со скоростью  $v \leq c$ . Поместим заряд в начало координат системы  $K'$ , которая движется по оси  $x$  неподвижной системы отсчета  $K$  со скоростью  $v = const$ . Предположим, что в момент  $t = 0$  начала  $K$  и  $K'$  совпадают. Это означает, что в любой момент времени  $t$  координатами заряда в системе  $K$  будут  $x = vt$ ,  $y = z = 0$ .

В системе  $K'$  заряд покоится в начале координат, поэтому в произвольной точке  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$  скалярный потенциал созданного им поля  $\dot{\phi} = e/\dot{R}$ , а вектор-потенциал  $\dot{\vec{A}} = 0$ , следовательно,

$$\dot{\vec{E}} = \frac{e\dot{\vec{R}}}{\dot{R}^3}, \quad \dot{\vec{H}} = 0, \quad \dot{R} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

Для того чтобы получить выражения потенциалов и полей в системе отсчета  $K$ , выпишем формулы преобразования Лоренца

- для координат:

$$\dot{x} = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \dot{y} = y, \quad \dot{z} = z;$$

- для потенциалов:

$$A_x = \frac{\dot{A}_x + v\dot{\phi}/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad A_y = \dot{A}_y, \quad A_z = \dot{A}_z, \quad \phi = \frac{\dot{\phi} + v\dot{A}_x/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}};$$

- для поля:

$$E_x = \dot{E}_x, \quad E_y = \frac{\dot{E}_y + v\dot{H}_z/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E_z = \frac{\dot{E}_z - v\dot{H}_y/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Теперь ясно, что

$$\varphi = \frac{e}{\dot{R}\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \dot{R}^2 = \frac{(x - vt)^2 + (1 - v^2/c^2)(y^2 + z^2)}{1 - v^2/c^2},$$

$$\text{т.е. } \varphi = \frac{e}{\hat{R}}, \quad \hat{R}^2 = (x - vt)^2 + (1 - v^2/c^2)(y^2 + z^2);$$

$$\vec{A} = \frac{\vec{v}\dot{\phi}}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\vec{v}\varphi}{c} = \frac{e\vec{v}}{c\hat{R}}.$$

Учитывая  $\dot{R}^2 = \hat{R}^2 / (1 - v^2/c^2)$ , получим

$$E_x = \frac{e(x - vt)}{\hat{R}^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right), \quad E_y = \frac{ey}{\hat{R}^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right), \quad E_z = \frac{ez}{\hat{R}^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right),$$

следовательно,

$$\vec{E} = \frac{e\vec{R}}{\hat{R}^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Здесь  $\vec{R}$  – радиус-вектор от заряда к точке наблюдения  $\vec{R}\{(x - vt), y, z\}$ . Введем угол  $\theta$  между направлением движения заряда и радиусом-вектором  $\vec{R}$  от заряда (координаты заряда  $x = vt, y = z = 0$ ) к точке наблюдения  $(x, y, z)$ :

$$x - vt = R \cos \theta, \quad y^2 + z^2 = R^2 \sin^2 \theta \implies \hat{R} = R \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta}.$$

Тогда

$$\varphi = \frac{e}{R\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}}, \quad \vec{A} = \frac{e\vec{v}}{cR\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}},$$

$$\vec{E} = \frac{e\vec{R}(1 - v^2/c^2)}{R^3(1 - v^2\sin^2\theta/c^2)^{3/2}}.$$

Легко подсчитать напряженность магнитного поля  $\vec{H} = \text{rot}(\vec{v}\varphi/c)$ :

$$\vec{H} = [\vec{\nabla}, \frac{\vec{v}\varphi}{c}] = -\frac{1}{c}[\vec{v}, \text{grad } \varphi] = \frac{1}{c}[\vec{v}, \vec{E}].$$

Таким образом,

$$\varphi = \frac{e}{R\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}}, \quad \vec{A} = \frac{\vec{v}\varphi}{c} = \frac{e\vec{v}}{cR\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}},$$

$$\vec{E} = \frac{e\vec{R}(1 - v^2/c^2)}{R^3(1 - v^2\sin^2\theta/c^2)^{3/2}}, \quad \vec{H} = \frac{1}{c}[\vec{v}, \vec{E}],$$

что позволяет заключить:

- Поле равномерно движущегося заряда, в отличие от поля неподвижного или медленно, но равномерно движущегося заряда, не обладает сферической симметрией. Эквипотенциальными поверхностями являются поверхности эллипсоида:

$$(x - vt)^2 + (1 - v^2/c^2)(y^2 + z^2) = \text{const},$$

которые получаются при сжатии сферы по направлению движения

в  $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  раз.

- В направлении движения ( $\theta = 0, \pi$ )

$$|\vec{E}| = \frac{e(1 - v^2/c^2)}{R^2}$$

и поле меньше электростатического в  $(1 - v^2/c^2)$  раз. В направлении, перпендикулярном движению ( $\theta = \pi/2$ ),

$$E_{\perp} = \frac{e}{R^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



и поле больше электростатического в  $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$  раз. Итак, поле равномерно движущегося заряда как бы сплющивается в направлении движения. С ростом скорости в направлении движения поле уменьшается, а в перпендикулярном направлении растет. При  $v \sim c$  все поле концентрируется в малом интервале углов  $\Delta\theta \sim \sqrt{1-v^2/c^2}$  вблизи плоскости, перпендикулярной движению.

- Магнитное поле всегда перпендикулярно как направлению движения, так и вектору напряженности электрического поля. При  $v \sim c$  напряженности магнитного и электрического полей оказываются одного порядка.

Вычислим силу взаимодействия двух зарядов, движущихся с одинаковой скоростью  $\vec{v} = const$ . Если рассматривать эту силу как действующую на заряд  $e_1$  в поле, созданном вторым зарядом  $e_2$ , получим

$$\vec{F} = e_1 \vec{E}_2 + \frac{e_1}{c} [\vec{v}, \vec{H}_2] = e_1 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \vec{E}_2 + \frac{e_1}{c^2} \vec{v}(\vec{v} \vec{E}_2).$$

Подставив сюда выражение напряженности электрического поля, для составляющей силы в направлении движения имеем

$$F_x = \frac{e_1 e_2}{R^2} \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cos \theta}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}},$$

а для составляющей в перпендикулярном направлении

$$F_y = \frac{e_1 e_2}{R^2} \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2 \sin \theta}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}}.$$

Здесь  $\vec{R}$  — радиус-вектор от заряда  $e_2$  к  $e_1$ , а  $\theta$  — угол между  $\vec{R}$  и  $\vec{v}$ .

## ФУНКЦИЯ ГРИНА УРАВНЕНИЯ Д'АЛАМБЕРА. ЗАПАЗДЫВАЮЩИЕ И ОПЕРЕЖАЮЩИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Уравнение Д'Аламбера — волновое уравнение с источником — имеет вид

$$\left(\Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \psi(\vec{r}, t) = -4\pi f(\vec{r}, t), \quad (20)$$

где  $v$  – скорость распространения волн, а  $f(\vec{r}, t)$  характеризует распределение источников в пространстве. Согласно выводам раздела I функция Грина уравнения (20) должна удовлетворять уравнению

$$\left(\Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\vec{r}, \vec{r}', t, t') = -4\pi \delta(\vec{R}) \delta(\tau), \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}', \quad \tau = t - t', \quad (21)$$

а решение (20) имеет вид

$$\psi(\vec{r}, t) = \int G(\vec{r}, \vec{r}', t, t') f(\vec{r}', t') d\vec{r}' dt'. \quad (22)$$

Найдем решение уравнения (21), представив для этого функцию Грина и  $\delta$ -функцию в виде разложения Фурье:

$$G(\vec{r}, \vec{r}', t, t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\vec{k} \int d\omega \tilde{g}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k}\vec{R} - \omega\tau)}, \quad (23)$$

$$\delta(\vec{R}) \delta(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\vec{k} \int d\omega e^{i(\vec{k}\vec{R} - \omega\tau)}. \quad (24)$$

Подставив далее (23) и (24) в (21), найдем

$$\tilde{g}(\vec{k}, \omega) = \frac{4\pi}{k^2 - \omega^2/v^2}, \quad (25)$$

что дает

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, \vec{r}', t, t') &= \frac{1}{4\pi^3} \int d\vec{k} \int d\omega \frac{e^{i(\vec{k}\vec{R} - \omega\tau)}}{k^2 - \omega^2/v^2} = \\ &= \frac{1}{4\pi^3} \int d\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{R}} \int d\omega \frac{v^2 e^{-i\omega\tau}}{v^2 k^2 - \omega^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Выражение (26) имеет полюса  $\omega = \pm kv$ , правила обхода которых можно выбрать, исходя из физических соображений. Напомним, что функцию Грина можно интерпретировать как возмущение, обусловленное точечным источником, локализованным в точке  $\vec{r}'$  и излучающим в течение бесконечно малого промежутка времени начиная от  $t'$ . Это возмущение распространяется со скоростью  $v$  в виде расходящейся сферической волны. Исходя из этого, потребуем, чтобы

- при  $t < t'$  функция Грина  $G = 0$ ,
- при  $t > t'$  функция Грина  $G$  представляла расходящуюся волну.

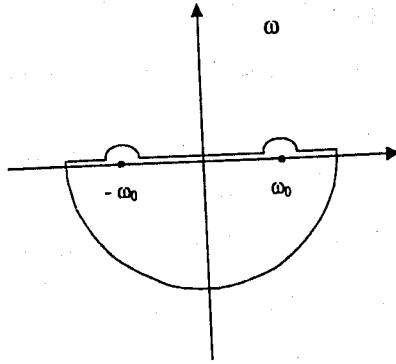


Рис. 7

Из этих требований следует, что при  $\tau > 0$ ,  $-i\omega\tau < 0$  контур надо замкнуть в нижней полуплоскости и обойти полюса сверху, для того чтобы  $G \neq 0$  (см. рис. 7). Представим интеграл по  $\omega$  в виде интеграла Коши в комплексной плоскости  $\omega$ , тогда

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{v^2 e^{-i\omega\tau}}{v^2 k^2 - \omega^2} = \oint_C d\omega \frac{v^2 e^{-i\omega\tau}}{v^2 k^2 - \omega^2} =$$

$$v^2 (-2i\pi) \left[ \frac{e^{ivk\tau}}{2vk} - \frac{e^{-ivk\tau}}{2vk} \right] = 2\pi v^2 \frac{\sin(vk\tau)}{vk}.$$

(Заметим, что интеграл по удаленной в бесконечность полуокружности экспоненциально стремится к нулю, поэтому  $\int_{-\infty}^{+\infty} \dots = \oint_C \dots$ ) При  $\tau < 0$  замкнем контур в верхней полуплоскости и интеграл даст ноль. Итак,

$$I = \begin{cases} 2\pi v \sin(vk\tau)/k, & \tau > 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}.$$

Подставив результат интегрирования по  $\omega$ , так же как и

$$\int d\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{R}} = \int k^2 dk \sin\theta d\theta d\phi e^{ikR\cos\theta} = 4\pi \int \frac{k^2 \sin(kR) dk}{kR},$$

в выражение для функции Грина, получим

$$G = \frac{2v}{\pi R} \int_0^{\infty} \sin(kR) \sin(kv\tau) dk.$$

Подынтегральная функция — четная функция  $k$ , поэтому можно распространить интегрирование на весь интервал  $-\infty < k < +\infty$ :

$$G = \frac{v}{\pi R} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(kR) \sin(kv\tau) dk = \frac{v}{\pi R} \int_{-\infty}^{+\infty} [\cos(kR - kv\tau) -$$

$$\cos(kr + kv\tau)]dk = \frac{1}{2\pi R} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ e^{i(\tau - R/v)x} - e^{i(\tau + R/v)x} \right], \quad x = kv.$$

Воспользовавшись одним из представлений  $\delta$ -функции, перепишем последнее:

$$G = \begin{cases} v[\delta(R - v\tau) - \delta(R + v\tau)]/R, & \tau > 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}.$$

Поскольку аргумент  $\delta(R + v\tau)$  нигде не обращается в нуль ( $R \geq 0, \tau > 0$ ), то

$$G = \begin{cases} v[\delta(R - v\tau)]/R, & \tau > 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}, \quad \text{т.е. } G = \frac{\delta(\tau - R/v)}{R}$$

(здесь использовано известное свойство  $\delta(ax) = \delta(x)/|a|$ ). Окончательно

$$G = G^{ret}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t, \dot{t}) = \frac{1}{|\vec{r} - \dot{\vec{r}}|} \delta\left((t - \dot{t}) - \frac{|\vec{r} - \dot{\vec{r}}|}{v}\right).$$

Эта функция Грина в полном соответствии с выводами пункта I по смыслу является запаздывающей: эффект, наблюдаемый в точке  $\vec{r}$  в момент времени  $t$ , вызывается возмущением, которое имело место в точке  $\dot{\vec{r}}$  в момент  $\dot{t} = t - (|\vec{r} - \dot{\vec{r}}|)/v$ . Соответственно, решение уравнения Д'Аламбера будет представлено в виде запаздывающего потенциала:

$$\psi(\vec{r}, t) = \int \frac{f(\dot{\vec{r}}, t - R/v)}{R} d\dot{V}. \quad (27)$$

Вклад в этот потенциал в момент  $t$  возникает за счет состояния источника, находящегося внутри объема  $\dot{V}$  в предшествующий момент  $\dot{t}$  со временем запаздывания  $(|\vec{r} - \dot{\vec{r}}|)/v$ , причем ясно, что  $v$  является скоростью распространения взаимодействия от источника к точке, где это действие проявляется.

Математически вполне корректно также и требование, согласно которому

$$G = 0 \text{ при } t > \dot{t}.$$

При таком подходе все вычисления выполняются аналогично изложенному, лишь необходимо обходить полюса снизу.

В результате получим

$$\psi(\vec{r}, t) = \int \frac{f(\dot{\vec{r}}, t + R/v)}{R} d\dot{V}. \quad (28)$$

– опережающий потенциал, который представляет собой сходящуюся к центру сферическую волну.

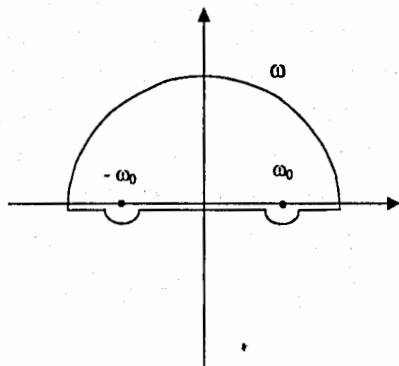


Рис. 8

Решения (27) и (28) суть частные интегралы уравнения Д'Аламбера. Для этого уравнения корректно поставленной является задача Коши (на открытой поверхности задаются  $\psi$  и  $\partial\psi/\partial t$ ). Обычно в качестве такой поверхности выбирают трехмерное пространство в фиксированный момент времени  $t = t_0$ : в момент  $t_0$  задают  $\psi(\vec{r}, t_0)$  и  $\partial\psi(\vec{r}, t_0)/\partial t$  для всех  $\vec{r}$ , и необходимо найти  $\psi(\vec{r}, t)$  для  $t > t_0$ . Чаще всего для бесконечной области функции  $\psi$  и  $\partial\psi/\partial t$  считают заданными функциями координат при  $t = 0$ :

$$\psi(\vec{r}, 0) = f_1(\vec{r}), \quad \partial\psi(\vec{r}, 0)/\partial t = f_2(\vec{r}).$$

Рассмотрим типичную для электродинамики постановку задачи Д'Аламбера. Пусть система произвольно движущихся зарядов занимает некоторый конечный объем  $V$ . Будем считать, что в этом объеме заданы плотность зарядов  $\rho(\vec{r}, t)$  и плотность токов  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ . Понятно, что они должны быть заданы в согласии с законом сохранения заряда  $\partial\rho/\partial t + \text{div}\vec{j} = 0$ . Задача состоит в том, чтобы по  $\rho$  и  $\vec{j}$  найти распределение скалярного  $\varphi(\vec{r}, t)$  и векторного  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  потенциалов, которые являются решениями уравнений Д'Аламбера:

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \Delta\varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho,$$

причем из всех решений приемлемы лишь те, которые подчиняются условию Лоренца

$$\text{div}\vec{A} + \frac{1}{v} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0.$$

Система этих линейных дифференциальных уравнений в частных производных допускает однозначное решение только при соответствующем

задании начальных и граничных условий, которые выбирают, основываясь на той или иной физической картинке. Обычной является следующая постановка. Пусть до момента  $t = 0$  (т.е. для всех  $t < 0$ ) заряды в объеме  $\dot{V}$  были неподвижны и только в момент  $t = 0$  пришли в движение. Будем считать, что искомые  $\varphi$  и  $\vec{A}$  возникают благодаря изменениям электрического и магнитного полей в начальный момент  $t = 0$ , поэтому естественно полагать, что

$$\rho(\vec{r}, 0) = 0, \quad \vec{j}(\vec{r}, 0) = 0, \quad \vec{E}(\vec{r}, 0) = 0, \quad \vec{H}(\vec{r}, 0) = 0,$$

тогда

$$\vec{A}(\vec{r}, t) |_{t=0} = \varphi(\vec{r}, t) |_{t=0} = 0; \quad \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} |_{t=0} = 0.$$

В согласии с естественным требованием исчезновения полей в пространственной бесконечности потребуем, чтобы как  $\varphi$ , так и  $\vec{A}$  обращались на бесконечности в нуль не медленнее чем  $1/r$ , т.е.

$$\varphi |_{r \rightarrow \infty} \sim 0(1/r), \quad \vec{A} |_{r \rightarrow \infty} \sim 0(1/r) \quad \text{для } 0 \leq t < \infty.$$

Как было показано выше, решение уравнения Д'Аламбера является суперпозицией запаздывающих и опережающих потенциалов:

$$\varphi = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2, \quad \vec{A} = \beta_1 \vec{A}_1 + \beta_2 \vec{A}_2, \quad \alpha, \beta = \text{const},$$

где

$$\varphi_1(\vec{r}, t) = \int \frac{\rho(\vec{r}', t - R/v)}{R} d\dot{V}, \quad \vec{A}_1(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - R/v)}{R} d\dot{V},$$

$$\varphi_2(\vec{r}, t) = \int \frac{\rho(\vec{r}', t + R/v)}{R} d\dot{V}, \quad \vec{A}_2(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t + R/v)}{R} d\dot{V}.$$

Нетрудно убедиться, что опережающие потенциалы не удовлетворяют сформулированным выше условиям. Действительно, при  $t = 0$

$$\varphi_1(\vec{r}, 0) = \int \frac{\rho(\vec{r}', -R/v)}{R} d\dot{V}, \quad \text{а} \quad \varphi_2(\vec{r}, 0) = \int \frac{\rho(\vec{r}', +R/v)}{R} d\dot{V}.$$

Согласно начальным условиям  $\rho(\vec{r}', -R/v) \equiv 0$ , в то время как  $\rho(\vec{r}', +R/v) \neq 0$ . Поэтому  $\varphi_1$  в бесконечности ведет себя  $\sim 0(1/r)$ , а  $\varphi_2$  этому условию не удовлетворяет и должно быть отброшено ( $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ ). Итак, как следствие сформулированных выше граничных и начальных условий решением уравнений Д'Аламбера являются запаздывающие потенциалы.

Можно показать, что для того, чтобы было выполнено также и условие Лоренца, необходимо положить  $\alpha_1 = \beta_1$ , поэтому окончательно

$$\varphi = \varphi_1, \quad \vec{A} = \vec{A}_1.$$

## ПОТЕНЦИАЛЫ ЛИЕНАРА – ВИХЕРТА. ПОЛЕ ПРОИЗВОЛЬНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА

Потенциалы поля, созданного движущимся с произвольной скоростью точечным зарядом, можно определить, используя известные по предыдущему изложению выражения для запаздывающих потенциалов. Как решения уравнения Д'Аламбера

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \psi(\vec{r}, t) = -4\pi f(\vec{r}, t), \quad \psi = \begin{cases} \varphi, & f = \rho \\ \vec{A}, & f = \vec{j}/c \end{cases},$$

запаздывающие потенциалы можно представить в виде

$$\psi(\vec{r}, t) = \int G^{ret}(t, \vec{r}, \vec{r}') f(\vec{r}', t') dt' d\vec{r}',$$

где

$$G^{ret}(t, \vec{r}, \vec{r}') = \frac{\delta(t - t' - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

– запаздывающая функция Грина.

