

С 321

П - 175



Учебно-  
методические  
пособия  
Учебно-научного  
центра ОИЯИ  
Дубна

УНЦ-2001-9

В.В.Папоян

ЛЕКЦИИ ПО КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

2001

УНЦМО ЗНАК. 102

Папоян В.В.  
Лекции по классической механике

УНЦ-2001-9

Настоящие лекции являются изложением курса «Классическая механика», который на протяжении многих лет читается студентам физического факультета Ереванского государственного университета. Программа курса стандартная университетская с небольшими изменениями. Подробнее принятого излагается принцип наименьшего действия, доказана теорема Нетер. Одномерное движение рассматривается на примере задачи о движении частицы в поле с потенциалом Эккарта. В главу о движении в центральном поле включена формула Бине для траектории движения, достаточно подробно рассмотрен интеграл Лапласа–Рунге–Ленца. Обстоятельнее обычного рассматриваются гамильтонов формализм, канонические преобразования и уравнение Гамильтона–Якоби. На примере механических колебаний изложены основы использования функций Грина для решения неоднородных дифференциальных уравнений и т.д. По характеру изложения и по охвату материала курс близок известному учебнику «Механика» Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшица.

C321  
П-145

В.В.Папоян

ЛЕКЦИИ ПО КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

143742

Papoyan V.V.  
Lectures on Classical Mechanics

УНЦ-2001-9

These lectures represent a course on classical mechanics that has been given to the students of the physical department of Yerevan State University for many years. The program of the course is a standard university program with minor changes. In greater detail, the principle of least action is expounded, and the Neter theorem is proved. One-dimensional motion is considered for the problem of motion of a particle in a field with Ekkart potential. The chapter devoted to the motion in a central field contains the Binet formula for the trajectory and a detailed analysis of the Laplace–Runge–Lentz integral. The Hamiltonian formalism, canonical transformations, and the Hamilton–Jacobi equation are considered more thoroughly as compared to the standard consideration. The application of Green functions for solving inhomogeneous differential equations is expounded for mechanical vibrations. The course nature of exposition and scope of material is close to the known textbook «Mechanics» by L.Landau and E.Lifshitz.

Объединенный институт ядерных исследований, 2001

БОЛЬШАКОВСКИЙ ИНСТИТУТ  
ЯЗЫКОВ ИССЛЕДОВАНИЙ  
БИБЛИОТЕКА

## I. ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПРИНЦИПЫ

Разум, несомненно, кажется слабым, когда мы думаем о стоящих перед ним задачах, действительно слабым, когда мы противопоставляем его безумству и страстям человечества, которые, надо признать, руководят почти полностью судьбами человеческими как в малом, так и в большом. Но творения интеллекта переживают шумную суету поколений и на протяжении веков озаряют мир светом и теплом. Утешившись этой мыслью, возвратимся (в эти смутные дни) к памяти Ньютона, который был дан человечеству три столетия назад.

А. Эйнштейн

(статья для Manchester Guardian, 1927 г.)

Целью всей деятельности интеллекта является превращение некоторого чуда в нечто постигаемое.

А. Эйнштейн

Классическая механика занимается изучением движения макроскопических тел, скорости которых много меньше световой, а линейные размеры много больше атомных. Исторически - это первый из разделов теоретической физики, которая возникла как часть физической науки во многом благодаря гению И. Ньютона. Само название "теоретическая физика" дает лишь примерное представление о характере исследований физика-теоретика. Точнее - существенными для работы физика-теоретика являются два следующих направления:

- основываясь на результатах экспериментов в определенной области физических явлений, устанавливать общие закономерности для этой области;
- исходя из общих законов, предсказывать поведение тех или иных физических систем.

При решении таких задач, вообще говоря, приходится строить довольно длинные и сложные цепочки логических умозаключений. На этом пути вряд ли можно было бы продвинуться достаточно далеко, если бы не было возможности формализовать процесс, используя математику как основной метод теоретической физики. Такая математизация оказывается наиболее простым путем осознания природы физических явлений. Однако необходимо признать,

что характер рассуждений физика-теоретика весьма специфичен и не всегда используемые им методы приемлемы с точки зрения математика. Такое расхождение в отношении к предмету исследований, которое наглядно, но грубо отражено в известном афоризме "математик - доказывает, а физик убеждает", поддается объяснению. Действительно, математик сам конструирует объекты исследований и ограничен лишь требованием строгости и логической непротиворечивости своих умозаключений. Физик же изучает Природу - объект, существующий независимо от нас, и к тому же данный в единственном экземпляре. Поэтому приходится заботиться не столько о логической стройности рассуждений и удобстве рассмотрения, сколько о соответствии введенных представлений этому уникальному объекту. Для физика-теоретика математика - вспомогательное средство (справедливости ради заметим - необходимое), выражаясь образно, математика для него подобна жернову, который перемалывает все, что под него закладывают.

В чем состоит искусство физика? На наш взгляд, на этот риторический вопрос весьма схематично можно ответить следующим образом: искусство физика состоит

1. в способности рассмотреть ситуацию, составить мысленную картинку происходящего и мысленно же "повернуть" этой картинкой;
2. в умении подобрать адекватную этой ситуации математическую модель, т.е. в умении перевести физические закономерности на язык математических объектов и операций над ними;
3. в умении работать в рамках сконструированной модели, что требует достаточной технической подготовки.

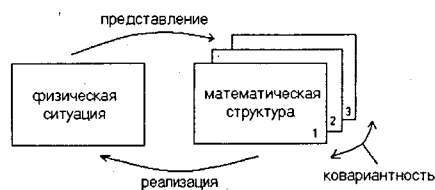


Рис. 1

Процесс математического моделирования той или иной физической ситуации назовем построением **представления**. Обратный процесс, в результате которого той или иной математической структуре ставится в соответствие описываемая ею физическая ситуация, назовем **реализацией математической структуры**. Чтобы эффективно работать с объектами физического мира, обычно находят адекватное математическое представление. Заметим, что математические объекты, в свою очередь, также могут обладать представлениями,

и в таком случае важно, до какой степени можно провести различие между объектами и их представлениями. Например, квадратной матрицей можно задать линейное преобразование, а ее детерминант можно рассматривать как число, показывающее, во сколько раз это линейное преобразование изменяет объем.

Измерение - основа физической науки. Не существует опытов, которые позволили бы измерить положение тела в пространстве или момент времени, когда произошло некоторое событие. **Экспериментально измеримы лишь расстояния между телами и промежутки времени между событиями**, что и будет принято в качестве одного из постулатов.

Физические явления достаточно сложны и довольно тесно взаимосвязаны, что делает полное рассмотрение всех сторон и особенностей этих явлений практически неосуществимым. Поэтому теоретическая физика занимается непосредственно не столько самими объектами Природы, сколько искусственно сконструированными моделями, сохраняющими те или иные особенности данного объекта, в пренебрежении несущественными для рассматриваемого класса явлений деталями (например, материальная точка, абсолютно твердое тело, несжимаемая жидкость и т.д.). Построение любой модели, в конечном итоге, сводится к пренебрежению второстепенными свойствами, т.е. к крупномасштабному усреднению, разумеется, для различных моделей степень этого усреднения различна.

В любой физической теории присутствуют элементарные представления (или первичные понятия), которые усваиваются в результате наглядной демонстрации либо предполагаются известными из более фундаментальной теории. Ограничиваясь этим замечанием, перейдем к определениям некоторых основных понятий.

**Материальная точка** (в дальнейшем точка, частица) - тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с размерами, характеризующими движение этого тела. Например, при рассмотрении движения Земли вокруг Солнца как Землю, так и Солнце можно считать материальными точками ввиду того, что в задачах фигурирует расстояние Земля - Солнце, которое много больше размеров и Земли, и Солнца. В то же время в задачах, связанных с вращением Земли вокруг собственной оси, Землю нельзя полагать материальной точкой.

Положение материальной точки в пространстве естественно задать в подходящей системе координат. Но прежде необходимо уточнить, каковы геометрические свойства пространства, в котором развиваются события классической механики. Постулируем: **пространство классической механики трехмерно и евклидово**. Это, в частности, означает, что векторы в классической механике складываются по правилу параллелограмма, кроме того, это означает, что для определения положения в пространстве естественно введение декартовой системы координат, в которой с частицей (материальной точкой) связывают координаты  $x, y, z$  или радиус-вектор  $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$ .

Введем также понятие **события**. Событие определяется местом, где оно произошло, и моментом времени, когда оно произошло. Совокупность событий

классической механики образует 4-мерное пространство, которое назовем **галилеевым**. Галилеево пространство естественно расщепляется на 3-мерное евклидово пространство и ось времени. Причем в качестве еще одного постулата примем: **время в классической механике однородно**. Это означает, что один и тот же эксперимент, поставленный в разные моменты времени при одних и тех же начальных условиях, даст одинаковые результаты. Пространственно-временная "история" частицы (тела) изображается кривой в пространстве событий (галилеевом 4-мерном пространстве), которая называется **мировой линией**, а все ее точки совпадают с событиями, происходящими с частицей (телом).

Для фиксации того или иного события необходимо иметь часы и систему координат. Однако вопрос о том, где поместить часы и начало системы координат, остается открытым до тех пор, пока не введено понятие **тела отсчета**. Предположим (еще один постулат), что тело отсчета не оказывает влияния на события, происходящие в его окрестности, или же это влияние может быть учтено. Считая тело отсчета материальной точкой, совместим с ним часы и начало системы координат. **Тело отсчета, система координат с началом, совмещенным с телом отсчета, и часы в начале координат в совокупности образуют понятие системы отсчета (СО) – одно из основных понятий классической механики.**

Положение материальной точки в пространстве задано, если задан ее радиус-вектор  $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$ . Положение  $N$  частиц, очевидно, определится заданием  $3N$  декартовых координат (по 3 на каждую точку), однако если на систему  $N$  точек наложены связи, то из задающих ее положение  $3N$  величин не все являются независимыми. Действительно,

1. Пусть при перемещении двух точек  $a$  и  $b$  расстояние между ними остается неизменным. Тогда их положение в пространстве определяется заданием 6 декартовых координат  $\vec{r}_a$  и  $\vec{r}_b$ , а также соотношения

$$l_{ab} = [(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2]^{1/2}.$$

Итак, независимых величин, определяющих положение этой системы, – 5. В этом качестве могут служить 3 декартовы координаты точки  $a$ . Если зафиксировать точку  $a$ , то точка  $b$  может находиться только на поверхности сферы радиуса  $l_{ab}$ , и ее положение определится заданием двух углов  $\theta$  и  $\varphi$  сферической системы координат.

2. Пусть при перемещении трех точек  $a, b, c$  расстояние между ними остается неизменным. Тогда их положение в пространстве определяется заданием 9 декартовых координат  $\vec{r}_a, \vec{r}_b, \vec{r}_c$ , а также трех соотношений  $l_{ab}, l_{bc}, l_{ca}$ . Независимых величин, определяющих положение этой системы, будет 6. В этом качестве можно выбрать 3 декартовы координаты точки  $a$ . Если зафиксировать эту точку, то точка  $b$  может находиться только на поверхности сферы радиуса  $l_{ab}$ , а ее положение определится заданием двух углов

$\theta$  и  $\varphi$  сферической системы координат. Если зафиксировать точки  $a$  и  $b$ , то точка  $c$  может двигаться только по окружности, а ее положение определится заданием некоего угла  $\psi$ .

Понятно, что предпочтительнее задавать положение системы в пространстве, используя независимые величины. Число независимых величин, полностью определяющих положение системы  $N$  материальных точек в пространстве, назовем **числом степеней свободы**. Обозначив это число через  $s$ , заметим, что  $s \leq 3N$ . Любые независимые величины, определяющие положение системы  $N$  материальных точек в пространстве, назовем **обобщенными координатами**. Отметим, что обобщенные координаты не обязательно имеют размерность длины (слово "любые" в определении!). Таким образом, положение системы  $N$  материальных точек в пространстве задано, если задано  $s \leq 3N$  обобщенных координат  $q_1, q_2, \dots, q_s$ .

Классическая механика занимается изучением движения системы материальных точек. Движение невозможно описать одним лишь заданием положения системы в пространстве (иногда используют эквивалентный термин - заданием конфигурации системы). Действительно, точка, имеющая в фиксированный момент времени определенные координаты, спустя бесконечно малый промежуток времени может оказаться в любой точке сферы бесконечно малого радиуса. И только если вместе с координатами задан также вектор скорости в тот же момент времени, спустя время  $dt$  точка окажется в определенном месте, предписанном вектором скорости. Итак, движение системы материальных точек можно описать, задав в определенный момент времени как ее положение в пространстве, так и скорости каждой из  $N$  точек. Введем понятие **состояния механической системы**: задать состояние механической системы означает задать в определенный момент времени значения стольких переменных, сколько нужно, чтобы однозначно предсказать значения всех динамических переменных в произвольный момент времени. Опыт показывает, что **состояние механической системы определяется заданием всех обобщенных координат и всех обобщенных скоростей в данный момент времени**, т.е. для системы  $N$  точек в момент времени  $t_0$  должны быть заданы  $2s$  независимых(!) величин

$$q_1, q_2, \dots, q_s; \quad \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s; \quad (\dots) = \frac{d}{dt}(\dots).$$

Это понятие позволяет сформулировать **основную задачу механики – по заданному в данный момент времени состоянию определить состояние механической системы в произвольный момент времени**. Решить основную задачу механики означает определить движение системы, т.е. найти  $q_i = q_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ . Понятно, что функция  $q_i = q_i(t)$  может быть определена как решение системы дифференциальных уравнений, которые естественно называть **уравнениями движения**. Таким образом, математически решить основную задачу механики означает, во-первых, установить вид уравнений движения механической системы и, во-вторых, интегрировать эти уравнения для

того, чтобы в явном виде определить движение системы, т.е. найти зависимость обобщенных координат от времени.

1. **Основная задача вариационного исчисления. Принцип наименьшего действия. Уравнения Лагранжа.** Следуя исторической традиции, мы могли бы, вслед за Ньютоном, постулировать уравнения движения механической системы (2-й закон Ньютона). Однако такой подход имеет ограниченную рамками классической механики применимость. Существует другая возможность – сформулировать общий для всех разделов теоретической физики принцип, который называется **принципом наименьшего действия** и который позволяет выяснить, какие именно ограничения накладывают физические требования на вид уравнений движения, и вывести эти уравнения. Перейдем к формулировке этого принципа.

- Состояние механической системы определяется заданием **функции Лагранжа**, которая является функцией полного набора обобщенных координат и обобщенных скоростей (для системы с  $s$  степенями свободы  $2s$  величин –  $q_i$  и  $\dot{q}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ ):

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t).$$

- Вводится понятие **действия** – это определенный интеграл по времени от функции Лагранжа в пределах от  $t_1$  до  $t_2$ :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t) dt.$$

- Утверждение принципа наименьшего действия состоит в следующем: движение механической системы между фиксированными в моменты  $t_1$  и  $t_2$  положениями происходит по траектории, на которой функционал действия имеет экстремум. Практически это означает необходимость сравнить значения действия на всех мыслимых (виртуальных) траекториях между фиксированными в моменты  $t_1$  и  $t_2$  положениями и выбрать ту, на которой действие экстремально, которая и будет соответствовать истинному движению.

Экстремальные значения некоторой функции определяют, приравнявая нулю ее первую производную. Иначе говоря, при сравнении значения функции в точке экстремума и в бесконечно близкой точке, т.е. в разложении функции в ряд Тейлора вокруг экстремальной точки, отсутствует слагаемое, линейное по бесконечно малому приращению аргумента, что и является отличительным свойством точек экстремума. В основной задаче

вариационного исчисления ставится вопрос об экстремальном значении некоторого функционала

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(Q, \dot{Q}, t) dt, \quad (1)$$

заданного в виде определенного интеграла. В (1) функция  $F(Q, \dot{Q}, t)$  считается заданной. Задача состоит в том, чтобы найти так называемую экстремаль, т.е. кривую  $q = q(t)$ , которая обеспечивает требуемое экстремальное свойство. Любую другую функцию  $Q(t)$  назовем сравниваемой. К "соревнованию" на экстремальность (1) допускаются кривые  $Q(t)$  с фиксированными в моменты  $t_1$  и  $t_2$  значениями, причем

$$Q(t_1) = q(t_1), \quad Q(t_2) = q(t_2). \quad (2)$$

Будем считать сравниваемую кривую бесконечно близкой к  $q(t)$ , осуществляющей экстремум (1), и положим

$$Q(t) = q(t) + \epsilon \xi(t), \quad (3)$$

считая  $\xi(t)$  бесконечно малым параметром. Произвольная в остальном функция  $\xi(t)$  согласно (2) должна удовлетворять равенствам

$$\xi(t_1) = \xi(t_2) = 0. \quad (4)$$

Величину

$$\delta q(t) = \epsilon \xi(t) \quad (5)$$

назовем вариацией  $q(t)$ . Подставив далее (3) в (1), получим

$$I(\epsilon) = \int_{t_1}^{t_2} F(q + \epsilon \xi, \dot{q} + \epsilon \dot{\xi}, t) dt \quad (6)$$

– интеграл, зависящий от параметра  $\epsilon$ . Согласно предположению  $q(t)$  – экстремаль, поэтому экстремальное значение интеграла (6) достигается при  $\epsilon = 0$ . Таким образом, рассматриваемая вариационная задача свелась к задаче об обычном экстремуме, а необходимым условием экстремальности  $I(\epsilon)$  является

$$\left. \frac{\partial I(\epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0. \quad (7)$$

Линейный член разложения интеграла  $I(\epsilon)$  в ряд Тейлора

$$\delta I = \epsilon \cdot \left. \frac{\partial I(\epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0}. \quad (8)$$

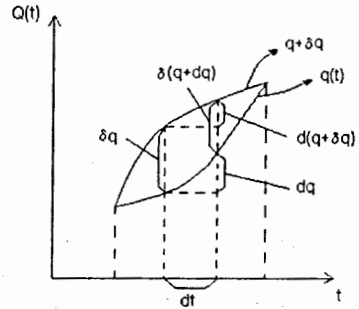


Рис. 2

назовем вариацией интеграла  $I$ , тогда условием его экстремальности будет

$$\delta I = 0.$$

Легко показать, что операции дифференцирования и варьирования перестановочны. Наглядно это демонстрирует рис. 2. Действительно, легко видеть, что

$$dq + \delta(q + dq) = \delta q + d(q + \delta q),$$

следовательно,  $\delta(dq) = d(\delta q)$ . С другой стороны, из (5) следует

$$d(\delta q(t)) = \epsilon d\xi(t),$$

а из (3) получаем

$$\epsilon d\xi(t) = dQ - dq.$$

Ввиду того, что  $Q = q + \delta q$ , то и для дифференциалов  $dQ = dq + \delta(dq)$ , поэтому

$$\delta(dq) = dQ - dq = \epsilon d\xi = d(\delta q).$$

Вооружившись некоторыми понятиями об экстремуме функционала, обратимся к требованиям принципа наименьшего действия. Согласно этому принципу состояние механической системы с  $s$  степенями свободы может быть определено функцией Лагранжа

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t)$$

( $q_i$  и  $\dot{q}_i$  - набор обобщенных координат и скоростей,  $i = 1, 2, \dots, s$ ). Вводится функционал действия

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$$

и утверждается, что между двумя фиксированными в моменты  $t_1$  и  $t_2$  положениями движение механической системы происходит

по траектории, на которой действие экстремально. Необходимым условием экстремума, как было показано выше, является обращение в нуль вариации действия

$$\delta S = 0,$$

причем

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0.$$

Поэтому, поскольку операции дифференцирования (интегрирования) и варьирования перестановочны, получаем

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^s \left[ \delta q_i \cdot \frac{\partial L}{\partial q_i} + \delta \dot{q}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] dt = 0.$$

Учитывая, что  $\delta \dot{q}_i = d(\delta q_i)/dt$ , и интегрируя второе слагаемое подынтегрального выражения по частям, получим

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right] dt + \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Принцип наименьшего действия относится только к движениям между двумя фиксированными в моменты  $t_1$  и  $t_2$  положениями, поэтому последнее слагаемое предыдущего выражения обращается в нуль, а т.к.  $\delta q_i(t)$  произвольна, то, как следствие принципа наименьшего действия, получаем уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

С математической точки зрения это система  $s$  дифференциальных уравнений второго порядка, решение которой позволяет определить состояние рассматриваемой механической системы (с известной функцией Лагранжа) по заданному в произвольный момент времени состоянию и тем самым решить основную задачу механики. Действительно, уравнения Лагранжа - это уравнения типа

$$f_i(\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q_i, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

решения которых содержат  $2s$  произвольных постоянных

$$q_i = q_i(C_1, C_2, \dots, C_{2s}, t), \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i(C_1, C_2, \dots, C_{2s}, t).$$

Выражая константы  $C_i$  через набор  $q_{0i}, \dot{q}_{0i}$ , определяющий состояние системы в момент времени  $t_0$ , получим полное решение поставленной задачи. Таким образом, уравнения Лагранжа - это уравнения движения механической системы.



Вышеизложенное наполнится физическим содержанием лишь после того, как, выяснив физический смысл функции Лагранжа, мы научимся строить лагранжиан в каждом конкретном случае. Однако свойства лагранжевой функции можно установить уже сейчас.

- Две функции Лагранжа, которые отличаются на полную производную по времени от произвольной функции координат,

$$L = \dot{L} + \frac{df(q_i)}{dt}$$

определяют движение одной и той же механической системы. Действительно,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \dot{S} + [f(q_i(t_2)) - f(q_i(t_1))].$$

При варьировании выражение в квадратных скобках исчезает, тогда  $\delta S = \delta \dot{S}$ , т.е.  $L$  и  $\dot{L}$  приводят к одним и тем же уравнениям движения. Таким образом, функция Лагранжа определена с точностью до полной производной по времени от произвольной функции координат и времени, иначе говоря, если в выражении для функции Лагранжа удастся выделить полную производную по времени, то ее можно отбросить без какого-либо ущерба для уравнений движения.

- Функция Лагранжа асимптотически аддитивна. Это означает, что если некая механическая система состоит из подсистем  $A, B, C, \dots$ , которые не взаимодействуют или разведены настолько, что взаимодействием между ними можно пренебречь, то функция Лагранжа всей системы есть сумма функций Лагранжа подсистем:

$$L = L_A + L_B + L_C + \dots$$

Как будет выяснено в дальнейшем, функция Лагранжа должна обладать этим свойством для того, чтобы обеспечить аналогичное свойство массы (или, если угодно, благодаря тому, что этим свойством обладает масса).

- Нетрудно заметить, что функция Лагранжа определена с точностью до умножения на любую константу, поскольку такое умножение не отражается на уравнениях движения. Казалось бы, это допускает умножение функций Лагранжа изолированных подсистем на разные постоянные, однако свойство асимптотической аддитивности запрещает такой произвол – функции Лагранжа невзаимодействующих подсистем могут быть помножены только на одну и ту же константу.

2. **Принцип относительности. Преобразования Галилея.** Физические явления протекают независимо от состояния движения наблюдателя (предполагается, что наблюдатель вместе с необходимыми для измерений приборами привязан к какой-либо системе отсчета, поэтому в дальнейшем наблюдатель будет обозначать также и связанную с ним СО, и наоборот). Описание же физических явлений существенно зависит от выбора наблюдателя. Действительно, с точки зрения произвольно движущейся СО, частица, покоящаяся в какой-то момент, придет в движение в следующие моменты времени. Однако существуют системы отсчета и связанные с ними наблюдатели, в которых физические явления выглядят проще, чем в других СО. Этот факт был осознан еще Галилеем, а 1-й закон Ньютона, по существу, является определением таких СО – инерциальных систем отсчета (ИСО), с точки зрения которых описание физических явлений наиболее просто.

Помимо определения Ньютона, ИСО можно определить и по-другому. Назовем ИСО такую СО, в которой пространство однородно и изотропно, а время однородно. В дальнейшем мы будем исходить из этого определения, показав его эквивалентность ньютоновскому. Поясним понятия "однородно" и "изотропно". Если пространство однородно, то один и тот же эксперимент при одинаковых начальных условиях в разных точках пространства даст один и тот же результат. И, наоборот, если эксперимент выполнен в разных точках пространства при одинаковых начальных условиях один и тот же эксперимент дает совпадающие результаты, то пространство однородно. Если пространство изотропно, то один и тот же эксперимент при одинаковых начальных условиях, выполненный в лаборатории, которая может вращаться вокруг какой-либо оси, при повороте на разные углы даст один и тот же результат. И, наоборот, совпадающие результаты экспериментов при поворотах лаборатории говорят об изотропности пространства.

Рассмотрим изолированную частицу (частицу, не взаимодействующую с другими частицами или телами) с точки зрения ИСО. Вообще говоря, функция Лагранжа  $L = L(\vec{r}, \vec{v}, t)$ , однако для рассматриваемого случая, чтобы пространство оставалось однородным и изотропным, а время однородным, необходимо считать, что  $L$  не должна зависеть от  $\vec{r}$ ,  $t$  и направления скорости, т.е. функция Лагранжа изолированной частицы в ИСО может зависеть только от величины скорости:  $L = L(v^2)$ ; подставив ее в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0,$$

получим

$$\vec{v} = const.$$

Иначе говоря, скорость изолированной частицы в ИСО не меняется по



величине и направлению (1-й закон Ньютона). Это, в свою очередь, означает, что все СО, которые движутся относительно ИСО с постоянной скоростью, являются ИСО. Нетрудно вывести преобразование пространственных координат при переходе от покоящейся ИСО  $K$  к  $K'$ , движущейся относительно  $K$  с постоянной скоростью  $\vec{V}$ . Действительно,

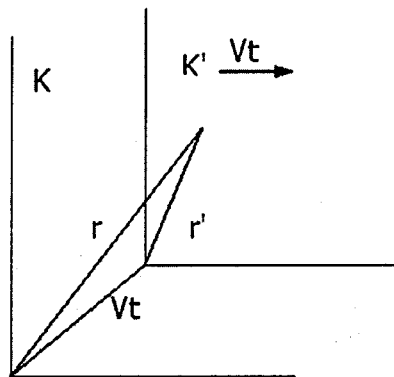


Рис. 3

легко видеть, что

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t.$$

Постулат о евклидовости пространства классической механики позволяет заключить, что закон сложения скоростей имеет вид

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V},$$

где  $\vec{v}$  - скорость частицы в ИСО  $K$ ,  $\vec{v}'$  - скорость частицы в ИСО  $K'$ . Для того, чтобы согласовать этот закон с предыдущим соотношением, необходимо считать, что

$$t = t',$$

т.е. время в классической механике абсолютно.

- **Замечание 1.** Если принять в качестве одного из основных предположений абсолютность времени, т.е. постулировать  $t = t'$ , то дифференцируя по времени соотношение  $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t$ , получим вышеупомянутый закон сложения скоростей.

Интуитивно принцип относительности (ПО) как обобщение экспериментальных данных обычно формулируют в виде следующего утверждения: нет никаких оснований, исходя из физических соображений, предпочесть какую-либо одну из инерциальных систем отсчета. Другими словами, не существует экспериментов, которые позволили

бы выделить какую-либо инерциальную систему отсчета по сравнению с другими, или не существует физических систем или состояний этих систем, поведение которых в разных ИСО, но при одинаковых начальных условиях было бы неодинаково. Попробуем уточнить эти утверждения. Представим себе двух наблюдателей  $A$  и  $B$ , связанных с разными ИСО, которые следят за поведением двух идентичных физических систем  $a$  и  $b$  в одном и том же эксперименте. Тогда, согласно ПО, если начальное состояние системы  $a$  с точки зрения  $A$  такое же, как и начальное состояние системы  $b$  с точки зрения  $B$ , то результаты экспериментов совпадают. Наблюдатели  $A$  и  $B$  только сравнивают полученные ими результаты эксперимента над своей физической системой, но  $A$  ( $B$ ) не проводит наблюдений над  $b(a)$ , а если бы и проводил, то, вообще говоря, получил бы результаты, отличные от тех, которые получает  $B$  ( $A$ ). Действительно, рассмотрим, например, заряды  $a$  и  $b$ , неподвижные относительно наблюдателей  $A$  и  $B$  соответственно. Каждый из них обнаружит наличие статического электрического поля, созданного зарядами собственной ИСО ( $A$  в  $a$ ,  $B$  в  $b$ ), но наблюдатель  $A$  ( $B$ ), помимо электрического, зафиксирует также и магнитное поле заряда  $b(a)$ , что не совпадает с наблюдениями  $B$  в  $b$  ( $A$  в  $a$ ). Эти пояснения позволяют наполнить физическим содержанием одну из распространенных формулировок ПО - в различных ИСО все физические явления при одних и тех же начальных условиях протекают одинаковым образом. ПО - это утверждение о том, что некоторый класс физических теорий обладает определенными свойствами инвариантности и, следовательно, связанный с некоторой группой преобразований ПО накладывает ограничения на возможные типы физических теорий, которые можно сформулировать, не нарушая ПО.

Поскольку каждой физической величине сопоставляется математический объект, а физические явления облакаются в форму соотношений между этими объектами, т.е. записываются в виде уравнений, адекватно описывающих физические закономерности, то ясно, что математически содержание ПО можно сформулировать в виде эквивалентного ему принципа ковариантности - уравнения, описывающие физические закономерности, ковариантны (не меняют своей формы) относительно преобразований координат между различными СО. Таким образом, законы физики выражаются в форме, не изменяющейся при связывающих две ИСО преобразованиях величин, которые содержатся в этих законах, т.е. форма этих законов (вид уравнений) в различных ИСО одинакова. Такими преобразованиями в классической механике являются

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t, \quad t = t',$$

которые называют преобразованиями Галилея.

- **Замечание 2.** Распространение взаимодействия – это физический процесс, поэтому, согласно требованию принципа относительности, скорость распространения взаимодействия должна быть одной и той же во всех инерциальных системах отсчета. Для того, чтобы согласовать это требование с законом сложения скоростей (или, эквивалентно, постулата об абсолютности времени) необходимо предположить, что скорость распространения взаимодействия в классической механике бесконечна, т.е. для того, чтобы остаться в рамках основных постулатов классической механики, необходимо считать, что взаимодействие распространяется мгновенно.

Всякая СО, связанная с ИСО преобразованиями Галилея, инерциальна. Для того чтобы можно было утверждать также, что преобразования, связывающие две ИСО, являются преобразованиями Галилея, надо расширить совокупность этих преобразований:

$$t = \dot{t} + t_0,$$

$$x^\alpha = x^\alpha + V^\alpha t + L_\beta^\alpha x^\beta + x_0^\alpha; \quad x^\alpha = (x, y, z), \quad V^\alpha = (V_x, V_y, V_z),$$

здесь  $t_0$  и  $x_0^\alpha$  – временной (изменения начала отсчета времени) и пространственный (смещения начала отсчета координат) сдвиги, матрица  $L_\beta^\alpha$  – матрица поворотов пространственных осей. Понятно, что ни одно из этих преобразований не нарушает инерциальности СО, т.к. они сохраняют однородность и изотропность пространства и однородность времени. Эти десятипараметрические преобразования называют **расширенными преобразованиями Галилея**.

Резюмируя, отметим: ПО – это утверждение о том, что некоторый класс физических теорий обладает определенными свойствами инвариантности. С этой точки зрения, ПО, связанный с некоторой группой преобразований, накладывает ограничения на возможные типы физических теорий, которые можно сформулировать, не нарушая ПО.

Продемонстрируем, как, используя ограничения, накладываемые принципом относительности, получить функцию Лагранжа замкнутой (без внешних воздействий) системы невзаимодействующих частиц. Как было выяснено ранее, функция Лагранжа изолированной частицы  $L = L(v^2)$ . Согласно принципу относительности функция Лагранжа частицы в СО  $\dot{K}$ , которая движется относительно  $K$  с постоянной скоростью, может отличаться от  $L$  лишь на полную производную от произвольной функции координат и времени. Пусть  $\dot{K}$  движется относительно  $K$  с бесконечно малой скоростью  $\epsilon = const$ , тогда  $\vec{v} = \vec{v} + \vec{\epsilon}$  и

$$L(v^2) = L(\dot{v}^2 + 2\dot{v}\epsilon + \epsilon^2),$$

разлагая в ряд Тейлора вокруг  $\dot{v}^2$  и отбрасывая слагаемое, квадратичное по  $\epsilon$ , получим

$$L(v^2) = L(\dot{v}^2) + 2\dot{v}\epsilon \frac{\partial L}{\partial \dot{v}^2}.$$

Второе слагаемое, как было отмечено, согласно требованию принципа относительности должно быть полной производной от произвольной функции координат, а это так, лишь если  $\partial L / \partial \dot{v}^2$  не зависит от  $\dot{v}^2$ , что возможно только в случае  $L = \alpha \cdot v^2$ . Согласно свойству асимптотической аддитивности лагранжиана для замкнутой системы  $N$  невзаимодействующих частиц имеем

$$L = \sum_{a=1}^N \alpha_a \cdot v_a^2.$$

Проверим этот результат, предполагая, что скорость движения  $\dot{K}$  конечна и равна  $V$ , тогда

$$\alpha \cdot v^2 = \alpha \cdot (\dot{v}^2 + 2\dot{v} \cdot V + V^2) = \alpha \cdot [\dot{v}^2 + \frac{d}{dt}(2\dot{v} \cdot V + V^2 \cdot t)].$$

Итак,  $L = \dot{L} + \frac{d}{dt}(\dots)$ , в полном соответствии с принципом относительности. Как известно, лагранжиан определен с точностью до полной производной по времени, поэтому второе слагаемое можно опустить.

- **Замечание 3.** Принцип наименьшего действия вместе со своим следствием – уравнениями Лагранжа – сформулирован в обобщенных координатах  $q_i$ . Выбор этих координат ничем не predetermined, следовательно, как принцип, так и уравнения движения будут иметь физическую ценность, только если при переходе от  $q_i$  к другим обобщенным координатам  $Q_i$ , в полном соответствии с принципом ковариантности, уравнения Лагранжа сохранят свою форму. Докажем ковариантность этих уравнений относительно преобразований

$$q_i = q_i(Q_1, Q_2, \dots, Q_s, t), \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Для упрощения записи докажем это для одной степени свободы (обобщение на случай  $s$  степеней свободы тривиально). Поскольку

$$\dot{L}(Q, \dot{Q}, t) = L(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t) = L(q, \frac{\partial q}{\partial Q} \dot{Q} + \frac{\partial q}{\partial t}, t),$$

а также  $\dot{q} = (\partial q / \partial Q) \dot{Q} + \partial q / \partial t$ , имеем

$$\frac{\partial \dot{L}}{\partial Q} = \frac{\partial L}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial Q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial Q}, \quad \frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial q}{\partial Q}$$

и

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial q}{\partial Q} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \frac{\partial q}{\partial Q}; \quad \frac{\partial \dot{q}}{\partial Q} = \frac{\partial}{\partial Q} \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial q}{\partial Q}.$$

Теперь легко убедиться, что

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q} = \frac{\partial q}{\partial Q} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right).$$

Таким образом, справедливость уравнения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

приводит к справедливости аналогичного уравнения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q} = 0.$$

3. **Функция Лагранжа системы материальных точек.** Установим вид функции Лагранжа для замкнутой системы  $N$  взаимодействующих частиц. Как было показано, в отсутствие взаимодействия внутри системы функция Лагранжа имеет вид

$$L = \sum_{a=1}^N \alpha_a \cdot v_a^2.$$

Взаимодействие между частицами будет включено, если добавить к этому выражению функцию  $U = U(r_1, r_2, \dots, r_N)$ . Предполагается, что именно такая функция, зависящая лишь от положений частиц в пространстве, описывает взаимодействие между ними. Подчеркнем, что при изменении положения одной или нескольких частиц остальные "узнают" об этом изменении мгновенно, в полном соответствии с полученным ранее результатом о том, что в классической механике взаимодействие распространяется мгновенно. (Этот результат есть следствие предположения об абсолютности времени или закона сложения скоростей, вытекающего из постулата, устанавливающего евклидовость и трехмерность пространства классической механики.) Итак,

$$L = \sum_{a=1}^N \alpha_a \cdot v_a^2 - U(r_1, r_2, \dots, r_N).$$

Отметим, что такой выбор  $L$  является определенным допущением, которое может быть оправдано, лишь если при использовании такой  $L$  будут получены результаты, согласующиеся с экспериментальными фактами

или с известными обобщениями данных наблюдений (с законами Ньютона, например). Подставим эту функцию Лагранжа в уравнения движения. Сравнивая результат со 2-м законом Ньютона, можно заключить, что если определить силу как отрицательный градиент функции  $U = U(r_1, r_2, \dots, r_N)$ , описывающей взаимодействие

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}},$$

то окажется, что необходимо выбрать  $\alpha_a = m_a/2$ , а для функции Лагранжа замкнутой системы  $N$  взаимодействующих частиц получим

$$L = \sum_{a=1}^N \frac{m_a \cdot v_a^2}{2} - U(r_1, r_2, \dots, r_N).$$

Здесь  $m_a$  – масса  $a$ -й частицы. Первое слагаемое этого выражения – кинетическая энергия системы  $T$ , поэтому ясно, что ответственная за взаимодействие функция  $U$  не что иное, как потенциальная энергия системы. Таким образом, в каждой конкретной задаче функция Лагранжа замкнутой механической системы может быть вычислена как разность кинетической и потенциальной энергий:

$$L = T - U.$$

Отметим:

(а) Вид функции Лагранжа для замкнутых систем взаимодействующих частиц позволяет заключить, что для таких систем время не только однородно, но и изотропно, т.е. его свойства одинаковы в обоих направлениях. Действительно, замена  $t$  на  $-t$  не меняет как  $L$ , так и уравнения движения. Иначе говоря, если возможно некоторое движение, то возможно и обратное, при котором система проходит те же состояния, но в обратном направлении.

(б) Поскольку  $v^2 = dl^2/dt^2$ , где  $dl$  – элемент длины в произвольной системе координат, то

• в декартовых координатах  $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ , поэтому

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2);$$

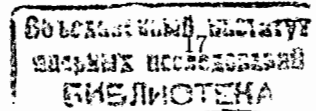
• в цилиндрических координатах  $dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2$ , откуда

$$T = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2);$$

• в сферических координатах  $dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot d\phi^2$  и

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\phi}^2).$$

143742



Как было замечено выше, при рассмотрении движения механических систем со связями предпочтительнее пользоваться обобщенными координатами. Перепишем функцию Лагранжа в обобщенных координатах. Ввиду того, что

$$x_a = f_a(q_1, q_2, \dots, q_s), \quad \dot{x}_a = \sum_i \frac{\partial f_a}{\partial q_i} \dot{q}_i, \quad L = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U$$

(выражения  $\dot{y}_a$  и  $\dot{z}_a$  аналогичны выражению для  $\dot{x}_a$ ), получим

$$L = \sum_a \frac{m_a}{2} \sum_{i,k} \dot{q}_i \dot{q}_k \left( \frac{\partial f_a}{\partial q_i} \frac{\partial f_a}{\partial q_k} + \frac{\partial u_a}{\partial q_i} \frac{\partial u_a}{\partial q_k} + \frac{\partial v_a}{\partial q_i} \frac{\partial v_a}{\partial q_k} \right) - U.$$

Окончательно функция Лагранжа замкнутой системы взаимодействующих частиц в обобщенных координатах записывается в виде

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q_1, q_2, \dots, q_s) \cdot \dot{q}_i \dot{q}_k - U;$$

$$a_{ik} = \sum_a \frac{m_a}{2} \sum_{i,k} \left( \frac{\partial f_a}{\partial q_i} \frac{\partial f_a}{\partial q_k} + \frac{\partial u_a}{\partial q_i} \frac{\partial u_a}{\partial q_k} + \frac{\partial v_a}{\partial q_i} \frac{\partial v_a}{\partial q_k} \right),$$

т.е. в обобщенных координатах кинетическая энергия является функцией не только обобщенных скоростей, но и координат:

$$L = T(q_i, \dot{q}_i) - U(q_i), \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Такая запись, когда переменная в аргументе некоторой функции снабжена индексом, будет использована для краткости и в дальнейшем, причем переменная с индексом заменяет полный набор этих величин  $(\dots)_i = (\dots)_1, (\dots)_2, \dots, (\dots)_s$ .

Определим вид функции Лагранжа для систем, испытывающих внешнее воздействие. В общем случае это довольно сложная задача. Однако в одном частном (но важном) случае, когда рассматриваемая незамкнутая система (назовем ее I) взаимодействует с системой II, движение которой предполагается заданным, задача становится простой. О такой ситуации говорят как о движении системы I в заданном внешнем поле (считается, что  $q_{II}$  и  $\dot{q}_{II}$  являются известными функциями времени). Выпишем теперь функцию Лагранжа совокупной (уже замкнутой) системы:

$$L_{I+II} = T_I(q_I, \dot{q}_I) + T_{II}(q_{II}, \dot{q}_{II}) - U(q_I, q_{II}).$$

Поскольку аргументы второго слагаемого – заданные функции времени, это слагаемое можно представить как производную по времени и игнорировать. Оставшееся содержит переменные, относящиеся только к системе

I, тогда, отбросив индексы, получим выражение функции Лагранжа для системы, находящейся в заданном внешнем поле:

$$L = T(q, \dot{q}) - U(q, t).$$

Этот лагранжиан, как и для замкнутых систем, является разностью  $T$  и  $U$ , с той разницей, что потенциальная энергия может явно зависеть от времени. В декартовых координатах

$$L = \sum_{a=1}^N \frac{m_a \cdot v_a^2}{2} - U(r_1, r_2, \dots, r_N, t).$$

## II. ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ. ТЕОРЕМА НЕТЕР. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

1. **Интегралы движения.** Решение лагранжевых уравнений движения, которые с математической точки зрения являются системой  $s$  дифференциальных уравнений второго порядка ( $s$  – число степеней свободы), должно содержать  $2s$  произвольных постоянных:

$$q_i = q_i(C_1, C_2, \dots, C_{2s}, t), \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i(C_1, C_2, \dots, C_{2s}, t).$$

Поскольку для замкнутых механических систем или систем, находящихся в постоянном внешнем поле (формально это системы, лагранжиан которых удовлетворяет условию  $\partial L / \partial t = 0$ ), уравнения движения инвариантны относительно замены  $t \mapsto t + t_0$ , то одну из констант  $C$  обозначим  $t_0$ , так чтобы вместо  $t$  в решениях уравнений движения фигурировало  $t + t_0$ . Исключая далее  $t + t_0$ , для оставшихся  $2s - 1$  постоянных получим  $C_1(q_i, \dot{q}_i), C_2(q_i, \dot{q}_i), \dots, C_{2s-1}(q_i, \dot{q}_i)$ . Иначе говоря, при движении механической системы с  $s$  степенями свободы  $2s - 1$  функций обобщенных координат и скоростей сохраняют постоянные значения. Такие величины называются интегралами движения. Особое значение имеют аддитивные (или асимптотически аддитивные) интегралы движения, ввиду того что они позволяют сделать определенные заключения о движении без решения уравнений. Действительно, пусть две (или больше) частиц разведены настолько, что взаимодействие между ними пренебрежимо мало, при своем движении эти частицы сближаются так, что начинают взаимодействовать, а после расходятся так, чтобы взаимодействием снова можно было пренебречь. Если даже природа взаимодействия неизвестна, т.е. область, где его необходимо учитывать, – "черный ящик", то в случае, когда система обладает аддитивными (или асимптотически

аддитивными) интегралами движения, приравнивая сумму этих интегралов движения до и после взаимодействия, можно высказать определенные суждения как о характере взаимодействия, так и о характере движения. Принято сохранение аддитивных (или асимптотически аддитивных) интегралов движения называть **законами сохранения**, а сами интегралы – сохраняющимися величинами.

**2. Теорема Нетер.** Теорема Эмми Нетер (1918 г.) играет фундаментальную роль во всей теоретической физике. Она демонстрирует связь преобразований симметрии функционала действия (в частности, преобразований координат и времени, оставляющих инвариантным действие) с законами сохранения динамических переменных. Эти динамические переменные оказываются первыми интегралами уравнений движения. Иначе говоря, теорема Нетер позволяет найти первые интегралы уравнений движения, не решая их.

В соответствии с принципом относительности действие – инвариант группы преобразований, связывающих две инерциальные системы отсчета  $K$  и  $K'$ . В классической механике это расширенные преобразования Галилея

$$\begin{aligned} x^i &= \dot{x}^i + S_k^i \dot{x}^k + V_0^i t + x_0^i, \\ t &= \dot{t} + t_0, \quad i, k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Здесь  $V_0^i, x_0^i, t_0$  – константы,  $S_k^i$  – ортогональная матрица, характеризующая вращение  $K$  относительно  $K'$ , параметризуемая тремя постоянными углами. Временная координата имеет абсолютный смысл и изменяется лишь при сдвиге начала отсчета времени на  $t_0$  (репараметризация времени). Вышеприведенные преобразования образуют 10-параметрическую группу преобразований галилеева пространства и являются группой симметрии действия.

На основании теоремы Нетер можно утверждать, что в классической механике эта 10-параметрическая группа симметрии действия порождает законы сохранения 10 динамических величин. Как будет показано, это энергия, по три компоненты импульса, скорости центра масс частицы и момента импульса.

- **Теорема.** Каждому  $n$ -параметрическому преобразованию независимых переменных действия, относительно которых оно инвариантно, соответствует  $n$  сохраняющихся динамических величин.

**Доказательство.** Рассмотрим механическую систему, состояние которой описывается функцией Лагранжа  $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ . Было показано, что лагранжевы уравнения движения сохраняют свою форму

при преобразованиях  $\dot{q}_i = f_i(q_j, t)$ . Рассмотрим более общие преобразования, включающие репараметризацию времени:

$$\dot{q}_i = f_i(q_j, t); \quad \dot{t} = f(t).$$

В общем случае вид нового действия как функционала новых координат, зависящих от нового времени, при таком преобразовании может претерпеть любые изменения. Теорема Нетер относится к тому частному случаю, когда таких изменений не происходит.

Введем совокупность зависящих от одного (ради простоты) параметра  $\lambda$  преобразований координат и времени:

$$[t; q(t)] \implies \Lambda(\lambda)[t; q(t)] = [\dot{t}; \dot{q}(\dot{t})] = [f(t; \lambda); f_i(q_j, t; \lambda)]. \quad (9)$$

Будем считать, что оператор преобразования  $\Lambda(\lambda)$  удовлетворяет условиям

$$\Lambda(\lambda_1)\Lambda(\lambda_2) = \Lambda(\lambda_3(\lambda_1, \lambda_2)); \quad \Lambda(0) = 1,$$

т.е. образует однопараметрическую группу.

Рассмотрим бесконечно малое преобразование, отвечающее параметру  $\lambda \mapsto 0$ :

$$t \implies \dot{t} = t + \delta t; \quad \delta t = \frac{\partial f}{\partial \lambda} \cdot \lambda, \quad (10)$$

$$q_i(t) \implies \dot{q}_i(\dot{t}) = f_i(q_j; t; \lambda) = q_i(t) + \frac{\partial f_i}{\partial \lambda} \cdot \lambda. \quad (11)$$

Вариация функции при изменении аргумента возникает как благодаря этому изменению, так и из-за изменения вида функции

$$\delta^* q_i = \dot{q}_i(\dot{t}) - q_i(t) = \frac{\partial f_i}{\partial \lambda} \cdot \lambda. \quad (12)$$

Можно ввести также вариацию формы функции

$$\delta q_i = \dot{q}_i(t) - q_i(t). \quad (13)$$

Очевидно,

$$\delta^* q_i = \delta q_i + \dot{q}_i \cdot \delta t, \quad (14)$$

кроме того, вариация формы функции (без звездочки), как было показано, перестановочна с производной по времени  $(d/dt)\delta q = \delta \dot{q}$ . Соответственно, два типа вариаций можно ввести и для любой величины, например, для функции Лагранжа

$$\delta^* L = \dot{L}(\dots \dot{t}) - L(\dots t), \quad \delta L = \dot{L}(\dots t) - L(\dots t),$$

а также

$$\delta^* L = \delta L + \frac{\partial L}{\partial t} \cdot \delta t.$$

Вернемся к условиям теоремы Нетер и потребуем, чтобы функционал действия оставался неизменным при преобразованиях (10) и (11):

$$\delta^* S = \int_{\bar{T}} d\bar{t} \cdot \dot{L}(\dots\bar{t}) - \int_T dt \cdot L(\dots t) = 0. \quad (15)$$

Здесь  $\bar{T}$  – та же область интегрирования, что и  $T$ , но выраженная через штрихованные переменные, что дает

$$\delta^* S = \int_{\bar{T}} d\bar{t} \cdot [L(\dots\bar{t}) + \delta^* L] - \int_T dt \cdot L(\dots t) = 0.$$

Подставив в последнее соотношение  $d\bar{t}$  и  $\delta^* L$ , получим

$$\delta^* S = \int_T [\delta L + \frac{d}{dt}(L\delta t)] \cdot dt.$$

Раскрывая  $\delta L$ , принимая во внимание

$$\sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \delta q_i \right) = \sum_i \left[ \delta q_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \delta \dot{q}_i \right],$$

подразумевая, что движение происходит по истинной траектории, т.е. учитывая уравнения движения, а также заменив  $\delta q_i$  на  $\delta^* q_i$  согласно (14), придем к следующему выражению для  $\delta^* S$ :

$$\delta^* S = \int_T dt \cdot \frac{d}{dt} \left[ \left( L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i \right) \delta t + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \delta^* q_i \right].$$

Эта вариация равна нулю, и, так как область интегрирования произвольна, равно нулю также и подынтегральное выражение

$$\frac{d}{dt} \left[ \left( L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i \right) \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \lambda} \right] = 0. \quad (16)$$

Другими словами, из инвариантности действия относительно (10) и (11) как следствие получено, что величина

$$\Lambda = \left( L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i \right) \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \lambda} \quad (17)$$

сохраняется во времени. Это и есть точное утверждение теоремы Нетер. Теорема доказана.

• **Замечание 1.** Величина (17) зависит как от обобщенных координат, скоростей и времени, так и от функций  $f$  и  $f_i$  и поэтому еще не есть динамическая (зависящая только от  $q, \dot{q}, t$ ) сохраняющаяся величина. Она станет таковой, как только будет явно задано преобразование, генерирующее сохраняющуюся величину, и выяснена зависимость  $f$  и  $f_i$  от  $q, \dot{q}, t$ .

• **Замечание 2.** Слагаемые в (17) имеют разный характер. Первое слагаемое, содержащее функцию Лагранжа, перепутывает степени свободы и поэтому обладает лишь асимптотической аддитивностью. Второе слагаемое имеет явную форму суммы по степеням свободы. Поэтому если преобразование, относительно которого инвариантно действие, затрагивает время, то можно надеяться лишь на сохранение асимптотически аддитивной величины. Если же преобразуются только координаты, то сохраняться будет аддитивная величина.

Применим теорему Нетер к различным частным случаям преобразований симметрии действия.

3. **Энергия.** Рассмотрим преобразование, связанное с однородностью времени, – сдвиг во времени  $t = \bar{t} + t_0$ . Это преобразование получается как частный случай общих (10) и (11), если положить  $(\partial f_i / \partial \lambda) = 0$ , выбрать  $\delta t = \lambda$  и поэтому принять, что  $(\partial f / \partial \lambda) = 1$ . Тогда вместо (16) получим

$$\frac{d}{dt} \left[ L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i \right] = 0, \quad (18)$$

что означает сохранение

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L. \quad (19)$$

Тот же результат можно получить исходя из однородности времени, не привлекая теоремы Нетер. Действительно, из однородности времени следует, что функция Лагранжа замкнутых механических систем или систем, находящихся в постоянном внешнем поле (назовем такие системы консервативными), не должна зависеть от времени, т.е.

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i \right] = \sum_i \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \cdot \frac{d}{dt} \dot{q}_i \right] = \sum_i \frac{d}{dt} \left( \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right),$$

выражение, совпадающее с (18).

Легко показать, что  $E$  из (19) является полной энергией механической системы. Действительно, для консервативных систем лагранжиан  $L = T(q_i, \dot{q}_i) - U(q_i)$  и является квадратичной функцией обобщенных скоростей,

поэтому, согласно теореме Эйлера об однородных функциях, сумма в (19) равна  $2T$ , а

$$E = 2T - (T - U) = T + U$$

есть полная энергия системы. В декартовых координатах

$$E = \sum_a \frac{mv_a^2}{2} + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N).$$

• **Примечание 1.** Функция

$$f(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_i) = \alpha^k f(x_1, x_2, \dots, x_i)$$

называется однородной функцией степени  $k$ .

Для однородных функций степени  $k$  теорема Эйлера устанавливает

$$\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = k \cdot f.$$

Согласно (19) энергия аддитивна в той же мере, в какой аддитивна функция Лагранжа, т.е. асимптотически аддитивна.

Таким образом, вследствие однородности времени при движении замкнутых механических систем, а также систем, находящихся в постоянном внешнем поле, энергия, определяемая выражением (19), остается неизменной.

4. **Импульс.** Другой закон сохранения возникает в связи с однородностью пространства. Преобразование, отражающее соответствующую этой однородности симметрию, есть пространственный сдвиг. Проще всего это преобразование выглядит в декартовых координатах:  $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a}$ . Поскольку оно не затрагивает времени, то получается из общих преобразований (10) и (11), если положить  $(\partial f / \partial \lambda) = 0$ , а также, ввиду необходимости выбора  $\lambda = \vec{a}$ , принять  $(\partial f_i / \partial \lambda) = 1$ . Тогда из (16) следует

$$\sum_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = \frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = 0.$$

Подставив сюда лагранжиан замкнутой системы в декартовых координатах, получим

$$\vec{p}_a = m_a \cdot \vec{v}_a; \quad \vec{P} = \sum_a \vec{p}_a = const.$$

Здесь  $\vec{p}_a$  – импульс отдельной частицы,  $\vec{P}$  – полный импульс, сохраняющийся при движении системы и аддитивный по определению, причем, в отличие от энергии, его аддитивность не зависит от того, взаимодействуют части системы или нет.

Тот же результат можно получить, не используя (16). В силу однородности пространства свойства замкнутой механической системы не должны зависеть от параллельного переноса этой системы как целого, а это означает, что при соответствующем пространственному сдвигу бесконечно малом преобразовании  $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{c}(\epsilon \mapsto 0)$  изменение функции Лагранжа должно обращаться в нуль, т.е.

$$\sum_a \delta \vec{r}_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = \vec{c} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = \vec{c} \frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = 0.$$

Таким образом, вследствие однородности пространства при движении замкнутых механических систем их полный импульс  $\vec{P}$  остается неизменным. В декартовых координатах

$$\vec{P} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = \sum_a \vec{p}_a = \sum_a m_a \cdot \vec{v}_a = const. \quad (20)$$

Для незамкнутых систем полный импульс, вообще говоря, сохраняться не будет. Однако в важном случае движения системы во внешнем поле, если поле обладает некоторой симметрией, в частности, если оно не меняется при параллельном переносе механической системы как целого вдоль какого-либо направления, то, как это следует из приведенного вывода, компонента импульса в этом направлении сохраняется (обычно в этих направлениях выбирают координатные оси). Формальным признаком такой симметрии поля является отсутствие зависимости потенциальной энергии от соответствующей декартовой координаты. Так, в направленном по  $z$  однородном поле сохраняются компоненты импульса вдоль осей  $x$  и  $y$ .