Для движущегося со скоростью  $\vec{v}_0$  заряда плотность  $\rho$  и плотность тока  $\vec{j}$  записываются следующим образом:

$$\rho = e\delta(\vec{r} - \vec{r}_0); \quad \vec{j} = e\vec{v}_0\delta(\vec{r} - \vec{r}_0),$$

тогда

$$\varphi(\vec{r}, t) = e \int \frac{\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t'))\delta(t' - t + |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dt' d\vec{r}',$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{e}{c} \int \frac{\vec{v}_0(t')\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t'))\delta(t' - t + |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dt' d\vec{r}'.$$

После элементарного интегрирования по объему получаем

$$\varphi(\vec{r}, t) = e \int \frac{\delta(t' - t + |\vec{r} - \vec{r}_0(t')|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} dt', \quad (29)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{e}{c} \int \frac{\vec{v}_0(\dot{t}) \delta(\dot{t} - t + |\vec{r} - \vec{r}_0(\dot{t})|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}_0(\dot{t})|} d\dot{t}. \quad (30)$$

Существует правило интегрирования выражений с  $\delta$ -функцией, аргумент которой является переменной интегрирования:

$$\int g(x) \delta[u(x) - a] dx = \left[ g(x) / \frac{du}{dx} \right]_{u(x)=a}. \quad (31)$$

В нашем случае

$$u(\dot{t}) = \dot{t} + |\vec{r} - \vec{r}_0(\dot{t})|/c, \quad a = t, \quad (32)$$

а ее производная

$$\frac{du(\dot{t})}{d\dot{t}} = 1 + \frac{1}{c} \frac{d|\vec{r} - \vec{r}_0(\dot{t})|}{d\dot{t}} = 1 + \frac{1}{c} \frac{\partial |\vec{r} - \vec{r}_0(\dot{t})|}{\partial \vec{r}_0} \frac{d\vec{r}_0}{d\dot{t}} = 1 - \vec{n} \vec{v}_0/c, \quad (33)$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор, направленный из точки мгновенного расположения заряда в точку наблюдения,  $\vec{v}_0(\dot{t})$  – мгновенная скорость заряда. Учитывая изложенное правило, проинтегрируем по  $\dot{t}$ . В результате получим

$$\varphi(\vec{r}, t) = e \left[ \frac{1}{R(1 - \vec{n} \vec{v}_0/c)} \right]_{\text{запад}}, \quad (34)$$

$$A(\vec{r}, t) = \frac{e}{c} \left[ \frac{\vec{v}_0}{R(1 - \vec{n} \vec{v}_0/c)} \right]_{\text{запад}}, \quad (35)$$

где

$$R = |\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|, \quad \vec{v}_0 = \vec{v}_0(\tau), \quad \tau = t - R/c,$$

а квадратные скобки с индексом "запад" означают, что содержание скобок следует брать в момент  $\tau = t - |\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|/c$ . Эти потенциалы называются **потенциалами Лиенара – Вихерта** и характеризуют поле точечного заряда при произвольных значениях скорости и характере движения. В нерелятивистском пределе  $1 - \vec{n} \vec{v}_0/c \simeq 1$  и выражения переходят в обычные нерелятивистские формулы. Легко заметить, что между потенциалами Лиенара – Вихерта существует связь:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v}_0(\tau)}{c} \varphi(\vec{r}, t).$$

Приступим к вычислению напряженностей электрического и магнитного полей. Их можно подсчитать непосредственно, применив соответствующие операторы к найденным для  $\varphi$  и  $\vec{A}$  выражениям. Однако проще



воспользоваться представлениями (29), (30) и вычислить напряженности электрического и магнитного полей по известным формулам

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{H} = [\vec{\nabla}, \vec{A}].$$

Поскольку оператор набла содержит дифференцирование по координатам точки наблюдения, которые под интегралом по  $dt$  содержатся только в  $|\vec{r} - \vec{r}_0(t)| = R(t)$ , то дифференцирование можно выполнить под интегралом. Заметим предварительно, что

$$\text{grad } \delta(T) = \left( \frac{\partial}{\partial R} \delta(T) \right) \text{grad } R = \frac{\partial}{\partial T} \delta(T) \frac{\partial T}{\partial R} \text{grad } R =$$

$$\frac{1}{c} \vec{n} \dot{\delta}(T), \quad T = t - t + R/c,$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \delta(T)}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial \delta(T)}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \delta(T)}{\partial T} \equiv -\frac{1}{c} \dot{\delta}(T);$$

$$\text{grad } \frac{\delta(T)}{R} = \delta(T) \text{grad } \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \text{grad } \delta(T) = \frac{1}{cR} \vec{n} \dot{\delta}(T) - \frac{\vec{n}}{R^2} \delta(T),$$

$$\text{rot } \left( \vec{v}_0 \frac{\delta(T)}{R} \right) = \left[ \vec{\nabla}, \frac{\vec{v}_0(t) \delta(T)}{R} \right] = \left[ \vec{\nabla} \frac{\delta(T)}{R}, \vec{v}_0(t) \right].$$

Теперь, продифференцировав выражение под интегралом, получим

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{e}{c} \int [\vec{v}_0, \vec{n}] \left( \frac{\delta(\dot{t} - t + R/c)}{R^2} - \frac{\dot{\delta}(\dot{t} - t + R/c)}{cR} \right) dt,$$

здесь штрих у  $\delta$ -функции означает дифференцирование по ее аргументу. Перейдем к переменной (32), тогда, используя (33), имеем

$$dt = \frac{du}{\lambda}, \quad \lambda = 1 - \frac{\vec{n} \vec{v}_0}{c}.$$

Второе слагаемое подынтегрального выражения проинтегрируем по частям и используем правило (31). В результате

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{e}{c} \left\{ \frac{[\vec{v}_0, \vec{n}]}{\lambda^2 R^2} + \frac{1}{c\lambda} \frac{d}{dt} \left( \frac{[\vec{v}_0, \vec{n}]}{\lambda R} \right) \right\}. \quad (36)$$

Правая часть этого выражения должна быть взята в момент  $\tau = t - |\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)|/c$ .

Напряженность электрического поля  $\vec{E} = -grad \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  вычисляется аналогично. Используем, как и прежде, представление потенциалов поля (29), (30) и продифференцируем их под знаком интеграла, что дает

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = e \int \left\{ \frac{\vec{n}}{R^2} \delta(t - t + R/c) + \frac{\vec{n} - \vec{v}_0/c}{cR} \dot{\delta}(t - t + R/c) \right\} dt = e \left\{ \frac{\vec{n}}{\lambda R^2} + \frac{1}{c\lambda} \frac{d\vec{n} - \vec{v}_0/c}{dt} \frac{1}{\lambda R} \right\}. \quad (37)$$

Учитывая элементарные соотношения

$$\frac{d\vec{v}_0}{dt} = \dot{\vec{v}}_0(\dot{t}); \quad \frac{dR}{dt} = -\vec{n} \cdot \vec{v}_0; \quad \frac{d\vec{n}(t)}{dt} = -\frac{\vec{v}_0}{R} + \frac{(\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{v}_0))}{R} = \frac{[\vec{n}[\vec{n} \cdot \vec{v}_0]]}{R}$$

(в дальнейшем производная по  $t$  будет обозначаться точкой над буквой), продифференцируем (36) и (37) по  $t$ . Сравнение промежуточного выражения

$$\vec{E} = e \left\{ \frac{\vec{n}}{\lambda R^2} + \frac{\vec{n}}{c\lambda} \frac{d}{dt} \frac{1}{\lambda R} + \frac{\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{v}_0)}{c\lambda^2 R^2} - \frac{\vec{v}_0}{c\lambda^2 R^2} - \frac{1}{c^2 \lambda} \frac{d}{dt} \frac{\vec{v}_0}{\lambda R} \right\}_{\text{запазд}}$$

с формулой (36) обнаруживает важную связь:

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = [\vec{n}, \vec{E}(\vec{r}, t)]. \quad (38)$$

Поведем до конца дифференцирование в формуле для напряженности электрического поля, что после элементарного, но громоздкого приведения подобных членов дает

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = e \frac{(\vec{n} - \vec{v}_0/c)(1 - \vec{v}_0^2/c^2)}{\lambda^3 R^2} \Big|_{\text{запазд}} + \frac{e}{c} \frac{[\vec{n}, [(\vec{n} - \vec{v}_0/c), \dot{\vec{v}}_0/c]]}{\lambda^3 R} \Big|_{\text{запазд}}. \quad (39)$$

Отметим некоторые характерные черты полученных формул.

- Вектор  $\vec{H}$  перпендикулярен  $\vec{E}$  и линии, соединяющей точку наблюдения с зарядом в запаздывающий момент  $\tau = t - R/c$ .
- Как  $\vec{E}$ , так и  $\vec{H}$  состоят из двух слагаемых: первое не содержит ускорения заряда и убывает пропорционально  $R^{-2}$ , второе пропорционально ускорению  $\dot{\vec{v}}_0$  и убывает медленнее  $\sim R^{-1}$ .
- Слагаемые первого типа образуют квазистационарное поле, поскольку присущи и равномерно движущемуся заряду, а закон убывания такой, как в статическом случае.

$$\tau = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \approx \tau_0 + \tau_1 + \dots; \quad \tau_0 = t - \frac{r}{c}, \quad \tau_1 = \frac{1}{c} \frac{\vec{r} \dot{\vec{r}}}{r},$$

здесь  $\tau_0$  – время запаздывания, общее для всей системы,  $\tau_1$  – собственное время запаздывания (время, необходимое для распространения поля в пределах системы). Ясно, что  $\tau_1 \ll \tau_0$ , однако необходимо также, чтобы как  $\rho$ , так и  $\vec{j}$  были медленно меняющимися функциями своих аргументов, иначе говоря, чтобы за время  $\tau_1$  заряды не успели заметно изменить свою конфигурацию (сместиться), т.е.

$$v \cdot \frac{\vec{r} \dot{\vec{r}}}{cr} \sim v \frac{\dot{L}}{c} \ll \dot{L} \implies v \ll c.$$

Имея в виду

$$\rho(\vec{r}', \tau) = \rho(\vec{r}', \tau_0 + \frac{\vec{r} \dot{\vec{r}}}{cr}) = \rho(\vec{r}', \tau_0) + \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \frac{\vec{r} \dot{\vec{r}}}{cr} + \dots,$$

для потенциала получим

$$\varphi(\vec{r}, t) \approx \int \left( \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \dot{\vec{r}}}{r^3} \right) \left( \rho(\vec{r}', \tau_0) + \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \frac{\vec{r} \dot{\vec{r}}}{cr} \right) dV \approx \frac{1}{r} \int \rho(\vec{r}', \tau_0) dV + \frac{\vec{n}}{cr} \int \dot{\vec{r}} \rho dV.$$

$\tau_0$  не зависит от переменной интегрирования, поэтому для электронной системы первый интеграл обращается в нуль. Приближение, которое используется, таково, что  $\partial \dot{\vec{r}} / \partial \tau$  оказывается более высокого порядка малости по сравнению с оставшимися в разложении потенциала величинами, поэтому

$$\varphi(\vec{r}, t) \approx \frac{\vec{n}}{cr} \frac{\partial}{\partial \tau} \int \dot{\vec{r}} \rho dV = \frac{\vec{n}}{cr} \frac{\partial}{\partial \tau} \sum \dot{\vec{r}} \cdot e = \frac{\vec{n} \vec{d}_\tau}{cr}, \quad \vec{d}_\tau = \frac{\partial \vec{d}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\tau_0}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}.$$

Аналогично

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \approx \frac{1}{cr} \int \vec{j}(\vec{r}', \tau_0) dV.$$

Используем уравнение непрерывности для того, чтобы переписать выражение для скалярного потенциала в виде

$$\varphi(\vec{r}, t) = -\frac{\vec{n}}{cr} \int \dot{\vec{r}} \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}', \tau_0) dV.$$

Если на границе области нет токов, то

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{\vec{n}}{cr} \int \vec{j}(\vec{r}', \tau_0) dV.$$

- Слагаемые второго типа описывают волновое поле излучения, поскольку медленно спадают с увеличением расстояния и создают конечный поток через замкнутую поверхность сколь угодно большого радиуса. Как и следовало ожидать, поле излучения возникает только при ускоренном движении заряда.
- Слагаемые первого типа всегда имеют компоненту, направленную по радиусу-вектору  $\vec{R}$ , в то время как слагаемые второго типа перпендикулярны  $\vec{R}$  и имеют характер поперечного поля.
- На больших расстояниях от заряда

$$|\vec{E}| = |\vec{H}|.$$

Любопытно заметить, что, несмотря на отсутствие каких-либо ограничений на скорость движения заряда, полученные результаты теряют смысл при  $v_0 > c$ , поскольку в этом случае положительный заряд создает такое поле, какое должен был создавать отрицательный, что служит еще одним подтверждением изначально релятивистского характера теории Фарадея + Максвелла.

## ПОТЕНЦИАЛЫ И ПОЛЯ ВДАЛИ ОТ СИСТЕМЫ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ. ДИПОЛЬНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Решение уравнений Д'Аламбера в виде запаздывающих потенциалов

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \frac{\rho(\vec{r}', \tau) dV'}{R}; \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', \tau) dV'}{R};$$

$$\tau = t - \frac{R}{c}, \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'|$$

допускает аналитическое интегрирование только в случае произвольно движущегося одиночного заряда (результат – потенциалы Лиенара – Вихерта). Во всех остальных случаях из-за весьма сложной зависимости  $\rho$  и  $\vec{j}$  от  $\vec{r}'$  приходится довольствоваться приближенными или численными решениями. Задача заметно упрощается, если расстояние до точки наблюдения много больше характерного линейного размера системы зарядов:

$$|\dot{\vec{r}}| \ll |\vec{r}| \implies \frac{1}{R} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\dot{\vec{r}}}{r^3} + \dots,$$

(Действительно,  $\int x(\partial j_x/\partial x)dx = x \cdot j \Big|_{x_1}^{x_2} - \int j_x dx = -\int j_x dx$ .) Таким образом,

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{\vec{n}\vec{d}_\tau}{cr}, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{d}_\tau}{cr}, \quad \varphi = \vec{n} \cdot \vec{A},$$

т.е. вдали от системы медленно, но произвольно движущихся зарядов потенциалы электромагнитного поля определяются производной дипольного момента. Поэтому приближение, условиями которого являются

$$|\vec{r}'| \ll |\vec{r}|, \quad v \ll c,$$

называют **дипольным приближением**. Отметим, что на больших расстояниях, в рассматриваемом случае, потенциалы убывают медленнее ( $\sim 1/r$ ), чем в случае дипольного приближения в электростатике ( $\sim 1/r^2$ ).

Вычислим напряженности электрического и магнитного полей:

$$\vec{E} = -grad \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \frac{\partial \tau_0}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_0} grad \tau_0 = -\frac{1}{c^2 r} \vec{d}_{\tau\tau} + \frac{\vec{n}\vec{d}_{\tau\tau}}{cr} =$$

$$\frac{1}{c^2 r} \left( \vec{n}(\vec{n}\vec{d}_{\tau\tau}) - \vec{d}_{\tau\tau} \right) = \frac{1}{c^2 r} \left[ \vec{n}[\vec{n}, \vec{d}_{\tau\tau}] \right] = \frac{1}{c} \left[ [\vec{A}_\tau, \vec{n}]\vec{n} \right];$$

$$\vec{H} = rot \vec{A} = \frac{1}{c} rot \frac{\vec{d}_\tau}{r} = \frac{1}{cr} rot \vec{d}_\tau + \frac{1}{c} \left[ grad \frac{1}{r}, \vec{d}_\tau \right].$$

Порядок последнего слагаемого  $0(1/r^2)$ , поэтому его можно отбросить, тогда

$$\vec{H} = \frac{1}{cr} \left[ grad \tau_0, \vec{d}_{\tau\tau} \right] = \frac{1}{c} \left[ \vec{A}_{\tau_0}, \vec{n} \right] = \frac{1}{c^2 r} \left[ \vec{d}_{\tau\tau}, \vec{n} \right].$$

Итак,

$$\vec{E} = \frac{1}{c^2 r} \left[ \vec{d}_{\tau\tau}, \vec{n} \right] \vec{n} = \frac{1}{c} \left[ [\vec{A}_\tau, \vec{n}]\vec{n} \right];$$

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \left[ \vec{A}_{\tau_0}, \vec{n} \right] = \frac{1}{c^2 r} \left[ \vec{d}_{\tau\tau}, \vec{n} \right];$$

$$\vec{E} = \left[ \vec{H}, \vec{n} \right].$$

Легко видеть, что как  $\vec{E}$ , так и  $\vec{H}$  перпендикулярны  $\vec{n}$ , друг другу ( $\vec{E} \perp \vec{H}$ ) и равны по модулю:  $|\vec{E}| = |\vec{H}|$ . На больших расстояниях  $E \sim H \sim 1/r$ .

Ориентируем  $\vec{d}$  по оси  $z$ , тогда в сферических координатах  $r, \theta, \psi$

$$H_r = H_\theta = 0, \quad H_\psi = \frac{d_{\tau\tau}}{c^2 r} \sin \theta,$$

$$E_r = E_\psi = 0, \quad E_\theta = \frac{d_{\tau\tau}}{c^2 r} \sin\theta.$$

Подсчитаем вектор Пойнтинга:

$$\vec{\sigma} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}\vec{H}] = \frac{c}{4\pi} [\vec{H}[\vec{n}\vec{H}]] = \frac{c}{4\pi} \vec{n}H^2 = \frac{c}{8\pi} \vec{n}(E^2 + H^2) = cW\vec{n},$$

$$\vec{\sigma} = \frac{\vec{n}}{4\pi c^3 r^2} d_{\tau\tau}^2 \sin^2\theta, \quad |\vec{\sigma}| = \frac{1}{4\pi c^3} \frac{d_{\tau\tau}^2}{r^2} \sin^2\theta.$$

Рассматриваемая система "излучатель" - энергия "вытекает" через единичную площадку в направлении  $\vec{n}$ , перпендикулярном как  $\vec{E}$ , так и  $\vec{H}$ , со скоростью  $c$ . Поскольку дипольный момент, вторая производная которого определяет величину переменных электрического и магнитного полей, зависит от  $t - r/c$ , ясно, что переносчиком энергии является бегущая в направлении  $\vec{n}$  волна. (Действительно, функция от  $\tau_0 = t - r/c$  принимает одни и те же значения для всех  $r$  и  $t$  из  $r - ct = const$ , т.е. описывает периодический процесс.)

Введем понятие интенсивности излучения. Количество энергии, протекающей в единицу времени через элемент шаровой поверхности  $d\Sigma = r^2 d\Omega$  радиусом  $r$  и с центром в начале координат, назовем **интенсивностью излучения** в элемент телесного угла  $d\Omega$ :

$$dI = \vec{\sigma} d\vec{\Sigma} = \sigma d\Sigma = \frac{1}{4\pi c^3} \frac{d_{\tau\tau}^2}{r^2} \sin^2\theta \cdot r^2 d\Omega = \frac{d_{\tau\tau}^2}{4\pi c^3} \sin^3\theta d\theta d\psi.$$

Интерпретация этого результата проста - при  $t - r/c = const$  интенсивность излучения не зависит от  $r$ , поскольку излучаемая системой энергия распространяется в окружающем пространстве со скоростью  $c$ , нигде не накапливаясь и не исчезая. Полная интенсивность излучения

$$I = -\frac{dU}{dt} = \int \vec{\sigma} d\vec{\Sigma} = \frac{d_{\tau\tau}^2}{4\pi c^3} \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\psi = \frac{2d_{\tau\tau}^2}{3c^3}.$$

Известно, что между плотностью потока энергии  $\vec{\sigma}$  и плотностью импульса  $\vec{g}$  существует соотношение

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{\sigma} = \frac{W}{c} \vec{n}.$$

Таким образом, излучающая система теряет не только энергию, но и импульс, которые превращаются в импульс и энергию электромагнитной волны. Примечательно, что связь плотности потока энергии и плотности импульса излучения такая же, как и для движущихся со скоростью света безмассовых частиц.

- **Замечание.** Замкнутая система частиц с одинаковым отношением  $e/m$  не излучает в дипольном приближении. Действительно,

$$\vec{d} = \sum e\vec{r} = \sum \frac{e}{m}m\vec{r} = \frac{\text{const} \sum m\vec{r}}{\sum m} \sum m = \text{const} \vec{R} \sum m.$$

Центр инерции ( $\vec{R}$  - его радиус-вектор) замкнутой системы движется с постоянной скоростью, поэтому  $\vec{d}_{\tau\tau} = 0$ .

## ПЛОСКАЯ МОНОХРОМАТИЧЕСКАЯ ВОЛНА. ПОЛЯРИЗАЦИЯ. ДОПЛЕР-ЭФФЕКТ

Важный частный случай электромагнитных волн представляют так называемые **монохроматические волны**, поле которых является простой периодической функцией времени. Потенциалы, компоненты полей и т.п. монохроматической волны частоты  $\omega$  зависят от времени по закону  $\cos(\omega t + \alpha)$ . Примером может служить волна от излучателя, дипольный момент которой

$$\vec{d} = \vec{d}_0 \cos \omega \tau = \text{Re } \vec{d}_0 e^{i\omega \tau}.$$

В этом случае

$$\vec{H} = \frac{\omega^2}{c^2 r} [\vec{n}, \vec{d}_0] e^{i\omega(t-r/c)},$$

$$\vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2 r} [[\vec{n}, \vec{d}_0] \vec{n}] e^{i\omega(t-r/c)}.$$

В монохроматической волне вычисляют среднее за период значение излучаемой интенсивности

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int I dt = \frac{d_0^2 \omega^4}{3c^3} = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 \frac{cd_0^2}{3}.$$

(Напомним, что  $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi c}{\lambda}$ .) Для монохроматической волны одно из условий дипольного приближения можно записать на языке длины излучаемой волны. Действительно, скорость движения зарядов в системе с линейными размерами  $\sim \dot{L}$  есть  $\dot{L}\omega$ , а условие пренебрежения временем собственного запаздывания  $v \ll c$ , что позволяет переписать одно из условий дипольного приближения в виде  $\dot{L} \ll \lambda$ .

Если излучающая система находится достаточно далеко от точки наблюдения, то на таких расстояниях сферические волны можно считать

плоскими. Достаточно наглядно это можно представить себе следующим образом: если излучатель находится настолько далеко, что радиус кривизны сферической поверхности волн равной фазы достаточно велик по сравнению с размерами области, в которой рассматривается поле, то в пределах этой области сферу с достаточной степенью точности можно считать плоской поверхностью. Область, в которой это допустимо, называют **волновой зоной**. Ясно, что в волновой зоне  $|r| \gg \lambda$ .