• **Примечание 2.** Однородным называют поле, во всех точках которого на частицу действует одна и та же сила  $\vec{F}$ . Из определения  $\vec{F} = -(\partial U / \partial \vec{r})$  следует, что в однородном поле  $U = -\vec{F} \cdot \vec{r}$ , т.е. потенциальная энергия является линейной функцией координат.

Следует обратить внимание на следующее интересное обстоятельство. В декартовых координатах лагранжевы уравнения движения записываются в виде

$$\frac{d\vec{p}_a}{dt} = \vec{F}_a; \quad \vec{p}_a = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a}; \quad \vec{F}_a = -\partial U / \partial \vec{r}_a,$$

где  $\vec{p}_a$  – импульс  $a$ -й частицы, а  $\vec{F}_a$  – сила, действующая на эту частицу. Просуммировав по всем частицам, получим

$$\sum_a \vec{F}_a = 0,$$



т.е. сумма сил, действующих внутри замкнутой системы, равна нулю. Если система состоит из двух взаимодействующих частей, то мы приходим к 3-му закону Ньютона о равенстве действия и противодействия.

По аналогии с декартовыми координатами назовем

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}; \quad f_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$i$ -ми компонентами обобщенных импульса и силы. Понятно, что уравнения движения Лагранжа в этих обозначениях принимают вид

$$\dot{p}_i = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Отметим, что обобщенные импульсы и силы необязательно имеют обычные размерности  $[MLT^{-1}]$  и  $[MLT^{-2}]$ .

- **Замечание 3.** Рассмотрим ситуацию, когда функция Лагранжа не зависит от одной (или нескольких) обобщенных координат, необходимых для описания положения системы в пространстве. Такие координаты назовем **циклическими**. Пусть  $q_k$  – циклическая координата (для нескольких циклических координат рассуждения такие же), т.е.

$$L = L(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t),$$

другими словами,  $\partial L / \partial q_k = 0$ , что, согласно уравнениям Лагранжа, означает сохранение  $k$ -й компоненты обобщенного импульса. Итак, если одна или несколько координат, задающих положение механической системы в пространстве, циклические, то соответствующие компоненты импульсов являются сохраняющимися величинами.

5. **Момент импульса.** Следует ожидать, что очередной закон сохранения будет следствием изотропии пространства. И, как было сказано, поскольку соответствующее изотропии пространства преобразование симметрии не должно затрагивать времени, то сохраняющаяся величина будет аддитивной по определению, как импульс. Будем работать в декартовых координатах, тогда искомое преобразование имеет вид

$$\vec{r}_a \Rightarrow \vec{r}'_a = \vec{r}_a + [\delta\vec{\varphi}, \vec{r}_a]; \quad \delta\vec{r}_a = [\delta\vec{\varphi}, \vec{r}_a].$$

Это преобразование выведено в курсе векторного и тензорного анализа при рассмотрении изменения векторов, обусловленных вращениями, которые параметризованы бесконечно малым  $\delta\vec{\varphi}$ . Сравнивая последнее выражение с (11), подставим результат в (16) и получим

$$\frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} \cdot [\delta\vec{\varphi}, \vec{r}_a] = \delta\vec{\varphi} \cdot \frac{d}{dt} \sum_a [\vec{r}_a, \vec{p}_a] = 0, \Rightarrow \vec{M} = \sum_a [\vec{r}_a, \vec{p}_a] = const$$

– закон сохранения вектора момента импульса  $\vec{M}$ , как и ожидалось, аддитивного по определению. Аналогичное заключение можно получить иначе. В силу изотропности пространства свойства замкнутой механической системы не меняются при поворотах ее как целого. Это означает, что преобразование

$$(\vec{A})'_a = \vec{A}_a + [\delta\vec{\varphi}, \vec{A}_a],$$

где

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{v} \end{pmatrix},$$

оставляет неизменным функцию Лагранжа системы, т.е.

$$\delta L = \sum_a \left( \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \cdot \delta\vec{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} \cdot \delta\vec{v}_a \right) =$$

$$\sum_a \left( \dot{\vec{p}}_a \cdot [\delta\vec{\varphi}, \vec{r}_a] + \vec{p}_a \cdot [\delta\vec{\varphi}, \vec{v}_a] \right) = \delta\vec{\varphi} \cdot \frac{d}{dt} \sum_a [\vec{r}_a, \vec{p}_a] = 0.$$

Итак, при движении замкнутых механических систем, как следствие изотропии пространства, полный момент импульса  $\vec{M}$  сохраняется. В декартовых координатах

$$\vec{M} = \sum_a [\vec{r}_a, \vec{p}_a]; \quad \frac{d\vec{M}}{dt} = 0. \quad (21)$$

Покажем, что величина момента импульса зависит от точки, относительно которой он определен. Сместим начало координат на постоянный вектор  $\vec{a}$ , тогда  $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}$ , а

$$\vec{M}' = \vec{M} + [\vec{a}, \vec{P}],$$

и, только если механическая система покоится как целое ( $\vec{P} = 0$ ), моменты импульса в обеих системах совпадают и поэтому не зависят от выбора начала координат.

Достаточно просто понять, что при движении механических систем, взаимодействующих с внешним полем, компоненты момента импульса (в одном частном случае сферически-симметричного поля полный момент импульса) остаются неизменными, если внешнее поле обладает осевой симметрией. Действительно, в этом случае свойства поля не меняются при поворотах вокруг оси симметрии, пространство относительно этой оси изотропно, поэтому компонента импульса на ось симметрии сохраняется. Если внешнее поле сферически-симметрично, любая ось, проходящая через центр поля, является осью симметрии относительно вращений вокруг нее. (Кстати говоря, это положение можно принять за определение сферической симметрии.) А это означает, что сохраняется определенный относительно центра поля полный момент импульса, т.к. сохраняются его компоненты относительно трех декартовых осей.

- **Замечание 4.** Характер вывода закона сохранения момента импульса позволяет предположить, что проекция момента на какую-либо ось (например,  $z$ ) определяется формулой

$$M_z = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_a}.$$

В этом нетрудно убедиться прямым вычислением. Действительно,  $M_z = \sum_a m_a [\vec{r}_a \vec{v}_a]_z = \sum_a m_a (x_a \dot{y}_a - y_a \dot{x}_a)$  или в цилиндрических координатах  $M_z = \sum_a m_a \rho_a^2 \dot{\varphi}_a$ , и, поскольку функция Лагранжа  $L = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\dot{\rho}_a^2 + \rho_a^2 \dot{\varphi}_a^2 + \dot{z}_a^2)$ , легко видеть, что формула верна.

6. **Преобразование сохраняющихся величин.** Выясним, как преобразуются сохраняющиеся величины при галилеевых преобразованиях

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t; \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}; \quad t = t'.$$

(ИСО  $K'$  движется относительно  $K$  со скоростью  $\vec{V} = \text{const.}$ )

Начнем с импульса

$$\vec{P} = \sum_a m_a \vec{v}_a = \vec{P}' + \vec{V} \sum_a m_a = \vec{P}' + \mu \vec{V}, \quad \mu = \sum_a m_a.$$

Из всех мыслимых ИСО  $K'$  выберем ту, в которой рассматриваемая механическая система покоится как целое. Очевидно, это та  $K'$ , в которой  $\vec{P}' = 0$  и которая движется относительно  $K$  со скоростью  $\vec{V} = \vec{V}_0 = \vec{P}/\mu = \sum_a m_a \vec{v}_a / \mu$ . Проинтегрировав последнее соотношение, получим

$$\vec{R} = \vec{V}_0 t + \vec{R}_0 = \frac{\sum_a m_a \vec{r}_a}{\sum_a m_a}.$$

Назовем точку с радиус-вектором  $\vec{R}$  центром инерции (ЦИ) механической системы. Эта точка движется с постоянной скоростью  $\vec{V}_0$  вместе с ИСО  $K'$  (в которой наша система покоится как целое) относительно ИСО  $K$ . ИСО  $K'$  принято называть ИСО ЦИ. Итак, в силу закона сохранения импульса ЦИ замкнутой системы материальных точек движется со скоростью  $\vec{V}_0 = \text{const.}$  Это движение в высокой степени тривиально, поэтому обычно его исключают из рассмотрения. (Отметим аналогию с движением свободной материальной точки. Интересно также заметить, что связь импульса системы с ее скоростью как целого ( $\vec{P} = \mu \vec{V}$ ) такая же, как и для отдельной частицы. Эта аналогия позволяет трактовать систему материальных точек (в тех случаях, когда внутренние движения в ней нас не интересуют) как одну материальную точку, т.е. по существу оправдывает модельное представление о материальной точке.) Постоянство скорости движения ЦИ замкнутой системы естественно отнести к

законам сохранения и тем самым завершить рассмотрение величин, сохранение которых следует из инвариантности лагранжиана замкнутых систем относительно 10-параметрической группы расширенных преобразований Галилея.

Перейдем к преобразованию энергии  $E = T + U$ :

$$T = \sum_a \frac{m_a \cdot v_a^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_a m_a \cdot v_a^2 + \frac{\mu V^2}{2} + \sum_a m_a \cdot \vec{v}_a \vec{V} = T' + \frac{\mu V^2}{2} + \vec{P}' \cdot \vec{V}.$$

Для полной энергии

$$E = E' + \frac{\mu V^2}{2} + \vec{P}' \cdot \vec{V},$$

и если штрихованную СО выбрать как ИСО ЦИ, т.е. положить  $\vec{P}' = 0$ , то

$$E = E_{in} + \frac{\mu V^2}{2}, \quad E_{in} = \frac{1}{2} \sum_a m_a \cdot v_a'^2 + U.$$

Таким образом, в ИСО, относительно которой механическая система движется как целое (в ИСО ЦИ), полная энергия складывается из внутренней энергии  $E_{in}$  и кинетической энергии движения системы как целого. Это обстоятельство позволяет при решении задачи о движении системы  $N$  точек в ИСО ЦИ разбить задачу на две независимые - задачу о внутреннем движении и тривиальную задачу о равномерном и прямолинейном движении системы как целого.

Осталось выяснить, что происходит при преобразованиях Галилея с моментом импульса

$$M = \sum_a m_a [\vec{r}_a, \vec{v}_a] = \vec{M}' + \mu [\vec{R}, \vec{V}].$$

Если механическая система покоится как целое в системе  $K'$ , то  $\mu \cdot \vec{V} = \vec{P}$ , и тогда

$$M = \vec{M}' + [\vec{R}, \vec{P}].$$

В системе ЦИ вектор  $\vec{M}'$  называют собственным моментом импульса и обозначают  $\vec{M}_{in}$ , иначе говоря, момент импульса механической системы в произвольной СО складывается из собственного момента и векторного произведения радиус-вектора ЦИ на импульс. (Заметим, что последнее слагаемое опять имеет форму момента одной частицы с координатой  $\vec{R}$  и импульсом  $\vec{P}$ . А это еще раз подтверждает, что если не интересоваться внутренними движениями, то систему материальных точек можно рассматривать как одну точку с массой  $\mu$  и радиус-вектором  $\vec{R}$ .)

Таким образом, для замкнутых механических систем, исходя из самых общих свойств однородности и изотропности пространства и однородности времени, удалось получить законы сохранения энергии, импульса и момента импульса. Два последних интеграла движения аддитивны по определению, а энергия асимптотически аддитивна. В каждом случае оказалось возможным указать на достаточно широкий класс внешних полей, не нарушающих законов сохранения. Это постоянные внешние поля (в случае энергии), поля, симметричные относительно пространственных сдвигов вдоль какой-либо оси (вдоль той же оси сохраняется компонента импульса), и поля, обладающие осевой симметрией (сохраняется проекция момента на эту ось). Основная ценность законов сохранения состоит в том, что они позволяют, не вникая в детальный механизм происходящего, выявить некоторые основные черты явления. В тех случаях, когда механизм происходящего неизвестен, законы сохранения часто служат единственным источником о процессах, происходящих с системой. Наконец, в более простых случаях, когда речь идет об интегрировании уравнений движения, законы сохранения могут служить вспомогательным средством, упрощающим эту процедуру.

По этим причинам сохраняющиеся для всякой замкнутой системы и для систем, взаимодействующих с перечисленными выше типами внешних полей, энергию, импульс и момент называют фундаментальными динамическими величинами.

- **Приложение.** Приведем другое доказательство теоремы Нетер. Рассмотрим бесконечно малое преобразование координат  $q_i \mapsto \dot{q}_i + \delta q_i$ , где  $\delta q_i = T_i^k \cdot \epsilon_k$ , а  $i, k = 1 \dots n$  (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование,  $\epsilon_k$  – бесконечно малые независимые параметры преобразования). Согласно условиям теоремы потребуем, чтобы при таком преобразовании действие оставалось неизменным. Тогда ясно, что

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \delta q_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \delta \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left( \delta q_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \int_{t_1}^{t_2} \delta q_i dt \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] = 0.$$

Разумеется, механическая система движется в соответствии с уравнениями Лагранжа, подставив их в предыдущее выражение и имея в виду произвольность  $\delta q_i$ , получим

$$\frac{d}{dt} [T_i^k (\partial L / \partial \dot{q}_i)] = 0 \implies T_i^k (\partial L / \partial \dot{q}_i) = C^k,$$

константы  $C^k$  соответствуют  $k = 1 \dots n$  сохраняющимся динамическим переменным. Теорема доказана, обратимся к применениям.

Рассмотрим замкнутую систему  $N$  частиц с лагранжианом

$$L = \sum_{a=1}^N \frac{m_a \dot{r}_a^2}{2} - U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

и преобразуем координаты согласно

$$\dot{\vec{r}}_a = \vec{r}_a + \delta \vec{r}_a, \quad \delta \vec{r}_a = \delta \vec{a} + [\delta \vec{n}, \vec{r}_a]$$

или в компонентах

$$(\delta \vec{r}_a)_i = \delta a_i + \epsilon_{ikl} \delta n^k \cdot x_a^l.$$

1. Пусть  $\delta \vec{a} \neq 0, \delta \vec{n} = 0$ . Ясно, что  $(\delta \vec{r}_a)_i = \delta_i^k \cdot \delta a_k$ , т.е.  $T_i^k = \delta_i^k$ , что приводит к

$$\sum m_a \dot{\vec{r}}_a = \vec{P} = const$$

– **закону сохранения импульса** и является следствием инвариантности действия относительно параллельного переноса механической системы как целого, другими словами, следствием однородности пространства.

2. Пусть  $\delta \vec{a} = 0, \delta \vec{n} \neq 0$ . Ясно, что  $T_{ik} = \epsilon_{ikl} x_a^l$  (напомним, что в евклидовом пространстве классической механики нет разницы между верхним и нижним положениями индексов). Ввиду того, что  $(\partial L / \partial \dot{x}_i) = \sum m_a \dot{x}_a^i$ , а также  $\dot{x}_a^i \epsilon_{ikl} x_a^l = \epsilon_{kli} x_a^l \dot{x}_a^i$ , получим

$$\sum m_a [\vec{r}_a, \dot{\vec{r}}_a] = \sum m_a [\vec{r}_a, \vec{v}_a] = \vec{M} = const$$

– **закон сохранения момента импульса** как следствие инвариантности действия относительно поворота механической системы как целого, другими словами, как следствие изотропности пространства.

### III. МЕХАНИЧЕСКОЕ ПОДОБИЕ. ТЕОРЕМА ВИРИАЛА. ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

1. **Механическое подобие.** Сохраняющиеся динамические переменные позволяют выявить некоторые (иногда важные) черты механических явлений без решения основной задачи механики. Сохранение этих величин является следствием весьма общих свойств пространства и времени, которые находят свое отражение в пространственно-временных преобразованиях, оставляющих неизменными уравнения движения. Как было замечено, уравнения движения неизменны также при умножении функции

Лагранжа на константу:  $L$  и  $\dot{L} = c \cdot L$  приводят к одним и тем же уравнениям движения. Попробуем выяснить, дадут ли следствия такой инвариантности уравнений движения какой-либо выигрыш. Довольно общее соображение в духе теоремы Нетер – любая симметрия не случайна – внушает надежду на положительный результат.

Рассмотрим механические системы, потенциальная энергия которых является однородной функцией декартовых координат:

$$U(\alpha \vec{r}_1, \alpha \vec{r}_2, \dots, \alpha \vec{r}_N) = \alpha^k U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N).$$

Преобразуем координаты рассматриваемой системы так, чтобы  $\vec{r}_a \mapsto \alpha \vec{r}_a$ , и предположим, что при этом время движения по траекториям с измененными в  $\alpha$  раз координатами изменяется в  $\beta$  раз, т.е.  $t \mapsto \beta t$ . Кинетическая энергия изменится при этом в  $(\alpha/\beta)^2$  раз, а потенциальная – в  $\alpha^k$  раз. Выберем  $\beta$  так, чтобы

$$(\alpha/\beta)^2 = \alpha^k \longrightarrow \beta = \alpha^{1-k/2},$$

тогда функция Лагранжа целиком умножится на постоянный множитель  $\alpha^k$ , т.е. уравнения движения останутся неизменными.

Изменение координат всех частиц в одинаковом числе раз означает переход от одних траекторий к другим – траекториям, геометрически подобным исходным. Итак, если потенциальная энергия системы является однородной функцией  $k$ -й степени от координат, то уравнения движения допускают геометрически подобные траектории, причем времена движения между соответствующими точками траекторий относятся как

$$\frac{\dot{t}}{t} = \left(\frac{\dot{l}}{l}\right)^{1-k/2} \implies \frac{\dot{v}}{v} = \left(\frac{\dot{l}}{l}\right)^{k/2}, \quad \frac{\dot{E}}{E} = \left(\frac{\dot{l}}{l}\right)^k. \quad (22)$$

Здесь  $\left(\frac{\dot{l}}{l}\right)$  – отношение линейных размеров двух геометрически подобных траекторий.

Рассмотрим несколько примеров.

- Потенциальная энергия – квадратичная функция координат  $U \sim x^2$ . Известно, что такая зависимость потенциальной энергии от координат характерна для колебаний. Подставив  $k = 2$  в (22), находим, что период колебаний не зависит от амплитуды, – полученный из самых общих соображений хорошо известный результат.
- В однородном поле потенциальная энергия – линейная функция координат, т.е.  $k = 1$ . Из (22) имеем

$$\frac{\dot{t}}{t} = \left(\frac{\dot{l}}{l}\right)^{1/2}.$$

Знакомый результат – в поле тяжести квадраты времен падения тел относятся, как их начальные высоты.

- Потенциальная энергия обратно пропорциональна расстоянию между телами  $U \sim 1/r$ . Такое взаимодействие соответствует притяжению двух масс или кулоновскому взаимодействию двух зарядов. Подставив  $k = -1$  в (22), получим

$$\left(\frac{\dot{t}}{t}\right)^2 = \left(\frac{\dot{l}}{l}\right)^3,$$

т.е. отношение квадратов времен обращения по геометрически подобным траекториям пропорционально отношению кубов их линейных размеров (третий закон Кеплера).

Таким образом, факт неизменности уравнений движения, соответствующих лагранжевым функциям, отличающимся на константу, при достаточно общем предположении об однородности потенциальной энергии допускает существование геометрически подобных траекторий с определенным отношением времен и линейных размеров (см.(22)), что в частных случаях приводит к интересным следствиям, получающимся без интегрирования уравнений движения.

2. **Теорема вириала.** Будем по-прежнему считать потенциальную энергию системы однородной, степени  $k$  функцией декартовых координат. Кинетическая энергия – квадратичная функция скоростей и согласно теореме Эйлера

$$\sum_a \vec{v}_a \frac{\partial T}{\partial \vec{v}_a} = 2T = \sum_a \vec{v}_a \cdot \vec{p}_a = \frac{d}{dt} \sum_a \vec{r}_a \cdot \vec{p}_a - \sum_a \vec{r}_a \cdot \dot{\vec{p}}_a = \frac{d}{dt} \sum_a \vec{r}_a \cdot \vec{p}_a + \sum_a \vec{r}_a \cdot \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}.$$

Откуда

$$2T = \frac{d}{dt} \sum_a \vec{r}_a \cdot \vec{p}_a + kU.$$

(Использованы определение импульса, явный вид уравнений движения, однородность потенциальной энергии.)

- **Примечание.** Средним по времени значением произвольной функции  $f(t)$  назовем

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt.$$

Если  $f(t) = (dF/dt)$ , ( $F(t)$  – произвольная, но ограниченная функция), то среднее по времени значение  $f(t)$  обращается в нуль. Действительно,

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dF}{dt} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = 0.$$

Предположим, что рассматриваемая механическая система движется с конечной скоростью в ограниченной области пространства, тогда после усреднения по времени

$$2\bar{T} = k\bar{U},$$

что и составляет содержание **теоремы вириала** (вириал - по-немецки "сила"). Ввиду того, что  $\bar{T} + \bar{U} = \bar{E} = E$ , легко получить

$$\bar{T} = \frac{k}{k+2}E; \quad \bar{U} = \frac{2}{k+2}E.$$

В частности, для колебаний  $k = 2$ ,  $\bar{T} = \bar{U}$ , а для ньютоновского притяжения  $k = -1$  и  $2\bar{T} = -U$ ,  $\bar{T} = -E$ . Последнее означает, что полная энергия в этом случае (а это движение в ограниченной области пространства) должна быть отрицательной. Итак, на основании теоремы вириала можно заключить: **в ньютоновском поле притяжения движение в ограниченной области пространства возможно только при отрицательной полной энергии.**

**3. Общие свойства одномерного движения.** Одномерным назовем движение механической системы с одной степенью свободы. Рассмотрим одномерное движение системы, которая замкнута или находится в постоянном внешнем поле. Функция Лагранжа такой системы в декартовых координатах имеет вид

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x).$$

Поскольку потенциальная энергия не зависит от времени явно, сохраняется полная энергия

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x),$$

которая к тому же является первым интегралом уравнений движения. Действительно, помножив обе стороны уравнений движения на  $\dot{x}$ , имеем

$$\dot{x} \cdot m\ddot{x} = \dot{x} \left( -\frac{\partial U}{\partial x} \right) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) \right) = 0,$$

следовательно,  $E = const$  - первый интеграл уравнений движения, значение которого определяется начальными условиями  $E = E_0$ . Легко видеть, что

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U(x))},$$

и поэтому

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E_0 - U(x)}} + t_0, \quad t_0 = const. \quad (23)$$

Первое, что сразу бросается в глаза, - движение возможно только в тех промежутках оси  $x$  (**области, допустимые для движения**), которые определяются неравенством  $U(x) \leq E_0$ , а полученные как решения алгебраического уравнения  $U(x) = E_0$  значения  $x$  являются **точками остановки** системы, т.к. скорость  $\dot{x}$  обращается в этих точках в ноль. Если в области, допустимой для движения, алгебраическое уравнение  $U(x) = E_0$  не имеет действительных корней или действительный корень только один  $x_1$ , то говорят, что **движение инфинитно** ( $-\infty \leq x \leq +\infty$ ), или ( $-\infty \leq x \leq x_1$ ), или ( $x_1 \leq x \leq +\infty$ ); если же действительных корней два  $x_1, x_2$ , то говорят, что **движение финитно** ( $x_1 \leq x \leq x_2$ ).

Покажем, что одномерное финитное движение имеет периодический характер.

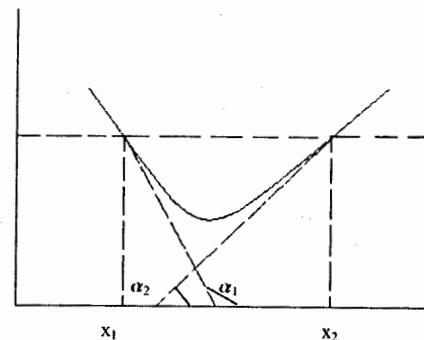


Рис. 4

Как видно из рис. 4, промежуток ( $x_1 \leq x \leq x_2$ ) является областью финитного движения. Тангенсы угла наклона касательных к кривой  $U(x)$  в точках остановки  $x_1$  и  $x_2$  изображают силы, действующие на систему в этих точках, и имеют разные знаки, иначе говоря, система останавливается в точке  $x_1$  ( $x_2$ ), но действующая на нее сила отлична от нуля и направлена в сторону  $x_2$  ( $x_1$ ), т. е. система колеблется между  $x_1$  и  $x_2$ . Из-за свойства обратимости движения время движения от  $x_1$  до  $x_2$  равно времени движения от  $x_2$  до  $x_1$ , поэтому период колебаний в зависимости от энергии определяется выражением

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1(E_0)}^{x_2(E_0)} \frac{dx}{\sqrt{E_0 - U(x)}}.$$

• **Замечание 1.** Описание движения систем с одной степенью свободы, которое мы определили как одномерное движение, в декартовых координатах возможно не всегда. Например, лагранжиан плоского математического маятника (материальная точка массы  $m$ , колеблющаяся

на нити длиной  $l$  в поле тяжести) в декартовых координатах имеет вид

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy,$$

в то время как это движение с одной степенью свободы и удобной обобщенной координатой является угол отклонения нити маятника от вертикали  $\varphi$ . Заменяя  $x$  и  $y$  согласно  $x = l\sin\varphi$ ,  $y = l\cos\varphi$ , получим

$$L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mgl\cos\varphi.$$

Таким образом, лагранжева функция одномерного движения в постоянном внешнем поле, вообще говоря, имеет вид

$$L = \frac{a(q)\dot{q}^2}{2} - U(q).$$

Подстановкой  $x = \int \sqrt{a(q)}dq$  последнее выражение приводится к виду

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - U(x),$$

но коэффициент  $m$  уже не будет иметь смысла массы.

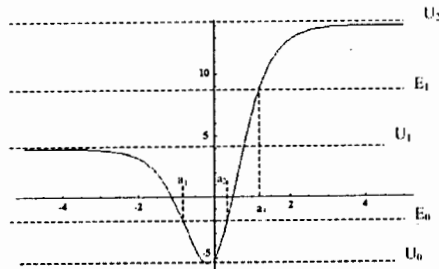


Рис. 5

#### 4. Движение в поле с потенциалом Эккарта – пример одномерного движения. Потенциал

$$U(x) = \frac{U_1 + U_2}{2} + \frac{U_2 - U_1}{2}th(kx) - \frac{U_0}{ch^2(kx)}$$

известен как потенциал Эккарта. Потенциальная энергия не зависит от времени, поэтому полная энергия  $E$  сохраняется. Если начальные условия таковы, что энергия  $E_2 > U_2$ , то движение инфинитно в обе стороны ( $-\infty < x < +\infty$ ); если  $U_1 < E_1 < U_2$ , то движение инфинитно ( $-\infty < x < a_3$ ) с одной точкой остановки  $a_3$ , которая определяется как

корень алгебраического уравнения  $U(x) = E_1$ . При  $U_0 < E_0 < U_1$  движение финитно ( $a_1 \leq x \leq a_2$ ) и имеет две точки остановки  $a_1$  и  $a_2$ , которые являются корнями уравнения  $U(x) = E_0$ .

Рассмотрим движение в симметричной потенциальной яме  $U_1 = U_2 = 0$ :

$$U(x) = -\frac{U_0}{ch^2(kx)},$$

для отрицательных энергий  $E = -E_0$ ,

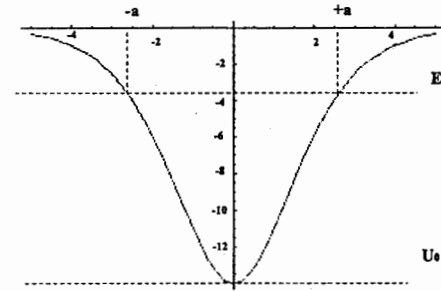


Рис. 6

тогда, подставив  $U(x)$  в известное общее выражение, получим

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E + U_0/ch^2(kx)}} = \frac{1}{\omega} \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$y^2 = \frac{E_0 sh^2(kx)}{U_0 - E_0}, \quad \omega = k\sqrt{\frac{2E_0}{m}}.$$

Результат интегрирования

$$sh(kx) = \sqrt{\frac{U_0 - E_0}{E_0}} \sin \omega t$$

позволяет заключить, что частица в симметричной потенциальной яме с  $U = -U_0/ch^2(kx)$  совершает нелинейные колебания с периодом  $T = 2\pi/\omega$  в интервале  $-a \leq x \leq +a$ , причем  $\pm a$  есть решения уравнения  $ch^2(kx) = U_0/E_0$ .

- Рассмотрим движение у дна ямы:  $E = -U_0 + \epsilon$ , считая  $\epsilon \ll U_0$ . Тогда из условия  $E = -U_0/ch^2(kx)$  получим  $kx \ll 1$ , т.е.  $U(x) = -U_0(1 - k^2x^2 + \dots)$  и

$$E \approx \frac{mx^2}{2} - U_0(1 - k^2x^2).$$

Дифференцируя последнее, получим

$$\ddot{x} + \frac{2U_0}{m}k^2x = 0, \quad x = A\sin(\omega_0 t), \quad \omega_0 = k\sqrt{\frac{2U_0}{m}}.$$

Выберем начальные условия так, чтобы  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0$ , тогда окончательно

$$x = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t).$$

Частица совершает гармонические колебания.

- Рассмотрим движение над ямой  $E_0 > 0$  с начальными условиями  $x(0) = -L$ ,  $\dot{x}(0) = v_0$ . Найдем промежуток времени, в течение которого частица достигает точки  $x = +L$ . С этой целью введем

$$y = \sqrt{\frac{E_0}{E_0 + U_0}} \operatorname{sh}(kx), \quad y_0 = \sqrt{\frac{E_0}{E_0 + U_0}} \operatorname{sh}(kL),$$

что дает

$$t = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{m}{2E_0}} \int_{-y_0}^{+y_0} \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{m}{2E_0}} \cdot \ln \frac{\sqrt{y_0^2 + 1} + y_0}{\sqrt{y_0^2 + 1} - y_0}.$$

При условии  $kL \gg 1$

$$t \simeq \frac{1}{k} \sqrt{\frac{m}{2E_0}} \cdot \ln 4y_0^2 \simeq \frac{1}{k} \sqrt{\frac{m}{2E_0}} \cdot \ln \frac{E_0}{E_0 + U_0} \exp(2kL) \simeq t_1 + t_2,$$

$$t_1 = 2L \sqrt{\frac{m}{2E_0}}, \quad t_2 = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{m}{2E_0}} \cdot \ln \frac{E_0}{E_0 + U_0}.$$

Смысл полученного результата ясен:  $t_1$  – время движения свободной (в отсутствие ямы) частицы от  $-L$  до  $+L$ , а  $t_2$  – изменение времени движения частицы, обусловленное наличием ямы ( $t_2 < 0$ ).

#### IV. ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ДВИЖЕНИЯ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ. ЗАДАЧА КЕПЛЕРА

1. **Задача двух тел.** Рассмотрим движение двух частиц, образующих замкнутую систему. В классической механике предполагают, что энергия взаимодействия этих частиц может зависеть только от их взаимного расстояния, поэтому если  $\vec{r}_1$  – радиус-вектор частицы массы  $m_1$ , а  $\vec{r}_2$  – радиус-вектор частицы массы  $m_2$ , то

$$L = \frac{m_1 \dot{r}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{r}_2^2}{2} - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|).$$

Перейдем к новым переменным, в качестве которых выберем вектор относительного расстояния между частицами  $\vec{r}$  и радиус-вектор центра инерции  $\vec{R}$ :

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2},$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}.$$

Функция Лагранжа в новых координатах переписывается в виде

$$L = \frac{\mu \cdot \dot{R}^2}{2} + \frac{m \cdot \dot{r}^2}{2} - U(r),$$

здесь  $\mu = m_1 + m_2$  – суммарная масса частиц, а

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

– приведенная масса. Таким образом, в задаче двух тел удалось разделить трансляционные и внутренние переменные. Исключая трансляционные переменные, т.е. равномерное движение системы как целого, выбором начала координат в центре инерции ( $\vec{R} = 0$ ) получим

$$L = \frac{m \cdot \dot{r}^2}{2} - U(r).$$

Поле  $U(r)$ , потенциальная энергия которого зависит только от расстояния до начала координат  $r$ , назовем центральным, очевидно, такое поле обладает сферической симметрией.

Таким образом, задача двух тел сводится к эквивалентной задаче о движении фиктивной частицы с приведенной массой  $m$  в центральном поле  $U(r)$ , если поместить начало координат в центре инерции и исключить тривиальное движение системы частиц как целого.

После того как получено решение эквивалентной задачи  $r(t)$ , вышеприведенные формулы позволяют найти искомую зависимость  $r_1$  и  $r_2$  от времени.

2. **Общие свойства движения в центральном поле.** В предыдущем пункте специальным выбором начала координат задачу о движении двух тел удалось свести к эквивалентной задаче о движении частицы массы  $m$  в центральном поле – внешнем поле, потенциальная энергия которого зависит только от расстояния до центра. Рассмотрим общие свойства движения в таком поле.



• Сила в центральном поле

$$\vec{F} = -\frac{\partial U(r)}{\partial \vec{r}} = -\text{grad}U(r) = -\frac{dU}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

- Выше доказывалось, что при движении в центральном поле, т.е. в поле со сферической симметрией относительно центра поля, сохраняется полный момент импульса (в будущем мы часто будем называть его моментом). Подтвердим это прямым вычислением:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r}, \vec{p}] = [\dot{\vec{r}}, m\vec{v}] + [\vec{r}, \dot{\vec{p}}] = -[\vec{r}, \frac{dU}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r}] = 0.$$

В центральном поле сохраняется вектор момента импульса.

- По определению момент есть векторное произведение радиус-вектора и вектора импульса, которые поэтому перпендикулярны моменту. Сохранение момента означает, что как  $\vec{r}$ , так и  $\vec{p}$  при движении не выходят за пределы плоскости. Если выбрать ось  $z$  в направлении момента, то движение будет происходить в плоскости  $xy$ .

Движение в центральном поле плоское.

- В каких координатах описывать это плоское движение? В декартовых функция Лагранжа будет содержать обе  $(x, y)$  координаты и соответствующие им скорости  $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(\sqrt{x^2 + y^2})$ , а в полярных

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r) \quad (24)$$

координата  $\varphi$  является циклической, что, как было показано, говорит о законе сохранения компоненты обобщенного импульса  $p_\varphi$ . Ясно поэтому, что движение в центральном поле удобнее описывать в полярных координатах. Обобщенный импульс

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = M_z = M = \text{const} \quad (25)$$

совпадает с сохраняющимся моментом.

- **Замечание 1.** Факт сохранения момента в центральном поле приводит к интересному следствию – второму закону Кеплера, который первоначально был установлен для поля ньютоновского тяготения. Для того, чтобы показать это, введем понятие секторной скорости. Выражение  $d\sigma = \frac{1}{2}r \cdot r d\varphi$  представляет собой площадь сектора, образованного двумя бесконечно близкими радиус-векторами и элементом дуги траектории, тогда  $\dot{\sigma}$  будет **секторной скоростью**. Ясно, что  $M = 2m\dot{\sigma} = \text{const}$ , т.е. сохранение момента означает постоянство секторной скорости. Иначе говоря, при движении в центральном поле радиус-вектор частицы за равные промежутки времени заметает равные площади – второй закон Кеплера.

Вид функции Лагранжа (24) позволяет утверждать: полная энергия частицы, движущейся в центральном поле, сохраняется и является первым интегралом уравнений движения:

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{\text{эфф}}(r),$$

здесь

$$U_{\text{эфф}}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}.$$

Слагаемое, пропорциональное моменту, обычно называют **центробежной энергией**. Из формулы для энергии получаем

$$\frac{dr}{dt} \equiv \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U_{\text{эфф}}(r)]},$$

откуда следует, что радиальную часть движения в центральном поле можно рассматривать как одномерное движение в поле с "эффективной" потенциальной энергией  $U_{\text{эфф}}(r)$ , однако при одном существенном отличии – по самому смыслу координата  $r$  меняется в пределах  $0 \leq r \leq \infty$ , а не от минус до плюс бесконечности, как  $x$  в случае одномерного движения. Ясно также, что **границы области, допустимой для движения, есть действительные решения неравенства**

$$U_{\text{эфф}}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} \leq E.$$

Предыдущее позволяет достаточно просто получить уравнение

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}}} + t_0, \quad (26)$$

определяющее в неявном виде расстояние  $r$  движущейся точки от центра как функцию времени.

Перепишем формулу для момента (25) в виде  $d\varphi = \frac{M}{mr^2} dt$ , подставив затем сюда  $dt$  из (26), получим

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}}} + \varphi_0. \quad (27)$$

Формулы (26) и (27) в общем виде решают задачу о движении частицы в центральном поле. Уравнение (27) устанавливает связь между  $r$  и  $\varphi$ , т.е. является уравнением траектории. Важно заметить, что, в отличие от  $r$ , угол  $\varphi$  меняется со временем монотонно, так как из определяющей момент формулы (25) следует, что  $\dot{\varphi} \sim M$  никогда не меняет знак.

Если в области, допустимой для движения, уравнение

$$U_{эфф}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = E$$

не имеет действительных корней или имеет один корень  $r_{min}$ , то движение инфинитно - ( $0 \leq r \leq \infty$  или  $r_{min} \leq r \leq \infty$  соответственно), а если действительных корней два, то движение финитно - ( $r_{min} \leq r \leq r_{max}$ ) и траектория целиком лежит внутри кольца, ограниченного окружностями с  $r = r_{min}$  и  $r = r_{max}$ . В отличие от одномерного случая, корни уравнения  $U_{эфф}(r) = E$  являются точками поворота, а не точками остановки, т.к. если начальные условия дают для момента частицы отличное от нуля значение, то угловая скорость  $\dot{\varphi} \neq 0$ .

- **Замечание 2. Формула Бине.** Следуя Бине, получим уравнение траектории частицы в центральном поле  $U = U(r)$ . Уравнения движения в полярных координатах  $(r, \varphi)$  записываются в виде

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = -\frac{dU}{dr}, \quad \dot{\varphi} = \frac{M}{mr^2}.$$

Введем  $v = 1/r$  и, используя уравнения движения, подсчитаем

$$\frac{dv}{d\varphi} = \frac{dv}{dt} \frac{dt}{d\varphi} = \frac{mr^2}{M} \frac{d}{dt} (1/r) = -\frac{m\dot{r}}{M},$$

а также

$$\frac{d^2v}{d\varphi^2} = -\frac{m\ddot{r}}{M} \frac{mr^2}{M} = \frac{mr^2}{M^2} \frac{dU}{dv} \frac{dv}{dr} - \frac{m^2 r^3}{M^2} \frac{M^2}{m^2 r^4}.$$

В результате мы получили **формулу Бине**

$$\frac{d^2v}{d\varphi^2} + v = -\frac{m}{M^2} \frac{dU}{dv},$$

которая определяет траекторию движения частицы в центральном поле по заданной потенциальной энергии, если же уравнение орбиты известно (задано  $r = r(\varphi)$ ), то формула Бине позволяет найти закон изменения силы  $F = F(r)$ . В частном случае ньютоновского притяжения  $U = -\alpha/r = -\alpha v$  получим

$$\frac{d^2v}{d\varphi^2} + v = \frac{m\alpha}{M^2},$$

решение которого имеет вид

$$\frac{1}{r} = a \cdot \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{m\alpha}{M^2}.$$

Стоит обратить внимание на интересную аналогию - уравнение траектории для переменной  $v = 1/r$  в случае ньютоновского поля притяжения формально выглядит так же, как и уравнение, описывающее малые колебания частицы под действием постоянной внешней силы.

- Покажем, что в центральном поле траектория частицы симметрична. Примем для определенности, что  $\varphi_0 = 0$  и  $\varphi > 0$ , когда  $r$  меняется в пределах от  $r_{max}$  до  $r_{min}$  (в случае бесконечного верхнего предела  $r$  рассуждения будут такими же). В точке поворота подынтегральное выражение

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\pm \sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}}$$

вместе с  $\varphi$  меняет знак, а  $r$  начинает расти от  $r_{min}$  до  $r_{max}$ , принимая те же значения, что и до точки поворота. Таким образом, по обеим сторонам от прямой, проведенной через центр поля и точку  $r_{min}$ , одним и тем же значениям  $r$  соответствуют одинаковые углы  $\varphi$ , отличающиеся знаком. А это означает, что **траектория частицы в центральном поле симметрична относительно прямой, проведенной через центр поля и точку поворота.**

- Центробежная энергия при  $r \rightarrow 0$  обращается в бесконечность как  $1/r^2$  и поэтому может оказаться непреодолимым барьером при движении частицы к центру поля, даже если это поле имеет характер притяжения. Рассмотрим, в каких случаях при отличном от нуля моменте падение в центр возможно. Заранее ясно, что это должны быть поля с потенциальной энергией, которая достаточно быстро стремится к  $-\infty$  при  $r \rightarrow 0$ . Из очевидного неравенства

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} > 0$$

или

$$r^2 U(r) + \frac{M^2}{2m} < Er^2 \implies r^2 U(r) |_{r \rightarrow 0} < -\frac{M^2}{2m}.$$

Теперь нетрудно заключить: **падение в центр возможно только для полей с  $U \sim -\frac{1}{r^n}$  при  $n > 2$  или с  $U \sim -\frac{\alpha}{r^2}$  где  $\alpha > \frac{M^2}{2m}$ , если, конечно,  $M \neq 0$ .**

3. **Потенциальная энергия взаимодействия однородного шара с частицей.** Однородность шара означает постоянство его плотности  $\rho_0 = const$ . Примем, что радиус шара равен  $R_0$ , тогда его масса  $M_0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \rho_0$ , а потенциальная энергия взаимодействия с частицей массы  $m$

$$U(r) = -Gm \int \frac{dM}{|\vec{r} - \vec{u}|}.$$

Здесь  $dM = \rho_0 dV = \rho_0 u^2 du \sin\theta d\theta d\varphi$ .  $\vec{u}$  – радиус-вектор точки массой  $dM$ , расположенной внутри шара (начало координат выбрано в центре шара),  $|\vec{r} - \vec{u}| = \sqrt{r^2 + u^2 - 2ru\cos\theta}$ ,  $\theta$  – угол между  $\vec{r}$  – радиус-вектором точки с массой  $m$  и  $\vec{u}$ ,  $\varphi$  – азимутальный угол. Подставив эти выражения в интеграл, получим

$$U(r) = -Gm\rho_0 2\pi \int_0^{R_0} u^2 du \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{r^2 + u^2 - 2ru\cos\theta}}.$$

Проинтегрируем

$$\int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{r^2 + u^2 - 2ru\cos\theta}} = \frac{1}{2ru} \int_0^\pi \frac{d(r^2 + u^2 - 2ru\cos\theta)}{\sqrt{r^2 + u^2 - 2ru\cos\theta}} = \frac{r + u - |r - u|}{ru}.$$

Теперь нетрудно подсчитать интеграл

$$U(r) = -Gm\rho_0 \frac{2\pi}{r} \int_0^{R_0} u(r + u - |r - u|) du,$$

если учесть, что при

$$r > R_0, \quad u < r, \quad |r - u| = r - u \quad U(r) = -\frac{GmM_0}{r}.$$

С другой стороны, при  $r < R_0$  в пределах  $(0, r)$   $u < r$ ,  $|r - u| = r - u$ , а в промежутке  $(r, R_0)$  имеем  $u > r$ ,  $|r - u| = -(r - u)$ .

Тогда

$$U(r) = -\frac{2\pi Gm\rho_0}{r} \left( \int_0^r 2u^2 du + \int_r^{R_0} 2rudu \right) = -\frac{GmM_0}{2R_0} \left( 3 - \frac{r^2}{R_0^2} \right).$$

$$U(r) = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{GmM_0}{r}, & r > R_0 \\ -\frac{GmM_0}{2R_0} \left( 3 - \frac{r^2}{R_0^2} \right), & r < R_0 \end{array} \right\}.$$

Вне шара результат совпадает с потенциалом взаимодействия двух точечных масс  $M_0$  и  $m$  – вывод, впервые полученный Ньютоном. Иначе говоря, гравитационное поле вне шара такое же, каким оно было бы, если бы вся его масса была сосредоточена в одной точке – центре шара. Стоит обратить внимание на очевидное следствие этого факта: на расстояниях, много больших линейных размеров тела произвольной формы, его можно с большой точностью считать шаром со сферически-симметричным гравитационным полем, совпадающим с гравитационным полем точки в центре поля, в которой сосредоточена вся масса тела.

4. **Задача Кеплера.** Рассмотрим центральное поле, потенциальная энергия которого  $U \sim 1/r$ . Введем коэффициент пропорциональности  $\alpha > 0$ , тогда, как нетрудно убедиться,  $U = -\alpha/r$  соответствует полю притяжения, а  $U = \alpha/r$  – полю отталкивания. При  $\alpha = Gm_1m_2$  поле  $U$  является ньютоновским полем притяжения, а при  $\alpha = e_1e_2$  – кулоновским притяжением или отталкиванием.

• **Замечание 3. Интеграл Лапласа – Рунге – Ленца.** В задаче Кеплера с  $U = -\alpha/r$ , благодаря сохранению момента импульса  $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}] = m[\vec{r}, \dot{\vec{r}}]$ , движение плоское, т.е.  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ . Сила, действующая на частицу массы  $m$ , есть  $-(\alpha/r^3)\vec{r}$ , а уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\alpha}{r^3}\vec{r}, \quad \vec{r} = \vec{i} \cdot x + \vec{j} \cdot y.$$

Используя это уравнение и выражение момента  $M$ , подсчитаем производную по времени от  $[\dot{\vec{r}}, \vec{M}]$ :

$$\frac{d}{dt} [\dot{\vec{r}}, \vec{M}] = -\frac{\alpha}{mr^3} [\dot{\vec{r}}, \vec{M}] = -\frac{\alpha}{r^3} (\dot{\vec{r}}(r\dot{r}) - \dot{r}r^2) = \frac{d}{dt} \frac{\alpha \dot{r}}{r}.$$

Таким образом, вектор

$$\vec{\varepsilon} = \frac{1}{\alpha} [\dot{\vec{r}}, \vec{M}] - \dot{r}/r$$

является интегралом движения в поле  $U \sim 1/r$ .

Эта сохраняющаяся величина была обнаружена Лапласом (и независимо Рунге и Ленцом), и ее существование есть проявление так называемой скрытой симметрии, специфичной для поля  $U \sim 1/r$ . Эту симметрию называют скрытой, поскольку по виду функции Лагранжа задачи невозможно установить преобразование симметрии, обуславливающее сохранение интеграла Лапласа – Рунге – Ленца, тогда как сохранение энергии и момента импульса в этом поле связано с легко обнаруживаемой симметрией лагранжиана относительно трансляций времени и ортогональных преобразований, описывающих вращение координат. Было показано, что симметрия, связанная с сохранением  $\vec{\varepsilon}$ , вскрывается путем привлечения дополнительного пространственного измерения (В. А. Фок).

Найдем величину вектора Лапласа – Рунге – Ленца, предварительно заметив, что он расположен в плоскости движения ( $\vec{\varepsilon} \vec{M} = 0$ ):

$$\varepsilon^2 = \frac{r^2 M^2}{\alpha^2} - \frac{2\dot{r}}{\alpha r} [\dot{\vec{r}}, \vec{M}] + 1 = 1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}, \quad E = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{\alpha}{r}.$$

Итак, векторы  $\vec{\varepsilon}$  и  $\vec{r} = \vec{i} \cdot x + \vec{j} \cdot y$  лежат в одной плоскости, перпендикулярной  $\vec{M}$ , а их скалярное произведение

$$\vec{\varepsilon} \vec{r} = \frac{\vec{r} [\dot{\vec{r}}, \vec{M}]}{\alpha} - r = \frac{M^2}{\alpha m} - r = \varepsilon r \cdot \cos\varphi.$$

Поэтому

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos\varphi}, \quad p = \frac{M^2}{\alpha m}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}.$$

Таким образом, используя специфичный для кеплеровой задачи интеграл Лапласа - Рунге - Ленца, удалось получить уравнение траектории частицы в виде уравнения конических сечений с эксцентриситетом  $\varepsilon$  и параметром  $p$  без интегрирования уравнений движения.

Рассмотрим движение в поле притяжения  $U = -\alpha/r$ . Эффективная потенциальная энергия

$$U_{\text{эфф}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$

изображена кривой на рис. 7.

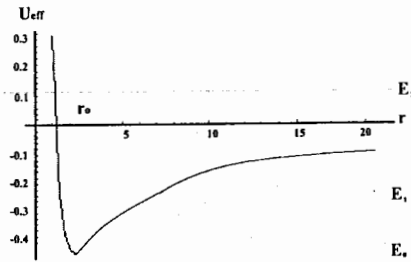


Рис. 7

Нетрудно заметить, что движение будет финитным при отрицательных значениях полной энергии  $E < 0$  в полном соответствии с выводом, полученным как следствие теоремы вириала. Более того, ясно, что при  $E_0 = (U_{\text{эфф}})_{\min}$  частица при движении остается на неизменном от центра расстоянии  $r_0 = M^2/\alpha m$ . Другими словами, при энергии  $E_0 = -m\alpha^2/2M^2$  движение частицы происходит по окружности радиуса  $r_0$ . Частица с энергиями  $E$ , удовлетворяющими неравенству  $E_0 < E < 0$ , движется в ограниченной значениями  $r_{\min}$  и  $r_{\max}$  области. При энергиях  $E \geq 0$  движение инфинитно, а из-за барьера, обусловленного центробежной энергией ( $M \neq 0$ ), невозможно падение в центр.

Подставив в определяющую траекторию движения общую формулу (27)  $U = -\alpha/r$ , получим

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_0 &= \int \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m(E + \frac{\alpha}{r}) - \frac{M^2}{r^2}}} = - \int \frac{d(\frac{M}{r})}{\sqrt{2mE + \frac{2m\alpha}{M} \frac{M}{r} - \frac{M^2}{r^2}}} \\ &= \int \frac{d(\frac{m\alpha}{M} - \frac{M}{r})}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2} - (\frac{m\alpha}{M} - \frac{M}{r})^2}} = \arccos \frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}}. \end{aligned}$$

Итак, траектория движения частицы в поле притяжения  $U = -\alpha/r$  определяется формулой

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cdot \cos(\varphi - \varphi_0), \quad p = \frac{M^2}{m\alpha}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}. \quad (28)$$

Напомним, что, используя интеграл движения Лапласа - Рунге - Ленца, мы получили такой же результат без интегрирования уравнений движения. Уравнение (28) известно как уравнение конических сечений с фокусом в начале координат, параметром  $p$  и эксцентриситетом  $\varepsilon$ . В эквивалентной задаче двух тел орбита каждой из частиц также будет коническим сечением с фокусом в их общем центре инерции.

Уравнение (28) при разных начальных условиях приводит к разным траекториям. Так, при  $E = E_0 = -m\alpha^2/2M^2$  ( $\varepsilon = 0$ ) траекторией движения частицы будет **окружность** с радиусом  $r_0 = p = M^2/m\alpha$  (сравните с результатом, полученным качественно по графику эффективной потенциальной энергии). Если  $E_0 < E < 0$ , то  $\varepsilon < 1$  и траектория - **эллипс**. При  $E = 0$  имеем  $\varepsilon = 1$ , что соответствует **параболе**. В зависимости от направления скорости частица с  $E = 0$  по параболе приближается к центру до расстояний  $r = r_{\min}$ , а затем уходит на бесконечность или, при другом направлении скорости, сразу движется в бесконечность. И, наконец, при  $E > 0$  получаем  $\varepsilon > 1$  и траектория частицы - **гипербола**.

Большая и малая полуоси эллипса определяются известными формулами аналитической геометрии

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{\alpha}{2|E|}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}.$$

Из уравнения (28) легко найти наименьшее и наибольшее удаление частицы от центра. Величина  $r_{\min}$  определится формулой (28) при  $\varphi - \varphi_0 = 0$ , а для того, чтобы получить  $r_{\max}$ , надо принять  $\varphi - \varphi_0 = \pi$ . Таким образом,

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + \varepsilon} = a(1 - \varepsilon), \quad r_{\max} = \frac{p}{1 - \varepsilon} = a(1 + \varepsilon).$$

Разумеется, если искать действительные корни алгебраического уравнения  $E = U_{\text{эфф}}(r)$  в допустимой для движения области, то будет получен такой же результат.

Нетрудно получить период обращения тела по эллиптической орбите. Проинтегрировав с этой целью выражение  $M = 2m\dot{\sigma}$  по времени от 0 до  $T$ , имеем  $MT = 2m\sigma$ , где  $\sigma = \pi ab$  - площадь эллипса, используя далее выражения для полуосей эллипса, получим закон Кеплера:

$$T = 2\pi a^{3/2} \sqrt{m/\alpha}.$$

При движении по гиперболе ( $E > 0, \varepsilon > 1$ ), огибающей (в поле притяжения) центр поля, в котором находится фокус,  $r_{min} = p/(\varepsilon + 1) = a(\varepsilon - 1) = \alpha(\varepsilon - 1)/2E$ . При движении по параболе ( $E = 0, \varepsilon = 1$ ) минимальное расстояние от центра  $r_{min} = p/2$ .

Обратимся к случаю поля отталкивания  $U = \alpha/r$ . Финитное движение в поле отталкивания невозможно, т.к. функция  $U_{эфф}(r) = \alpha/r + M^2/2mr^2$ , монотонно убывая от бесконечности до нуля, не имеет минимума. Повторяя все выкладки предыдущего случая, для орбиты движения в поле отталкивания получим

$$\frac{p}{r} = -1 + \varepsilon \cos \varphi,$$

параметр  $p$  и эксцентриситет  $\varepsilon$  траектории определяются прежними формулами. Ввиду того, что допустимой для движения областью является  $E \geq U_{эфф}(r) > 0$ , в поле отталкивания единственно возможной орбитой является гипербола, фокус которой (центр поля) расположен во внешней по отношению к гиперболе области, на расстоянии  $r_{min} = p/(\varepsilon - 1) = a(\varepsilon + 1)$ .

## V. РАСПАД И РАССЕЯНИЕ ЧАСТИЦ. ФОРМУЛА РЕЗЕРФОРДА

Рассмотрим замкнутую систему двух частиц, и пусть в бесконечно далекий момент времени  $t_- = -\infty$  частицы свободны и каждая из них движется с постоянным импульсом  $p_1$  и  $p_2$ . Другими словами, начальные условия приписывают находящимся достаточно далеко друг от друга частицам постоянные импульсы  $p_1$  и  $p_2$  в далеком прошлом. Допустим, далее, что происходит сближение частиц и, начиная с какого-то расстояния, существенным становится взаимодействие между ними, однако спустя конечное время они опять расходятся на сколь угодно большое расстояние, так что при  $t_+ = +\infty$  частицы вновь становятся свободными. Ясно, что искомая асимптотика в  $t_+ = +\infty$  несет на себе отпечаток закона взаимодействия. Мы не случайно сосредоточили внимание на асимптотике, а не на деталях, связанных с взаимодействием. Дело в том, что экспериментальные средства для выяснения этих деталей весьма скудны или их попросту нет, поэтому задача о рассеянии является одной из центральных в физике элементарных частиц, атомной и ядерной физике. Конечно, если рассматриваются частицы, для которых существенны квантовые эффекты, то можно ожидать, что результаты классического рассмотрения будут весьма и весьма приближенными и даже неверными. Тем не менее некоторые классические положения остаются верными для микроробъектов и могут служить в качестве хорошего приближения.