Пусть волна распространяется в направлении оси  $x$ , тогда в волновой зоне все величины будут функциями  $t - x/c$ , а если к тому же волна монохроматична, то все величины содержат  $\exp i(\omega t - \vec{k}\vec{r})$ , где  $\vec{k} = (\omega/c)\vec{n}$  — волновой вектор,  $\vec{n}$  — единичный вектор в направлении распространения волны. Итак, в самом общем случае поле плоской монохроматической волны можно представить в виде

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}.$$

Рассмотрим детальнее, как изменяются векторы напряженностей полей плоской монохроматической волны. Амплитуда  $\vec{E}_0$  поля плоской монохроматической волны, вообще говоря, комплексный вектор. Представим его в виде  $\vec{E}_0 = \vec{g}_1 + i\vec{g}_2$  и перейдем к действительной части

$$\text{Re}\vec{E} = \vec{g}_1 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) - \vec{g}_2 \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r}).$$

Векторы  $\vec{g}_1$  и  $\vec{g}_2$  ориентированы друг относительно друга произвольным образом. Перейдем к взаимно перпендикулярным векторам  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$ . Пусть

$$\vec{E}_1 = \vec{g}_1 \cos \alpha + \vec{g}_2 \sin \alpha, \quad \vec{E}_2 = \vec{g}_1 \sin \alpha - \vec{g}_2 \cos \alpha.$$

Условие перпендикулярности  $\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = 0$  дает

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2\vec{g}_1\vec{g}_2}{\vec{g}_1^2 - \vec{g}_2^2}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\vec{g}_1 = \vec{E}_1 \cos \alpha + \vec{E}_2 \sin \alpha, \quad \vec{g}_2 = \vec{E}_1 \sin \alpha - \vec{E}_2 \cos \alpha,$$

откуда сразу следует

$$\vec{E} = \vec{E}_1 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) + \vec{E}_2 \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha).$$

Выберем ось  $x$  в направлении распространения волны и направим ось  $y$  по  $\vec{E}_1$ , тогда  $\vec{E}_2$  будет направлен по оси  $z$ , т.е.

$$E_y = E_1 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha), \quad E_z = \pm E_2 \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha) \implies$$



$$\frac{E_y^2}{E_1^2} + \frac{E_z^2}{E_2^2} = 1.$$

Таким образом, вектор  $\vec{E}$  плоской монохроматической волны вращается в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, так, что конец этого вектора описывает эллипс. Такая волна называется **эллиптически-поляризованной**. В случае  $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$  эллипс вырождается в окружность и говорят, что волна имеет **круговую поляризацию**. Поскольку электромагнитная волна распространяется в направлении  $\vec{n}$ , то изменение  $\vec{E}$  в пространстве и времени можно представить себе как движение конца  $\vec{E}$  по эллиптической или круговой спирали, навитой на линию  $\vec{n}$ . Шаг этой спирали есть  $\lambda = 2\pi/k$ . Наконец, если один из векторов  $\vec{E}_1$  или  $\vec{E}_2$  обращается в нуль, то поле направлено параллельно (или антипараллельно  $\pm$  в выражении  $E_z$ ) одному и тому же направлению. Такая волна называется **линейно-поляризованной**. Используя связь

$$\vec{E} = [\vec{H}, \vec{n}] \quad \Leftrightarrow \quad \vec{H} = [\vec{n}, \vec{E}],$$

закключаем, что  $H_x = 0$ ,  $H_y = \pm E_2 \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha)$ ,  $H_z = E_1 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha)$  и все сказанное о поляризации в отношении  $\vec{E}$  верно и для  $\vec{H}$ .

Обратимся к рассмотрению эффекта Доплера – изменению частоты  $\omega$  волны, испускаемой движущимся по отношению к наблюдателю источником, по сравнению с собственной частотой  $\omega_0$  в системе, относительно которой источник неподвижен. Введем четырехмерный вектор

$$k^i = \left( \frac{\omega}{c}, \vec{k} \right)$$

( $k^i$  – четырехмерный вектор, поскольку  $k_i x^i = \omega t - \vec{k}\vec{r}$  – фаза волны, т.е. скаляр.) Свяжем систему  $K$  с наблюдателем, и пусть  $K_0$  будет системой, связанной с источником, движущейся со скоростью  $V$  относительно  $K$ . Лоренц-преобразование временной компоненты вектора  $k^i$  имеет вид

$$\frac{\omega_0}{c} = \frac{\omega/c - V k^1/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

и т.к.  $k^1 = \omega \cdot \cos \alpha / c$ , где  $\alpha$  – угол в системе отсчета  $K$  между направлением испускания волны и направлением движения, то

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \frac{V}{c} \cdot \cos \alpha}.$$

При  $V \ll c$  и  $\alpha \neq \pi/2$

$$\omega \approx \omega_0 \left( 1 + \frac{V}{c} \cdot \cos \alpha \right).$$

При  $V \ll c$  и  $\alpha = \pi/2$

$$\omega \approx \omega_0 \left( 1 - \frac{V^2}{2c^2} \right).$$

Если источник света расположен в начале координат системы отсчета  $K_0$  и приближается ( $\cos \alpha = 1$ ) к наблюдателю или удаляется ( $\cos \alpha = -1$ ) от него, то говорят о продольном эффекте Доплера, причем в первом случае  $\omega > \omega_0$ , а во втором  $\omega < \omega_0$ . При  $\alpha = \pi/2$   $\omega < \omega_0$  и говорят о поперечном эффекте Доплера, который не имеет классического ( $V \ll c$ ) аналога.

## РЕАКЦИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

Было показано, что собственная электростатическая энергия заряженной частицы бесконечна. Введение "классического радиуса электрона"

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$$

и связанного с этим предположения о существовании у частиц внутренней структуры позволяет устранить эту бесконечность. Однако объект размером  $r_0$  не описывается классической теорией – квантовые эффекты становятся существенными уже на значительно больших расстояниях  $\hbar/mc \approx 137r_0$ . (Здесь уместно заметить, что и квантовая теория не разрешает трудностей, связанных с вычислением собственной энергии частиц.)

При ускоренном движении частица излучает, причем поле излучения обладает не только энергией, но и импульсом, благодаря чему излучение сопровождается обратным силовым воздействием на частицу. Такое воздействие излучаемого частицей поля на собственное движение частицы назовем реакцией излучения. Таким образом, корректная постановка задачи о движении заряженной частицы требует включения в уравнения движения членов, учитывающих влияние излучения на движение.

Предположим, что такое влияние мало, и поэтому можно считать движение излучающей частицы заданным. Смысл такого предположения обсудим позже, а теперь попробуем получить количественный критерий малости реакции излучения, сравнивая потерю энергии на излучение за

некоторое время  $\Delta t$  с изменением кинетической энергии частицы под действием внешних сил за то же время. Оценим обе энергии для нерелятивистского движения:

$$\Delta W_{rad} \approx \frac{2e^2 \dot{v}^2}{3c^3} \Delta t, \quad \Delta W_{kin} \approx mv \Delta v,$$

$\Delta v$  – изменение скорости за время  $\Delta t$ . Ясно, что для того, чтобы можно было считать заданным движение излучающей частицы, должно выполняться  $\Delta W_{rad} \ll \Delta W_{kin}$ . Если приближенно считать  $\Delta t \sim v/\dot{v}$ , то это неравенство приводит к

$$\Delta t \gg \tau, \quad \text{где} \quad \tau = \frac{2r_0}{3c}$$

– время распространения электромагнитных возмущений на расстояние порядка классического радиуса электрона. (Заметим, что это время очень мало – наибольшее значение оно имеет для электрона и равно  $0,63 \cdot 10^{-23}$  с.) Если движение квазипериодично, то сравнивать нужно потерю энергии на излучение  $\Delta W_{rad} \approx (2e^2 l^2 \omega_0^4 / 3c^3) T_0$  за период  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  со средней кинетической энергией  $\Delta W_{kin} \approx m\omega_0^2 l^2$ , что дает

$$T_0 \gg \tau \quad \text{или} \quad \omega_0 \tau \ll 1.$$

Таким образом, реакцию излучения можно рассматривать как малый эффект, если состояние частицы слабо меняется за время  $\tau$  или на расстояниях  $ct \approx r_0$ .

Рассмотрим движение нерелятивистской заряженной частицы под действием внешней силы  $\vec{F}_0$ . Движение ускоренно и частица излучает. Для учета реакции излучения добавим в правую часть уравнения движения силу реакции излучения  $\vec{F}_s$ :

$$m\vec{w} = \vec{F}_0 + \vec{F}_s, \quad \vec{F}_s = \int \rho \left( \vec{E}_0 + \frac{[\vec{v}, \vec{H}_0]}{c} \right) dV.$$

Для того чтобы найти выражение для  $\vec{F}_s$ , будем считать работу этой силы за конечный промежуток времени равной энергии, излучаемой частицей за то же время.

За промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$  частица излучает энергию

$$\Delta W_{rad} = \frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{v}^2(t) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} \vec{F} dt.$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{v} \vec{F} dt = -\frac{2e^2}{3c^3} \dot{\vec{v}} \vec{v} \Big|_{t_1}^{t_2} + \frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\vec{w}} \cdot \vec{v} dt.$$

Во многих случаях первое слагаемое правой части последнего равенства обращается в нуль. Это имеет место при периодическом движении, когда состояние в момент  $t_1$  совпадает с состоянием в момент  $t_2$  (промежуток  $t_2 - t_1$  равен периоду) при движении в магнитном поле, когда  $\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} = 0$  или если  $\dot{\vec{v}}(t_1) = \dot{\vec{v}}(t_2) = 0$ . Во всех этих случаях

$$\vec{F}_{rad} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{w}} \implies m\ddot{\vec{w}} = \vec{F}_0 + \frac{2e^2}{3c^3} \dot{\vec{w}}.$$

Таким образом, не строгие соображения позволили установить вид силы реакции радиационного торможения. Предложенное описание реакции излучения не может быть признано вполне удовлетворительным хотя бы потому, что повышает порядок уравнения движения – содержит 3-ю производную от радиуса-вектора, что противоречит основным положениям классической механики, вся схема которой предполагает, что уравнения движения должны иметь второй порядок по времени. Именно поэтому некоторые решения уравнения движения, а именно при  $\vec{F}_0 = 0$ , оказываются физически бессмысленными. Действительно, уравнение

$$\dot{\vec{v}} = \frac{2e^2}{3mc^3} \ddot{\vec{v}}$$

имеет решение  $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 \cdot \exp(t/\tau)$ , которое описывает неограниченный саморазгон частицы. В тех случаях, когда сила радиационного трения входит в уравнения движения как малая добавка к внешним силам и учитывается методом последовательных приближений, она приводит к физически осмысленным результатам (см., например, пункт, отведенный изложению ширины излучаемых линий). Попробуем сформулировать условие малости радиационной силы по сравнению с внешней электромагнитной силой. Из уравнения движения в нулевом по радиационной силе приближении находим

$$\ddot{\vec{v}} = \frac{e}{m} \dot{\vec{E}}_0 + \frac{e}{m} [\dot{\vec{v}}, \vec{H}_0] + \frac{e}{m} [\vec{v}, \dot{\vec{H}}_0].$$

В мгновенно сопутствующей системе  $\vec{v} = 0$  ускорение  $\ddot{\vec{w}} = e\dot{\vec{E}}_0/m$ . С учетом этого в мгновенно сопутствующей системе получим

$$\vec{F}_{rad} = \frac{2e^3}{3mc^3} \dot{\vec{E}}_0 + \frac{2e^4}{3m^2c^4} [\vec{E}_0, \vec{H}_0].$$

Если внешнее поле периодическое  $\vec{E}_0 \approx -\omega_0 \vec{E}_0$ , то, сравнивая выражения  $F_{rad}$  и  $F_0$ , имеем два неравенства

$$\omega_0 \tau \ll 1 \iff \lambda_0 \gg r_0, \quad H_0 \ll e/r_0^2.$$

Первое из этих неравенств рассматривалось выше — оно ограничивает применимость классической электродинамики расстояниями  $r_0$ , а второе требует, чтобы внешнее поле было малым по сравнению с максимальным полем протяженной заряженной частицы размером в "классический" радиус  $r_0$ .

Выведем релятивистское выражение для силы трения излучения, применимое при движении со скоростями порядка скорости света. Понятно, что эта сила должна быть 4-вектором, который надо добавить в релятивистское уравнение движения заряда

$$mc \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k + g^i.$$

Для определения  $g^i$  заметим, что при  $v \ll c$  пространственные компоненты этого вектора должны перейти в  $F_s/c$  (напомним,  $\vec{F}_s = 2e^2 \ddot{\vec{w}}/3c^3$ ). Нетрудно убедиться, что таким свойством обладает вектор

$$\frac{2e^2}{3c} \frac{d^2 u^i}{ds^2},$$

однако он не удовлетворяет тождеству  $g^i u_i = 0$ , которое должно выполняться для компонент всякого 4-вектора силы. Добавим к написанному выражению дополнительный вектор, составленный из 4-скорости и ее производных. В предельном случае  $v = 0$  пространственные компоненты этого дополнительного вектора должны обратиться в нуль, так чтобы не изменить правильного значения  $\vec{F}_s$ . Таким свойством обладает  $u^i$ , поэтому дополнительный вектор должен иметь вид  $\alpha u^i$ , а скаляр  $\alpha$  выберем так, чтобы было удовлетворено соотношение  $g^i u_i = 0$ . В результате получаем

$$g^i = \left( \frac{d^2 u^i}{ds^2} - u^i u^k \frac{d^2 u_k}{ds^2} \right).$$

Эту формулу можно переписать в другом виде, выразив производную  $d^2 u^i/ds^2$  через тензор действующего на частицу внешнего электромагнитного поля.

## ЕСТЕСТВЕННАЯ ШИРИНА ИЗЛУЧАЕМЫХ ЛИНИЙ

Излучение, поглощение и рассеяние волн атомными системами – это квантовые процессы, и последовательно они могут быть описаны на основе квантовой механики и квантовой электродинамики. Но качественные характеристики этих явлений хорошо передаются моделью взаимодействия электромагнитной волны с заряженной частицей, управляемой упругой силой из некоторого центра, которая представляет таким образом связь электронов в атомных системах (модель – волна, взаимодействующая с гармоническим осциллятором).

Пусть электрон, связанный упругой силой  $F_e = -m\omega_0^2 x$  с центром, находящимся в начале координат, совершает свободные колебания. Если пренебречь излучением, то нерелятивистское уравнение движения электрона

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = 0$$

служило бы для описания незатухающих гармонических колебаний с частотой  $\omega_0$ . Это уравнение должно быть дополнено силой радиационного трения, обусловленной реакцией излучения:

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{w}.$$

Решение этого уравнения будем искать методом последовательных приближений. В нулевом приближении  $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$ , поэтому  $\dot{w} = -\omega_0^2 \dot{x}$ . Введем

$$\gamma = \frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3}$$

и получим уравнение движения осциллятора с трением

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

причем  $\gamma \ll \omega_0 \ll c/r_0$ . (Для электрона  $\omega_0 \ll 10^{23} \text{ с}^{-1}$ , что соответствует энергиям  $\hbar\omega_0 \ll 100 \text{ МэВ}$ .)

Итак, благодаря реакции излучения, которая определяется величиной  $\gamma$ , колебания взаимодействующего с электромагнитной волной осциллятора имеют затухающий характер. Решение уравнения движения такого осциллятора при условии  $\gamma \ll \omega_0$  имеет вид

$$x \approx x_0 e^{-\gamma t/2} e^{i\omega_0 t},$$

поэтому ускорение записывается как

$$w = A e^{-\gamma t/2} e^{i\omega_0 t},$$

где  $A \approx -x_0 \omega_0^2$  — константа. Ускорение затухающего осциллятора не является периодической функцией времени, в спектре излучаемых им волн представлены все частоты  $0 \leq \omega < \infty$  — затухающий осциллятор излучает сплошной спектр частот.

Найдем распределение энергии в спектре такого осциллятора, т.е. долю излучаемой осциллятором полной энергии, которая приходится на интервал частот от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ . Эту долю обозначают  $I(\omega)$  и называют **спектральной функцией распределения Лоренца**. Ее связь с полной энергией имеет вид

$$I_0 = \int_0^{\infty} I(\omega) d\omega. \quad (40)$$

Полная энергия, излучаемая осциллятором, равна

$$I_0 = \frac{2e^2}{3c^3} \int_0^{\infty} w^2 dt = \frac{2e^2}{3c^3} \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 dt \quad (41)$$

(интегрирование распространено на область  $t < 0$ , поскольку осциллятор в это время покоится и подынтегральное выражение есть нуль). Представим ускорение в виде интеграла Фурье:

$$w(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{w}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Фурье-образ

$$\tilde{w}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} w(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{A}{\sqrt{2\pi} [\gamma/2 - i(\omega_0 - \omega)]}.$$

Используя равенство Парсеваля, имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{w}(\omega)|^2 d\omega = \frac{A^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2/4} = \frac{A^2}{\gamma}. \quad (42)$$

Подставив (42) в (41), получим

$$I_0 = \frac{e^2 A^2}{3\pi c^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2/4} = \frac{2e^2 A^2}{3c^3 \gamma}, \quad (43)$$

следовательно,

$$A^2 = \frac{3c^3 \gamma}{2e^2} I_0. \quad (44)$$

С другой стороны, сравнивая (43) и (40) и учитывая, что спектральное распределение определено только для существенно положительных значений частоты, имеем

$$I(\omega) = \frac{I_0}{2\pi} \frac{\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2/4}. \quad (45)$$

Это выражение имеет резкий максимум при  $\omega = \omega_0$ , т.е. при частоте, которая излучалась бы осциллятором в отсутствие затухания:

$$I(\omega_0) = \frac{2I_0}{\pi\gamma}.$$

Точнее,

$$I(\omega) = \frac{I_0}{2\pi} \frac{\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2/4} \Big|_{\gamma \rightarrow 0} \rightarrow I_0 \delta(\omega - \omega_0)$$

– спектральное распределение становится бесконечно узким. Таким образом, учет радиационного трения приводит к качественно новому эффекту – конечной ширине спектра излучения. При  $\omega = \omega_0 \pm \gamma/2$  излучаемая интенсивность равна

$$I(\omega_0 \pm \gamma/2) = \frac{1}{2}I(\omega_0),$$

т.е. вдвое меньше интенсивности в максимуме. По этой причине величину  $\gamma/2$  называют **полушириной излучаемой линии**.

## РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН СВЯЗАННЫМИ И СВОБОДНЫМИ ЗАРЯДАМИ

Рассмотрим затухающие колебания осциллятора в поле плоской монохроматической волны. Вообще говоря, такие колебания описываются уравнением достаточно сложного вида

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{2e^2}{3mc^2} \dot{\vec{w}} + \frac{e}{m} (\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{H}]),$$

однако физические предпосылки позволяют наложить ряд упрощающих ограничений.

1. Если предположить движение нерелятивистским, то фактор  $v/c \ll 1$  позволяет пренебречь слагаемым с магнитным полем.



2. Осциллятор находится в поле плоской монохроматической волны, поэтому с учетом предыдущего замечания можно полагать  $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t)$ . Если предположить, что длина волны падающего излучения много больше характерных для движения осциллятора размеров, то можно считать  $\exp(i\vec{k}\vec{r}) \approx 1$ , тогда  $\vec{E} \approx \vec{E}_0 \exp(-i\omega t)$ .
3. Силу радиационного трения, как и в предыдущих случаях, учтем по методу последовательных приближений, т.е. производную ускорения найдем исходя из  $\ddot{\vec{r}} = -\omega_0^2 \vec{r} + (e/m) \cdot \vec{E}_0 \exp(-i\omega t)$ .

Окончательно уравнение движения записывается в виде

$$\ddot{\vec{r}} + \gamma \dot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{e}{m} \cdot \vec{E}_0 \exp(-i\omega t), \quad \gamma = \frac{2e^2 \omega_0^2}{3mc^3}. \quad (46)$$

Решение этого уравнения подробно рассматривалось в курсе "Классическая механика". В задаче рассеяния достаточно найти лишь частное решение, поскольку решение однородного уравнения затухает за время порядка  $\gamma$ . Частное решение (46) имеет вид

$$\vec{r} = \frac{(e\vec{E}_0/m) \exp(-i\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}. \quad (47)$$

Для интенсивности излучения, рассеянного в телесный угол  $d\Omega$ , получаем

$$dI = \frac{e^2}{4\pi c^3} [\ddot{\vec{r}}, \vec{n}]^2 d\Omega = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3} \frac{\omega^4 E_0^2 \sin^2 \Theta \cos^2(\omega t - \delta)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}, \quad (48)$$

здесь

$$\delta = \arctg \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

$\Theta$  - угол между направлением наблюдения  $\vec{n}$  и направлением вектора поляризации,  $\vec{E}_0$  (см. рис. 9). Усредняя это выражение за период  $T = 2\pi/\omega$ , имеем

$$d\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T dI dt = r_0^2 I_0 \frac{\omega^4 \sin^2 \Theta d\Omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}, \quad I_0 = \frac{c}{4\pi} E_0^2, \quad r_0 = \frac{e^2}{mc^2}. \quad (49)$$

Нетрудно догадаться, что  $I_0$  - интенсивность падающего излучения.

Процесс рассеяния электромагнитных волн принято характеризовать дифференциальным эффективным сечением. По определению дифференциальным эффективным сечением рассеяния в телесный угол  $d\Omega$  называется отношение рассеянной в этот угол интенсивности к интенсивности падающего излучения:

$$d\sigma = \frac{d\bar{I}}{I_0} = \frac{r_0^2 \omega^4 \sin^2 \Theta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} d\Omega. \quad (50)$$

Последняя формула дает сечение рассеяния света, поляризованного в плоскости  $(xy)$ . На практике часто важно знать сечение рассеяния неполяризованного излучения, для чего необходимо усреднить эффективное сечение (50) по всем возможным поляризациям, т.е. по возможным ориентациям вектора поляризации  $\vec{E}_0$  в плоскости  $(xy)$ .