При рассмотрении задач о столкновениях и рассеянии частиц приходится пользоваться двумя системами отсчета – лабораторной системой отсчета

(л-системой), в которой задаются асимптотические начальные импульсы частиц (чаще всего одну из них – мишень – считают неподвижной) и ищутся конечные асимптотические значения импульсов, а также удобной для теоретических расчетов системой центра инерции (ц-системой), начало которой совмещено с центром инерции частиц.

Уместно заметить, что существенно важные заключения о свойствах различных физических процессов можно получить, используя законы сохранения импульса и энергии. Причем эти заключения совершенно не зависят от конкретного рода взаимодействия между участвующими в процессе частицами. Таким образом, законы сохранения могут оказаться источником ценной информации при решении задач о столкновении и рассеянии частиц. Приведем два примера.

1. **Распад частиц.** Рассмотрим "самопроизвольный" (без внешних воздействий) распад частицы на две "дочерние", движущиеся после распада независимо друг от друга. В ц-системе, в которой этот распад выглядит наиболее просто, частица до распада покоится и образовавшиеся частицы, в силу закона сохранения импульса, разлетаются с равными и противоположно направленными импульсами. Обозначим абсолютное значение импульса одной из распадных частиц  $p_0$ , тогда из закона сохранения энергии

$$E_{вн} = E_{1вн} + \frac{p_0^2}{2m_1} + E_{2вн} + \frac{p_0^2}{2m_2}.$$

Здесь  $E_{вн}$  – внутренняя энергия распадной частицы,  $E_{1вн}$  и  $E_{2вн}$  – внутренние энергии образовавшихся частиц, а  $m_1$  и  $m_2$  – их массы. Введем понятие энергии распада

$$\varepsilon \equiv E_{вн} - (E_{1вн} + E_{2вн}), \implies \varepsilon = \frac{p_0^2}{2m}, \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2},$$

а скорости частиц  $v_1 = p_1/m_1, v_2 = p_2/m_2$ .

Перейдем теперь в л-систему, в которой первичная частица движется до распада со скоростью  $V$ . Рассмотрим одну из дочерних частиц, и пусть  $v$  – ее скорость в л-системе, а  $v_0$  – в ц-системе. Очевидно,  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{V}$ , откуда

$$v^2 + V^2 - 2vV \cos \theta = v_0^2,$$

где  $\theta$  – угол вылета дочерней частицы по отношению к направлению движения л-системы (направлению движения материнской частицы).

Представим эту зависимость графически, для чего построим окружность радиуса  $v_0$ , тогда  $v$  дается вектором, проведенным в какую-либо точку окружности из точки  $A$ , отстоящей на расстоянии  $V$  от центра окружности (см. рис. 8). Может представиться два случая:  $V < v_0$  (точка  $A$  внутри окружности) и  $V > v_0$  (точка  $A$  вне окружности). Во втором

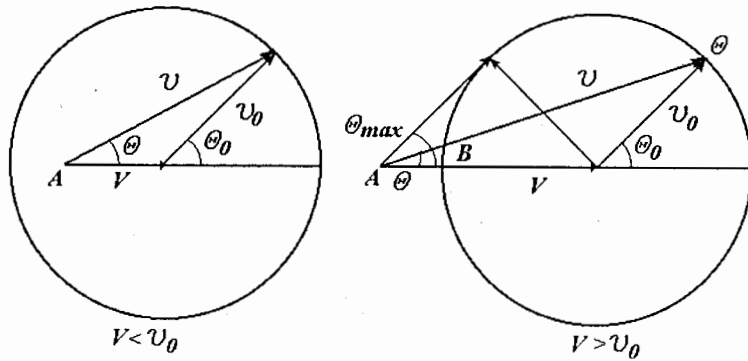


Рис. 8

случае дочерняя частица может вылететь только вперед под углом, не превышающим значения  $\theta_{max}$  из

$$\sin\theta_{max} = v_0/V.$$

Связь между углами вылета  $\theta$  и  $\theta_0$  в л- и ц-системах, как это видно из рис. 8, есть

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v_0 \sin\theta_0}{v_0 \cos\theta_0 + V} \implies \cos\theta_0 = -\frac{V}{v_0} \sin^2\theta \pm \cos\theta \sqrt{1 - V^2 \sin^2\theta / v_0^2}.$$

При  $v_0 < V$  связь между  $\theta$  и  $\theta_0$  однозначна (см. рис. 8) и в последней формуле надо выбрать знак плюс перед корнем, чтобы при  $\theta_0 = 0$  и  $\theta = 0$ .

2. Упругие столкновения частиц. Столкновение частиц назовем упругим, если оно происходит без изменения их внутреннего состояния. Иначе говоря, если рассматриваются упругие столкновения, то, используя закон сохранения энергии, мы можем не учитывать внутреннюю энергию частиц. Скорости частиц до столкновения в ц-системе связаны с относительной скоростью  $v = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$  в л-системе следующими известными соотношениями:

$$\vec{v}_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}, \quad \vec{v}_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}.$$

После рассеяния закон сохранения импульса предписывает частицам равные по величине и противоположные по направлению импульсы, а в силу закона сохранения энергии остаются неизменными их абсолютные величины. Таким образом, в ц-системе результат столкновения сводится к повороту скоростей обеих частиц, которые остаются неизменными по величине, но противоположными по направлению:

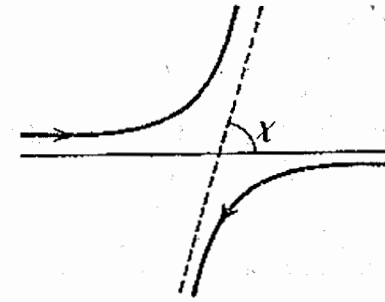


Рис. 9

$$\dot{\vec{v}}_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v \vec{n}_0, \quad \dot{\vec{v}}_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v \vec{n}_0,$$

здесь  $\vec{n}_0$  — единичный вектор в направлении скорости частицы  $m_1$  после столкновения.

Для перехода к л-системе надо добавить к этим выражениям скорость  $V$  центра инерции, что для скоростей частиц в л-системе после столкновения дает

$$\dot{\vec{v}}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v \vec{n}_0 + \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2},$$

$$\dot{\vec{v}}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v \vec{n}_0 + \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Сведения, которые можно было получить из одних только законов сохранения, исчерпываются этими соотношениями. Заметим, что направление единичного вектора  $\vec{n}_0$  зависит от закона взаимодействия частиц и их взаимного расположения во время столкновения.

Для того чтобы интерпретировать полученные результаты геометрически, перейдем от скоростей к импульсам, помножив с этой целью  $\vec{v}_1$  на  $m_1$ , а  $\vec{v}_2$  на  $m_2$ , получим

$$\dot{\vec{p}}_1 = m v \vec{n}_0 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2),$$

$$\dot{\vec{p}}_2 = -m v \vec{n}_0 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2).$$

Построим окружность радиуса  $mv = OC$ , направив по  $\vec{OC}$  единичный вектор  $\vec{n}_0$ . Если взять  $\vec{AO} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$  и  $\vec{OB} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$  (см. рис. 10), то  $\vec{AC}$  и  $\vec{CB}$  дают импульсы  $\vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2$ . Рассмотрим подробно случай, когда одна из частиц (пусть это будет  $m_2$ ) покоится. Тогда  $OB = mv =$

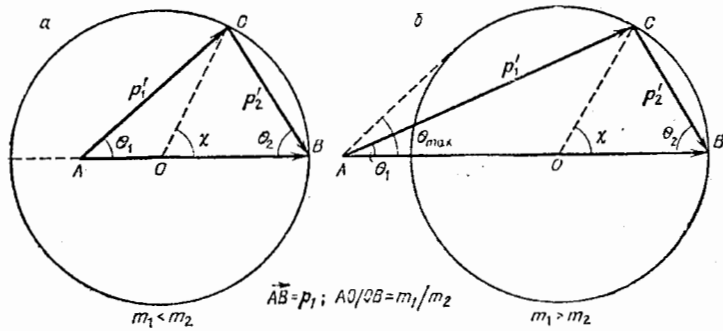


Рис. 10

$OC$ , а  $\vec{AB} = \vec{p}_1$ . Точка  $A$  может находиться как внутри ( $m_1 < m_2$ ), так и вне ( $m_1 > m_2$ ) окружности. Углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  есть углы отклонения частиц после столкновения по отношению к направлению  $\vec{p}_1$ , а угол  $\chi$  (задающий направление  $\vec{n}_0$ ) представляет собой угол поворота первой частицы в системе. Очевидно,

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{m_2 \sin \chi}{m_1 + m_2 \cos \chi}, \quad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}.$$

После столкновения частицы разлетаются под углом  $\theta_1 + \theta_2$ , причем при  $m_1 < m_2$  имеем  $\theta_1 + \theta_2 > \frac{\pi}{2}$ , а при  $m_1 > m_2$  получаем  $\theta_1 + \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ . При  $m_1 < m_2$  скорость первой частицы после столкновения может иметь любое направление. Если же  $m_1 > m_2$ , то угол отклонения налетающей частицы не может превышать некоторого максимального значения (см. рис. 10):

$$\theta_{1\max} = \arcsin \frac{m_2}{m_1}.$$

Используя теорему косинусов, можно без труда получить формулы, определяющие абсолютные величины скоростей обеих частиц после столкновения через относительную скорость и угол  $\chi$ , величина которого зависит от закона взаимодействия сталкивающихся частиц:

$$\dot{v}_1 = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos \chi}}{m_1 + m_2} v, \quad \dot{v}_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2} \sin \frac{\chi}{2}.$$

Рассмотрим два частных случая.

- "Лобовой" удар – после столкновения обе частицы движутся по одной прямой ( $\chi = \pi$ ). В этом случае скорости частиц после столкновения равны

$$\dot{v}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v, \quad \dot{v}_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v.$$

Значение  $\dot{v}_2$  при этом наибольшее возможное, и в результате столкновения первоначально покоящаяся частица получает максимальную (по сравнению с другими случаями) энергию

$$\dot{E}_2^{\max} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_1, \quad E_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2},$$

здесь  $E_1$  – первоначальная энергия налетающей частицы.

$$\sin \theta_1^{\max} = \frac{m_2}{m_1}.$$

- "Биллиард" – массы сталкивающихся частиц одинаковы, а одна из них первоначально покоится. В этом случае

$$\theta_1 = \frac{\chi}{2}, \quad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}, \quad \dot{v}_1 = v \cos \frac{\chi}{2}, \quad \dot{v}_2 = v \sin \frac{\chi}{2}.$$

Отметим, что после столкновения частицы разлетаются под прямым углом друг к другу.

3. **Рассеяние частиц.** Результат столкновения двух частиц может быть определен полностью лишь после решения уравнений движения с конкретным законом взаимодействия. Рассмотрим эквивалентную задачу откло-

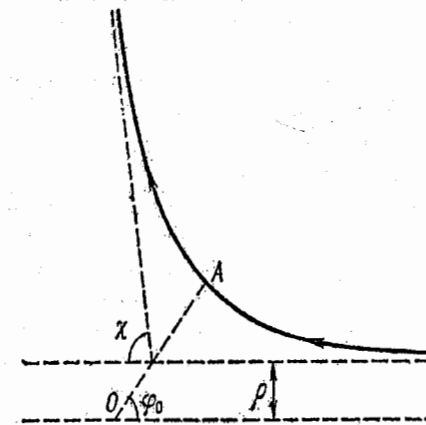


Рис. 11

нения частицы с приведенной массой  $m$  в поле  $U(r)$  неподвижного силового центра, расположенного в центре инерции частиц. Траектория частицы в центральном поле симметрична относительно прямой, проведенной в ближайшую к силовому центру точку орбиты. Поэтому обе асимптоты траектории пересекают указанную прямую под одинаковыми углами  $\phi_0$ . Тогда,



как видно из рис. 11, угол отклонения частицы при ее пролете мимо центра есть

$$\chi = |\pi - 2\phi_0|.$$

Угол  $\phi_0$  определяется, как известно, формулой

$$\phi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{Mdr/r^2}{\sqrt{2m[E - U(r)] - M^2/r^2}}.$$

Здесь  $r_{\min}$  – расстояние, определяющее ближайшее к центру положение частицы, и является корнем подрадикального выражения.

При инфинитном движении, которое мы сейчас рассматриваем, существуют комбинации динамических переменных, которые выносятся на асимптотику законами сохранения. Это скорость в бесконечности  $v_{\infty}$  и так называемое прицельное расстояние  $\rho$  – длина перпендикуляра, опущенного из центра на направление  $v_{\infty}$ , т.е. расстояние, на котором частица прошла бы мимо центра, если бы силовое поле отсутствовало. Очевидно,

$$M = \rho m v_{\infty}, \quad E = \frac{m v_{\infty}^2}{2}.$$

Перепишем  $\phi_0$ , используя эти выражения энергии и момента импульса:

$$\phi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho dr/r^2}{\sqrt{1 - \rho^2/r^2 - 2U/mv_{\infty}^2}}.$$

Прицельное расстояние отдельной частицы  $\rho$  невозможно измерить на опыте. Поэтому обычно переходят от характеристик индивидуального акта рассеяния к статистическим характеристикам, а именно от рассмотрения задач с точно заданным прицельным расстоянием к рассмотрению совокупности задач, в которых прицельное расстояние распределено по некоторому закону. Конкретнее: рассмотрим монохроматический и однородный пучок частиц, т.е. пучок, частицы которого имеют одинаковые по величине и направлению скорости (монохроматичность). Кроме того, одинаково число частиц, проходящих через любую единичную площадку, перпендикулярную пучку, в единицу времени, которое называют **интенсивностью пучка**  $n = const$  (однородность). Все частицы, рассеивающиеся в кольцо  $2\pi\rho d\rho$ , число которых есть  $dN = 2\pi\rho d\rho \cdot n$ , обладают в силу монохроматичности пучка одинаковой скоростью  $v_{\infty}$  и почти одинаковыми прицельными расстояниями (в интервале от  $\rho$  до  $\rho + d\rho$ ), т.е. они обладают одинаковыми энергиями и почти одинаковыми моментами и поэтому должны отклоняться на почти одинаковые углы (в интервале от  $\chi$  до  $\chi + d\chi$ ). Понятно поэтому, что рассеяние удобно характеризовать величиной

$$d\sigma = \frac{dN}{n} = 2\pi\rho d\rho,$$

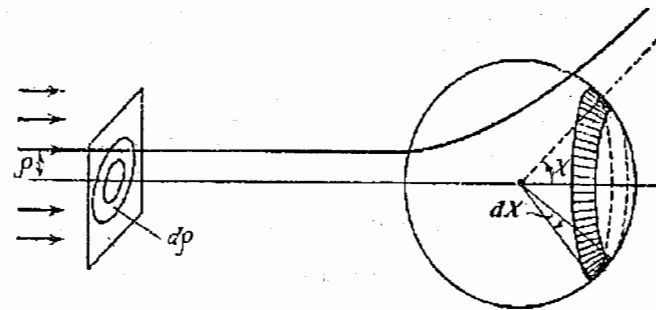


Рис. 12

которую назовем **эффективным сечением рассеяния** частиц в интервал от  $\chi$  до  $\chi + d\chi$  или, что то же, от  $\rho$  до  $\rho + d\rho$ . Эффективное сечение рассеяния имеет размерность площади и всецело определяется видом рассеивающего поля. Для того чтобы найти зависимость эффективного сечения от угла рассеяния  $\chi$ , достаточно переписать предыдущее выражение в виде

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi) \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\chi.$$

Знак модуля нам понадобился ввиду того, что по смыслу эффективное сечение рассеяния – положительная величина, а  $\rho(\chi)$  – убывающая функция: чем больше прицельное расстояние, тем меньше угол рассеяния. Иногда сечение рассеяния относят не к  $d\chi$ , а к элементу телесного угла. Телесный угол между конусами с углами раствора  $\chi$  и  $\chi + d\chi$  есть  $d\Omega = 2\pi \sin\chi d\chi$ , поэтому

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin\chi} \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\Omega.$$

Полученные формулы определяют сечение рассеяния в зависимости от угла рассеяния в системе центра инерции. Для того чтобы получить аналогичные формулы в лабораторной системе, надо выразить  $\chi$  через угол рассеяния в лабораторной системе  $\theta$ . При этом получатся выражения как для сечения рассеяния падающего пучка ( $\chi$  выражено через  $\theta_1$ ), так и для первоначально покоящихся частиц ( $\chi$  выражено через  $\theta_2$ ).

4. **Формула Резерфорда.** Найдем сечение рассеяния для кулоновского поля, т.е. подставим в формулу, определяющую  $\phi_0$ ,  $U = \alpha/r$ :

$$\phi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho dr/r^2}{\sqrt{1 - \rho^2/r^2 - 2\alpha/mv_{\infty}^2 r}}.$$

Интегрирование элементарно, и, учитывая, что  $r_{min}$  – корень выражения под радикалом, получим

$$\phi_0 = \frac{\alpha/mv_\infty^2 \rho}{\sqrt{1 + (\alpha/mv_\infty^2 \rho)^2}}$$

откуда

$$\rho^2 = (\alpha/mv_\infty^2)^2 tg^2 \phi_0 \implies \rho^2 = (\alpha/mv_\infty^2)^2 ctg^2 \frac{\lambda}{2}.$$

Дифференцируя последнее выражение по  $\chi$ , найдем

$$d\sigma = \pi(\alpha/mv_\infty^2)^2 \frac{\cos \frac{\lambda}{2}}{\sin^2 \frac{\lambda}{2}} d\chi = (\alpha/2mv_\infty^2)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\lambda}{2}}.$$

Получена формула, известная как **формула Резерфорда**. Заметим, что эффективное сечение не зависит от знака  $\alpha$ , т.е. результат в равной мере относится к кулоновским полям притяжения и отталкивания, как и должно было быть, т.к. эффективное сечение не может зависеть от того, в какую сторону отклоняются частицы, но зависит от того, как они отклоняются (имеется в виду зависимость  $U \sim 1/r$ ). Формулу Резерфорда можно преобразовать от системы центра инерции, в которой она получена, к лабораторной системе, однако это приводит к довольно громоздким результатам, поэтому ограничимся тем, что имеем.

## VI. ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ

В предыдущем изложении рассматривались уравнения Лагранжа и ряд их приложений – мы работали в рамках так называемого лагранжева формализма. Состояние механической системы с  $s$  степенями свободы в лагранжевом формализме описывается заданием  $2s$  независимых величин –  $s$  обобщенных координат и  $s$  обобщенных скоростей. Состояние механической системы в формализме, который принято называть гамильтоновым, задают  $s$  обобщенных координат и  $s$  обобщенных импульсов. Каждый из этих подходов имеет свои преимущества и недостатки, но важно отметить, что гамильтонов формализм глубже проникает в суть теории, однако из-за выделенной роли времени наталкивается на трудности в релятивистском случае.

1. **Канонические уравнения Гамильтона.** Перейдем от набора "лагранжевых" переменных  $q_i, \dot{q}_i$  к набору "гамильтоновых" переменных  $q_i, p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ . Обычно для этого используют прием, который называют преобразованием Лежандра. Продемонстрируем, как это делается, а затем дадим определение преобразований Лежандра. Для полного дифференциала функции Лагранжа  $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ , учитывая определение импульса  $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ , а также лагранжевы уравнения движения, имеем

$$dL = \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt = \sum_i (p_i d\dot{q}_i + \dot{p}_i dq_i) + \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Поскольку

$$d(p_i \dot{q}_i) = p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i,$$

то

$$d(L - \sum_i p_i \dot{q}_i) = \sum_i (-\dot{q}_i dp_i + \dot{p}_i dq_i) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

или

$$d\left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) = \sum_i (-\dot{p}_i dq_i + \dot{q}_i dp_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Введем

$$H = H(q_i, p_i, t) = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L.$$

Функция  $H(q_i, p_i, t)$  называется **функцией Гамильтона** или **гамильтонианом**. Ясно, что

$$dH = \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \sum_i (-\dot{p}_i dq_i + \dot{q}_i dp_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Сравнивая, получим

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

– **канонические уравнения Гамильтона** – систему  $2s$  дифференциальных уравнений первого порядка, которая позволяет по заданному в какой-либо момент времени состоянию механической системы предсказать ее состояние в любой другой момент и тем самым решить основную задачу механики.

Найдем полную производную по времени от функции Гамильтона:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right).$$

После подстановки уравнений движения получим

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Определение функции Гамильтона и последнее соотношение позволяют заключить, что для изолированной системы или системы, находящейся в не зависящем от времени внешнем поле, гамильтониан совпадает с полной энергией системы.

- **Примечание 1. Преобразование Лежандра.** Рассмотрим функцию  $f = f(u)$ , полагая ее выпуклой (т.е.  $d^2f/du^2 > 0$ ). Допустим, возникла необходимость перейти к другой независимой переменной  $v$ , такой, что  $v = df/du$ . Как, используя  $f = f(u)$ , построить такую функцию  $F = F(v)$ , чтобы ее полный дифференциал был пропорционален  $dv$ ? Ответ на этот вопрос дает преобразование Лежандра.

Назовем преобразованием Лежандра функции  $f(u)$  такую функцию  $F(v)$ , которая является огибающей семейства

$$\varphi(v, u) = uv - f(u).$$

Уравнение огибающей имеет вид  $F(v) = \varphi(v, u(v))$ , а функция  $u(v)$  определяется из  $v = df/du$ . Функцию  $f(u)$  называют производящей функцией преобразования Лежандра. Преобразование Лежандра обычно выполняют в дифференциальной форме:

$$df(u) = \frac{df}{du} \cdot du = vdu = d(uv) - u dv \implies dF = d(uv - f) = u dv.$$

**Пример.** Найдем преобразование Лежандра, производящей функцией которого является лагранжиан свободной релятивистской частицы

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Семейство, огибающей которого является преобразование Лежандра, задается формулой  $\varphi(p, v) = pv - L(v)$ , а уравнение огибающей этого

семейства  $H(p) = v \cdot \partial L / \partial v - L$ . По определению  $p = \partial L / \partial v = mv / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ , следовательно,

$$v = pc / \sqrt{m^2 c^2 + p^2}, \quad \text{т.е.} \quad H = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}.$$

Таким образом,  $H(p)$ , с одной стороны, – гамильтониан свободной релятивистской частицы, а с другой – преобразование Лежандра, производящей функцией которого является лагранжиан.

- **Примечание 2.** Функцию Гамильтона составляют согласно следующему алгоритму: по функции Лагранжа  $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$  строят  $H = \sum_i \dot{q}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$ , затем в этом выражении все  $\dot{q}_i$  заменяют на  $p_i$ , используя связь  $p_i = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ . Это возможно лишь для невырожденных механических систем, т.е. для систем с не равным нулю определителем Гессе (гессианом)  $\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \neq 0$ . Получившаяся в результате функция  $H = H(q_i, p_i, t)$  есть гамильтониан системы.

Канонические уравнения Гамильтона особенно удобны при исследовании систем, содержащих циклические координаты. Напомним, что циклической называется координата, которая хотя и необходима для определения положения системы в пространстве, но в лагранжиане не содержится, и поэтому соответствующий ей обобщенный импульс сохраняется. Но если  $\dot{p}_i = 0$ , то, согласно гамильтоновым уравнениям, гамильтониан не должен зависеть от соответствующей координаты  $q_i$ . И, наоборот, если гамильтониан не содержит  $q_i$ , то сохраняется  $p_i$ , т.е. в этом смысле лагранжев и гамильтонов формализм эквивалентны. Однако существует и различие: если в лагранжиане, для которого  $q_i$  циклическая, содержатся все обобщенные скорости, то гамильтониан, с той же циклической координатой, вместо  $p_i$  содержит константу, т.е. циклическая координата в этом случае действительно является игнорируемой, другими словами, решают задачу для оставшихся  $s-1$  переменных, а циклическая координата определяется интегрированием уравнения  $\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i$ .

Канонические уравнения Гамильтона можно получить также и как следствие принципа наименьшего действия. Действительно, перенимем действие

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt,$$

заменив  $L$  согласно

$$L = \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t).$$

Тогда

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_i p_i dq_i - H dt \right),$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left( \delta p_i dq_i + p_i d\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i dt - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i dt \right).$$

Проинтегрируем второе слагаемое по частям и, исходя из требования принципа наименьшего действия, приравняем вариацию действия нулю:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[ \delta p_i \left( dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} dt \right) - \delta q_i \left( dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dt \right) \right] + \int_{t_1}^{t_2} d(p_i \delta q_i) = 0.$$

Последний интеграл дает нуль в силу того, что в моменты  $t_1$  и  $t_2$  конфигурация системы фиксирована, а равенство нулю вариации действия приводит к обращению в нуль подинтегральных выражений в круглых скобках, что и дает канонические уравнения Гамильтона.

2. **Действие как функция координат.** Формулируя принцип наименьшего действия, мы рассматривали интеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

взятый по траектории между двумя фиксированными в моменты  $t_1$  и  $t_2$  положениями  $q^{(1)}$  и  $q^{(2)}$ . При варьировании действия сравнивались значения этого интеграла для близких траекторий с одними и теми же значениями  $q(t_1)$  и  $q(t_2)$ . Истинному движению соответствовала та траектория, на которой интеграл  $S$  экстремален.

Рассмотрим теперь понятие действия в несколько другом аспекте. Будем рассматривать  $S$  как величину, характеризующую движение по истинным траекториям, и сравним значения, которые она принимает для траекторий, имеющих общее начало  $q(t_1) = q^{(1)}$ , но проходящих в момент  $t_2$  через различные положения. Иначе говоря, рассмотрим интеграл действия для истинных траекторий как функцию координат в верхнем пределе интегрирования. Изменение действия при переходе от одной траектории к близкой к ней другой дается выражением (ради простоты рассматривается случай с одной степенью свободы):

$$\delta S = \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q \right) \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt.$$

Поскольку движение происходит по истинной траектории, т.е. в соответствии с уравнениями Лагранжа, подинтегральное выражение дает ноль, кроме того,  $\delta q(t_1) = 0$ , а  $\delta q(t_2)$  обозначим просто  $\delta q$ , тогда

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q = p \delta q \implies p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}.$$

Таким образом, действие является такой функцией координат, что его частная производная по координате дает соответствующий обобщенный импульс.

По определению

$$L = \frac{dS}{dt},$$

с другой стороны, рассматривая действие как функцию координат и времени  $S = S(q_i, t)$ , имеем

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},$$

откуда сразу получаем

$$H = -\frac{\partial S}{\partial t}.$$

Итак, действие является такой функцией времени, что его частная производная по времени с обратным знаком дает гамильтониан.

3. **Понятие о фазовом пространстве.** Понятие "состояние системы" для механических систем, имеющих  $s$  степеней свободы, предполагает

- в лагранжевом формализме задание  $s$  обобщенных координат  $q_1, \dots, q_s$  и стольких же обобщенных скоростей  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s$ . Состояние системы описывается функцией Лагранжа

$$L = L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t);$$

- в гамильтоновом формализме задание обобщенных координат  $q_1, \dots, q_s$  и обобщенных импульсов  $p_1, \dots, p_s$ . Состояние системы описывается функцией Гамильтона

$$H = H(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t).$$

Положение механической системы с  $s$  степенями свободы в данный момент времени определено, если задано  $s$  обобщенных координат  $q_1, \dots, q_s$ . В этом случае говорят, что задана конфигурация системы, а пространство  $s$  измерений, на осях которого отложены  $q_1, \dots, q_s$ , называют **конфигурационным пространством**. В конфигурационном пространстве положение механической системы в каждый момент времени изображается точкой.

В гамильтоновом формализме обычно вводят  $2s$ -мерное пространство, осями которого служат обобщенные координаты и импульсы  $q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s$ . Такое пространство называют **фазовым**. Точка фазового пространства соответствует (изображает) состоянию механической системы в некоторый момент времени и называется **изображающей точкой**. (Заметим,

что в одномерном случае фазовое пространство вырождается в фазовую плоскость.) Совокупность изображающих точек в различные моменты времени образует в фазовом пространстве некую кривую, которую называют **фазовой траекторией** системы (это кривая в фазовом пространстве, изображающая изменение состояния системы со временем). Задание состояния системы в некоторый момент времени предопределяет (в соответствии с уравнениями движения) ее состояния во все другие моменты времени. Это означает, что задание изображающей точки в некоторый момент  $t = t_0$  предопределяет всю фазовую траекторию. Таким образом, через каждую точку фазового пространства проходит только одна фазовая траектория. Множество фазовых траекторий называют **фазовым портретом системы**, который обычно составляют для геометрической интерпретации результатов интегрирования уравнений движения.

4. **Скобки Пуассона.** Найдем полную производную по времени от произвольной функции координат, импульсов и времени  $f = f(q_i, p_i, t)$ :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f],$$

где введено обозначение

$$[f, g] = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right),$$

определяющее так называемые **скобки Пуассона** двух произвольных функций координат, импульсов и времени. Легко заметить, что если  $f$  не зависит от времени явно, то из обращения в нуль  $[H, f]$  следует, что  $f$  является интегралом движения. Вообще говоря, условие того, что  $f$  — интеграл движения, имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [H, f] = 0.$$

Пользуясь определением скобок Пуассона, довольно просто доказать их следующие свойства:

$$[f, g] = -[g, f],$$

$$[f, const] = 0,$$

$$[f_1 + f_2, g] = [f_1, g] + [f_2, g],$$

$$[f_1 \cdot f_2, g] = f_1 \cdot [f_2, g] + f_2 \cdot [f_1, g],$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [f, g] = \left[ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right].$$

Еще одно свойство, известное как тождество Якоби,

$$[f, [g, h]] + [h, [f, g]] + [g, [h, f]] = 0$$

примем без доказательства.

Вычислим

$$[p_k, g] = \sum_i \frac{\partial p_k}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} = \sum_i \delta_{ki} \frac{\partial g}{\partial q_i} = \frac{\partial g}{\partial q_k}.$$

Точно так же

$$[f, q_k] = \frac{\partial f}{\partial p_k}.$$

Поэтому

$$[p_i, q_k] = \delta_{ik}, \quad [q_i, q_k] = 0, \quad [p_i, p_k] = 0.$$

Это так называемые **фундаментальные скобки Пуассона** — классический аналог перестановочных соотношений Гейзенберга в квантовой механике. Скобки Пуассона позволяют переписать канонические уравнения Гамильтона в симметричном относительно обоюдной замены  $q$  на  $p$  и  $p$  на  $q$  виде

$$\dot{q}_i = [H, q_i], \quad \dot{p}_i = [H, p_i].$$

Докажем теорему Пуассона: если  $f(q_i, p_i, t)$  и  $g(q_i, p_i, t)$  являются интегралами движения, то скобки Пуассона этих величин также интеграл движения. Доказательство использует тождество Якоби и условие теоремы:

$$\frac{d}{dt} [f, g] = \left[ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right] + [H, [f, g]] = \left[ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right] +$$

$$\left[ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right] - [g, [H, f]] - [f, [g, H]] = \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f], g \right] + \left[ f, \frac{\partial g}{\partial t} + [H, g] \right] = 0.$$

Число интегралов движения механической системы, имеющей  $s$  степеней свободы, как известно, ограничено величиной  $2s - 1$ , и на первый взгляд это положение противоречит содержанию теоремы Пуассона. Однако противоречие снимается сразу же, если учесть, что скобка Пуассона двух интегралов движения может оказаться просто константой или функцией от уже известного интеграла движения.

**Теорема.** Любая функция координат и импульсов  $f(q(t), p(t))$  выражается через значения  $p_0 = p(0)$  и  $q_0 = q(0)$  согласно

$$f(q(t), p(t)) = f_0 + \frac{t}{1!} [H_0, f_0] + \frac{t^2}{2!} [H_0, [H_0, f_0]] + \dots,$$

где  $H$  — гамильтониан,  $f_0 = f(q_0, p_0)$ , а  $H_0 = H(q_0, p_0)$ .

**Доказательство.** Разложим  $f(q, p)$  в ряд Тейлора:

$$f(q, p) = f_0 + \left( \frac{\partial f}{\partial q} \right)_0 (q - q_0) + \left( \frac{\partial f}{\partial p} \right)_0 (p - p_0) +$$

$$\frac{1}{2!} \left[ \left( \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} \right)_0 (q - q_0)^2 + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \right)_0 (p - p_0)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial p} \right)_0 (q - q_0)(p - p_0) \right] + \dots$$

Подставив в это выражение разложения

$$q(t) = q_0 + (\dot{q})_{t=0} \cdot t + \frac{t^2}{2!} (\ddot{q})_{t=0} + \dots,$$

$$p(t) = p_0 + (\dot{p})_{t=0} \cdot t + \frac{t^2}{2!} (\ddot{p})_{t=0} + \dots,$$

получим

$$f(q, p) = f_0 + \frac{t}{1!} (F_1)_{t=0} + \frac{t^2}{2!} (F_2)_{t=0},$$

где

$$F_1 = \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial f}{\partial p} \dot{p} = [H, f],$$

$$F_2 = \frac{\partial f}{\partial q} \ddot{q} + \frac{\partial f}{\partial p} \ddot{p} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} \dot{q}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \dot{p}^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial p} \dot{q} \dot{p}.$$

Подсчитаем сумму первых двух слагаемых в выражении для  $F_2$ . Поскольку

$$\begin{aligned} \ddot{q} \frac{\partial f}{\partial q} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \dot{q} \right) - \dot{q} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} \right) + \left[ H, \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} \right] - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} \right) + \left[ H, \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} \right] - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial p} \left[ H, \frac{\partial f}{\partial q} \right], \\ \ddot{p} \frac{\partial f}{\partial p} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \dot{p} \right) - \dot{p} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial p} = \\ &= - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} \right) - \left[ H, \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} \right] + \frac{\partial H}{\partial q} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial p} = \\ &= - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} \right) - \left[ H, \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} \right] + \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial q} \left[ H, \frac{\partial f}{\partial p} \right], \end{aligned}$$

то

$$\ddot{q} \frac{\partial f}{\partial q} + \ddot{p} \frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial t} [H, f] - \left[ H, \frac{\partial f}{\partial t} \right] + [H, [H, f]] + \frac{\partial H}{\partial q} \left[ H, \frac{\partial f}{\partial p} \right] - \frac{\partial H}{\partial p} \left[ H, \frac{\partial f}{\partial q} \right].$$

Преобразуем два последних слагаемых:

$$\begin{aligned} - \dot{p} \left[ H, \frac{\partial f}{\partial p} \right] - \dot{q} \left[ H, \frac{\partial f}{\partial q} \right] &= \\ - \dot{p} \left( \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial p} \right) - \dot{q} \left( \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial q} \right) &= \end{aligned}$$

$$- \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} \dot{q}^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \dot{p}^2 - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial p} \dot{q} \dot{p}.$$

Поэтому

$$F_2 = \frac{\partial}{\partial t} [H, f] - \left[ H, \frac{\partial f}{\partial t} \right] + [H, [H, f]] = \left[ \frac{\partial H}{\partial t}, f \right] + [H, [H, f]]$$

или

$$(F_2)_{t=0} = [H_0, [H_0, f_0]],$$

что вместе с выражением  $(F_1)_{t=0}$  доказывает теорему.

5. **Канонические преобразования. Примеры.** В сравнении с лагранжевым формализмом, при прямом применении уравнений Гамильтона математические трудности существенно не уменьшаются. Преимущества гамильтонова подхода заключаются в более глубоком проникновении в структуру механики, т.к. равноправность координат и импульсов предоставляют большую свободу в выборе величин, которые мы принимаем за "координаты" и "импульсы". Именно эти абстрактные концепции классической механики служили исходными пунктами при построении квантовой теории и статистической механики. Изложению таких концепций отводятся последующие параграфы этой главы. Рассмотрим механическую систему, гамильтониан которой является константой движения, а все координаты – циклическими. В этом случае константами оказываются и все обобщенные импульсы

$$p_i = \alpha_i.$$

Гамильтониан системы будет иметь вид

$$H = H(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s),$$

а канонические уравнения дадут

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = \omega_i(\alpha_i) = const,$$

откуда

$$q_i = \omega_i t + \beta_i,$$

т.е. данная задача решается очень просто – координаты оказываются линейными функциями времени. Может показаться, что такая задача имеет чисто академический интерес, т.к. все обобщенные координаты могут оказаться циклическими в экзотических случаях. Однако выбор обобщенных координат не единственен. Действительно, при исследовании плоского движения в центральном поле мы могли выбрать декартовы координаты, но предпочли им полярные, т.к. одна из полярных координат оказывается циклической. Следовательно, цикличность координат связана со способом их выбора и в каждом конкретном случае можно подобрать такую

систему обобщенных координат, что все они будут циклическими. Разумеется, если такая система будет подобрана, то, как было показано выше, дальнейшее решение задачи станет тривиальным. Но т.к. те координаты, которые мы рассматриваем как наиболее естественные для данной системы, обычно не являются циклическими, необходимо разработать специальную процедуру для перехода от одной системы координат к другой – более подходящей. При этом нужно позаботиться и о том, чтобы канонические уравнения сохранили свой вид.

В гамильтоновом формализме импульсы являются такими же независимыми переменными, как и координаты. Поэтому расширим преобразования  $Q_i = Q_i(q_i, t)$ , которые встречались нам ранее, включив как преобразования независимых координат, так и преобразования независимых импульсов:

$$Q_i = Q_i(q_i, p_i, t), \quad P_i = P_i(q_i, p_i, t).$$

Поскольку нас интересуют только такие преобразования, которые сохраняют структуру исходных уравнений движения, потребуем, чтобы в новых координатах уравнения движения имели вид канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \dot{H}}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \dot{H}}{\partial Q_i},$$

где  $\dot{H} = \dot{H}(Q_i, P_i, t)$  – гамильтониан в новых переменных. Преобразования, удовлетворяющие этому требованию, назовем **каноническими**, а условие неизменности вида уравнений Гамильтона – **условием каноничности**.

Как было показано, уравнения Гамильтона могут быть получены из принципа наименьшего действия

$$\delta \int \left( \sum_i p_i dq_i - H dt \right) = 0$$

путем независимого варьирования всех координат и импульсов. Условие каноничности означает, что в новых переменных

$$\delta \int \left( \sum_i P_i dQ_i - \dot{H} dt \right) = 0.$$

Эти два принципа эквивалентны друг другу при условии, что подынтегральные выражения отличаются лишь на полный дифференциал произвольной функции  $F$  координат, импульсов и времени. Таким образом,

$$\sum_i p_i dq_i - H dt = \sum_i P_i dQ_i - \dot{H} dt + dF.$$

Функция  $F$  называется **производящей функцией** или **генератором канонического преобразования**. Далее мы увидим, что, задавая эту

функцию, мы однозначно определяем преобразование от старых переменных к новым, поэтому она должна быть функцией как тех, так и других – всего  $4s$  величин и времени. Однако т.к. старые и новые переменные связаны  $2s$  уравнениями преобразования

$$Q_i = Q_i(q_i, p_i, t), \quad P_i = P_i(q_i, p_i, t),$$

то производящая функция  $F$  оказывается функцией всего  $2s$  независимых величин и ее можно представить в одном из следующих видов:

$$F_1 = F_1(q_i, Q_i, t), \quad F_2 = F_2(q_i, P_i, t), \quad F_3 = F_3(p_i, Q_i, t), \quad F_4 = F_4(p_i, P_i, t).$$

Из выражения, определяющего производящую функцию, видно, что

$$dF_1 = \sum_i p_i dq_i - \sum_i P_i dQ_i + (\dot{H} - H) dt.$$

С другой стороны,

$$dF_1 = \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt.$$

Сравнивая, имеем

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad \dot{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t},$$

что позволяет по заданной производящей функции определить каноническое преобразование, т.е. установить связь между старыми  $(p_i, q_i)$  и новыми  $(P_i, Q_i)$  переменными, а также найти выражение нового гамильтониана. Для того чтобы получить формулы, определяющие каноническое преобразование через генератор  $F_2(q_i, P_i, t)$ , имея в виду  $d \sum_i (P_i Q_i) = \sum_i (P_i dQ_i + Q_i dP_i)$ , выполним преобразование Лежандра

$$d(F_1 + \sum_i P_i Q_i) = \sum_i p_i dq_i + \sum_i Q_i dP_i + (\dot{H} - H) dt.$$

Откуда заключаем, что

$$F_2 = F_1 + \sum_i P_i Q_i, \quad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad \dot{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

Аналогично можно определить канонические преобразования через генераторы  $F_3$  и  $F_4$ . Рассмотрим несколько простых примеров канонических преобразований.



(a) Пусть производящая функция канонического преобразования

$$F_2 = \sum_i q_i P_i.$$

В этом случае, воспользовавшись полученными выше соотношениями, найдем

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i, \quad \dot{H} = H.$$

Новые переменные совпадают со старыми, т.е. рассматриваемое преобразование суть тождественное.

Если же

$$F_2 = \sum_i f_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t) P_i,$$

то

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = f_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t), \quad \dot{H} = H.$$

При таком виде производящей функции новые координаты будут зависеть только от старых и времени, и это преобразование относится к числу так называемых **точечных преобразований**, кроме того, фактически доказано, что все точечные преобразования являются каноническими. Итак, канонические уравнения Гамильтона ковариантны относительно точечных преобразований. (Ранее была показана ковариантность уравнений Лагранжа относительно точечных преобразований.)

(b) Пусть генератор канонических преобразований имеет вид

$$F_1 = \sum_i q_i Q_i.$$

Тогда

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = Q_i, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -q_i, \quad \dot{H} = H.$$

Это преобразование взаимно переименовывает координаты и импульсы: старые импульсы становятся новыми координатами и наоборот, что еще раз подчеркивает, что в гамильтоновом подходе и "координаты", и "импульсы" лишены своего первоначального смысла и выступают в роли равноправных переменных.

(c) В качестве последнего примера рассмотрим одномерный гармонический осциллятор с гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

Выполним каноническое преобразование с производящей функцией

$$F_1 = \frac{m}{2} \omega x^2 \operatorname{ctg} X.$$

Согласно известным соотношениям

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial x} = m\omega x \operatorname{ctg} X, \quad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = \frac{m\omega^2 x^2}{2 \sin^2 X}.$$

Из последнего уравнения получим

$$x = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin X,$$

подставив которое в соотношение для  $p$ , найдем

$$p = \sqrt{2m\omega P} \cos X.$$

Подсчитав гамильтониан с этими  $x$  и  $p$ , получим  $H = \omega P = \dot{H}$ , т.е. новая координата  $X$  оказывается циклической и

$$X = \omega t + \alpha,$$

где  $\alpha$  – постоянная интегрирования уравнения  $\dot{X} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega$ . После подстановки в  $x$  окончательно получим

$$x = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha)$$

– хорошо известное решение задачи о гармоническом осцилляторе.

6. **Инварианты канонических преобразований.** Канонические преобразования

$$Q_i = Q_i(q_i, p_i, t), \quad P_i = P_i(q_i, p_i, t)$$

по определению не меняют вида канонических уравнений Гамильтона. К инвариантам канонических преобразований относятся также скобки Пуассона и интегральные инварианты Пуанкаре.

(a) **Скобки Пуассона.** Докажем инвариантность скобок Пуассона относительно канонических преобразований:

$$[f, g]_{q,p} \equiv \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) = \sum_{i,j,l} \left( \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \right) \left( \frac{\partial g}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial Q_l} \frac{\partial Q_l}{\partial q_i} \right) - \sum_{i,j,l} \left( \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \right) \left( \frac{\partial g}{\partial P_l} \frac{\partial P_l}{\partial p_i} + \frac{\partial g}{\partial Q_l} \frac{\partial Q_l}{\partial p_i} \right) =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j,l} \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial g}{\partial P_l} [P_j, P_l]_{q,p} + \sum_{j,l} \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial g}{\partial Q_l} [P_j, Q_l]_{q,p} + \\ & \sum_{j,l} \frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial g}{\partial P_l} [Q_j, P_l]_{q,p} + \sum_{j,l} \frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial g}{\partial Q_l} [Q_j, Q_l]_{q,p} = \sum_{j,l} \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial g}{\partial P_l} [P_j, P_l]_{q,p} + \\ & \sum_{j,l} \left( \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial g}{\partial Q_l} - \frac{\partial f}{\partial Q_l} \frac{\partial g}{\partial P_j} \right) [P_j, Q_l]_{q,p} + \sum_{j,l} \frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial g}{\partial Q_l} [Q_j, Q_l]_{q,p}. \end{aligned}$$

Поэтому ясно, что достаточным условием инвариантности скобок Пуассона относительно канонических преобразований являются равенства

$$[P_j, P_l]_{q,p} = [Q_j, Q_l]_{q,p} = 0, \quad [P_j, Q_l]_{q,p} = \delta_{jl}.$$

Нетрудно видеть, что эти равенства являются и необходимым условием. Действительно, подставив последовательно в

$$[f, g]_{q,p} = [f, g]_{Q,P}$$

пары  $(P_j, P_l), (Q_j, Q_l), (P_j, Q_l)$  и учитывая доказанные ранее соотношения, получим нужный результат.

Итак, скобки Пуассона являются инвариантом канонических преобразований. Можно доказать и обратное утверждение – преобразования, относительно которых инвариантны скобки Пуассона, являются каноническими.

Условие

$$[f, g]_{q,p} = [f, g]_{Q,P}$$

обычно называют **условием каноничности**.

(b) **Интегральные инварианты Пуанкаре.** Теорема Пуанкаре: **Интеграл**

$$I_1 = \int_S \sum_i dq_i dp_i$$

является инвариантом канонических преобразований ( $S$  – произвольная поверхность фазового пространства  $q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s$ ).

**Доказательство.** Положение точки на двумерной поверхности определяется двумя параметрами. Для определенности назовем их  $u$  и  $v$ , тогда  $q_i = q_i(u, v)$ ;  $p_i = p_i(u, v)$ . Требуется доказать, что

$$\int_S \sum_i dq_i dp_i = \int_S \sum_i dQ_i dP_i,$$

где

$$dq_i dp_i = \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} du dv \equiv \left( \frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} \right) du dv.$$

С учетом последнего доказательства теоремы сводится к доказательству

$$\int_S \sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} du dv = \int_S \sum_i \frac{\partial(Q_i, P_i)}{\partial(u, v)} du dv$$

или, ввиду произвольности области интегрирования, доказательству равенства

$$\sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} = \sum_i \frac{\partial(Q_i, P_i)}{\partial(u, v)}.$$

Пусть, для определенности, генератор рассматриваемого канонического преобразования относится к типу  $F_2 = F_2(q, P, t)$ . В таком случае

$$\frac{\partial p_i}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = \sum_k \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial u} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial u} \right)$$

и аналогично для  $\partial p_i / \partial v$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} &= \sum_{i,k} \left( \frac{\partial q_i}{\partial u} \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial v} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial v} \right) - \right. \\ & \left. \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial u} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial u} \right) \frac{\partial q_i}{\partial v} \right) \\ &= \sum_{i,k} \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_k} \left( \frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial P_k}{\partial v} - \frac{\partial q_i}{\partial v} \frac{\partial P_k}{\partial u} \right) + \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial q_k} \left( \frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial q_k}{\partial v} - \frac{\partial q_i}{\partial v} \frac{\partial q_k}{\partial u} \right) \right). \end{aligned}$$

Последнее слагаемое является произведением симметричной по  $i, k$  величины на антисимметричную по  $i, k$  выражение в скобках и поэтому равно нулю. По той же причине равно нулю и выражение

$$\sum_{i,k} \frac{\partial^2 F_2}{\partial P_i \partial P_k} \left( \frac{\partial P_i}{\partial u} \frac{\partial P_k}{\partial v} - \frac{\partial P_i}{\partial v} \frac{\partial P_k}{\partial u} \right),$$

добавив которое к последней сумме предыдущего равенства, получим

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} &= \sum_{i,k} \frac{\partial^2 F_2}{\partial P_i \partial P_k} \left( \frac{\partial P_i}{\partial u} \frac{\partial P_k}{\partial v} - \frac{\partial P_i}{\partial v} \frac{\partial P_k}{\partial u} \right) \\ &+ \sum_{i,k} \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_k} \left( \frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial P_k}{\partial v} - \frac{\partial q_i}{\partial v} \frac{\partial P_k}{\partial u} \right). \end{aligned}$$

Легко видеть, что для любого фиксированного  $k$

$$\sum_i \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial P_i \partial P_k} \frac{\partial P_i}{\partial u} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_k} \frac{\partial q_i}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial F_2}{\partial P_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial u},$$

$$\sum_i \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial P_i \partial P_k} \frac{\partial P_i}{\partial v} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_i \partial P_k} \frac{\partial q_i}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial F_2}{\partial P_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial v}.$$

Подставив, получим

$$\sum_i \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)} = \sum_k \left( \frac{\partial Q_k}{\partial u} \frac{\partial P_k}{\partial v} - \frac{\partial Q_k}{\partial v} \frac{\partial P_k}{\partial u} \right) = \sum_i \frac{\partial(Q_i, P_i)}{\partial(u, v)}.$$

Теорема доказана.

Можно доказать также, что инвариантами канонических преобразований являются

$$I_2 = \int \sum_{i,k} dq_i dp_i dq_k dp_k \dots, \quad I_s = \int \sum_{i,k} dq_1, \dots, dq_s dp_1, \dots, dp_s.$$

Здесь в  $I_2$  интегрирование ведется по 4-мерной поверхности фазового пространства, а в  $I_s$  – по произвольной области фазового пространства. Инвариант  $I_s$  показывает, что объем любой части фазового пространства не изменяется при канонических преобразованиях. В курсе статистической механики будет показано, что этот объем не изменяется и со временем.

Итак, последовательность  $I_1, I_2, \dots, I_s$  образует совокупность интегральных инвариантов Пуанкаре.

**7. Бесконечно малые канонические преобразования.** Бесконечно малыми каноническими преобразованиями назовем такие преобразования, при которых новые координата и импульс получаются изменением  $q$  и  $p$  на бесконечно малые величины:

$$Q_i = q_i + \Delta q_i, \quad P_i = p_i + \Delta p_i. \quad (29)$$

Понятно, что производящая функция этого преобразования должна бесконечно мало отличаться от генератора (так удобнее называть производящую функцию) тождественного канонического преобразования  $\sum q_i P_i$ , т.е.

$$F_2 = \sum q_i P_i + \epsilon G(q, P).$$

Поэтому

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}.$$

Здесь  $\epsilon$  – бесконечно малый параметр рассматриваемого канонического преобразования. Точность результатов нашего рассмотрения ограничим величинами первого порядка малости, поэтому

$$\Delta p_i = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}, \quad \Delta q_i = \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} \approx \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}. \quad (30)$$

Назовем  $G(q, p)$  генератором бесконечно малого канонического преобразования (29) и рассмотрим интересный случай  $G = H(q, p)$  с параметром  $\epsilon = dt$ , тогда из (30) следует

$$\Delta q_i = dt \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i dt = dq_i, \quad \Delta p_i = -dt \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i dt = dp_i. \quad (31)$$

Таким образом, при бесконечно малом каноническом преобразовании с генератором  $H(q, p)$  и параметром  $dt$  вместо  $q(t)$  и  $p(t)$  получаем значения  $q(t+dt)$  и  $p(t+dt)$ . Другими словами, изменение состояния системы за время  $dt$  возникает как результат бесконечно малого канонического преобразования, осуществляемого гамильтонианом  $H(q, p)$ . Поэтому изменение состояния системы за конечное время от  $t_0$  до  $t$  можно получить как последовательность бесконечно малых канонических преобразований, эквивалентных одному конечному. Таким образом, каноническое преобразование, зависящее от времени, позволяет по заданным  $q(t_0) = q_0$  и  $p(t_0) = p_0$  определить  $q(t)$  и  $p(t)$ , иначе говоря, *движение механической системы можно рассматривать как непрерывно совершаемое каноническое преобразование, генератором которого в каждый момент времени является гамильтониан.*

Понятно, что существует и обратное преобразование, превращающее координаты  $q(t)$  и импульсы  $p(t)$  в константы  $q_0$  и  $p_0$ . Если будет найдена производящая функция такого канонического преобразования, то ясно, что это преобразование будет эквивалентно полному решению задачи о движении рассматриваемой системы. Для того чтобы найти генератор такого преобразования, заметим, что новые координаты  $Q_i$  и импульсы  $P_i$ , которые получаются в результате отображения  $(q_i, p_i) \mapsto (Q_i = q_0, P_i = p_0)$ , должны удовлетворять каноническим уравнениям

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \dot{H}}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \dot{H}}{\partial Q_i},$$

для чего достаточно потребовать, чтобы  $\dot{H} = 0$ , и поскольку, как известно,  $\dot{H} = H + \partial F_2 / \partial t$ , а с другой стороны,  $H = -\partial S / \partial t$ , то в качестве генератора искомого канонического преобразования выберем действие  $S$ , которое, как это легко усмотреть из последнего соотношения, определяется как полный интеграл уравнения

$$H(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

которое известно как уравнение Гамильтона – Якоби. Отметим, что все импульсы – аргументы гамильтоновой функции – заменены на  $\partial S / \partial q_i$ .

Рассмотрим изменение произвольной функции  $f = f(q, p)$  при бесконечно малом каноническом преобразовании. С этой целью разложим ее изменение

$$\Delta f = f(q_i + \Delta q_i, p_i + \Delta p_i) - f(q_i, p_i)$$

в ряд Тейлора, отбрасывая члены высшего, чем первый, порядка малости:

$$\Delta f = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \Delta q_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \Delta p_i \right).$$

Подставив (30) в последнее соотношение, получим

$$\Delta f = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) \equiv \epsilon \cdot [f, G]. \quad (32)$$

Допустим,  $f = H$ , тогда изменение гамильтониана при бесконечно малом каноническом преобразовании с генератором  $G$  будет

$$\Delta H = \epsilon \cdot [H, G], \quad (33)$$

и если  $G = G(q, p)$  есть первый интеграл уравнений движения, то, как известно,

$$[H, G] = 0,$$

что дает  $\Delta H = 0$ , т.е. величина гамильтониана не изменяется, а это позволяет высказать

**Предложение:** все первые интегралы уравнений движения являются генераторами тех бесконечно малых канонических преобразований, при которых гамильтониан остается неизменным.

Из соотношения (33) следует также, что если найдены преобразования, не изменяющие гамильтониан, то им можно сопоставить сохраняющуюся величину. Такие преобразования можно найти, исходя из свойств симметрии системы. Действительно, если механическая система остается неизменной при определенных изменениях ее конфигурации, то ее гамильтониан, при соответствующих этим изменениям преобразованиях, должен также оставаться неизменным. Иначе говоря, исследуя свойства симметрии гамильтониана, можно получить интегралы уравнений движения.