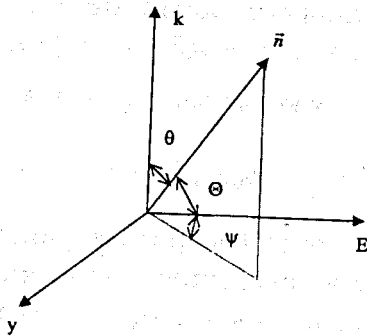


Рис. 9

Угол  $\Theta$  и углы  $\theta$  и  $\psi$  (см. рис. 9) связаны между собой соотношением, которое получается при проекции единичного вектора в направлении наблюдения  $\vec{n}$  на ось  $x$ :

$$\cos \Theta = \sin \theta \cos \psi \iff \sin^2 \Theta = 1 - \sin^2 \theta \cos^2 \psi.$$

Ясно, что усреднение по всем ориентациям  $\vec{E}_0$ , означает усреднение по возможным значениям азимутального угла  $\psi$ :

$$\sin^2 \Theta = 1 - \sin^2 \theta \langle \cos^2 \psi \rangle = 1 - \frac{\sin^2 \theta}{2} = \frac{1 + \cos^2 \theta}{2}.$$

Итак, для неполяризованного излучения

$$d\sigma = \frac{r_0^2 \omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} d\Omega. \quad (51)$$

Угловая зависимость в этой формуле показывает, что наиболее сильное рассеяние происходит в направлении падающего излучения ( $\theta = 0$ ) и в противоположном направлении ( $\theta = \pi$ ). Полное сечение неполяризованного излучения получим, интегрируя (51) по телесному углу:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \frac{r_0^2 \omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}. \quad (52)$$

Формулу (52) называют **дисперсионной формулой классической электродинамики**. Несмотря на то что эта формула получена на примере рассеяния излучения гармоническим осциллятором, в действительности она имеет достаточно общий характер и ее можно отнести к фундаментальным результатам классической электродинамики. По форме (52) совпадает с соответствующей формулой для рассеяния света атомами, полученной в рамках квантовой механики, кроме того, квантово-механический подход показывает, что область применимости дисперсионной формулы не ограничена рассеянием света, но распространяется на ряд других систем.

Зависимость полного сечения рассеяния от частоты имеет резко выраженный максимум при резонансной частоте падающего излучения, близкой к собственной частоте осциллятора. Полагая в (52)  $\omega \simeq \omega_0$ , вблизи резонанса имеем

$$\sigma \simeq \frac{2}{3} \frac{r_0^2 \omega^4}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma/2)^2}. \quad (53)$$

Величина  $\gamma$  характеризует ширину в области резонанса. В точном резонансе  $\omega = \omega_0$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{\omega_0^2}{\gamma^2}.$$

Эффективное сечение для резонансных частот достигает довольно больших значений ( $\gamma \ll \omega_0$ ). Это явление называется резонансной флуоресценцией и играет важную роль в оптике материальных сред.

Вдали от резонанса в области малых частот  $\omega \ll \omega_0$  выражение (52) дает

$$\sigma = \frac{8\pi r_0^2}{3} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^4,$$

а если частота падающей волны много больше собственной частоты осциллятора  $\omega \gg \omega_0$ , получаем

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2.$$

Полное сечение рассеяния не зависит от частоты. Последняя формула дает полное сечение рассеяния падающего излучения свободной частицей. Действительно, для больших частот сила, действующая на частицу со стороны поля, велика по сравнению с квазиупругой силой в осцилляторе и электрон рассеивает свет, как свободный. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно положить в формуле (51)  $\omega_0 = 0$ , пренебречь

радиационной силой (вклад которой порядка  $\tau_0/\lambda \ll 1$ ), и после интегрирования по углам получим

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2. \quad (54)$$

Эта формула известна как **формула Томсона**. Ясно, что эта формула описывает рассеяние электронами любых систем, например атомов, если можно пренебречь силами, связывающими электроны, и считать их свободными. Согласно формуле Томсона полное сечение рассеяния электромагнитных волн свободной заряженной частицей не зависит от частоты падающей волны. Отметим, однако, что использование этой формулы ограничено сверху условием применимости классического подхода  $\hbar\omega \ll mc^2$  – энергия кванта электромагнитного поля должна быть мала по сравнению с энергией покоя частицы. В противном случае надо учитывать квантовые эффекты.

## II. ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

### ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ МАКРОСКОПИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ПУТЕМ УСРЕДНЕНИЯ ВАКУУМНЫХ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

На первый взгляд все многообразие электромагнитных явлений можно описать уравнениями Максвелла – Лоренца

$$\operatorname{rot} \vec{h} = \frac{4\pi}{c} \rho \cdot \vec{v} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{e}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot} \vec{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \vec{h} = 0,$$

$$\operatorname{div} \vec{e} = 4\pi \rho.$$

Напряженности электромагнитного поля  $\vec{h}(\vec{r}, t)$  и  $\vec{e}(\vec{r}, t)$  обусловлены микроскопическими значениями плотности заряда  $\rho(\vec{r}, t)$  и плотности тока  $\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho \cdot \vec{v}$  в данный момент времени и в данной точке пространства. Однако во многих физических задачах невозможно задать распределение и движение каждого отдельного заряда. К классу таких задач относится любая задача об электромагнитных полях в присутствии материальной среды. В макрообъеме вещества содержится  $\sim 10^{23 \pm 3}$  зарядов, причем каждый из них вследствие теплового возбуждения подвижен в большей или меньшей степени. Очевидно, для любых задач в среде (макроскопических задач) представление поля в виде запаздывающих потенциалов малопригодно ввиду того, что

- эти выражения содержат  $\rho(\vec{r}, t)$  и  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ , для задания которых нужно знать положения и скорости огромного числа зарядов,
- эти выражения флюктуируют при перемещении точки наблюдения на очень малые расстояния ( $\sim 10^{-8}$  см – порядка атомных размеров). Такое же изменение напряженностей электромагнитного поля во времени происходит в произвольной точке пространства, что обусловлено тепловыми перемещениями атомов.

Поэтому, как и в случае других процессов, происходящих в макросредах, интерес представляют лишь усредненные значения соответствующих величин. Это усреднение должно быть таким, чтобы сгладить неоднородности атомной структуры, но сохранить пространственно-временные изменения, определяемые условиями конкретного опыта. Во многих задачах вполне достаточно знания средней напряженности полей по области размером  $\sim 10^{-6}$  см<sup>3</sup>, и т.к. объем атома  $\sim 10^{-24}$  см<sup>3</sup>, то в рассматриваемом макрообъеме содержится  $10^{18}$  атомов, для такого числа все микрофлуктуации можно считать усредненными.

Таким образом, для построения макроскопической электродинамики материальных сред необходимо усреднить систему уравнений Максвелла по физически бесконечно малому объему  $V_0$ , который, с одной стороны, должен быть настолько мал, чтобы при перемещении на расстояния порядка его линейных размеров усредненные величины изменялись незначительно, с другой стороны, этот объем должен быть настолько велик, чтобы содержать достаточное число атомов (или молекул). Кроме того, необходимо также усреднение по временному промежутку  $\tau$ , который должен быть велик настолько, чтобы были усреднены временные неоднородности, и малым настолько, чтобы усредненные величины за время порядка  $\tau$  изменялись незначительно. Определим среднее по физически бесконечно малому объему  $V_0$  и малому промежутку времени согласно

$$\langle f \rangle = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} \frac{1}{V_0} \int_{V_0} f(\vec{r}, t) dV \cdot dt$$

и введем

$$\langle \vec{e} \rangle = \vec{E}, \quad \langle \vec{h} \rangle = \vec{B},$$

тогда

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \langle \rho \cdot \vec{v} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\text{div} \vec{B} = 0,$$

$$\text{div} \vec{E} = 4\pi \langle \rho \rangle,$$

а также

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \text{div} \langle \rho \cdot \vec{v} \rangle = 0.$$

Далее необходимо найти  $\langle \rho \rangle$  и  $\langle \rho \cdot \vec{v} \rangle$ , что требует знания определенных свойств рассматриваемых сред. Ясно, что ток в металлах и плазме

газового разряда, процессы в ферро- и диамагнетиках и т.п. имеют существенно разную природу и сопровождаются различающимися явлениями. Для учета этих различий правильнее было бы исходить из термодинамических свойств соответствующих сред. Однако можно строить феноменологическую теорию электромагнитных явлений в среде, исходя из некоторых достаточно общих допущений о свойствах среды. Одно из основных предположений модели – это разделение (условное) всех веществ на две группы – проводники и диэлектрики. Проводники – это тела, в которых под действием приложенного внешнего поля возникает перемещение зарядов – электрический ток, а в диэлектриках ток не возникает, хотя под действием поля заряды смещаются в новые положения. Еще раз подчеркнем, что такое подразделение условно, но служит неплохой основой для построения электродинамики сплошных сред.

Приступим к вычислению  $\langle \rho \rangle$ . Допустим для этого, что электронейтральное тело помещено во внешнее поле. Ясно, что в атомах (или молекулах) этого тела под действием внешнего поля произойдет смещение зарядов, т.е. возникнет отличный от нуля дипольный момент. Введем средний дипольный момент единицы объема  $\vec{P}$  и назовем его вектором поляризации. Итак, электронейтральное тело во внешнем электрическом поле приобретает дипольный момент

$$\vec{d} = \int \vec{P} dV = \int \vec{r} \cdot \rho_{\text{связ}} dV \implies \vec{P} = \vec{r} \cdot \rho_{\text{связ}}.$$

Плотность связанных зарядов  $\rho_{\text{связ}}$  возникает из-за смещения зарядов, связанных в атомах (или молекулах). Воспользуемся известной формулой векторного анализа

$$\oint_S (\vec{P}\vec{n}) \vec{r} dS = \int_V \vec{r} \operatorname{div} \vec{P} dV + \int_V (\vec{P}\vec{\nabla}) \vec{r} dV = \int_V \vec{r} \operatorname{div} \vec{P} dV + \int_V \vec{P} dV.$$

Если выбрать поверхность интегрирования охватывающей рассматриваемый объем, то поверхностный интеграл обратится в нуль и

$$\int_V \vec{P} dV = - \int_V \vec{r} \operatorname{div} \vec{P} dV = \int \vec{r} \cdot \rho_{\text{связ}} dV \implies \rho_{\text{связ}} = -\operatorname{div} \vec{P}.$$

Итак, если поляризация среды неоднородна и вектор  $\vec{P}$  меняется от точки к точке так, что  $\operatorname{div} \vec{P} \neq 0$ , то в теле возникает объемный заряд плотностью  $\rho_{\text{связ}}$ . Этот результат допускает наглядную интерпретацию: выделим внутри тела две воображаемые поверхности  $S_1$  и  $S_2$ . Если возникшая из-за наличия внешнего поля поляризация неоднородна, то одну из поверхностей (например,  $S_2$ ) пересечет большее число зарядов, чем

другую ( $S_1$ ), т.е. из объема, заключенного между  $S_1$  и  $S_2$ , выходит больше зарядов, чем входит в него, поэтому возникает объемный заряд плотностью  $\rho_{\text{связ}}$ .

Поляризация приводит к возникновению на поверхности тела поверхностного заряда. Действительно,

$$\int \operatorname{div} \vec{P} dV = \oint_{S_1} P_n dS - \oint_{S_2} P_n dS = - \int \rho_{\text{связ}} dV.$$

Если  $S_1$  выбрано вне тела, а  $S_2$  внутри него, то

$$\oint_{S_2} P_n dS = \int_V \rho_{\text{связ}} dV,$$

здесь  $V$  – объем между  $S_1$  и  $S_2$ . Устремим  $S_2$  к поверхности тела  $S$ , тогда

$$\lim_{S_2 \rightarrow S} \int_V \rho_{\text{связ}} dV \rightarrow \oint_S W_n dS, \quad \lim_{S_2 \rightarrow S} \oint_{S_2} P_n dS \rightarrow \oint_S P_n dS,$$

Таким образом, внешнее поле индуцирует на поверхности тела заряд плотностью  $W$ , который компенсируется объемным зарядом плотностью  $\rho_{\text{связ}}$ , и тело в целом остается электронейтральным:

$$\int \rho_{\text{связ}} dV = - \int \operatorname{div} \vec{P} dV = - \oint_S P_n dS = 0$$

(поверхность  $S$  выбрана вне тела). Изложенное позволяет заключить, что объемный заряд, индуцированный внешним полем в среде, для электронейтральной системы есть

$$\langle \rho \rangle = \rho_{\text{связ}}.$$

При наличии в веществе свободных зарядов плотностью  $\rho$

$$\langle \rho \rangle = \rho + \rho_{\text{связ}},$$

а полный заряд

$$\int \langle \rho \rangle dV = \int (\rho + \rho_{\text{связ}}) dV = \int \rho dV = Q.$$

Для вычисления  $\langle \rho \vec{v} \rangle$  допустим, что

- рассматриваемые среды однородны и изотропны,
- если тело помещено во внешнее поле, то среднее поле в объеме тела мало по сравнению с внутриатомными полями.



Допустим также, что

$$\langle \rho \vec{v} \rangle = f(\vec{E}, \vec{B}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \frac{\partial E_i}{\partial x^k}, \frac{\partial B_i}{\partial x^k}).$$

Слабость этих полей позволяет разложить эту функцию в степенной ряд и ограничиться первыми членами разложения (согласно предположению члены, квадратичные по полю, много меньше линейных). Вектор  $\langle \rho \vec{v} \rangle$  – истинный вектор, поэтому в разложении должны быть исключены скаляры  $\text{div} \vec{E}$ ,  $\text{div} \vec{B} = 0$  и псевдовекторы  $\text{rot} \vec{E}$ ,  $\partial \vec{B} / \partial t$ , в результате получим

$$\langle \rho \vec{v} \rangle = \sigma \vec{E} + \kappa \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \alpha \cdot \text{rot} \vec{B},$$

коэффициенты  $\sigma$ ,  $\kappa$ ,  $\alpha$  характеризуют свойства среды.

Обсудим физический смысл каждого из слагаемых предыдущего выражения.

- При наличии  $\vec{E}$  в среде возникает ток, средняя плотность которого  $\sigma \vec{E}$  пропорциональна средней напряженности поля. Коэффициент  $\sigma$  определяется свойствами среды и называется проводимостью. (Для проводников  $\sigma \neq 0$ , для диэлектриков  $\sigma = 0$ .) Итак,  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  – плотность тока проводимости, т.е. количество заряда, протекающее в среднем через единичную площадку перпендикулярно ей в единицу времени.
- Дивергенция от любого ротора есть нуль, поэтому, предполагая  $\kappa = \text{const}$ , получим

$$\text{div} \langle \rho \vec{v} \rangle = \text{div} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \text{div}(\kappa \vec{E}).$$

Для свободных зарядов  $\text{div} \vec{j} = -\partial \rho / \partial t$ , а для связанных  $\text{div} \langle \rho \vec{v} \rangle = -\partial \langle \rho \rangle / \partial t$ , поэтому с учетом того, что  $\langle \rho \rangle = \rho + \rho_{\text{связ}}$ , получим

$$\frac{\partial \rho_{\text{связ}}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{div}(\kappa \vec{E}) \implies \rho_{\text{связ}} = -\text{div}(\kappa \vec{E}) = -\text{div} \vec{P},$$

что дает

$$\vec{P} = \kappa \vec{E},$$

$\kappa$  – так называемая диэлектрическая восприимчивость, а

$$\kappa \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \vec{j}_{\text{поляризации}},$$

т.е. изменение вектора поляризации среды во времени эквивалентно возникновению тока поляризации.

- Помножим наше разложение на  $\vec{r}$  векторно и проинтегрируем результат по объему:

$$\int [\vec{r}, \langle \rho \vec{v} \rangle] dV = \int [\vec{r}, \vec{j}] dV + \int [\vec{r}, \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}] dV + \alpha c \int [\vec{r}, \text{rot} \vec{E}] dV.$$

Второе слагаемое правой части этого равенства обращается в нуль, т.к.  $\vec{P} = \vec{r} \rho_{\text{связ}}$ , тогда

$$\int [\vec{r}, \langle \rho \vec{v} \rangle - \vec{j}] dV = c \int [\vec{r}, \text{rot} \vec{M}] dV, \quad \vec{M} = \alpha \cdot \vec{E}$$

или

$$\int [\vec{r}, \rho_{\text{связ}} \vec{v}] dV = c \int [\vec{r}, [\nabla \vec{M}]] dV = c \cdot \int 2 \vec{M} dV \implies \int \vec{M} dV = \frac{1}{2c} \int [\vec{r}, \rho_{\text{связ}} \vec{v}] dV,$$

иначе говоря,  $\vec{M}$  – магнитный момент единицы объема, и если внешнее поле вызывает неоднородное намагничивание среды, то возникает ток намагничивания

$$\vec{j}_{\text{намагн}} = c \cdot \text{rot} \vec{M}.$$

Итак,

$$\langle \rho \rangle = \rho + \rho_{\text{связ}}, \quad \langle \rho \vec{v} \rangle = \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \cdot \text{rot} \vec{M},$$

где

$$\vec{P} = \kappa \vec{E}, \quad \vec{M} = \alpha \vec{E}.$$

Вернемся к уравнениям Максвелла

$$\text{div} \vec{E} = 4\pi \langle \rho \rangle = 4\pi(\rho + \rho_{\text{связ}}) = 4\pi(\rho - \text{div} \vec{P}) \implies \text{div}(\vec{E} + 4\pi \vec{P}) = 4\pi \rho.$$

Введем вектор электрической индукции  $\vec{D}$  ( $\vec{E}$  – вектор напряженности электрического поля)

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} \implies \vec{D} = \vec{E}(1 + 4\pi \kappa) = \epsilon \vec{E},$$

где  $\epsilon = 1 + 4\pi \kappa$  – диэлектрическая проницаемость среды, тогда

$$\text{div} \vec{D} = 4\pi \rho.$$

Далее,

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \cdot \text{rot} \vec{M} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot}(\vec{B} - 4\pi\vec{M}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}.$$

Введем вектор напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  ( $\vec{B}$  – вектор магнитной индукции)

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}, \quad \vec{M} = \alpha\vec{B},$$

тогда

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}.$$

Обычно магнитные свойства среды характеризуют магнитной проницаемостью

$$\mu = \frac{1}{1 - 4\pi/\alpha}, \quad \text{так что } \vec{B} = \mu\vec{H}.$$

Итак, усреднением микроскопических уравнений Максвелла – Лоренца удалось получить систему уравнений Максвелла в среде

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0,$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\rho,$$

которые должны быть дополнены материальными уравнениями

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \quad \vec{D} = \vec{E}(1 + 4\pi\kappa) = \varepsilon\vec{E}, \quad \varepsilon = 1 + 4\pi\kappa;$$

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}, \quad \vec{M} = \alpha\vec{B}, \quad \mu = \frac{1}{1 - 4\pi/\alpha}, \quad \vec{B} = \mu\vec{H},$$

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} \quad \text{– закон Ома.}$$

$\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $\kappa$ ,  $\alpha$  характеризуют электромагнитные свойства среды. Понятно, что должен выполняться закон сохранения заряда

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0,$$

а на заряженную частицу с зарядом  $e$  со стороны электромагнитного поля будет действовать сила Лоренца

$$\vec{F} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{B}].$$

# ВЫВОД УРАВНЕНИЙ Д'АЛАМБЕРА ИЗ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Система уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (55)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (56)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (57)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho \quad (58)$$

по заданным плотности тока  $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t)$  и плотности заряда  $\rho = \rho(\vec{r}, t)$  позволяет определить пространственно-временное распределение электромагнитного поля, если известны материальные уравнения, которые в простейшем случае однородных, изотропных сред и медленно меняющихся электромагнитных полей имеют вид

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

В математическом отношении уравнения Максвелла не относятся к разряду хорошо изученных. Весьма заманчивой представляется идея преобразовать эти уравнения к эквивалентной форме, которая относится к классу хорошо известных задач математической физики. Такое преобразование возможно, если вместо напряженностей ввести потенциалы электромагнитного поля  $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}, t)$  и  $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$ . Действительно, уравнение (57) будет удовлетворено, если ввести вектор-потенциал  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  согласно

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (59)$$

Из (56) с учетом (59) имеем

$$\operatorname{rot} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0,$$

которое удовлетворяется, если ввести скалярный потенциал  $\varphi$  в соответствии с

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (60)$$

После подстановки (59) и (60) в (55), в котором учтены материальные уравнения, получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \frac{4\pi\mu \vec{j}}{c} - \frac{\varepsilon\mu}{c} \left( \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right),$$

что дает

$$\Delta \vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu \vec{j}}{c} + \operatorname{grad} \left( \operatorname{div} \vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (61)$$

Аналогично из (58) имеем

$$\varepsilon \cdot \operatorname{div} \vec{E} = -\varepsilon \cdot \operatorname{div} \left( \operatorname{grad} \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 4\pi\rho,$$

поэтому

$$\Delta \varphi = -\frac{4\pi}{c} \rho - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{A}. \quad (62)$$

Электромагнитные поля определяются потенциалами  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  и  $\varphi(\vec{r}, t)$  не однозначно. Действительно, определяющие поля соотношения (59) и (60) не меняются при преобразованиях

$$\vec{A} = \vec{A}' + \operatorname{grad} f, \quad \varphi = \varphi' + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad f = f(\vec{r}, t), \quad (63)$$

известных как калибровочные (градиентные) преобразования, относительно которых ковариантны уравнения Максвелла (калибровочные преобразования вместе с преобразованиями Лоренца образуют группу симметрии уравнений электродинамики). Неоднозначность в выборе потенциалов позволяет наложить на них одно дополнительное условие. Чаще всего это условие выбирают в ковариантном виде

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (64)$$

и называют **условием Лоренца**. Покажем, что если потенциалы не удовлетворяют этому условию, то можно подобрать функцию  $f(\vec{r}, t)$  так, чтобы штрихованные потенциалы подчинялись (64). Пусть

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \psi(\vec{r}, t) \neq 0.$$

Преобразовав последнее согласно (63), имеем

$$\operatorname{div} \vec{A}' + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \Delta f - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \psi(\vec{r}, t).$$

Выберем  $f(\vec{r}, t)$  так, чтобы она удовлетворяла уравнению Д'Аламбера:

$$\Delta f - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \psi(\vec{r}, t),$$

тогда штрихованные потенциалы удовлетворяют условию Лоренца. Другими словами, на потенциалы всегда можно наложить условие Лоренца и они будут подчиняться уравнениям Д'Аламбера:

$$\Delta \vec{A} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{j};$$

$$\Delta \varphi - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho;$$

причем решения этих уравнений должны обращать условие Лоренца (это или аналогичное условие называют условием калибровки) в тождество.

При определенном выборе граничных и начальных условий решение этих уравнений имеет вид запаздывающих потенциалов:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', \tau) dV'}{R},$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\rho(\vec{r}', \tau) dV'}{R},$$

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'|, \quad \tau = t - \frac{R}{v}, \quad v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

Нетрудно понять, что  $v$  есть скорость распространения электромагнитных взаимодействий в среде.

## ТЕОРЕМА ПОЙНТИНГА

Рассмотрим свободный заряд в электромагнитном поле. Известно, что в единицу времени электромагнитное поле совершает над этим зарядом работу, равную

$$\int \rho \vec{v} \vec{E} dV = \int \vec{j} \vec{E} dV.$$

Первое уравнение Максвелла дает

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \vec{H} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

поэтому

$$\int \vec{j} \vec{E} dV = \int \left( \frac{c}{4\pi} \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H} - \frac{\vec{E}}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dV.$$

Из второго уравнения Максвелла следует

$$\frac{c}{4\pi} \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} + \frac{1}{4\pi} \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0.$$

Добавив этот ноль в предыдущее равенство, получим

$$\int \vec{j} \vec{E} dV = \int \left( \frac{c}{4\pi} \left( \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H} - \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} \right) - \frac{1}{4\pi} \left( \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \right) dV.$$

Введем вектор Пойнтинга

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{H}]$$

и понятие плотности энергии электромагнитного поля

$$W = \frac{1}{8\pi} (\vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B}) = \frac{1}{8\pi} (\varepsilon E^2 + \mu H^2).$$

Тогда

$$-\int \frac{\partial W}{\partial t} dV = \int \vec{j} \vec{E} dV + \int \text{div } \vec{S} dV,$$

или в дифференциальной форме

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \vec{j} \vec{E} + \text{div } \vec{S},$$

а в эквивалентной интегральной форме

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int W dV = \int \frac{j^2}{\sigma} dV + \oint \vec{S} d\vec{\Sigma}.$$

Эти соотношения составляют содержание известной теоремы Пойнтинга, выражающей закон сохранения энергии. Заметим, что в отсутствие зарядов теорема Пойнтинга в дифференциальном виде имеет форму, аналогичную уравнению непрерывности, которое является отражением закона сохранения заряда.

## УСЛОВИЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

В тех случаях, когда величины, характеризующие электромагнитное поле, претерпевают разрыв, использование уравнений Максвелла в дифференциальной форме невозможно. Перепишем поэтому уравнения Максвелла в эквивалентной интегральной форме:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}, \quad I = \int \vec{j} d\vec{S};$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S};$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \oint \vec{B} d\vec{S} = 0;$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho \Rightarrow \oint \vec{D} d\vec{S} = 4\pi e, \quad e = \int \rho dV.$$

Допустим, что две разные среды с постоянными параметрами, харак-

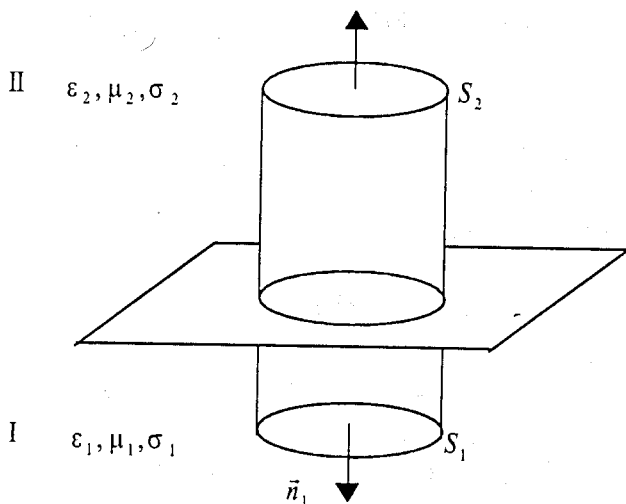


Рис. 10

теризующими электромагнитные свойства каждой, заполняют верхнее и нижнее (см. рис. 10 и 11) полупространства. Выделим на границе раздела сред бесконечно малый цилиндр (см. рис. 10). Тогда из уравнения Максвелла

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0 \Rightarrow B_{2n} S_2 - B_{1n} S_1 + B \cdot L \cdot h, \quad L = 2\pi R,$$



при  $h \rightarrow 0$  получим

$$B_{2n} - B_{1n} = 0 \Rightarrow \mu_2 \cdot H_{2n} - \mu_1 \cdot H_{1n} = 0.$$

Точно так же

$$D_{2n}S_2 - D_{1n}S_1 + D \cdot L \cdot h = 4\pi\rho \cdot S \cdot h.$$

Примем, что при  $h \rightarrow 0$   $\rho Sh \rightarrow \sigma$  ( $\sigma$  - поверхностная плотность заряда), тогда

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \Rightarrow \varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = 4\pi\sigma.$$

Аналогично из закона сохранения заряда

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \oint \vec{j} d\vec{S} \Rightarrow j_{2n} - j_{1n} = - \frac{\partial \sigma}{\partial t}.$$

Если выделить на границе раздела сред бесконечно малый контур то, т.к.

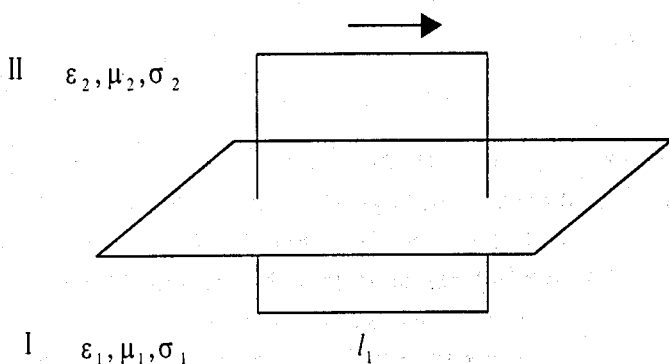


Рис. 11

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = E_{2t}l_2 - E_{1t}l_1 + E \cdot h = - \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \cdot l \cdot h,$$

при  $h \rightarrow 0$ , как легко усмотреть из рис. 11, получим

$$E_{2t} - E_{1t} = 0 \Rightarrow \frac{j_{2t}}{j_{1t}} = \frac{\sigma_2 E_{2t}}{\sigma_1 E_{1t}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

Точно так же из уравнения

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S},$$

ввиду того, что при  $h \rightarrow 0$  сила тока  $I$  обращается в поверхностную плотность тока  $i$ , имеем

$$H_{2t} - H_{1t} = \frac{4\pi}{c} i.$$

## ВВЕДЕНИЕ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКУ СРЕД С ВРЕМЕННОЙ И ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

Одна из возможных форм уравнений электромагнитного поля, явно отражающих тот факт, что под действием внешних источников в веществе индуцируются заряды и токи, имеет вид

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j}_0 + \vec{j}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (65)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (66)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (67)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi(\rho_0 + \rho). \quad (68)$$

Здесь  $\vec{E}$  — вектор напряженности электрического поля,  $\vec{B}$  — вектор магнитной индукции,  $\rho_0$ ,  $\vec{j}_0$  — плотности зарядов и токов внешних источников,  $\rho$ ,  $\vec{j}$  — плотности зарядов и токов, индуцированных в среде. Понятно, что  $\rho$  и  $\vec{j}$  должны подчиняться закону сохранения заряда, поэтому

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

Физический смысл векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  определяется выражением силы, действующей со стороны поля на движущийся со скоростью  $\vec{v}$  заряд  $e$ :

$$\vec{F} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{v}, \vec{B}].$$

Электромагнитные свойства среды задают так называемые материальные уравнения, связывающие плотности индуцированных в среде зарядов и токов с векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ .

Обычной считается другая форма записи максвелловских уравнений в среде:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (69)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (70)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (71)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho_0, \quad (72)$$

где введены новые вспомогательные величины – вектор напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  и вектор электрической индукции  $\vec{D}$ , причем

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}, \quad \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \quad (73)$$

где  $\vec{M}$  – вектор намагниченности – магнитный момент единицы объема вещества,  $\vec{P}$  – вектор поляризации – дипольный момент единицы объема вещества. Если учесть также, что

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}, \quad \vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \cdot \operatorname{rot} \vec{M}, \quad \rho = -\operatorname{div} \vec{P},$$

где  $\sigma$  – проводимость среды, то картина станет полной. Вышеприведенные формы записи уравнений Максвелла эквивалентны, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой. Чаще всего материальные уравнения (73) записывают как

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\vec{H}, \quad \vec{j}_0 = \sigma\vec{E}, \quad (74)$$

где  $\epsilon$  – диэлектрическая,  $\mu$  – магнитная проницаемости, а  $\sigma$  – проводимость среды.

Система уравнений Максвелла получена путем усреднения уравнений Максвелла–Лоренца для микроскопических полей на основе некоторых достаточно общих допущений о свойствах вещества. Эти допущения носят модельный характер и поэтому ограничивают область применимости материальных уравнений, что характерно для любых феноменологических теорий. Таким образом, область применимости системы уравнений Максвелла вследствие ограниченности материальных уравнений также ограничена. Обсудим допущения, которые использовались при выводе уравнений (73, 74):

1. Было предположено, что соотношение между  $\vec{M}$  и  $\vec{B}$  (или, что то же, между  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ ) линейно. С другой стороны, экспериментальные факты для ферро- и антиферромагнетиков приводят к заключению о том, что связь между  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  нелинейна и неоднозначна (петля гистерезиса). Аналогична ситуация и для сегнетоэлектриков, для которых предположение о линейности связи  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  (или, что то же, между  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$ ) нарушается.

2. Существенным ограничением является предположение об однородности и изотропности рассматриваемых сред, вследствие чего  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  имеют скалярный характер. Это предположение нарушается для анизотропных сред (например, монокристаллов), а материальные уравнения записываются в виде

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j, \quad B_i = \mu_{ij} H_j, \quad j_i = \sigma_{ij} E_j. \quad (75)$$

3. Было предположено, что рассматриваемые внешние поля, в которых находится вещество, или постоянны, или изменяются достаточно медленно. Действительно, макроскопическое усреднение по объему, содержащему достаточно большое число молекул, имеет смысл, лишь если на расстояниях порядка атомных (или молекулярных) размеров "а" пространственные изменения полей невелики. Поскольку порядок пространственных изменений поля совпадает с длиной волны  $\lambda$ , то должно быть  $\lambda \gg a$ , или если  $\omega$  - частота изменения поля, то она должна быть много меньше характерной для данного вещества "собственной" частоты  $\omega_0 \leq c/a$ . Таким образом, для того чтобы используемая при выводе материальных уравнений операция усреднения имела смысл, необходимо, чтобы

$$\omega \ll \omega_0 \leq \frac{c}{a}.$$

4. Даже при выполнении условия  $\omega \ll \omega_0$  существует достаточно широкий интервал частот  $\omega$ , в котором полученные выше материальные уравнения неприменимы. Действительно, при выводе материальных уравнений предполагалось, что характерное время релаксации данного вещества  $\tau$  много меньше периода изменения внешнего поля, т.е. за время изменения поля от нуля до нуля релаксационные процессы в среде (поляризация или намагничивание) под действием этого поля завершаются. Поэтому поляризация в некоторой точке пространства в момент  $t$  определяется средним значением поля в той же точке и тот же момент времени. В том же случае, когда частота изменения поля сравнима с обратным временем релаксации, поляризация вещества станет зависящей от истории процесса. Действительно, релаксационные процессы, начавшиеся в среде под действием поля, которое растет от нуля начиная с некоторого момента  $t$  и обращается в нуль спустя  $\delta t$ , меньшее времени релаксации, будут продолжаться, т.е. поляризация (или намагничивание) среды будет отставать от поля. Таким образом, для полей с характерными частотами  $\omega \geq 1/\tau$  материальное уравнение должно иметь

вид

$$D(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t \varepsilon(t, \hat{t}) \vec{E}(\vec{r}, \hat{t}) d\hat{t},$$

где интегрирование распространено на все  $\hat{t} < t$ , а  $\varepsilon(t, \hat{t})$  учитывает воздействие на поляризацию среднего поля во все предыдущие моменты времени. Отсутствие выделенных моментов времени позволяет считать, что

$$\varepsilon(t, \hat{t}) = \varepsilon(t - \hat{t}).$$

Итак,

$$D(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t \varepsilon(t - \hat{t}) \vec{E}(\vec{r}, \hat{t}) d\hat{t}$$

для изотропных сред, а для анизотропных

$$D(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t \varepsilon_{ij}(t - \hat{t}) E_j(\vec{r}, \hat{t}) d\hat{t}$$

(предполагается суммирование по  $j$ ).

Материальные уравнения такого типа учитывают предысторию формирования электромагнитных свойств среды, поэтому говорят, что они учитывают **временную (или частотную) дисперсию**. Ясно, что материальные уравнения, связывающие векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ ,  $\vec{j}$  и  $\vec{E}$ , имеют аналогичный вид. Важно заметить, что если частота поля  $\omega \geq 1/\tau$ , то тем не менее неравенство  $\omega \ll \omega_0$  остается в силе, т.е., несмотря на возможность макроскопического усреднения, простейшее материальное уравнение  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$  теряет свою применимость. Действительно, т.к.  $\tau \leq \tau_{ат} \sim a/v$ , ( $v$  - скорость электрона в атомах), то

$$\omega \sim \frac{1}{\tau} \sim \frac{1}{\tau_{ат}} \sim \frac{v}{a} \sim \frac{v}{c} \omega_0 \ll \omega_0.$$

Высокочастотные поля могут вызывать в среде явления переноса, тогда возникает необходимость учета влияния поля в соседних точках на электромагнитные свойства среды в данной точке. Иначе говоря, состояние среды в данный момент времени в некоторой точке определяется не только значением поля в этой точке, но и значением поля в тех областях среды, откуда влияние поля переносится в результате переноса вещества, обусловленного высокочастотными полями (действительно, высокочастотное магнитное поле, вследствие максвелловского уравнения  $\text{rot } \vec{E} = \partial \vec{B} / \partial t$ , приводит к возникновению резко меняющегося в пространстве электрического поля). Более того, если длина волны внешнего поля  $\lambda$  порядка размеров пространственных неоднородностей вещества,

то поле как бы "прощупывает" эти пространственные неоднородности и электромагнитные свойства среды в данной точке будут зависеть также и от значения поля в соседних точках. В этом случае, когда учитывается влияние соседних точек среды на ее свойства в данной точке, говорят о **пространственной дисперсии**. Таким образом, для изотропных сред

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt \int \varepsilon(\vec{r}, \vec{r}', t - t') \vec{E}(\vec{r}', t') dV'.$$

Это выражение учитывает вклад, который приносят в поляризацию в данный момент и в данной точке история процесса и находящиеся в соседних точках заряды.

Итак, простейшие материальные уравнения применимы для случаев, когда среды однородны и изотропны, нет необходимости учета временной и пространственной дисперсии, и не применимы для ферро- и антиферромагнетиков, а также сегнетоэлектриков. В тех же случаях, когда частота внешнего электромагнитного поля такова, что становится существенной история процесса поляризации, необходимо учесть временную дисперсию, а если это внешнее поле "прощупывает" структуру и тем самым внутренние неоднородности среды, то оказывается необходимым учитывать также и пространственную дисперсию. Примерами сред, для которых существенен учет временной и пространственной дисперсии, могут служить металлы, полупроводники, плазма в высокочастотном электромагнитном поле. В металлах, например, длина свободного пробега электронов  $\sim 10^{-5} \div 10^{-6}$  см и, соответственно, существуют пространственные неоднородности таких масштабов, которые сравнимы с длиной волны внешнего электромагнитного поля. Итак, временная и пространственная дисперсия учитывается соотношениями типа

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt \int \varepsilon(|\vec{r} - \vec{r}'|, t - t') \vec{E}(\vec{r}', t') dV',$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt \int \mu(|\vec{r} - \vec{r}'|, t - t') \vec{H}(\vec{r}', t') dV',$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt \int \sigma(|\vec{r} - \vec{r}'|, t - t') \vec{E}(\vec{r}', t') dV'$$

или

$$D_i(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt \int \varepsilon_{ij}(|\vec{r} - \vec{r}'|, t - t') E_j(\vec{r}', t') dV',$$

$$B_i(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt \int \mu_{ij}(|\vec{r} - \vec{r}'|, t - t') H_j(\vec{r}', t') dV'.$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int \sigma(|\vec{r} - \vec{r}'|, t - t') \vec{E}(\vec{r}', t') dV'.$$

Зависимость от  $\vec{r}, \vec{r}'$  в виде  $|\vec{r} - \vec{r}'|$  обусловлена отсутствием в среде выделенных точек и направлений. Вклад в  $\epsilon, \mu, \sigma$  дают лишь те изменения поляризации (намагничивания, проводимости), которые за время  $(t - t')$  передаются на расстояния  $|\vec{r} - \vec{r}'|$ , понятно, что  $|\vec{r} - \vec{r}'| < c(t - t')$ .

Явления, которые происходят в среде в высокочастотных электромагнитных полях, когда становится существенной временная и пространственная дисперсия, удобно изучать, используя упрощающий решение задачи метод разложения величин, характеризующих электромагнитные явления, в интеграл Фурье:

$$f(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int f(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} d\vec{k} d\omega,$$

где под  $f$  будем подразумевать  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{j}, \rho$  и т.п. После того как все величины в уравнениях Максвелла будут представлены в виде разложений в интеграл Фурье, получим систему алгебраических уравнений для фурье-образов величин, характеризующих электромагнитное поле, эквивалентную уравнениям Максвелла:

$$i \left[ \vec{k}, \vec{H}(\vec{k}, \omega) \right] = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{k}, \omega) - \frac{i}{c} \omega \vec{D}(\vec{k}, \omega), \quad (76)$$

$$i \left[ \vec{k}, \vec{E}(\vec{k}, \omega) \right] = \frac{i}{c} \omega \vec{B}(\vec{k}, \omega), \quad (77)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B}(\vec{k}, \omega) = 0, \quad (78)$$

$$i \vec{k} \cdot \vec{D}(\vec{k}, \omega) = 4\pi \rho. \quad (79)$$

Эти уравнения наполняются физическим содержанием после задания материальных уравнений (которые называют также и **уравнениями связи**):

$$D_i(\vec{k}, \omega) = \epsilon_{ij}(\vec{k}, \omega) E_j(\vec{k}, \omega), \quad (80)$$

$$B_i(\vec{k}, \omega) = \mu_{ij}(\vec{k}, \omega) H_j(\vec{k}, \omega), \quad (81)$$

$$j_i(\vec{k}, \omega) = \sigma_{ij}(\vec{k}, \omega) E_j(\vec{k}, \omega), \quad (82)$$

где

$$\epsilon_{ij}(\vec{k}, \omega) = \int_{-\infty}^T \int_V \epsilon_{ij}(\vec{R}, \tau) e^{-i(\vec{k}\vec{R} - \omega\tau)} d\vec{R}, \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}', \quad \tau = t - t'.$$

Таким образом, представив все характеристики электромагнитных полей и их источников в виде разложения Фурье, удалось свести задачу интегрирования дифференциальных уравнений Максвелла к задаче решения эквивалентных алгебраических уравнений и последующего вычисления искомых функций координат и времени подстановкой найденных фурье-образов в интеграл Фурье. Отметим, что последний шаг в некоторых задачах можно вообще не проводить, если в явном виде известен закон дисперсии, т.е. зависимость  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  от  $\vec{k}$  и  $\omega$ , т.к. в этом случае свойства электромагнитного поля в среде определяются без этого обращения.