**Пример 1.** Пусть  $q_k$  — циклическая координата, тогда гамильтониан не меняется при бесконечно малом каноническом преобразовании

$$\Delta q_k = \epsilon \delta_{ik}, \quad \Delta p_k = 0,$$

откуда с учетом (30) имеем  $G = p_k$ , что приводит к сохранению  $p_k$  (см. (33)).

**Пример 2.** Рассмотрим бесконечно малое каноническое преобразование, соответствующее повороту механической системы на угол  $d\varphi$ . Для определенности пусть осью поворота служит ось  $z$ . Тогда

$$X_i = x_i - y_i d\varphi, \quad Y_i = y_i + x_i d\varphi, \quad Z_i = z_i,$$

т.е.

$$\Delta x_i = -y_i d\varphi, \quad \Delta y_i = x_i d\varphi, \quad \Delta z_i = 0.$$

Точно такие же изменения претерпевают компоненты импульса:

$$\Delta p_{ix} = -p_{iy} d\varphi, \quad \Delta p_{iy} = p_{ix} d\varphi, \quad \Delta p_{iz} = 0.$$

Сравнивая с (30), заключаем, что

$$G = \sum_i (x_i \cdot p_{iy} - y_i \cdot p_{ix}),$$

а роль параметра  $\epsilon$  играет  $d\varphi$ . Таким образом, в рассматриваемом случае генератор бесконечно малого канонического преобразования  $G$  совпадает с  $z$  компонентой момента импульса  $M_z$ . Ясно, что для поворота вокруг произвольной оси с единичным вектором  $\vec{n}$

$$G = \vec{M} \cdot \vec{n}.$$

Итак, момент импульса — генератор вращательного движения системы. (Напомним, что гамильтониан — генератор фактического движения системы.)

**8. Уравнение Гамильтона — Якоби. Схема решения задач методом Гамильтона — Якоби.** В конце раздела "Канонические преобразования. Примеры" рассматривались колебания гармонического осциллятора как пример использования канонических преобразований для решения задач механики. Изучая бесконечно малые канонические преобразования, мы пришли к заключению о том, что существует каноническое преобразование, зависящее от времени, которое позволяет по заданным в начальный момент  $q(t_0) = q_0$  и  $p(t_0) = p_0$  определить  $q(t)$  и  $p(t)$  в произвольный момент времени, т.е. движение механической системы есть непрерывно совершаемое каноническое преобразование. Понятно, что существует и обратное преобразование, превращающее координаты  $q(t)$  и импульсы  $p(t)$  в константы  $q_0$  и  $p_0$ . Если найдена производящая функция такого канонического преобразования, то ясно, что это преобразование будет эквивалентно полному решению задачи о движении рассматриваемой системы. Генератор этого преобразования можно найти из следующих соображений: новые координаты  $Q_i$  и импульсы  $P_i$ , которые получаются в результате отображения

$$(q_i, p_i) \implies (Q_i = q_{0i} \equiv \beta_i = const, P_i = p_{0i} \equiv \alpha_i = const),$$

должны удовлетворять каноническим уравнениям

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \dot{H}}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \dot{H}}{\partial Q_i}$$

для чего достаточно потребовать, чтобы  $\dot{H} = 0$ . Как известно, в результате канонических преобразований  $\dot{H} = H + \partial F/\partial t$ , а с другой стороны, рассматривая действие как функцию координат и времени, мы пришли к заключению, что  $H = -\partial S/\partial t$ , поэтому в качестве генератора искомого канонического преобразования следует выбрать действие  $S$ . Тогда если в последнем соотношении заменить все импульсы – аргументы гамильтоновой функции – на  $\partial S/\partial q_i$ , то  $S$  определится как решение дифференциального уравнения в частных производных

$$H(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

которое известно как **уравнение Гамильтона – Якоби**. Таким образом, действие  $S$ , генератор канонического преобразования

$$(q_i, p_i) \implies (q_{0i} \equiv \beta_i = const, p_{0i} \equiv \alpha_i = const),$$

эквивалентного полному решению задачи о движении механической системы, является решением уравнения Гамильтона – Якоби.

- **Примечание.** Уравнение Гамильтона - Якоби составляют согласно следующему алгоритму: по функции Лагранжа  $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$  строят

$$H = \sum_i \dot{q}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L,$$

затем в этом выражении все  $\dot{q}_i$  выражают через  $p_i = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ . (Отметим, что такая замена возможна, лишь если для рассматриваемой системы гессиан  $\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \neq 0$ .) Получившаяся в результате функция  $H = H(q_i, p_i, t)$  есть гамильтониан системы. Заменим в гамильтониане все  $p_i$  на  $\frac{\partial S}{\partial q_i}$  и, добавив к нему  $\frac{\partial S}{\partial t}$ , приравняем его нулю. Полученное уравнение и есть уравнение Гамильтона - Якоби (Г-Я):

$$H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Согласно общей теории дифференциальных уравнений в частных производных различают два типа их решения – общий и полный интегралы. Общий интеграл – это решение уравнения Г-Я, которое зависит от произвольной функции, а полный интеграл содержит столько произвольных постоянных, сколько независимых переменных содержит уравнение. Из

соображений, которые выяснятся в ходе дальнейшего изложения, в механических приложениях интересуются полным интегралом уравнения Г-Я. Число независимых переменных уравнения Г-Я равно  $s + 1$ , однако сама функция  $S$  не входит в уравнение, поэтому если решением уравнения является  $S$ , то  $S + A$  также есть решение этого уравнения, т.е. одна из произвольных постоянных входит в решение аддитивно, и полный интеграл уравнения Г-Я можно записать в виде

$$S = S(q_1, q_2, \dots, q_s, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, t).$$

Таким образом, действие как решение уравнения Г-Я относится к производящим функциям 2-го типа, а  $\alpha_i$  – новые импульсы, поэтому новые координаты  $\beta_i$  определяются уравнением

$$\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i},$$

что позволяет найти  $q_i = q_i(\alpha_i, \beta_i, t)$ , а

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$$

дает  $p_i = p_i(\alpha_i, \beta_i, t)$ , завершая решение задачи.

Рассмотрим два наиболее часто встречающихся типа задач.

- Пусть гамильтониан задан в общем виде  $H = H(q, p, t)$ . Найдем каноническое преобразование к новым координатам и импульсам, которые постоянны во времени:  $Q_i = const, P_i = const$ . Необходимым условием этого постоянства является обращение нового гамильтониана в нуль:  $\dot{H} = 0$ . Тогда канонические уравнения Гамильтона в новых координатах

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \dot{H}}{\partial P_i} = 0, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \dot{H}}{\partial Q_i} = 0$$

приводят к искомым решениям

$$Q_i = \beta_i = const, \quad P_i = \alpha_i = const.$$

Было показано, что производящей функцией такого канонического преобразования является действие  $S = S(q, P, t)$ , вид которого определяется уравнением Гамильтона - Якоби

$$H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Итак, производящая функция искомого канонического преобразования является решением уравнения Гамильтона - Якоби в виде полного интеграла. Полный интеграл уравнения Гамильтона - Якоби

содержит столько произвольных постоянных, сколько независимых переменных содержит уравнение. При  $s$  степенях свободы число независимых переменных уравнения Г-Я равно  $s + 1$  ( $s$  координат и время). Искомая функция входит в уравнение только в виде частных производных, поэтому одна из констант содержится в решении аддитивно:  $S(q_i, \alpha_i, t) + A$ . Если найден полный интеграл уравнения Г-Я и, тем самым, генератор канонического преобразования  $S(q_i, \alpha_i, t)$ , то, дифференцируя его по содержащимся в нем константам  $\alpha_i$  и приравнявая другим константам, получим

$$Q_i = \beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i},$$

а соотношение

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$$

выполняется автоматически, т. к. использовано при составлении уравнения Г-Я, что после разрешения относительно  $q_i$  окончательно приводит к решению поставленной задачи:  $q_i = q_i(\beta_i, \alpha_i, t)$ ,  $p_i = p_i(\beta_i, \alpha_i, t)$ .

- (b) Рассмотрим механическую систему с гамильтонианом  $H = H(q, p) = \text{const}$ . Найдем каноническое преобразование, в результате которого все новые импульсы становятся постоянными во времени:  $P_i = \alpha_i = \text{const}$ . Для этого необходимо, чтобы все новые координаты были циклическими, т. е. не содержались бы в новом гамильтониане  $\dot{H} = \dot{H}(P_i) = \text{const}$ , а это возможно, только если производящая функция искомого канонического преобразования не зависит от времени (т. к.  $\dot{H} = H + \frac{\partial F}{\partial t}$ ). Для того чтобы найти производящую функцию (генератор) такого канонического преобразования, запишем уравнение Г-Я

$$H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

полный интеграл которого

$$S(q_i, P_i, t) = W(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, H_0) - H_0 t$$

линейно зависит от времени, а роль  $s$ -й неаддитивной постоянной играет  $H_0$ , которую обычно отождествляют с энергией - величиной, канонически сопряженной времени, отсутствующему явно в исходном гамильтониане. (Время выступает в роли "циклической координаты", поэтому в полном интеграле уравнения Г-Я появляется слагаемое  $-H_0 t$  - произведение канонически сопряженных времени и энергии.) Ясно, что величина  $W$ , которую называют укороченным действием (или характеристической функцией), удовлетворяет уравнению

$$H(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}) = H_0.$$

Если полный интеграл этого уравнения  $W(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, H_0)$  известен, то, подставив его в  $S$  и применив процедуру, описанную в предыдущем пункте, получим

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i}, & i &= 1, \dots, s, \\ \beta_j &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_j}, & j &= 1, \dots, s-1, \\ t_0 &= \frac{\partial S}{\partial H_0} = -t + \frac{\partial W}{\partial H_0}. \end{aligned}$$

Эти соотношения показывают, что  $W(q_i, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, H_0)$  можно выбрать в качестве генератора искомого канонического преобразования. Дополнительным обоснованием такого выбора является требуемая циклическость всех новых координат. Действительно,  $\dot{H} = H + \frac{\partial W}{\partial t} = H = H_0$ .

Итак, если найдено укороченное действие как полный интеграл соответствующего уравнения Г-Я, то соотношения для  $p_i, \beta_j$ , и  $t_0$  полностью решают поставленную задачу, поскольку позволяют получить зависимость координат и импульсов от времени, содержащую  $2s$  произвольных постоянных  $\alpha_i, \beta_j, H_0$ , которые можно определить заданием начальных условий.

Отметим, что решения канонических уравнений Гамильтона в новых координатах

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \dot{H}}{\partial P_i} = \nu_i \quad (\dot{H} = H_0, \quad P_i = \alpha_i), \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \dot{H}}{\partial Q_i} = 0$$

имеют простой вид

$$Q_i = \nu_i t + \gamma_i, \quad P_i = \alpha_i.$$

- (c) Уравнение Г-Я допускает разделение переменных при наличии циклических координат. В самом деле, пусть  $s - m$  независимых координат являются циклическими, тогда уравнение Г-Я принимает вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_1, \dots, q_m, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t) = 0.$$

По аналогии с предыдущим пунктом будем искать его решение в линейном по циклическим координатам виде, сопоставив каждой циклической координате канонически сопряженный ей постоянный обобщенный импульс  $\alpha_j, j = m + 1, \dots, s$ :

$$S = F(q_1, \dots, q_m, \alpha_1, \dots, \alpha_s, t) + \sum_{j=m+1}^s \alpha_j q_j.$$

Определим  $F$  как полный интеграл уравнения Г-Я

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(q_1, \dots, q_m, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_m}, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_s, t) = 0.$$

Действуя далее, как в предыдущем пункте, получим полное решение задачи.

### 9. Решение уравнения Гамильтона – Якоби в простейших случаях.

- **Движение свободной частицы.** Функция Лагранжа изолированной частицы  $L = mv^2/2$ , ее гамильтониан  $H = p^2/2m = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m$ . Уравнение Гамильтона-Якоби записывается в виде

$$\frac{1}{2m} \left\{ \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right\} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Четыре переменные  $t, x, y, z$  оказываются циклическими. Это означает, что решение уравнения Г-Я можно искать в виде

$$S = xp_x + yp_y + zp_z - Et,$$

где каждое из слагаемых есть произведение циклической переменной на канонически сопряженную величину (координаты – на соответствующие компоненты импульса, углы – на соответствующие компоненты момента импульса, время – на энергию). Подставив в уравнение, получим очевидный результат:  $E = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m$ , а для действия

$$S = xp_x + yp_y + zp_z - t \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}.$$

Следуя далее известной процедуре, найдем решение задачи:

$$\frac{\partial S}{\partial p_x} = x_0 \Rightarrow x = x_0 + \frac{p_x t}{m},$$

$$\frac{\partial S}{\partial p_y} = y_0 \Rightarrow y = y_0 + \frac{p_y t}{m},$$

$$\frac{\partial S}{\partial p_z} = z_0 \Rightarrow z = z_0 + \frac{p_z t}{m}.$$

- **Линейный гармонический осциллятор.** Функция Лагранжа гармонического осциллятора  $L = m\dot{x}^2/2 - kx^2/2$ , гамильтониан  $H = p_x^2/2m + kx^2/2$ . Уравнение Г-Я

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{kx^2}{2} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Время  $t$  является циклической переменной, поэтому будем искать решение уравнения Г-Я в виде

$$S = S_0(x) - Et,$$

что дает

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{dS_0}{dx} \right)^2 + \frac{kx^2}{2} = E,$$

откуда получаем

$$S = \sqrt{mk} \int \left( \frac{2E}{k} - x^2 \right)^{1/2} dx - Et \Rightarrow t_0 = \frac{\partial S}{\partial E} \equiv \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{k} - x^2}} - t.$$

После интегрирования получим решение задачи

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \omega(t + t_0), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

- **Задача Кеплера.** В центральном поле, благодаря сохранению момента импульса, движение плоское. В полярных координатах, которые удобны в этом случае, функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\phi}^2}{2} + \frac{\alpha}{r}.$$

Найдем обобщенные импульсы

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2}.$$

Тогда гамильтониан запишется в виде

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r},$$

а уравнение Г-Я –

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Здесь циклическими являются время  $t$  и  $\phi$ , поэтому будем искать решение задачи в виде

$$S = S_0(r) + M\phi - Et,$$

где  $M$  – сохраняющийся момент импульса, величина канонически сопряженная углу  $\phi$ . Тогда

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{dS_0}{dr} \right)^2 + \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} = E,$$

что приводит к

$$S = \int \left[ 2m \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) - \frac{M^2}{r^2} \right]^{1/2} dr + M\phi - Et,$$

откуда

$$\phi_0 = \frac{\partial S}{\partial M} \equiv \phi + \int \frac{\frac{M}{r^2} dr}{\sqrt{2m \left( E + \frac{\alpha}{r} \right) - \frac{M^2}{r^2}}},$$

и после вычисления интеграла для траектории движения получим (заметим на будущее – уравнение траектории получается как следствие соотношения  $\phi_0 = \partial S / \partial M$ ):

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos(\phi - \phi_0), \quad \text{где } p = \frac{M^2}{m\alpha}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}.$$

## VII. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Рассмотрим движение механической системы вблизи положения устойчивого равновесия. Такие движения называют малыми колебаниями. Уточним понятия "равновесие", "устойчивое равновесие" и "малые колебания", которыми будем пользоваться в дальнейшем. Система находится в положении равновесия, если действующие на нее обобщенные силы равны нулю:

$$f_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0,$$

т.е. в положении равновесия потенциальная энергия системы имеет экстремум. Если начальная конфигурация системы равновесна и ее начальные скорости равны нулю, то она и дальше будет оставаться в равновесии. Равновесие назовем **устойчивым**, если возникшее в результате небольшого возмущения движение не выводит систему из малой окрестности ее первоначальной конфигурации. Если же система при малом возмущении начинает неограниченно удаляться от своего равновесного состояния, то равновесие называется **неустойчивым**. Легко понять, что если потенциальная энергия в положении равновесия имеет минимум, то равновесие устойчиво. Действительно, при небольшом смещении от точки равновесия (точки минимума потенциальной энергии) потенциальная энергия возрастает, а кинетическая, согласно закону сохранения энергии, должна уменьшаться, т.е. при дальнейшем отклонении от положения равновесия скорости уменьшаются, пока не обратятся в нуль. Затем отличные от нуля силы вернут систему в положение равновесия, где станут равными нулю, но скорость, которую приобретает система, отклонит ее

от равновесного состояния в противоположную сторону, и процесс повторится, т.е. система не может удалиться от положения равновесия и будет колебаться вблизи него. Если же в положении равновесия потенциальная энергия системы максимальна, то при небольшом смещении от равновесного состояния потенциальная энергия уменьшится, а кинетическая, по закону сохранения энергии, возрастет, и система со все увеличивающейся скоростью будет удаляться от положения равновесия – равновесие оказывается неустойчивым.

1. **Постановка задачи.** Функция Лагранжа механической системы с  $s$  степенями свободы имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q_1, q_2, \dots, q_s).$$

Разложим потенциальную энергию  $U(q_1, q_2, \dots, q_s)$  в ряд Тейлора вблизи положения равновесия  $(q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0s})$ :

$$U(q_1, q_2, \dots, q_s) = U(q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0s}) + \sum_i \left( \frac{\partial U}{\partial q_i} \right)_0 (q_i - q_{0i}) +$$

$$\frac{1}{2!} \sum_{i,k} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_k} \right)_0 (q_i - q_{0i})(q_k - q_{0k}) + \dots$$

Введем отклонение от положения равновесия

$$x_i = q_i - q_{0i}$$

и, заметив, что произвол в выборе начала отсчета позволяет отсчитывать потенциальную энергию от уровня в положении равновесия, примем

$$U(q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0s}) = 0.$$

По определению в положении равновесия

$$\left( \frac{\partial U}{\partial q_i} \right)_0 = 0,$$

и первое неисчезающее слагаемое в разложении оказывается пропорциональным  $x_i^2$ . Предположим, что вклад последующих членов, пропорциональных кубу и более высоким степеням  $x_i$ , незначителен, что и примем в качестве критерия малости колебаний. Введем

$$k_{ik} = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_k} \right)_0.$$

Рассматриваются колебания вблизи положения **устойчивого** равновесия, поэтому  $k_{ik} > 0$ , кроме того, из определения следует, что  $k_{ik}$  симметричный по индексам коэффициент  $k_{ik} = k_{ki}$ . В результате

$$U(q_1, q_2, \dots, q_s) \approx \frac{1}{2} \sum_{i,k} k_{ik} x_i x_k.$$



Разложим в ряд Тейлора также и  $a_{ik}(q_1, q_2, \dots, q_s)$ :

$$a_{ik}(q_1, q_2, \dots, q_s) = a_{ik}(q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0s}) + \sum_i \left( \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_i} \right)_0 x_i + \frac{1}{2!} \sum_{i,k} \left( \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial q_i \partial q_k} \right)_0 x_i x_k + \dots$$

Коэффициент  $a_{ik}$  множится на величину второго порядка малости  $\dot{x}_i \dot{x}_k$ , а в разложении потенциальной энергии мы отбросили члены, пропорциональные  $x_i^3$ , поэтому понятно, что в разложении  $a_{ik}$  достаточно сохранить первое слагаемое, для которого введем обозначение

$$m_{ik} \approx a_{ik}(q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0s}).$$

По определению эта величина положительна и симметрична по своим индексам. Таким образом, для функции Лагранжа многомерной системы с  $s$  степенями свободы, совершающей малые колебания вокруг положения устойчивого равновесия, имеем

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ik} (m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - k_{ik} x_i x_k).$$

Ее полный дифференциал

$$dL = \frac{1}{2} \sum_{ik} (m_{ik} \dot{x}_i d\dot{x}_k + m_{ik} \dot{x}_k d\dot{x}_i - k_{ik} x_i dx_k - k_{ik} x_k dx_i).$$

В первом и третьем слагаемых переименуем индексы  $i$  на  $k$ ,  $k$  на  $i$  и воспользуемся симметричностью  $m_{ik}$  и  $k_{ik}$ , тогда

$$dL = \sum_{ik} (m_{ik} \dot{x}_k d\dot{x}_i - k_{ik} x_k dx_i)$$

и уравнения движения получим в виде

$$\sum_i^s (m_{ik} \ddot{x}_k + k_{ik} x_k) = 0, \quad x_k = q_k - q_{0k}, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Для систем с одной степенью свободы

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}, \quad m\ddot{x} + kx = 0.$$

Отметим, что величина  $m$  есть масса системы, только если  $x$  – декартова координата. Решение уравнения движения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

в одномерном случае известно и имеет вид

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Здесь  $\omega_0$  – частота (циклическая частота),  $a$  – амплитуда,  $\alpha$  – начальная фаза колебаний. Таким образом, вблизи положения устойчивого равновесия система совершает гармонические колебания. Гармоничность является следствием принятого выше критерия малости колебаний, согласно которому в тейлоровском разложении потенциальной энергии были отброшены слагаемые, порядок которых выше квадрата отклонения от положения равновесия. Поэтому возвращающая в положение равновесия сила оказывается пропорциональной первой степени этого отклонения ( $F \sim x$ ), что и предопределяет гармоничность колебаний.

Легко показать, что амплитуда  $a$  и начальная фаза колебаний  $\alpha$  выражаются через начальные условия. Действительно, пусть  $x_{t=0} = x_0$ ,  $\dot{x}_{t=0} = v_0$ , тогда  $x_0 = a \cdot \cos \alpha$ , а  $v_0 = -a\omega_0 \cdot \sin \alpha$ , откуда получаем

$$a = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega_0^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0}.$$

Частота колебаний  $\omega_0$  не зависит от начальных условий движения и полностью определяется свойствами механической системы. Ее можно найти по заданной функции Лагранжа

$$L = \frac{a(q)\dot{q}^2}{2} - U(q),$$

если следовать следующему алгоритму:

- определить положение равновесия  $q_0$  из условия  $dU(q)/dq = 0$ ,
- найти  $m = a(q_0)$ ,
- найти  $k = (d^2U/dq^2)_{q=q_0}$ ,
- найти  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ .

Энергия системы, совершающей малые колебания,

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2$$

пропорциональна квадрату амплитуды, т.е., как и должно было быть, определяется начальными условиями.

Зависимость координаты колеблющейся системы от времени обычно представляют в виде вещественной части комплексного выражения

$$x = \operatorname{Re}[Ae^{i\omega_0 t}], \quad \text{где } A = ae^{i\alpha},$$

причем промежуточные выкладки удобно проводить с комплексным выражением и только в окончательном результате переходить к вещественной части.

2. **Вынужденные колебания. Резонанс. Биения.** Пусть при движении вблизи положения устойчивого равновесия на частицу действует нестационарная (зависящая от времени) сила  $f(t)$ . Уравнение движения в этом случае

$$m\ddot{x} = -kx + f(t) \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m}.$$

Соответствующая функция Лагранжа

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + xf(t).$$

Решение уравнения движения может быть найдено в общем виде при произвольной вынуждающей силе. Введем для этого

$$\xi = \dot{x} + i\omega_0 x,$$

тогда получим уравнение первого порядка

$$\frac{d\xi}{dt} - i\omega_0 x = \frac{f(t)}{m}.$$

Решение однородного уравнения есть  $\xi = A \exp(i\omega_0 t)$ . Общее решение неоднородного уравнения найдем, используя известный прием вариации постоянной, что дает

$$\xi = \exp(i\omega_0 t) \left[ \int \frac{f(t)}{m} \exp(-i\omega_0 t) dt + \xi_0 \right].$$

Здесь константа интегрирования  $\xi_0$  представляет значение  $\xi$  в момент времени  $t = 0$ . Итак, решение задачи в общем виде есть

$$x = \frac{1}{\omega_0} \operatorname{Re} \left( \exp(i\omega_0 t) \left[ \int \frac{f(t)}{m} \exp(-i\omega_0 t) dt + \xi_0 \right] \right).$$

Наиболее интересны случаи, когда вынуждающая сила изменяется по периодическому закону. Пусть, например,

$$f(t) = f_0 \cos(\gamma t + \beta).$$

Как известно, общее решение неоднородного уравнения складывается из общего решения однородного уравнения  $x_0$  и частного решения неоднородного уравнения  $x = x_0 + x_1$ . Общим решением однородного уравнения является

$$x_0 = a \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Частное решение неоднородного будем искать в виде  $x_1 = b \cos(\gamma t + \beta)$ , подставив в исходное уравнение, получим

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{f_0}{m(\omega_0^2 - \gamma^2)} \cos(\gamma t + \beta).$$

Итак, под действием периодической вынуждающей силы система совершает движение, которое является наложением двух колебаний - с собственной частотой  $\omega_0$  и с частотой вынуждающей силы  $\gamma$ . Однако решение неприменимо в случае, когда собственная частота совпадает с частотой вынуждающей силы. Для того, чтобы представить, каким будет поведение системы при совпадении частот, перепишем последнюю формулу, переобозначив постоянные так, чтобы

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{f_0}{m(\omega_0^2 - \gamma^2)} [\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega_0 t + \beta)].$$

(Нетрудно убедиться, что эта формула с переобозначенными константами эквивалентна исходной.) Второе слагаемое содержит неопределенность типа  $0/0$ , которую можно устранить по правилу Лопиталья. В результате получим

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{f_0 \cdot t}{2m\omega_0} \sin(\omega_0 t + \beta).$$

Таким образом, при совпадении собственной частоты с частотой вынуждающей силы наступает явление **резонанса - амплитуда колебаний линейно возрастает со временем**. Нетрудно выяснить, какими будут малые колебания вблизи резонанса, когда  $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$ , причем  $\varepsilon \ll \omega_0$ . В этом случае

$$x = A \exp(i\omega_0 t) + B e^{i(\omega_0 + \varepsilon)t} = (A + B e^{i\varepsilon t}) \exp(i\omega_0 t).$$

За период  $2\pi/\omega_0$  величина  $A + B e^{i\varepsilon t}$  меняется мало, поэтому можно говорить, что вблизи резонанса система колеблется с переменной во времени (периодически то растущей, то уменьшающейся) амплитудой  $c = |A + B e^{i\varepsilon t}|$ . Представим  $A = a e^{i\alpha}$ ,  $B = b e^{i\beta}$ , тогда

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\varepsilon t + \beta - \alpha).$$

Поэтому ясно, что

$$|a - b| \leq c \leq a + b.$$

Такие колебания носят название **биений**.

3. **Функции Грина в классической механике.** Аппарат функций Грина используется практически во всех разделах теоретической физики как метод решения неоднородных дифференциальных уравнений.

Применение функций Грина проще всего продемонстрировать на примере задачи о вынужденных (под действием произвольной внешней силы  $f(t)$ ) колебаниях линейного гармонического осциллятора:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m} \equiv F(t). \quad (34)$$

Решение уравнения (34) будем искать в виде интеграла Фурье, представив в таком же виде и внешнюю силу:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{x}(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega, \quad F(t) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{F}(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega. \quad (35)$$

Обратив интегралы, получаем

$$\tilde{x}(\omega) = \int x(t) \exp(i\omega t) dt, \quad \tilde{F}(\omega) = \int F(t) \exp(i\omega t) dt. \quad (36)$$

Перепишем (34) для фурье-образов  $\tilde{x}(\omega)$  и  $\tilde{F}(\omega)$ :

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \tilde{x}(\omega) = \tilde{F}(\omega). \quad (37)$$

Казалось бы, алгебраическое уравнение (37) дает возможность получить

$$\tilde{x} = \frac{\tilde{F}}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

однако это соотношение не содержит никакой информации о случае  $\omega = \pm\omega_0$ , т.к. деление на ноль запрещено. Избежать этой неприятности удастся, используя часто употребляемый формальный прием добавления нуля. Добавим к  $\tilde{F}(\omega)$  слагаемое  $C \cdot (\omega_0^2 - \omega^2) \cdot \delta(\omega_0^2 - \omega^2)$ , которое обращается в нуль как при  $\omega = \pm\omega_0$ , так и при  $\omega \neq \pm\omega_0$ . Тогда

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{\tilde{F}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2} + C \cdot \delta(\omega_0^2 - \omega^2). \quad (38)$$

Добавка  $C \cdot \delta(\omega_0^2 - \omega^2)$  даст в  $x(t)$  вклад с частотами  $\omega = \pm\omega_0$ , т.е. с частотами колебаний свободного осциллятора. Поэтому (38) является общим решением задачи (34) – к частному решению неоднородного уравнения (первое слагаемое) добавлено общее решение однородного.