В тех случаях, когда необходимо учитывать пространственную дисперсию, электромагнитные свойства вещества становятся зависящими от вектора  $\vec{k}$ . Этот вектор выделяет в среде определенное направление, нарушая тем самым изотропию пространства, следовательно,  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  должны иметь тензорный характер. Примем без доказательства, что этим величинам соответствуют симметричные тензоры, а единственным симметричным тензором, построенным из  $\vec{k}$ , который в предельном случае отсутствия пространственной дисперсии описывает лишь временную, является

$$\epsilon_{ij}(\vec{k}, \omega) = \epsilon_{\perp}(\vec{k}, \omega) \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + \epsilon_{\parallel}(\vec{k}, \omega) \frac{k_i k_j}{k^2}$$

– **тензор диэлектрической проницаемости**. Таким образом, электромагнитные свойства однородных и изотропных сред при наличии пространственной дисперсии характеризуются диэлектрической проницаемостью двух типов – поперечной  $\epsilon_{\perp}$  и продольной  $\epsilon_{\parallel}$ . Если ось  $z$  системы координат выбрать в направлении вектора  $\vec{k}$  (обычно это направление распространения волны), то

$$\epsilon_{ij}(\vec{k}, \omega) = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{pmatrix}.$$

В отсутствие пространственной дисперсии  $\epsilon$  может зависеть только от  $\omega$ , поэтому необходимо положить

$$\epsilon_{\perp} = \epsilon_{\parallel} = \epsilon(\omega) \delta_{ij}.$$

Известно, что в вакууме электромагнитные волны поперечны. В средах с пространственной дисперсией электромагнитные волны могут быть и продольными. Для того чтобы показать это, будем искать волновые (в областях без источников) решения уравнений Максвелла для фурье-



образов всех характеристик поля. Преобразуем алгебраические уравнения, определяющие эти величины:

$$\left[ \vec{k}, \vec{H}(\vec{k}, \omega) \right] = -\frac{\omega}{c} \vec{D}(\vec{k}, \omega),$$

$$\left[ \vec{k}, \vec{E}(\vec{k}, \omega) \right] = \frac{\omega}{c} \vec{B}(\vec{k}, \omega),$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B}(\vec{k}, \omega) = 0,$$

$$\vec{k} \cdot \vec{D}(\vec{k}, \omega) = 0,$$

помножив второе уравнение на  $\vec{k}$  векторно, затем, считая среду немагнитной ( $\mu = 1$ ), подставим в результат первое:

$$\left[ \vec{k}, \left[ \vec{k}, \vec{E} \right] \right] = \frac{\omega}{c} \left[ \vec{k}, \vec{H}(\vec{k}, \omega) \right] = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{D},$$

что дает

$$k_i k_l E_l - k^2 E_i + \frac{\omega^2}{c^2} D_i = 0.$$

Подставив в последнее уравнения связи и выражение для тензора диэлектрической проницаемости, получим

$$\left[ k^2 \delta_{il} - k_i k_l - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp} \left( \delta_{il} - \frac{k_i k_l}{k^2} \right) - \varepsilon_{\parallel} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{k_i k_l}{k^2} \right] E_l =$$

$$\left[ \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp} \right) \left( \delta_{il} - \frac{k_i k_l}{k^2} \right) - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\parallel} \frac{k_i k_l}{k^2} \right] E_l = 0.$$

Выберем  $\vec{k}$  по направлению оси  $z$ , тогда

$$\left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp} \right) E_x = 0, \quad \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp} \right) E_y = 0, \quad \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\parallel} E_z = 0,$$

поэтому

$$\text{если } k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp} = 0, \text{ то } E_x, E_y \neq 0,$$

$$\text{если } \varepsilon_{\parallel} = 0, \text{ то } E_z \neq 0.$$

Таким образом, в средах с пространственной дисперсией и если выполнены два независимых дисперсионных соотношения

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp} = 0, \quad \varepsilon_{\parallel} = 0,$$

могут распространяться две независимые волны – поперечная (закон дисперсии  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\perp} \Rightarrow E_x, E_y \neq 0$ ) и продольная (закон дисперсии  $\epsilon_{\parallel} = 0 \Rightarrow E_z \neq 0$ ). Заметим также, что у продольных волн из условия  $\vec{k} \vec{D} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{D}$ , но векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  не параллельны друг другу. Эти продольные волны обычно называют **волнами поляризации**. Возникновение продольных волн является специфическим эффектом, связанным с пространственной дисперсией. Действительно, если пространственная дисперсия отсутствует, то

$$\epsilon_{\perp} = \epsilon_{\parallel} \neq 0, \text{ т.е. } E_z = 0.$$

Физически наличие волн поляризации осмыслить довольно просто: допустим, что среда с равновесным, но неоднородным распределением заряда находится в переменном электромагнитном поле, причем длина волны поля сравнима с размерами неоднородностей. Поле, поляризуя среду (вызывая смещение зарядов), нарушает равновесное распределение, и в среде возникают колебания зарядов, аналогичные колебаниям при распространении звуковых волн в изотропных упругих средах.

## ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ВЕЩЕСТВЕ

**1. Скин-эффект.** Рассмотрим вопрос о распределении переменного тока по сечению проводников. В хороших проводниках, каковыми являются металлы, для электро- и радиотехнических частот вплоть до инфракрасных пренебрежем токами смещения ввиду их малости по сравнению с токами проводимости. В том же интервале частот как временная, так и пространственная дисперсия в металлах несущественны, поэтому электромагнитные свойства среды характеризуются материальными константами  $\epsilon_0, \mu_0, \sigma_0$ . В этих условиях из уравнений Максвелла

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\mu_0}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad \text{div } \vec{H} = 0;$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma_0 \vec{E}; \quad \text{div } \vec{E} = 0$$

следует

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\frac{\mu_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H} = -\frac{4\pi \sigma_0 \mu_0}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Delta \vec{E} = \frac{4\pi \sigma_0 \mu_0}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{и аналогично} \quad \Delta \vec{H} = \frac{4\pi \sigma_0 \mu_0}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Эти уравнения наряду с обычными граничными условиями на поверхности проводника определяют зависимость полей от времени и координат.

Ограничимся решением модельной задачи, которая тем не менее обладает всеми характерными чертами более реальных, но сложно решаемых задач. Пусть проводник заполняет полупространство  $z > 0$ , а ток течет в направлении оси  $x$ . Тогда согласно закону сохранения заряда  $\partial j_x / \partial x = 0$ , т.е.  $j_x$  не может зависеть от  $x$ , поэтому вполне правдоподобно, что

$$j_x = j(z)e^{i\omega t}, \quad j_y = j_z = 0$$

и в соответствии с законом Ома ( $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ )

$$E_x = E(z)e^{i\omega t}, \quad E_y = E_z = 0,$$

что после подстановки в определяющее  $\vec{E}$  уравнение дает

$$\frac{d^2 E(z)}{dz^2} = i \frac{4\pi\sigma_0\mu_0\omega}{c^2} E(z).$$

Следовательно,

$$E(z) = Ae^{-kz} + Be^{kz},$$

где

$$k = \sqrt{i \frac{4\pi\sigma_0\mu_0\omega}{c^2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{4\pi\sigma_0\mu_0\omega}{c^2}} = \frac{1+i}{\delta}, \quad \delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma_0\mu_0\omega}}.$$

Чтобы избежать расходимостей, положим  $B = 0$ , тогда

$$E_x = Ae^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)}.$$

Таким образом, поле экспоненциально убывает вглубь проводника, эффективно уменьшаясь (в "е" раз) на расстоянии  $\delta$  от поверхности проводника. Аналогично ведет себя и магнитное поле. Действительно, имея в виду уравнение

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\mu_0}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

и полагая, что магнитное поле зависит от времени по тому же закону, что и электрическое, получим

$$-i\omega \frac{\mu_0}{c} H_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1+i}{\delta} E_x \implies H_y = \frac{c(1-i)}{\mu_0\omega\delta} Ae^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)}.$$

Магнитное поле перпендикулярно электрическому, убывает в глубь проводника по тому же закону и, т.к.

$$|H_y| \approx \frac{c}{\omega \delta} |E_x|,$$

больше электрического в  $\lambda/\delta$  раз.

Итак, весь переменный ток оказывается локализованным в поверхностном слое проводника толщиной

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma_0\mu_0\omega}}.$$

Это явление, в результате которого образуется **скин-слой** толщиной  $\delta$ , называется **скин-эффектом**. Для наглядного представления укажем, что для меди при  $\omega \sim 50$  Гц  $\delta \sim 1$  см, а для  $\omega \sim 10^5$  Гц  $\delta \sim 10^{-3}$  см. Для постоянного тока ( $\omega \rightarrow 0$ ) толщина скин-слоя  $\delta \rightarrow \infty$ , а для идеальных проводников ( $\sigma_0 \rightarrow \infty$ )  $\delta \rightarrow 0$ .

Эти результаты получены для упрощенной модели, но имеют общий характер.

**2. Электромагнитные волны в однородной и изотропной среде.** Займемся выяснением вопроса о распределении переменного во времени электромагнитного поля в пространственно-однородных и изотропных средах, свойства которых описываются материальными константами  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$ ,  $\sigma_0$ . У металлов глубина проникновения поля достаточно мала даже при небольших частотах. Поэтому рассматривать распространение электромагнитных волн внутри металлов не имеет смысла. Это уместно для сред с небольшими (меньшими, чем у металлов) значениями  $\sigma_0$ , какими являются растворы электролитов и полупроводники. В пределе  $\sigma \rightarrow 0$  можно будет перейти к случаю идеальных диэлектриков.

В отсутствие свободных зарядов макроскопические уравнения Максвелла имеют вид

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma_0 \vec{E} + \frac{\epsilon_0}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad \text{div } \vec{E} = 0;$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\mu_0}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad \text{div } \vec{H} = 0,$$

откуда

$$\text{rot rot } \vec{H} = \text{grad div } \vec{H} - \Delta \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma_0 \text{rot } \vec{E} + \frac{\epsilon_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{E} \implies$$

$$\Delta \vec{H} - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \frac{4\pi \mu_0 \sigma_0}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

и аналогично

$$\Delta \vec{E} - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi \mu_0 \sigma_0}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Будем искать решения этих уравнений в виде плоских монохроматических волн, распространяющихся вдоль оси  $x$ :

$$\vec{H}(x, t) = \vec{H}_0 \exp i\omega t; \quad \vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \exp i\omega t.$$

Тогда имеем

$$\frac{\partial^2 \vec{H}_0(x)}{\partial x^2} + k^2 \vec{H}_0(x) = 0,$$

где

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu_0 \sqrt{\varepsilon_0 - i4\pi\sigma_0/\omega}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu_0 \sqrt{\varepsilon(\omega)}}; \quad \varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 - i \frac{4\pi\sigma_0}{\omega}.$$

Введем  $n$  и  $\kappa$  так, чтобы  $\sqrt{\varepsilon(\omega)} = n - i\kappa$ . Для неферромагнитных сред ( $\mu_0 \approx 1$ ) получим

$$\vec{H}_0(x) = \vec{A}_1 \exp(-ikx) = \vec{A}_1 \exp(-i(n - i\kappa)\omega x/c),$$

$$\vec{H}(x, t) = \vec{A}_1 \exp(-\kappa\omega x/c) \exp\{-i\omega(t - nx/c)\}.$$

Точно так же можно получить

$$\vec{E}(x, t) = \vec{A}_2 \exp(-\kappa\omega x/c) \exp\{-i\omega(t - nx/c)\}.$$

Эти выражения показывают, что  $c/n = v_\phi$  — фазовая скорость распространения волны, поэтому, опираясь на оптическую аналогию, назовем  $n$  показателем преломления. Коэффициент  $\kappa$  характеризует поглощение по смыслу и называется коэффициентом поглощения.

Введем единичный вектор  $\vec{k}_0$  в направлении распространения волны, тогда

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu_0 \varepsilon(\omega)} \vec{k}_0, \quad k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu_0 \sqrt{n^2 + \kappa^2}} \exp(-\arctg \kappa/n).$$

Вообще говоря,

$$\vec{H}(x, t) = \vec{A}_1 \exp i(\omega t - \vec{k}\vec{r}), \quad \vec{E}(x, t) = \vec{A}_2 \exp i(\omega t - \vec{k}\vec{r}).$$

Из уравнений Максвелла следует  $\vec{k}_0 \vec{E} = \vec{k}_0 \vec{H} = 0$ , а также  $-ik[\vec{k}_0 \vec{E}] = -i(\mu_0 \omega / c) \vec{H}$ , поэтому

$$\sqrt{\mu_0} \vec{H} = \sqrt{n^2 + \kappa^2} [\vec{k}_0 \vec{E}] \exp(-\arctg \kappa/n).$$

Таким образом, в однородной и изотропной среде без пространственной дисперсии, как и в вакууме, электромагнитные волны поперечны. В отличие от вакуума, амплитуды электрических и магнитных полей различны, напряженность магнитного поля  $H$  отстает по фазе от  $E$  на величину  $\arctg \kappa/n$ .

В предельном случае идеального диэлектрика ( $\sigma \rightarrow 0$ ;  $\kappa \rightarrow 0$ )

$$k = \frac{\omega}{c} n, \quad n = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}, \quad v_{\Phi} = \frac{c}{n},$$

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} [\vec{k}_0 \vec{E}],$$

плотность энергии поля

$$W_0 = \frac{\vec{E} \vec{D} + \vec{B} \vec{H}}{8\pi} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{4\pi} = \frac{\mu_0 H^2}{4\pi},$$

а вектор Пойнтинга

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{H}] = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} [\vec{E} [\vec{k}_0 \vec{E}]] = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \vec{k}_0 E^2 \\ &= \vec{k}_0 \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{\varepsilon_0 E^2}{4\pi} = \vec{k}_0 v_{\Phi} W_0, \end{aligned}$$

т.е. плотность энергии переносится в направлении распространения волны со скоростью  $v_{\Phi} = c/n$ , нигде не накапливаясь и не исчезая. Интересно отметить, что формула  $n = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$  хорошо проверена в многочисленных экспериментах и согласуется с их результатами в инфракрасной и видимой части спектра для тех газов и жидкостей, собственный дипольный момент которых мал.

Займемся вычислением показателя преломления и коэффициента поглощения. Было показано, что

$$n - i\kappa = \sqrt{\varepsilon_0 - i \frac{4\pi\sigma_0}{\omega}},$$

поэтому

$$\varepsilon_0 - i \frac{4\pi\sigma_0}{\omega} = n^2 - \kappa^2 - 2in\kappa \implies n^2 - \kappa^2 = \varepsilon_0, \quad n\kappa = \frac{2\pi\sigma_0}{\omega}.$$

Ради упрощения записи предположим, что рассматриваются немагнитные среды  $\mu_0 \approx 1$ , и после простых вычислений получим

$$n = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\varepsilon_0^2 + \frac{16\pi^2\sigma_0^2}{\omega^2}} + \varepsilon_0 \right\}}; \quad \kappa = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\varepsilon_0^2 + \frac{16\pi^2\sigma_0^2}{\omega^2}} - \varepsilon_0 \right\}}.$$

Рассмотрим два предельных случая.

1. Ток проводимости мал по сравнению с током смещения  $\sigma_0 \ll \varepsilon_0\omega/4\pi$ :

$$\kappa = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \varepsilon_0 \left( 1 + \frac{8\pi^2\sigma_0^2}{\varepsilon_0^2\omega^2} \right) - \varepsilon_0 \right\}} = \frac{2\pi\sigma_0}{\omega\sqrt{\varepsilon_0}},$$

$$n \sim \sqrt{\varepsilon_0}, \quad \frac{n}{\kappa} = \frac{\varepsilon_0\omega}{2\pi\sigma_0} \gg 1.$$

Это случай малого поглощения и в пределе сводится к случаю идеального диэлектрика.

2. Ток смещения мал по сравнению с током проводимости (проводящие среды)  $\sigma_0 \gg \varepsilon_0\omega/4\pi$ :

$$n \approx \kappa \approx \sqrt{\frac{2\pi\sigma_0}{\omega}}.$$

Поглощение происходит в скин-слое толщиной  $\delta = c/2\pi\sigma_0\omega$ .

Используя полученные выше выражения

$$\vec{E}(x, t) = \vec{A} \exp(-\kappa\omega x/c) \exp\{-i\omega(t - nx/c)\},$$

$$\vec{H} = \sqrt{n^2 + \kappa^2} [\vec{k}_0 \vec{E}] \exp(-\text{arctg } \kappa/n)$$

для напряженностей электрического и магнитного полей, найдем вклад в энергию от каждого из этих полей в отдельности:

$$\frac{\varepsilon_0 E^2}{8\pi} = \frac{\varepsilon_0 A^2}{16\pi} \exp(-2\kappa\omega x/c); \quad \frac{\mu_0 H^2}{8\pi} = \frac{\mu_0 A^2}{16\pi} (n^2 + \kappa^2) \exp(-2\kappa\omega x/c),$$

а их отношение

$$\frac{\mu_0 H^2}{8\pi} : \frac{\varepsilon_0 E^2}{8\pi} = \frac{\mu_0 (n^2 + \kappa^2)}{\varepsilon_0}$$

в случае малого поглощения порядка 1, а в случае, когда поглощение велико,

$$\frac{\mu_0 H^2}{8\pi} : \frac{\varepsilon_0 E^2}{8\pi} \approx \frac{\mu_0 2\pi\sigma_0}{\varepsilon_0 \omega} > 1.$$

# ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ВРЕМЕННОЙ ДИСПЕРСИИ

Уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

при малых частотах (ток проводимости много больше тока смещения, поглощение велико) имеет вид

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E}.$$

В случае высокочастотных полей (ток смещения велик по сравнению с током проводимости) получаем

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Если  $\omega$  – частота поля, то  $\partial \vec{D} / \partial t \sim i\omega \epsilon \vec{E}$ , с другой стороны, в пределе малых частот

$$\frac{i\omega \epsilon E}{c} \rightarrow \frac{4\pi\sigma E}{c}.$$

Сравнивая, получаем

$$\epsilon(\omega) = i \frac{4\pi\sigma}{\omega}.$$

При достаточно быстром изменении поля, в случае когда его частота много больше частоты движения электронов в атомах, электроны можно рассматривать как свободные (пренебрегая их взаимодействием с ядром и друг с другом). Поскольку скорость электрона невелика, то  $\frac{v}{\omega} \ll \frac{c}{\omega}$ , т.е. на расстояниях порядка атомных размеров (которые, в силу предыдущего неравенства много меньше характерной для внешнего поля длины волны) электроны можно рассматривать как свободные, тогда, т.к. под действием высокочастотного поля

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = e \vec{E}_0 e^{i\omega t} \rightarrow \vec{v} = -i \frac{e \vec{E}_0}{m\omega} e^{i\omega t},$$

для смещения электронов получим

$$\vec{r} = -\frac{e \vec{E}}{m\omega^2}.$$



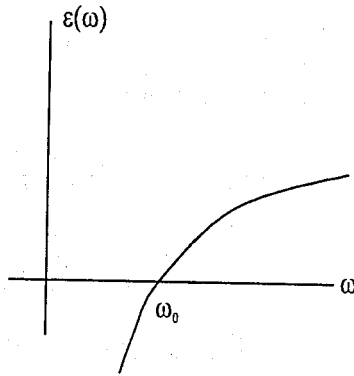


Рис. 12

Теперь нетрудно подсчитать поляризацию вещества

$$\vec{P} = \sum e \cdot \vec{r} = n \frac{e^2 \vec{E}}{m\omega^2}$$

( $n$  — число электронов). Поэтому

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} \implies \epsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}.$$

Здесь

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi n e^2}{m}$$

— так называемая плазменная частота. Зависимость  $\epsilon = \epsilon(\omega)$  изображена на рис. 12.

## ФОРМУЛЫ КРАМЕРСА — КРОНИГА

Было показано, что фурье-образы характеристик электромагнитного поля связаны материальными уравнениями, в частности

$$\vec{D}(\vec{k}, \omega) = \epsilon(\vec{k}, \omega) \cdot \vec{E}(\vec{k}, \omega),$$

причем фурье-образ диэлектрической проницаемости

$$\epsilon(\vec{k}, \omega) = \int_0^\infty d\tau \int \epsilon(R, \tau) e^{-i(\vec{k}\vec{R} - \omega\tau)} d\vec{R},$$

где

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}', \quad R = |\vec{R}|, \quad \tau = |t - t'|,$$

вообще говоря, комплексная величина, причем

$$\varepsilon^{re}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{2} \left( \varepsilon(\vec{k}, \omega) + \varepsilon^*(\vec{k}, \omega) \right),$$

$$\varepsilon^{im}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{2i} (\varepsilon(\vec{k}, \omega) - \varepsilon^*(\vec{k}, \omega)).$$

Из определения  $\varepsilon(\vec{k}, \omega)$  следует  $\varepsilon^*(\vec{k}, \omega) = \varepsilon(-\vec{k}, -\omega)$ , поэтому

$$2\varepsilon^{re}(\vec{k}, \omega) = \int_0^\infty d\tau \int \varepsilon(R, \tau) e^{-i(\vec{k}\vec{R} - \omega\tau)} d\vec{R} + \int_0^\infty d\tau \int \varepsilon(R, \tau) e^{i(\vec{k}\vec{R} - \omega\tau)} d\vec{R} = \int_{-\infty}^\infty d\tau \int \varepsilon(R, \tau) e^{-i(\vec{k}\vec{R} - \omega\tau)} d\vec{R}.$$

Точно так же

$$2i\varepsilon^{im}(\vec{k}, \omega) = \int_{-\infty}^\infty d\tau \int \varepsilon(R, \tau) e^{-i(\vec{k}\vec{R} - \omega\tau)} (\text{sgn } \tau) d\vec{R},$$

$$\text{sgn } \tau = \begin{cases} -1, & \tau < 0 \\ 1, & \tau > 0 \end{cases}.$$

Обратим последнее соотношение:

$$\varepsilon(R, \tau) = \frac{2i}{(2\pi)^4} \int \varepsilon^{im}(\vec{k}', \omega') e^{i(\vec{k}'\vec{R} - \omega'\tau)} (\text{sgn } \tau) d\vec{k}' d\omega',$$

подставив которое в выражение для  $\varepsilon^{re}(\vec{k}, \omega)$ , получим

$$\varepsilon^{re}(\vec{k}, \omega) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^\infty d\tau \int \varepsilon^{im}(\vec{k}', \omega') e^{i\vec{R}(\vec{k} - \vec{k}')} e^{i\tau(\omega - \omega')} (\text{sgn } \tau) d\vec{k}' d\omega' d\vec{R}.$$

Используя известные соотношения

$$\delta(\vec{k} - \vec{k}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{R}(\vec{k} - \vec{k}')} d\vec{R} \quad \text{и} \quad \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^\infty d\tau e^{i\tau(\omega - \omega')} (\text{sgn } \tau) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\omega - \omega'}$$

и проинтегрировав последнее выражение для  $\varepsilon^{re}(\vec{k}, \omega)$  по  $\tau$  и  $\vec{R}$ , получим

$$\varepsilon^{re}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\varepsilon^{im}(\vec{k}, \omega')}{\omega - \omega'} d\omega'.$$

Аналогично

$$\varepsilon^{im}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\varepsilon^{re}(\vec{k}, \omega')}{\omega - \omega'} d\omega'.$$

(Последние интегралы надо понимать в смысле главного значения.) Эти формулы называют формулами Крамерса – Кронига или дисперсионными соотношениями. Их принципиальное значение состоит в том, что они связывают между собой характеристики процессов рассеяния  $\varepsilon^{re}(\vec{k}, \omega)$  и поглощения  $\varepsilon^{im}(\vec{k}, \omega)$ . Очевидно, аналогичные формулы можно получить и для  $\mu(\vec{k}, \omega)$ . Формулы Крамерса – Кронига являются наиболее общими соотношениями электродинамики, т.к. получены в предположении о допустимости разложений всех функций в интеграл Фурье и существовании причинной связи, поскольку вектор электрической индукции  $\vec{D}$  определяется процессами поляризации в предшествующие моменты времени.

## ПРОХОЖДЕНИЕ БЫСТРЫХ ЧАСТИЦ ЧЕРЕЗ ВЕЩЕСТВО

Движущаяся в веществе заряженная частица отклоняется полем ядер атомов, с которыми взаимодействует и благодаря этому излучает. Такое излучение называется тормозным, и его обычно рассматривают, учитывая квантовые эффекты. На доступном нам классическом уровне рассмотрим излучение, связанное с потерями энергии поляризующей вещество частицы, т.е. рассмотрим случай, когда частица создает в веществе поле, которое, в свою очередь, оказывает обратное воздействие на частицу и тормозит ее (саморазгон противоречит закону сохранения энергии), что приводит к потере частицей энергии. Этот вид потерь энергии естественно назвать **поляризационным**, поскольку тормозящее поле – это созданное движущейся заряженной частицей поле поляризации вещества.

Среда, поляризованная частицей, излучает также и в том случае, когда поляризация среды отстает от частицы. Действительно, если пролетающая частица оставляет среду поляризованной, то среда, перестраиваясь после пролета частицы, излучает избыток энергии в виде поперечных электромагнитных волн. Такой источник потерь энергии называют **излучением Вавилова – Черенкова**. Подчеркнем заранее, что черенковское излучение – это излучение среды, а не движущегося заряда и поэтому может обуславливаться частицей, движущейся с постоянной скоростью.

Рассмотрим потери энергии частицы в макроскопически однородной и изотропной среде, ограничиваясь лишь поляризационными и черенков-

скими потерями. С этой целью найдем поле, создаваемое в среде одиночным зарядом, движущимся со скоростью  $v$ , и подсчитаем работу действующих на частицу тормозящих сил этого поля. Ясно, что такая работа и будет определять искомые потери энергии. Допустим, что частица движется с постоянной скоростью  $v$  в немагнитной  $\mu = 1$  и прозрачной среде  $\epsilon^{im} \rightarrow 0$ . Примем, что в процессе движения изменение скорости частицы пренебрежимо мало. Будем считать также, что свойства среды таковы, что вызванное частицей поле приводит к необходимости учета временной и пространственной дисперсии.

Перейдем к подсчету полей, созданных в веществе одиночным и равномерно движущимся зарядом. Уравнения Максвелла

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

для фурье-образов характеристик полей и источников имеют вид

$$\left[ \vec{k}, \vec{E}(\vec{k}, \omega) \right] = \frac{\omega}{c} \vec{B}(\vec{k}, \omega), \quad i \left[ \vec{k}, \vec{B}(\vec{k}, \omega) \right] = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{k}, \omega) - \frac{i\omega}{c} \vec{D}(\vec{k}, \omega).$$

Помножим первое уравнение на  $\vec{k}$  векторно и подставим  $\left[ \vec{k}, \vec{B} \right]$  из второго, тогда

$$\left( k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij} \right) E_j = i \frac{4\pi\omega}{c^2} j_i,$$

подставив полученное ранее выражение тензора диэлектрической проницаемости, найдем

$$\left[ \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\perp} \right) \left( \delta_{il} - \frac{k_i k_l}{k^2} \right) - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\parallel} \frac{k_i k_l}{k^2} \right] E_l = i \frac{4\pi\omega}{c^2} j_i. \quad (83)$$

Помножим (83) скалярно на  $k_i$ :

$$k_l E_l = -i \frac{4\pi}{\omega \epsilon_{\parallel}} k_i j_i$$

и подставим этот результат в (83):

$$E_i \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\perp} \right) = i \frac{4\pi\omega}{c^2} j_i - i \frac{4\pi}{\omega \epsilon_{\parallel}} \frac{k_l j_l k_i}{k^2} \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\perp} \right) - i \frac{4\pi\omega}{c^2} \frac{k_i k_l}{k^2} j_l.$$

Следовательно,

$$\vec{E}(\vec{k}, \omega) = -i \frac{4\pi\omega}{k^2} \left[ \frac{\vec{k}(\vec{k}\vec{j})}{\epsilon_{\parallel}\omega^2} + \frac{\vec{k}(\vec{k}\vec{j}) - k^2\vec{j}}{c^2(k^2 - \epsilon_{\perp}\omega^2/c^2)} \right].$$

Перейдем от фурье-образов к  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_1(\vec{r}, t) + \vec{E}_2(\vec{r}, t),$$

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = -i \frac{4\pi}{(2\pi)^4} \int \frac{\vec{k}(\vec{k}\vec{j})}{\omega k^2 \varepsilon_{\parallel}} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} d\vec{k} d\omega,$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = -\frac{i}{c^2} \frac{4\pi}{(2\pi)^4} \int \frac{\vec{k}(\vec{k}\vec{j}) - k^2 \vec{j}}{k^2(k^2 - \varepsilon_{\perp} \omega^2 / c^2)} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \omega d\vec{k} d\omega.$$

Плотность тока

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \vec{j}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} d\vec{k} d\omega.$$

С другой стороны,

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = e\vec{v}\delta(\vec{r} - \vec{v}t) = \frac{e\vec{v}}{(2\pi)^3} \int e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \delta(\omega - \vec{k}\vec{v}) d\vec{k} d\omega,$$

откуда для  $\vec{j}(\vec{k}, \omega)$  получаем

$$\vec{j}(\vec{k}, \omega) = 2\pi e\vec{v}\delta(\omega - \vec{k}\vec{v}).$$

Подставив последнее в выражения для  $\vec{E}_1(\vec{r}, t)$  и  $\vec{E}_2(\vec{r}, t)$ , после элементарного интегрирования по  $\omega$  имеем

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = -i \frac{e}{2\pi^2} \int \frac{\vec{k} d\vec{k}}{k^2 \varepsilon_{\parallel}(\vec{k}, \omega)} e^{i\vec{k}(\vec{r} - \vec{v}t)},$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \frac{i}{c^2} \frac{e}{2\pi^2} \int \frac{\vec{k}\vec{v}}{k^2} \frac{k^2\vec{v} - \vec{k}(\vec{k}\vec{v})}{k^2 - (\vec{k}\vec{v})^2 \varepsilon_{\perp} / c^2} e^{i\vec{k}(\vec{r} - \vec{v}t)} d\vec{k}.$$

Приступим к вычислению потерь энергии заряженной частицы, которая, двигаясь с постоянной скоростью, создает в среде поле  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ . Обратное воздействие на частицу (воздействие поля, созданного частицей, на саму частицу) оказывает сила  $\vec{F} = (e\vec{E})_{\vec{r}=\vec{v}t}$ , здесь подчеркивается, что значение поля нужно брать в точке местоположения частицы  $\vec{r}$  в каждый момент времени. Работа действующей на частицу силы равна интересующим нас потерям энергии:

$$dW = \vec{F} d\vec{r} = \vec{F} \frac{\vec{v}}{v} dr.$$

Обычно вычисляют потери, приходящиеся на единицу длины, т.е.

$$\frac{dW_1}{dr} = e \left( \frac{\vec{v}}{v} \vec{E}_1 \right)_{\vec{r}=\vec{v}t}, \quad \frac{dW_2}{dr} = e \left( \frac{\vec{v}}{v} \vec{E}_2 \right)_{\vec{r}=\vec{v}t},$$

здесь  $\vec{v}/v$  – единичный вектор в направлении движения частицы. Итак,

$$\begin{aligned} \frac{dW_1}{dr} = \operatorname{Re} \left\{ -i \frac{e^2}{2\pi^2 v} \int \frac{\vec{k} \vec{v} d\vec{k}}{k^2 \varepsilon_{\parallel}(\vec{k}, \vec{k} \vec{v})} e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{v}t)} \right\}_{\vec{r}=\vec{v}t} = \\ \operatorname{Re} \left\{ -i \frac{e^2}{2\pi^2 v} \int \frac{\omega \delta(\omega - \vec{k} \vec{v}) d\vec{k} d\omega}{k^2 \varepsilon_{\parallel}(\vec{k}, \omega)} \right\}. \end{aligned} \quad (84)$$

Это выражение имеет простой физический смысл: оно представляет меру потерь энергии частицы на единице длины, которая обусловлена работой над нею вследствие созданной этой частицей продольной поляризации, пропорциональной  $\varepsilon_{\parallel}^{-1}$ . Точно так же получим

$$\frac{dW_2}{dr} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{c^2} \frac{e}{2\pi^2 v} \int \omega \delta(\omega - \vec{k} \vec{v}) \frac{v^2 - \omega^2/k^2}{k^2 - \omega^2 \varepsilon_{\perp}/c^2} d\vec{k} d\omega \right\}. \quad (85)$$

Это выражение определяет черенковские потери, т.е. потери энергии, связанные с возбуждением в среде поперечного электромагнитного поля. Заметим, кстати, что учет пространственной дисперсии позволил четко разделить оба вида потерь – поляризационные и черенковские.

Для дальнейшего предположим, что пространственная дисперсия отсутствует:

$$\varepsilon_{\perp}(\vec{k}, \omega) = \varepsilon_{\parallel}(\vec{k}, \omega) = \varepsilon(\omega), \quad \text{причем } \omega = \vec{k} \vec{v}.$$

В этом случае

$$\frac{dW_1}{dr} = \operatorname{Re} \left\{ -i \frac{e^2}{2\pi^2 v} \int d\vec{k} \frac{\omega}{k^2 \varepsilon(\omega)} \right\}, \quad (86)$$

$$\frac{dW_2}{dr} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{c^2} \frac{e^2}{2\pi^2 v} \int d\vec{k} \frac{\vec{k} \vec{v} (v^2 - (\vec{k} \vec{v}/k)^2)}{k^2 - (\vec{k} \vec{v})^2 \varepsilon(\omega)/c^2} \right\}. \quad (87)$$

Предполагалось, что поглощение исчезающе-мало, т.е. рассматриваются прозрачные среды, что вынуждает перейти к пределу  $\varepsilon^{im} \rightarrow 0$  в выражении  $\varepsilon = \varepsilon^{re} + i\varepsilon^{im}$ :

$$\operatorname{Re} \frac{i}{\varepsilon(\omega)} = \operatorname{Re} \frac{i}{\varepsilon^{re} + i\varepsilon^{im}} = \operatorname{Re} \frac{i(\varepsilon^{re} - i\varepsilon^{im})}{(\varepsilon^{re})^2 + (\varepsilon^{im})^2} = \frac{\varepsilon^{im}}{(\varepsilon^{re})^2 + (\varepsilon^{im})^2},$$

$$\lim_{\varepsilon^{im} \rightarrow 0} \operatorname{Re} \frac{i}{\varepsilon(\omega)} = \lim_{\varepsilon^{im} \rightarrow 0} \left[ \frac{\varepsilon^{im}}{(\varepsilon^{re})^2 + (\varepsilon^{im})^2} \right] = \pi \delta[\varepsilon(\omega)].$$

Используя известную формулу

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2},$$

получим

$$\frac{dW_1}{dr} = \frac{e^2}{2\pi v} \int d\vec{k} \frac{\vec{k}\vec{v}}{k^2} \delta[\varepsilon(\omega)].$$

В последнее выражение не входит масса частицы, и это естественно, поскольку такой вид потерь энергии обусловлен поляризацией среды. Итак, поляризационные потери являются основным источником энергетических потерь тяжелых частиц. (Легкие частицы, например электроны, теряют свою энергию в основном на тормозное излучение.)

Вычислим энергетические потери при черенковском излучении:

$$\frac{dW_2}{dr} = \frac{e^2}{2\pi^2 v c^2} \operatorname{Re} \left\{ i \int d\vec{k} \frac{\vec{k}\vec{v} \left( v^2 - (\vec{k}\vec{v}/k)^2 \right)}{k^2 - (\vec{k}\vec{v})^2 \varepsilon(\omega)/c^2} \right\}.$$

Выберем ось  $z$  по направлению движения частицы  $\vec{v} = (0, 0, v_z = v)$  и введем

$$\omega = \vec{k}\vec{v} \longrightarrow k_z = \frac{\omega}{v},$$

$$q^2 = k_x^2 + k_y^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{v^2},$$

$$d\vec{k} = dk_x dk_y dk_z = q dq d\varphi \frac{d\omega}{v}.$$

В этих переменных

$$\frac{dW_2}{dr} = \frac{e^2}{\pi c^2} \operatorname{Re} \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} \omega d\omega \int_0^{\infty} \frac{q^3 dq}{\left( q^2 + \omega^2/v^2 \right) \left( q^2 + \omega^2/v^2 - \omega^2 \varepsilon(\omega)/c^2 \right)} \right\}.$$

В пределе  $\varepsilon^{im} \rightarrow 0$

$$\lim_{\varepsilon^{im} \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{q^2 + \omega^2/v^2 - \omega^2 \varepsilon(\omega)/c^2} \right\} = -\pi \delta \left( q^2 + \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right).$$

В новой переменной  $u = q^2$

$$\frac{dW_2}{dr} = \frac{e^2}{2c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega d\omega \int_0^{\infty} \frac{u du \delta \left( u + \omega^2/v^2 - \omega^2 \varepsilon(\omega)/c^2 \right)}{u + \omega^2/v^2}.$$

Интеграл по  $u$  легко вычислить:

$$\int_0^\infty \dots du = \begin{cases} 1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon(\omega)}, & v > \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}} \\ 0, & v < \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}} \end{cases},$$

и, поскольку  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon^*(-\omega)$ , окончательно получим

$$\frac{dW_2}{dr} = \frac{e^2}{c^2} \int_0^\infty \left( 1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon(\omega)} \right) \omega d\omega.$$

Подведем итоги.

1. Излучение Вавилова – Черенкова возникает лишь для частиц, движущихся со скоростью  $v > v_{\text{порог}} = c/n$  (ясно, что должно быть  $n > 1$ ).
2. Излучение Вавилова – Черенкова зависит только от заряда частицы и не зависит от ее массы.
3. Согласно принципу Гюйгенса каждая точка среды на пути заряда, движущегося равномерно и прямолинейно со скоростью  $v > c/n(\omega)$ , служит источником сферической волны, которая испускается в момент прохождения заряда через эту точку. Волновой вектор излучаемых волн образует со скоростью заряда угол  $\theta$ , причем  $\cos \theta = c/vn(\omega)$ . Если пренебречь дисперсией, т.е. зависимостью  $n$  от  $\omega$ , то за время  $t$  свет проходит путь  $(c/n)t$ , а источник (заряд) – путь  $vt = (c/n \cos \theta)t$ . Фронт сформированного излучения является огибающей сферических поверхностей волн и образует конус с вершиной, совпадающей с мгновенным положением заряда, осью, которая совпадает с направлением пролета частицы, и углом раствора  $\pi - 2\theta$ .
4. Излучение приходится на видимую и ультрафиолетовую части спектра, т.к. для более коротких волн  $n = \sqrt{\varepsilon(\omega)} < 1$ .
5. Можно показать, что излучаемая энергия имеет характерное спектральное распределение.

Эффект Вавилова – Черенкова нашел широкое применение в физике, например в черенковских счетчиках, которые позволяют определить величину и направление скорости элементарной частицы ( $\cos \theta = c/nv$ ), ее заряд ( $dW_2/dr \sim e^2$ ), причем можно легко отличить частицы с элементарным зарядом  $q$  (электроны, протоны и т.п.) от ядер с зарядом



$Zq$ , а также отделить друг от друга частицы с равными импульсами, но разными массами ( $v_{\text{порог}} = P_{\text{порог}}/m$ ), поэтому черенковские счетчики широко используются на ускорителях и вообще в физике высоких энергий.

Отметим, что применимость классического рассмотрения ограничена случаем, когда за время пролета частица не успевает вызвать перестройку атомных электронов, т.е. макроскопическое рассмотрение дает верные результаты для быстрых частиц, скорость которых велика по сравнению с характерной скоростью внутриатомных процессов.

### III. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

#### ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Было показано, что из уравнений Максвелла следует теорема Пойнтинга о сохранении энергии в области электромагнитных явлений. Идеи Минковского наводят на мысль о необходимости облечь полученные выражения для энергии электромагнитного поля и вектора Пойнтинга в четырехмерный "наряд", при этом вполне правдоподобно выглядит предположение о том, что энергия и импульс должны образовать единый релятивистский комплекс, подобно тому как для частицы они объединяются в вектор 4-импульса. Для того чтобы сконструировать такой комплекс, используем те же рассуждения, что и при выводе выражения энергии по заданной функции Лагранжа в нерелятивистской механике. Этот вывод основан на независимости функции Лагранжа от времени для замкнутых систем. Подстановка уравнений движения в выражение полной производной по времени от лагранжевой функции приводит к сохраняющейся величине, которая, как легко убедиться, оказывается энергией.

Допустим, что состояние рассматриваемой физической системы задано переменными  $q^{(\mu)} = q^{(\mu)}(x^\alpha)$ . Взятый в скобки индекс  $\mu$  определяет число независимых переменных, описывающих это состояние, например, в электродинамике  $\mu = 0..3$ , а полевыми переменными являются компоненты потенциала  $A^\mu$ . Часто вводят удобное обозначение

$$q^{(\mu)}_{,\alpha} \equiv \partial q^{(\mu)} / \partial x^\alpha,$$

которое будет использовано в дальнейшем.

В общем случае действие физической системы можно записать в виде

$$W = \int \Lambda(q^{(\mu)}; q^{(\mu)}_{,\alpha}) dV dt = \frac{1}{c} \int \Lambda(q^{(\mu)}; q^{(\mu)}_{,\alpha}) d\Omega. \quad (88)$$

По определению действия  $\int \Lambda(q^{(\mu)}; q^{(\mu)}_{,\alpha}) dV$  – лагранжиан рассматриваемой системы, поэтому ясно, что  $\Lambda(q^{(\mu)}; q^{(\mu)}_{,\alpha})$  – плотность лагранжиана. Заранее отметим, что для электромагнитного поля

$$W^{\text{эл.маг}} = -\frac{1}{16\pi} \int F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} dV dt \implies \Lambda^{\text{эл.маг}} = -\frac{1}{16\pi} \cdot F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \quad (89)$$

Ради упрощения записи отбросим заключенные в скобки индексы и проварьируем действие (88), а затем, согласно принципу наименьшего действия, для того чтобы получить уравнения поля (уравнения движения),

приравняем вариацию нулю:

$$\delta W = \frac{1}{c} \int \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\alpha}} \delta q_{,\alpha} \right) d\Omega = 0.$$

Используя далее очевидное равенство

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\alpha}} \delta q \right) = \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\alpha}} \delta q_{,\alpha} + \delta q \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\alpha}},$$

получим

$$\frac{1}{c} \int \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\alpha}} \right) \delta q d\Omega + \frac{1}{c} \int d\Omega \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\alpha}} \delta q \right) = 0.$$

Второй интеграл этого соотношения после преобразования по теореме Гаусса обращается в нуль, т.к. интегрирование распространено на все пространство. Теперь, благодаря произвольности  $\delta q$ , мы можем записать уравнения поля в виде

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\alpha}} = 0 \quad (\text{или, если угодно, } \frac{\partial \Lambda}{\partial q^{(\mu)}} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\alpha}^{(\mu)}} = 0). \quad (90)$$

Рассмотрим замкнутую физическую систему. Математически замкнутость системы выражается в том, что функция Лагранжа, а вместе с ней и плотность лагранжиана не зависят явно от  $x^\alpha$  (в классической механике лагранжиан не зависел явно от времени). Подсчитаем производную от  $\Lambda$  по  $x^\alpha$ :

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\beta}} \frac{\partial q_{,\beta}}{\partial x^\alpha}.$$

Подставив уравнения поля, получим

$$\delta_\alpha^\beta \frac{\partial \Lambda}{\partial x^\beta} = \left( \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\beta}} \right) \frac{\partial q}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\beta}} \left( \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial q}{\partial x^\alpha} \right),$$

откуда следует

$$\frac{\partial T_\alpha^\beta}{\partial x^\beta} = 0, \quad \text{где } T_\alpha^\beta = q_{,\alpha} \cdot \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\beta}} - \delta_\alpha^\beta \Lambda \quad (91)$$

— тензор энергии-импульса (ТЭИ) физической системы, плотность лагранжиана которой  $\Lambda$ . Если полевых переменных несколько, то

$$T_\alpha^\beta = q_{,\alpha}^{(\mu)} \cdot \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\beta}^{(\mu)}} - \delta_\alpha^\beta \Lambda, \quad (92)$$

в частности, для электромагнитного поля

$$T_{\alpha}^{\beta} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \cdot \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial A_{\mu} / \partial x^{\beta})} - \delta_{\alpha}^{\beta} \Lambda, \quad \Lambda = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (93)$$

Можно показать, что равенство нулю четырехмерной дивергенции от какого-либо геометрического объекта эквивалентно сохранению интеграла от этого объекта по гиперповерхности, заключающей в себе все трехмерное пространство. Мы не будем доказывать это утверждение строго, ограничиваясь наводящими соображениями: уравнение непрерывности

$$\frac{\partial j^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = 0 \implies \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \implies \frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \oint \vec{j} d\vec{S}$$

является математическим отображением закона сохранения заряда. С другой стороны, сохраняющийся полный заряд есть

$$\int \rho dV = \frac{1}{c} \int j^0 dV = \frac{1}{c} \int j^{\mu} dS_{\mu}$$

(последнее интегрирование ведется по 4-гиперповерхности ортогональной оси  $x^0$ , что означает интегрирование по всему трехмерному пространству). Таким образом, равенство  $\partial j^{\mu} / \partial x^{\mu} = 0$  отражает сохранение  $\int j^{\mu} dS_{\mu}$ , аналогично этому примем, что  $\partial T_{\alpha}^{\beta} / \partial x^{\beta} = 0$  должно отражать сохранение  $\int T_{\alpha}^{\beta} dS_{\beta}$ . Введем сохраняющуюся величину

$$P_{\alpha} = \operatorname{const} \cdot \int T_{\alpha}^{\beta} dS_{\beta},$$

физический смысл которой нетрудно выяснить. Согласно (92)

$$T_0^0 = \dot{q}(\partial \Lambda / \partial \dot{q}) - \Lambda,$$

т.е.  $T_0^0$  выражается через плотность лагранжиана так же, как энергия через функцию Лагранжа. Поэтому ясно, что  $T_0^0$  – плотность энергии, и если выбрать  $\operatorname{const} = 1/c$ , то

$$P^{\alpha} = \frac{1}{c} \cdot \int T^{\alpha\beta} dS_{\beta}$$

будет не чем иным, как 4-вектором импульса  $P^{\alpha} = \{E/c, \vec{p}\}$ .

Существуют соображения, которые сводятся к требованию симметричности ТЭИ физических полей. Изложение этих соображений не укладывается в отведенные нашему курсу рамки, поэтому примем без

доказательства, что ТЭИ должен быть симметричен  $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$ . Поскольку симметричность ТЭИ согласно определению (93) поставлена в зависимость от вида плотности функции Лагранжа  $\Lambda$ , попытаемся отыскать путь симметризации ТЭИ. Одна из возможностей симметризации кроется в неоднозначности выбора ТЭИ. Легко видеть, что, если два ТЭИ отличаются на 4-дивергенцию, а интегрирование в определении 4-импульса проводится по гиперповерхности, заключающей все трехмерное пространство, оба ТЭИ приводят к одному и тому же выражению  $P^\alpha$ . А если к тому же эта дивергенция есть производная по одному из антисимметричных индексов некоего тензора третьего ранга, то из равенства нулю дивергенции одного из ТЭИ по другому антисимметричному индексу следует обращение в нуль дивергенции второго ТЭИ. Итак, если

$$T^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} + \frac{\partial \psi^{\alpha\beta\gamma}}{\partial x^\gamma}, \quad \text{где } \psi^{\alpha\beta\gamma} = -\psi^{\alpha\gamma\beta}, \quad (94)$$

то из  $\partial T^{\alpha\beta} / \partial x^\beta = 0$  следует  $\partial T^{\alpha\beta} / \partial x^\beta = 0$ . Таким образом, два ТЭИ, связанные условием (94), относятся к одному и тому же физическому полю, поэтому это условие можно пытаться использовать для симметризации ТЭИ, что, как будет показано далее, приводит к нужному результату для ТЭИ электромагнитного поля.

Физический смысл некоторых компонент ТЭИ ясен из изложенного выше: если  $T^{\alpha\beta}$  – ТЭИ какого-то физического поля, то  $T^{00}$  есть плотность энергии, а  $T^{0i}/c$  – плотность импульса этого поля. Смысл остальных компонент легко установить, расписав соотношение  $\partial T^{\alpha\beta} / \partial x^\beta = 0$ . Для  $\alpha = 0$

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial T^{0i}}{\partial x^i} = 0.$$

Проинтегрируем полученное по трехмерному объему и используем теорему Гаусса, тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} \int T^{00} dV = -c \oint T^{0i} dS_i.$$

Левая часть равенства – изменение во времени энергии поля, заключенной в некотором объеме  $V$ , поэтому ясно, что выражение справа – это поток энергии через поверхность, ограничивающую этот объем, т.е.  $cT^{0i}$  – плотность потока энергии (в случае электромагнитного поля  $i$ -компонента вектора Пойнтинга), другими словами, это энергия, вытекающая в единицу времени через единичную площадку в направлении нормали к поверхности. (Связанное с последним утверждением соотношение применительно к электромагнитному полю есть не что иное, как теорема Пойнтинга в отсутствие зарядов и токов.)

Интересно отметить, что для произвольного физического поля, состояние которого задается плотностью лагранжиана  $\Lambda$ , попутно получено соотношение, связывающее плотность потока энергии этого поля  $\sigma^i = cT^{0i}$  с плотностью его импульса  $g^i = T^{0i}/c$ :

$$g^i = \frac{\sigma^i}{c}.$$

Подчеркнем, что требования релятивистской инвариантности теории, отраженные в тензорном характере ТЭИ, автоматически приводят к такой связи, которую, в сущности, можно считать "зародышем" квантовых идей в "чреве" классического релятивистского подхода. Действительно, поскольку вместе с энергией поля переносится и импульс, естественным выглядит предположение о том, что их переносчиком является некая гипотетическая частица. В частности, в случае электромагнитного поля эта частица должна перемещаться со скоростью распространения электромагнитных взаимодействий – скоростью света, поэтому она не может обладать массой покоя.

Для выяснения физического смысла оставшихся компонент положим  $\alpha = i$ , тогда

$$\frac{\partial T^{i0}}{\partial x^0} + \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0$$

и после интегрирования по объему получим

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int T^{i0} dV = - \oint T^{ik} dS_k.$$

Иначе говоря, через поверхность, ограничивающую выделенный объем рассматриваемого физического поля, "вытекает импульс", плотность потока которого  $T^{ik}$  обусловлена изменением импульса во времени (левая часть последнего равенства), или, другими словами,  $T^{ik}$  – сила, с которой поле действует на единичную площадку в направлении нормали к поверхности, поэтому  $T^{ik}$  называют **тензором напряжений** и обозначают  $\sigma^{ik}$ . Таким образом, простые рассуждения позволили выяснить физический смысл каждой из компонент ТЭИ произвольного поля с плотностью функции Лагранжа  $\Lambda$ .

## ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Найдем выражение ТЭИ электромагнитного поля, используя соотношения предыдущего пункта, и в первую очередь определение

$$T_{\alpha}^{\beta} = \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \cdot \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial A_{\mu} / \partial x^{\beta})} - \delta_{\alpha}^{\beta} \Lambda, \quad \Lambda = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}.$$

Для вычисления производной от плотности лагранжиана найдем

$$\delta\Lambda = -\frac{1}{16\pi} \left( F^{\alpha\beta} \delta F_{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta} \delta F^{\alpha\beta} \right) = -\frac{1}{8\pi} F^{\alpha\beta} \delta F_{\alpha\beta} = \\ -\frac{1}{8\pi} F^{\alpha\beta} \delta \left( \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} \right).$$

Заменяя в последнем слагаемом немые индексы суммирования  $\alpha$  на  $\beta$  и  $\beta$  на  $\alpha$  и учитывая антисимметричность тензора электромагнитного поля, получим

$$\delta\Lambda = -\frac{1}{4\pi} F^{\alpha\beta} \delta \left( \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} \right) \Rightarrow \frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial A_\mu / \partial x^\beta)} = -\frac{1}{4\pi} F^{\beta\mu},$$

что позволяет выписать ковариантные компоненты ТЭИ:

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} F_\mu^\beta + \frac{1}{16\pi} g^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}.$$

Однако это не симметричный тензор. Симметризуем его, используя описанный в предыдущем пункте прием, прибавив к нему

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial A^\alpha}{\partial x_\mu} F_\mu^\beta.$$

Такая добавка относится к разряду допустимых (см. (94)), действительно,

$$\frac{\partial A^\alpha}{\partial x_\mu} F^{\beta\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} A^\alpha F^{\beta\mu} - A^\alpha \frac{\partial F^{\beta\mu}}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} A^\alpha F^{\beta\mu},$$

т.к. в отсутствие источников вторая пара уравнений Максвелла имеет вид

$$\partial F^{\beta\mu} / \partial x_\mu = 0.$$

В результате получим выражение ТЭИ электромагнитного поля в виде

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi} F^{\alpha\mu} F_\mu^\beta + \frac{1}{16\pi} g^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \\ T_\beta^\alpha = -\frac{1}{4\pi} F^{\alpha\mu} F_{\beta\mu} + \frac{1}{16\pi} \delta_\beta^\alpha F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (95)$$

Легко видеть, что  $T^{\alpha\beta}$  – симметричный тензор, с равной нулю суммой диагональных компонент:

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}, \quad \text{Tr}(T_\beta^\alpha) \equiv T_\alpha^\alpha = 0.$$

Выразим компоненты тензора  $T_\beta^\alpha$  через напряженности электрического и магнитного полей, имея в виду, что инвариант  $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(H^2 - E^2)$ .

- Для плотности энергии электромагнитного поля  $w$  имеем

$$\begin{aligned} T_0^0 &= -\frac{1}{4\pi} F^{0\mu} F_{0\mu} + \frac{2}{16\pi} (H^2 - E^2) = -\frac{1}{4\pi} F^{0k} F_{0k} + \frac{1}{8\pi} (H^2 - E^2) \\ &= \frac{1}{4\pi} E^k E_k + \frac{1}{8\pi} (H^2 - E^2) = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}. \end{aligned}$$

Итак,

$$W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}.$$

- Для компонент плотности импульса  $g^i$  имеем

$$T_0^i = -\frac{1}{4\pi} F^{i\mu} F_{0\mu} = -\frac{1}{4\pi} F^{ik} F_{0k},$$

т.е.

$$T_0^1 = -\frac{1}{4\pi} F^{1k} F_{0k} = -\frac{1}{4\pi} (F^{12} F_{02} + F^{13} F_{03}) = \frac{1}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}]^x.$$

Точно так же можно убедиться, что

$$T_0^i = \frac{1}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}]^i \implies g_i = \frac{1}{4\pi c} [\vec{E}, \vec{H}]_i,$$

а вектор Пойнтинга

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}].$$

- Для компонент тензора напряжений, который называют максвелловским тензором напряжений, имеем

$$\Sigma_k^i = \frac{1}{4\pi} \{ E^i E_k + H^i H_k - \frac{1}{2} \delta_k^i (E^2 + H^2) \}.$$

Подсчитаем дивергенцию ТЭИ электромагнитного поля:

$$\frac{\partial T_\beta^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} - F^{\alpha\gamma} \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} - F_{\beta\gamma} \frac{\partial F^{\alpha\gamma}}{\partial x^\alpha} \right).$$

Используя уравнения Максвелла

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} = -\frac{\partial F_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial F_{\nu\beta}}{\partial x^\mu}; \quad \frac{\partial F^{\alpha\gamma}}{\partial x^\alpha} = \frac{4\pi}{c} j^\gamma,$$

имеем

$$\frac{\partial T_\beta^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{4\pi} \left( -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\beta\mu}}{\partial x^\alpha} - F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\nu\beta}}{\partial x^\mu} - F^{\alpha\gamma} \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} - \frac{4\pi}{c} F_{\beta\gamma} j^\gamma \right).$$



Переобозначим "немые" индексы суммирования, заменив в первом слагаемом  $\nu$  на  $\alpha$  и  $\mu$  на  $\gamma$ , а во втором —  $\mu$  на  $\alpha$  и  $\nu$  на  $\gamma$ , используя затем антисимметричность тензора  $F^{\mu\nu}$ , получим

$$\frac{\partial T_{\beta}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = -\frac{1}{c} F^{\beta\gamma} j^{\gamma}.$$

Дивергенция ТЭИ электромагнитного поля не обращается в нуль, и это естественно, поскольку использована вторая пара уравнений Максвелла, правая часть которых представлена источниками поля — заряженными частицами. Для того чтобы получить исчезающую дивергенцию, необходимо или принять, что рассматривается область пространства без источников ( $j^{\gamma} = 0$ ), или считать, что, при наличии заряженных частиц, ТЭИ системы представляет собой сумму тензоров энергии-импульса поля и частиц, причем частицы являются источниками поля, и поэтому, как и ранее, будем считать их невзаимодействующими.

Для определения ТЭИ частиц примем, что распределение масс в пространстве описывается на языке плотности массы. Введем ее аналогично тому, как вводилась плотность заряда

$$\mu(\vec{r}) = \sum_a m_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a),$$

где  $\vec{r}_a$  — радиус-вектор  $a$ -й частицы, а суммирование распространено на все частицы. Плотность импульса частицы запишется в виде  $\mu c u^i$ . (Напомним, что

$$u^i = \frac{m v^i}{c \sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

— пространственная компонента 4-скорости). Выше было показано, что компоненты  $(\tau^{0i}/c)$  ТЭИ совпадают с компонентами 3-вектора импульса, т.е.

$$\tau^{0i} = \mu c^2 u^i.$$

Аналогично 4-вектору плотности тока зарядов введем 4-вектор плотности "тока" масс

$$\mu \frac{dx^{\alpha}}{dt},$$

тогда ясно, что плотность массы будет временной компонентой 4-вектора

$$\frac{\mu}{c} \frac{dx^{\alpha}}{dt},$$

следовательно, ТЭИ системы невзаимодействующих частиц есть

$$\tau^{\alpha\beta} = \mu c \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{ds} = \mu c u^\alpha u^\beta \frac{ds}{dt} = \mu c^2 u^\alpha u^\beta \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Найдем дивергенцию этого тензора:

$$\frac{\partial \tau_\beta^\alpha}{\partial x^\alpha} = c u_\beta \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \mu \frac{dx^\alpha}{dt} \right) + \mu c \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{\partial u_\beta}{\partial x^\alpha}.$$

В первом слагаемом фигурирует дивергенция от 4-вектора плотности "тока" масс и в силу сохранения массы невзаимодействующих частиц обращается в нуль (аналогично дивергенции 4-вектора плотности тока зарядов). Таким образом,

$$\frac{\partial \tau_\beta^\alpha}{\partial x^\alpha} = \mu c \frac{du_\beta}{dx^\alpha} \frac{dx^\alpha}{dt} = \mu c \frac{du_\beta}{dt}.$$

Воспользуемся четырехмерным видом уравнения движения заряда в заданном поле

$$m c \frac{du_\beta}{ds} = \frac{e}{c} F_{\beta\gamma} u^\gamma \quad \Rightarrow \quad \mu c \frac{du_\beta}{ds} = \frac{\rho}{c} F_{\beta\gamma} u^\gamma.$$

Поэтому

$$\mu c \frac{du_\beta}{dt} = \frac{1}{c} F_{\beta\gamma} \rho u^\gamma \frac{ds}{dt} = \frac{1}{c} F_{\beta\gamma} \rho \frac{dx^\gamma}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{c} F_{\beta\gamma} j^\gamma.$$

Итак,

$$\frac{\partial \tau_\beta^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{c} F_{\beta\gamma} j^\gamma.$$

Окончательно

$$\frac{\partial \left( T_\beta^\alpha + \tau_\beta^\alpha \right)}{\partial x^\alpha} = \left( -\frac{1}{c} F_{\beta\gamma} j^\gamma + \frac{1}{c} F_{\beta\gamma} j^\gamma \right) = 0.$$

Как и следовало ожидать, дивергенция суммы тензоров энергии-импульса электромагнитного поля и создающих поле невзаимодействующих частиц обращается в нуль.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Био – Савара закон 33
- Временная дисперсия 85, 86
- Волны в слабопроводящей среде 92-95
  - преломления показатель 93, 95
  - поглощения коэффициент 93, 95
  - идеального диэлектрика предельный случай 99
- Вычеты. Теорема о вычетах 10-12
- Граничные задачи электростатики 12-17
  - Пуассона уравнения решение 13, 14
  - формальное решение с помощью функций Грина 15
  - Дирихле и Неймана задачи 16
  - единственность решения 20
- Грина функция 3-8, 41-45, 47
  - запаздывающая 6, 42-44
  - опережающая 7, 44, 45
  - Паули  $D$ -функция 8
  - причинная 9
  - Д'Аламбера уравнения 41-45
- Грина формулы 19
- Д'Аламбера уравнения для потенциалов поля в среде 76-78
  - Лоренца условие 77
- Дипольное излучение 51-55
  - дипольное приближение 53

- потенциалы и поля 53, 54
- Пойнтинга вектор 54
- интенсивность 54
- Дипольный момент системы зарядов 24
- Диэлектрической проницаемости тензор 88
- Доплер-эффект 57, 58
- Запаздывающие и опережающие потенциалы 41-47
- Квадрупольный момент системы зарядов 26
- Крамерса – Кронига формулы 97-99
- Лармора теорема 36-38
  - ларморова частота 38
- Лиенара – Вихерта потенциалы 47, 48
- Магнитный момент системы зарядов 35, 36
- Максвелла уравнения в среде 69-75
  - материальные уравнения 75
  - для фурье-образов 87
- Пойнтинга теорема 78, 79
- Поляризация плоской монохроматической волны 55-57
- Предельные выражения для  $\epsilon$  при наличии временной дисперсии 96
  - плазменная частота 97
- Продольные электромагнитные волны в среде 89, 90
- Произвольно движущегося заряда поле 49-51
- Пространственная дисперсия 86

- **Прохождение быстрых частиц через вещество 99-105**
  - поляризационные потери 103
  - черенковские потери 104
- **Равномерно движущегося заряда поле 33, 38-41**
  - нерелятивистский случай 33
  - релятивистский случай 40
  - сила взаимодействия движущихся зарядов 41
- **Рассеяние электромагнитных волн 64-68**
  - связанным зарядом 65, 66
  - дисперсионная формула 66
  - формула Томсона 67, 68
- **Реакция излучения 58-61**
- **Скин-эффект 90-92**
  - скин-слоя толщина 92
- **Условия на границе раздела сред 80-82**
- **Фурье-ряды и интеграл Фурье. Фурье-преобразование 21-23**
- **Ширина излучаемых линий 62-64**
  - спектральная функция распределения Лоренца 63
- **Энергии-импульса тензор 106-114**
  - общее выражение 107
  - физический смысл компонент 109, 110
  - электромагнитного поля 110-112
  - материальных частиц 114
- **Энергия системы зарядов во внешнем поле 29-31**
- **Энергия электростатического поля 28**
  - классический радиус электрона 29

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### I. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Метод функций Грина. Решение уравнения Пуассона .....	3
I. Механические колебания .....	3
Запаздывающая функция Грина (6). Опережающая функция Грина (7). D-функция Паули (8). Задача Коши (8). Причинная функция Грина (9)	
Дополнение 1 .....	10
Вычеты (10). Теорема о вычетах (11)	
II. Граничные задачи электростатики .....	12
Решение уравнения Пуассона (13). Формальное решение граничных задач электростатики с помощью функций Грина (15)	
Дополнение 2 .....	17
Дополнение 3 .....	18
Дополнение 4 .....	19
Формулы Грина (19)	
Дополнение 5 .....	20
Дополнение 6 .....	21
Дополнение 7 .....	21
Ряд и интеграл Фурье. Фурье-преобразование (21)	
Дипольный и квадрупольный моменты системы зарядов .....	24
Энергия электростатического поля. Энергия системы зарядов во внешнем электростатическом поле .....	28
Классический радиус электрона (29)	
Квазистационарное магнитное поле .....	31
Закон Био–Савара (33). Магнитный момент (35)	
Теорема Лармора .....	36
Поле равномерно движущегося заряда .....	38
Функция Грина уравнения Д'Аламбера. Запаздывающие и опережающие потенциалы .....	41
Потенциалы Лиенара–Вихерта. Поле произвольно движущегося заряда .....	47
Потенциалы и поля вдали от системы движущихся зарядов.	
Дипольное излучение .....	51
Плоская монохроматическая волна. Поляризация.	
Доплер-эффект .....	55
Реакция излучения .....	58

Естественная ширина излучаемых линий . . . . .	62
Спектральная функция распределения Лоренца (63)	
Рассеяние электромагнитных волн связанными и свободными зарядами . . . . .	64
Дисперсионная формула (66). Формула Томсона (68)	

## II. ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Вывод основных уравнений макроскопической электродинамики путем усреднения вакуумных уравнений Максвелла . . . . .	69
Вывод уравнений Д'Аламбера из уравнений Максвелла . . . . .	76
Теорема Пойнтинга . . . . .	78
Условия на границе раздела двух сред . . . . .	80
Введение в электродинамику сред с временной и пространственной дисперсией . . . . .	82
Тензор диэлектрической проницаемости (88). Продольные волны в среде (89)	
Высокочастотные явления в веществе . . . . .	90
Скин-эффект (90). Электромагнитные волны в однородной и изотропной среде (92)	
Предельные выражения для диэлектрической проницаемости при наличии временной дисперсии . . . . .	96
Формулы Крамерса–Кронига . . . . .	97
Прохождение быстрых частиц через вещество . . . . .	99
Поляризационные потери (103). Черенковские потери (104)	

## III. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

Общие положения . . . . .	106
Тензор энергии-импульса электромагнитного поля . . . . .	110
Тензор энергии-импульса частиц (114)	
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ . . . . .	115