Ограничимся поиском частного решения. С этой целью подставим (38) с учетом (36) в (35), что дает

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int F(t) dt \int \frac{\exp(-i\omega(t-t')) d\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \int F(t') G(t, t') dt'. \quad (39)$$

Здесь

$$G(t, t') = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\exp(-i\omega(t-t')) d\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (40)$$

– функция Грина уравнения (34). Нетрудно убедиться, что  $G(t, t')$  удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2\right) G(t, t') = \delta(t - t'), \quad (41)$$

которое похоже на (34), но, в отличие от (34), внешний источник (правая часть уравнения) имеет  $\delta$ -образный вид. Теперь легко представить смысл решения (39) уравнения (34) – это суперпозиция решений того же уравнения, но с внешними силами в виде коротких импульсов, действующих в разные моменты времени.

Ввиду наличия полюсов  $\omega = \pm\omega_0$  на вещественной оси в комплексной плоскости  $\omega$ , интеграл (40) в обычном понимании не существует. Однако если исключить полюса из области интегрирования, а затем предельным переходом избавиться от такого исключения, то интеграл (40) приобретает смысл. Возможной операцией такого типа является деформация контура интегрирования, выводящая контур в комплексную плоскость с последующим предельным возвратом на вещественную ось. Для ответа на вопрос, как деформировать контур, т.е. как обходить полюса, выберем два контура с таким обходом полюсов, чтобы можно было интегрировать по замкнутому контуру, охватывающему полюса, например, так, как показано на рис. 13.

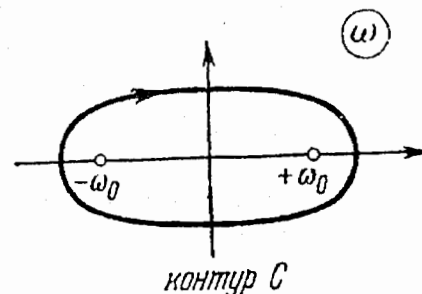


Рис. 13

Такой обход полюсов отвечает разности интегралов по контуру от  $-\infty$  до  $+\infty$  над вещественной осью и по контуру от  $+\infty$  до  $-\infty$  под ней. Для изображенного на рисунке контура  $C$  в соответствии с теоремой о вычетах имеем

$$\frac{1}{2\pi} \oint \frac{\exp(-i\omega\tau)}{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)} d\omega = i \left( \frac{\exp(-i\omega_0\tau)}{2\omega_0} + \frac{\exp(i\omega_0\tau)}{-2\omega_0} \right) = \frac{\sin\omega_0\tau}{\omega_0} \equiv D(\tau),$$

где  $\tau = t - t'$ . Таким образом, интеграл по замкнутому контуру  $C$ , который представляет разницу в выборе правила обхода полюсов, приводит к решению однородного уравнения поставленной задачи. Поскольку нас интересует лишь частное решение неоднородного уравнения, для наших целей принципиально безразлично, как обходить полюса. Практически выбор конкретного обхода может дать определенные преимущества, в частности,

избавить от необходимости добавлять в общее решение решение однородной задачи и т.п. Остановимся далее на нескольких физически интересных возможностях в выборе контура интегрирования.

(а) **Запаздывающая функция Грина**

Запаздывающая функция Грина возникает в случае, если контур интегрирования провести над вещественной осью и обойти оба полюса сверху.

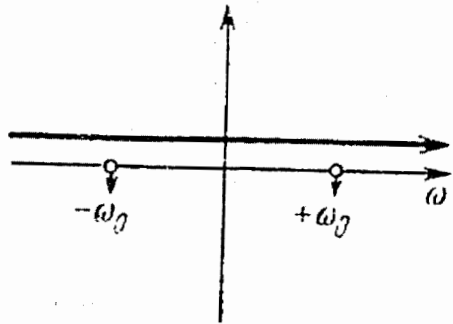


Рис. 14

Экспонента подынтегрального выражения (40) содержит " - iωτ", поэтому при τ > 0 замкнем контур снизу. Тогда оба полюса окажутся внутри контура и результат интегрирования оказывается таким же, как и в рассмотренном выше случае. (Заметим, что интеграл по замкнутому таким образом контуру совпадает с исходным (40), пределы интегрирования которого заключены в интервале -∞ < ω < +∞ ввиду того, что вклад в интеграл по нижней половине большого круга, в силу леммы Жордана, равен 0.) При τ < 0 замкнем контур сверху, тогда, ввиду того что полюса оказываются вне контура, интегрирование дает 0. Итак,

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{\exp(-i\omega\tau) d\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = D^{ret}(\tau) \equiv \vartheta(\tau) \frac{\sin\omega_0\tau}{\omega_0},$$

получившаяся при таком выборе контура функция Грина  $D^{ret}(\tau)$  называется запаздывающей (retarded) функцией Грина, а  $\vartheta(\tau)$  является ступенчатой функцией Хевисайда, которая равна 1 при τ > 0 или 0 при τ < 0. Физический смысл  $D^{ret}(\tau)$  прозрачен. Действительно, заметим, что в выражении

$$x^{ret}(t) = \int F(\dot{t}) D^{ret}(t - \dot{t}) d\dot{t}$$

интегрирование распространяется на интервал  $-\infty < \dot{t} < t$ , поэтому запаздывающая функция Грина в момент t выражает влияние внешней силы, действовавшей в предыдущие моменты  $\dot{t} < t$ . Понятно, что  $D^{ret}$  естественно пользоваться, если начальные условия заданы в прошлом.

Вместо деформации контура смещением его вверх, можно было оставить его на вещественной оси, но сместить полюса вниз. Это достигается бесконечно малой мнимой добавкой  $-i\epsilon$ , ( $\epsilon > 0$ ) к полюсам  $\pm\omega_0$ , а после интегрирования устремим  $\epsilon$  к 0. Учитывая

$$\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \Rightarrow -\frac{1}{[\omega - (\omega_0 - i\epsilon)][\omega - (-\omega_0 - i\epsilon)]} = -\frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2 + 2i\epsilon\omega)}$$

для фурье-образа запаздывающей функции Грина, получаем

$$\dot{D}^{ret}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\epsilon\omega}.$$

Последнее выражение включает также и указание о способе обхода особенностей, а необходимость выполнить предельное устранение добавки ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) после интегрирования будем держать в уме.

(b) **Опережающая функция Грина**

Проведем путь интегрирования под вещественной осью.

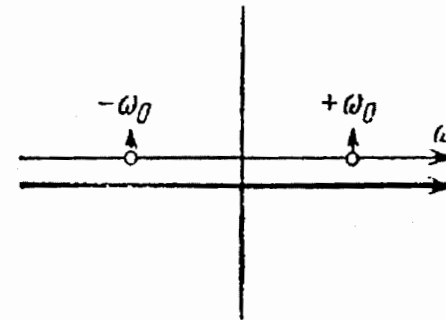


Рис. 15

Аналогично случаю предыдущего пункта имеем

$$D^{adv}(\tau) = -\vartheta(-\tau) \frac{\sin\omega_0\tau}{\omega_0}$$

- опережающую (advanced) функцию Грина, которая отлична от нуля только для отрицательных аргументов, т.е. приводит к частному решению, зависящему в некоторый момент времени от действия силы в "последующие моменты". Поэтому опережающая функция Грина

находит применение в таких задачах, в которых конечные условия предписываются в момент  $t \rightarrow +\infty$ . Как и ранее,

$$\dot{D}^{adv}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\epsilon\omega}.$$

(с) **D – функция Паули**

По определению D – функция Паули

$$D(\tau) = \frac{\sin\omega_0\tau}{\omega_0} = D^{ret}(\tau) - D^{adv}(\tau).$$

Линейность преобразования Фурье позволяет заключить, что аналогичное соотношение должно существовать и между фурье-образами:

$$\tilde{D}(\omega) = \tilde{D}^{ret}(\omega) - \tilde{D}^{adv}(\omega) = 2\pi i \cdot \text{sgn}\omega \cdot \delta(\omega^2 - \omega_0^2).$$

При выводе последнего соотношения использовано определение знаковой функции

$$\text{sgn}\omega = \frac{\omega}{|\omega|}$$

и одно полезное символическое представление  $\delta$ -функции

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}.$$

(d) **Задача Коши**

Пусть начальные условия заданы в некоторый момент  $t = t_0$ . В этом случае удобной функцией Грина будет следующая:

$$G(t, \dot{t} | t_0) = [\vartheta(t - \dot{t}) - \vartheta(t_0 - \dot{t})]D(t - \dot{t}),$$

производная которой

$$\dot{G}(t, \dot{t} | t_0) = [\vartheta(t - \dot{t}) - \vartheta(t_0 - \dot{t})]\cos\omega_0(t - \dot{t}) + \delta(t - \dot{t})D(t - \dot{t}).$$

(Напомним, что  $\delta(\tau) = d\vartheta(\tau)/d\tau$ .)

Ясно, что при  $t = t_0$  как  $G(t, \dot{t} | t_0)$ , так и  $\dot{G}(t, \dot{t} | t_0)$  обращаются в ноль. Тогда общее решение уравнения (1) запишется в виде

$$x(t) = x_0(t) + \int G(t, \dot{t} | t_0)F(\dot{t})d\dot{t}, \quad (42)$$

где  $x_0(t)$  – решение однородного уравнения. С учетом вышесказанного при  $t = t_0$  из соотношения (42) следует

$$t = t_0, \quad x(t) = x_0(t), \quad \dot{x}(t) = \dot{x}_0(t).$$

Допустим, поставлена задача Коши, т.е. при

$$t = t_0 \quad x(t) |_{t=t_0} = f_1, \quad \dot{x}(t) |_{t=t_0} = f_2.$$

В момент  $t = t_0$  функция Паули и ее производные обладают следующими свойствами:

$$D(t - t_0) |_{t=t_0} = 0, \quad \dot{D}(t - t_0) |_{t=t_0} = 1, \quad \ddot{D}(t - t_0) |_{t=t_0} = 0.$$

Поэтому

$$x_0(t) = f_1 \cdot \dot{D}(t - t_0) + f_2 \cdot D(t - t_0),$$

и общее решение задачи Коши уравнения (1) запишется в виде

$$x(t) = f_1 \cdot \dot{D}(t - t_0) + f_2 \cdot D(t - t_0) + \int G(t, \dot{t} | t_0)F(\dot{t})d\dot{t}.$$

4. **Колебания систем со многими степенями свободы.** Рассмотрим механическую систему с  $s$  степенями свободы, которая совершает малые колебания вокруг положения устойчивого равновесия ( $q_{01}, \dots, q_{0s}$ ). Уравнения движения такой системы имеют вид

$$\sum_{k=1}^s (m_{ik}\ddot{x}_k + k_{ik}x_k) = 0, \quad x_k = q_k - q_{0k}, \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (43)$$

и представляют собой систему  $s$  линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В соответствии с общими правилами решение этой системы будем искать в виде

$$x_k = C a_k \cdot e^{-i\omega t}, \quad (44)$$

где  $C a_k$  – комплексная амплитуда колебаний, соответствующая координате  $x_k$ , коэффициент  $C$  – некий масштабный множитель, одинаковый для всех координат. Разумеется, истинному движению соответствует реальная часть выражения (44). Подставив (44) в (43), получим систему линейных однородных алгебраических уравнений, которым удовлетворяет  $a_k$ :

$$\sum_k (k_{ik} - \omega^2 m_{ik}) a_k = 0. \quad (45)$$

Эта система имеет нетривиальное решение, лишь если определитель уравнений (12) обращается в ноль:

$$\det(k_{ik} - \omega^2 m_{ik}) = 0, \quad (46)$$

(46) – это алгебраическое уравнение  $s$ -й степени относительно  $\omega^2$  (его называют характеристическим), корни которого  $\omega_l^2$  ( $l = 1, \dots, s$ ) определяют те частоты, при которых (44) может служить решением уравнений (43).

Амплитуды же  $a_k$  определяются как решения уравнений (45) для каждого из найденных значений  $\omega_l^2$  (точнее, поскольку (45) – однородные уравнения, все  $a_k$  могут быть выражены через одно из них).

Покажем, что корни характеристического уравнения вещественны и положительны. Умножим для этого (45) на  $a_i^*$  и просуммируем по  $i$ :

$$\sum_{i,k} (k_{ik} - \omega^2 m_{ik}) a_i^* a_k = 0,$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{\sum_{i,k} (k_{ik} a_i^* a_k)}{\sum_{i,k} (m_{ik} a_i^* a_k)}.$$

Легко видеть, что квадратичные формы числителя и знаменателя вещественны ввиду того, что по определению вещественны и симметричны  $k_{ik}$  и  $m_{ik}$ . Действительно, представим

$$a_i = \alpha_i + i\beta_i,$$

тогда

$$\sum_{i,k} k_{ik} a_i^* a_k = \sum_{i,k} k_{ik} [(\alpha_i \alpha_k + \beta_i \beta_k) + i(\alpha_i \beta_k - \alpha_k \beta_i)].$$

В силу симметрии  $k_{ik} = k_{ki}$  сумма от последней скобки обращается в ноль, т.к. при обоюдной замене  $i$  на  $k$  она меняет знак. Таким образом,

$$\sum_{i,k} k_{ik} a_i^* a_k = \sum_{i,k} k_{ik} (\alpha_i \alpha_k + \beta_i \beta_k),$$

$$\sum_{i,k} m_{ik} a_i^* a_k = \sum_{i,k} m_{ik} (\alpha_i \alpha_k + \beta_i \beta_k).$$

Иначе говоря, квадратичные формы числителя и знаменателя выражения  $\omega^2$  вещественны и положительны, т.е. вещественны и положительны корни характеристического уравнения  $\omega_l^2$ . Удобно ввести обозначение

$$\lambda_l = \omega_l^2; \quad \lambda_l > 0; \quad \lambda_l = \lambda_l^*. \quad (47)$$

Кстати, вещественность  $\omega^2$  очевидна и из физических соображений – наличие у  $\omega$  мнимой части привело бы в (44) к наличию множителя, который убывал или возрастал бы экспоненциально, чего не допускает закон сохранения энергии рассматриваемой системы.

Амплитуды  $a_k$  можно рассматривать как составляющие  $s$ -мерного вектора. Для того чтобы подчеркнуть его принадлежность  $l$ -й собственной частоте  $\omega_l^2$ , добавим еще один индекс, тогда  $a_{kl}$  обозначает  $k$ -ю компоненту  $l$ -го вектора ( $l$  – номер вектора, означающий его принадлежность  $l$ -й частоте). Тогда из (45) с учетом (47) получим

$$\lambda_k = \frac{\sum_l (k_{il} a_{lk})}{\sum_l (m_{il} a_{lk})}. \quad (48)$$

Как было подчеркнуто, ввиду однородности исходного уравнения (45) выбор одной из амплитуд произволен, и если выбрать ее вещественной, то, как это следует из (48), вещественность всех остальных обеспечивается вещественностью  $\lambda_k$ ,  $k_{il}$  и  $m_{il}$ . (Заметим, что амплитуды  $C a_k$  из (44) вообще должны быть комплексными, что при вещественных  $a_k$  достигается за счет масштабного множителя  $C$ .)

Введем теперь  $s \times s$  матрицы  $T, V, A$  с элементами  $m_{ik}, k_{ik}, a_{ik}$  соответственно и перепишем (45) в виде матричного уравнения

$$V \cdot A = \lambda T \cdot A, \quad (49)$$

которое известно как уравнение, определяющее собственные векторы ( $A$ ) и собственные значения ( $\lambda T$ ) матрицы  $V$ . Перепишем это уравнение в компонентах для  $\lambda = \lambda_k$  и  $\lambda = \lambda_n$ :

$$\sum_l k_{il} a_{lk} = \lambda_k \sum_l m_{il} a_{lk}, \quad \sum_i k_{li} a_{in} = \lambda_n \sum_i m_{li} a_{in}. \quad (50)$$

Помножим первое из этих соотношений на  $a_{in}$ , а второе на  $a_{lk}$  и просуммируем по  $i$  и  $l$  соответственно, затем, вычитая из первого результата второй, получим

$$(\lambda_k - \lambda_n) \sum_{i,l} m_{il} a_{lk} a_{in} = 0. \quad (51)$$

Будем считать, что все корни характеристического уравнения различны, т.е.

$$\sum_{i,l} m_{il} a_{lk} a_{in} = 0, \quad k \neq n,$$

и устраним вызванную однородностью уравнений (45) неоднозначность в определении  $a_{ik}$ , нормируя амплитуды так, чтобы

$$\sum_{i,l} m_{il} a_{lk} a_{in} = 1.$$

Объединяя два последних равенства, получим

$$\sum_{i,l} m_{il} a_{lk} a_{in} = \delta_{kn}$$

или в матричном виде

$$\tilde{A} T A = I, \quad (52)$$

где тильда означает транспонирование, а  $I$  – единичная матрица.

**Примечание.** Преобразование

$$\tilde{C} = \tilde{B} C B$$

называют конгруэнтным. Если же преобразующая матрица ортогональна  $\tilde{B} = B^{-1}$ , то конгруэнтное преобразование совпадает с преобразованием подобия.

Введем далее диагональную матрицу  $\Lambda$  с элементами  $\Lambda_{ik} = \lambda_k \delta_{ik}$  в матричное уравнение (49), помножим полученное слева на  $\tilde{A}$  и учтем (52), тогда получим

$$\tilde{A}VA = \Lambda. \quad (53)$$

Таким образом,  $A$  - преобразующая матрица конгруэнтного преобразования является матрицей, которая одновременно диагонализует кинетическую энергию  $T$  (см.(52)) и потенциальную энергию  $V$  (см.(53)), другими словами, матрица  $A$  осуществляет такое линейное преобразование координат, в результате которого как  $T$ , так и  $V$  диагонализуются.

Запишем далее общее решение основных уравнений (43) в виде

$$x_i = \sum_k C_k a_{ik} \cdot e^{-i\omega_k t}, \quad (54)$$

где  $\omega_k$  - корни характеристического уравнения (46), которые называют собственными частотами колебаний системы,  $C_k$  - комплексный масштабный коэффициент, соответствующий данной собственной частоте. Покажем, что  $C_k$  можно вычислить непосредственно по начальным данным  $x_i(0)$  и  $\dot{x}_i(0)$ . Действительно, при  $t = 0$

$$x_i(0) = \sum_k (Re C_k) a_{ik}, \quad \dot{x}_i(0) = \sum_k (Im C_k) a_{ik} \omega_k.$$

Помножив первое из этих равенств на  $m_{il} a_{ln}$  и суммируя по  $i$  и  $l$ , получим

$$Re C_n = \sum_{i,l} m_{il} x_i(0) a_{ln}, \quad (55)$$

и точно так же

$$Im C_n = -\frac{1}{\omega_n} \sum_{i,l} m_{il} \dot{x}_i(0) a_{ln}. \quad (56)$$

Введем теперь новые координаты  $\xi_i$  согласно

$$x_i = \sum_l a_{il} \xi_l, \quad x = A\xi. \quad (57)$$

Перепишем выражения для кинетической

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k = \frac{1}{2} \dot{x} T \dot{x}$$

и потенциальной

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,k} k_{ik} x_i x_k = \frac{1}{2} \tilde{x} V x$$

энергий в новых координатах, учитывая (52) и (53):

$$K = \frac{1}{2} \dot{\xi} \tilde{A} T A \dot{\xi} = \frac{1}{2} \dot{\xi} \dot{\xi} = \frac{1}{2} \sum_k \dot{\xi}_k^2, \quad U = \frac{1}{2} \tilde{\xi} \tilde{A} V A \xi = \frac{1}{2} \tilde{\xi} \Lambda \xi = \frac{1}{2} \sum_k \omega_k^2 \xi_k^2.$$

Тогда лагранжиан системы переписывается в виде

$$L = \sum_k (\dot{\xi}_k^2 - \omega_k^2 \xi_k^2), \quad (58)$$

а уравнения движения и их решения в виде

$$\ddot{\xi}_k + \omega_k^2 \xi_k = 0, \quad \xi_k = C_k e^{-i\omega_k t}, \quad (59)$$

что позволяет записать (54) в виде (57):  $x_i = \sum_k \xi_k a_{ik}$ .

Каждая из новых координат  $\xi_k$  является строго периодической функцией с частотой, равной одной из собственных частот. Обычно координаты  $\xi_k$  называют **нормальными** или **главными координатами** рассматриваемой многомерной системы, соответствующие каждой из них колебания называют **нормальными** или **главными колебаниями**. Полное движение системы получается как результат суперпозиции главных колебаний с учетом их амплитуд и фаз, определяемых коэффициентами  $C_k$ . Отметим, что полное колебание системы не содержит частот, кратных основным, по той простой причине, что рассматриваемые многомерные колебания считались малыми, поэтому и оказалось возможным представить потенциальную энергию системы в виде квадратичной формы, что характерно для гармонического движения. Как следствие этого мы и получили, после введения нормальных координат, лагранжиан системы в виде суммы лагранжианов гармонических осцилляторов (см.(58)). Таким образом, малые колебания многомерной системы можно рассматривать как результат возбуждения разных гармонических осцилляторов, колеблющихся с разными фазами и амплитудами.

### Примеры

- (а) Определить колебания системы двух линейных гармонических осцилляторов, имеющих одинаковую частоту  $\omega_0$  и взаимодействующих по закону  $-\alpha xy$  ( $x, y$  - оси декартовой системы координат, по которым происходят колебания).

Лагранжиан такой системы имеет вид

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\omega_0^2}{2} (x^2 + y^2) + \alpha xy,$$

а уравнения движения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha y; \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = \alpha x.$$

В соответствии с (11) будем искать решение этих уравнений в виде

$$x = Ca_x e^{-i\omega t}, \quad y = Ca_y e^{-i\omega t},$$

что приводит к следующим алгебраическим уравнениям:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)a_x - \alpha a_y = 0,$$

$$\alpha a_x - (\omega_0^2 - \omega^2)a_y = 0.$$

Приравнявая нулю детерминант этой системы, получим характеристическое уравнение

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \alpha^2$$

с решениями

$$\lambda_1 = \omega_1^2 = \omega_0^2 - \alpha \quad (\lambda > 0 \rightarrow \alpha < \omega_0^2), \quad \lambda_2 = \omega_2^2 = \omega_0^2 + \alpha.$$

Найдем элементы матрицы  $A = (a_{ik}), i = x, y, k = 1 (\omega = \omega_1), k = 2 (\omega = \omega_2)$ . Подставив  $\omega_1$  в исходные алгебраические уравнения, получим  $a_{x1} = a_{y1}$ , а для  $\omega_2$  имеем  $a_{x2} = -a_{y2}$ . Используем произвол в определении  $a_{ik}$  и положим  $a_{x1} = a, a_{y2} = b$ , тогда

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ a & b \end{pmatrix}.$$

По виду лагранжиана можно заключить, что  $T$  является единичной матрицей, тогда, используя условие ортонормированности (52), получим  $a = b = 1/\sqrt{2}$ , т.е.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Общее решение задачи будет иметь вид

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 - \xi_2), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 + \xi_2),$$

где

$$\xi_1 = C_1 e^{-it\sqrt{\omega_0^2 - \alpha}}, \quad \xi_2 = C_2 e^{-it\sqrt{\omega_0^2 + \alpha}}.$$

(b) Найти нормальные колебания и собственные частоты для системы с

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(x^2 - xy + y^2).$$

Сравнивая последнее выражение с лагранжевой функцией наиболее общего вида для многомерных систем

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (m_{i,k} \dot{x}_i \dot{x}_k - k_{i,k} x_i x_k), \quad x_i = (x, y), \quad i, k = x, y,$$

можно без труда выписать матрицы  $T = (m_{ik})$  и  $V = (k_{ik})$ :

$$T = \begin{pmatrix} m_{xx} & m_{xy} \\ m_{yx} & m_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение уравнений движения, соответствующих заданному лагранжиану,

$$\ddot{x} + \frac{1}{2}\ddot{y} + x - \frac{1}{2}y = 0, \quad \frac{1}{2}\ddot{x} + \ddot{y} - \frac{1}{2}x + y = 0$$

будем искать в виде

$$x_i = Ca_i e^{-i\omega t},$$

что после подстановки в уравнения дает

$$a_x(\omega^2 - 1) + \frac{1}{2}a_y(\omega^2 + 1) = 0, \quad \frac{1}{2}a_x(\omega^2 + 1) + a_y(\omega^2 - 1) = 0.$$

Решениями характеристического уравнения

$$(\omega^2 - 1)^2 - \frac{1}{4}(\omega^2 + 1)^2 \equiv \frac{1}{4}(1 - 3\omega^2)(3 - \omega^2) = 0$$

будут

$$\lambda_1 = \omega_1^2 = 3, \quad \lambda_2 = \omega_2^2 = 1/3,$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{x1} & a_{x2} \\ a_{y1} & a_{y2} \end{pmatrix}$$

можно построить двояко: или решая матричное уравнение  $\dot{A}VA = \Lambda$ , или подставляя корни характеристического уравнения в систему алгебраических. В данном примере второй путь проще, и для  $\lambda_1 = \omega_1^2 = 3$  имеем  $a_{x1} = -a_{y1}$ , а для  $\lambda_2 = \omega_2^2 = 1/3$  получим  $a_{x2} = a_{y2}$ . (Напомним, что индексы 1 и 2 указывают на принадлежность собственным значениям  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .) Используя произвол в определении  $a_{ik}$ , выберем  $a_{x1} = a, a_{y2} = b$  и, подставив полученную матрицу  $A$  в условие ортонормированности  $\dot{A}TA = I$ , получим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}/3 \\ -1 & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}.$$



Теперь можно выписать общее решение исходных уравнений

$$x_i = \sum_k a_{ik} \xi_k,$$

где  $\xi_k$  - нормальные колебания:

$$\xi_1 = C_1 e^{-it\sqrt{3}}, \quad \xi_2 = C_2 e^{-it\sqrt{3}/3}.$$

Окончательно

$$x = A\xi, \quad x = \xi_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\xi_2, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3}\xi_2 - \xi_1.$$

Определим константы  $C_1$  и  $C_2$ , используя формулы (55) и (56) и считая, что начальные условия заданы в общем виде  $x_i(0)$  и  $\dot{x}_i(0)$ .

$$ReC_n = m_{11}x_1a_{1n} + m_{12}x_1a_{2n} + m_{21}x_2a_{1n} + m_{22}x_2a_{2n},$$

$$ReC_1 = \frac{1}{2}(x_1(0) - x_2(0)) \equiv X^-(0),$$

$$ReC_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1(0) + x_2(0)) \equiv \sqrt{3}X^+(0).$$

Точно так же

$$ImC_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3 \cdot 2}(\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)) \equiv -\frac{\sqrt{3}}{3}\dot{X}^-(0),$$

$$ImC_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}(\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)) \equiv -\sqrt{3}\dot{X}^+(0).$$

Если представить  $C_n$  в виде

$$C_1 = b_1 e^{i\delta_1}, \quad C_2 = b_2 e^{i\delta_2},$$

то нетрудно получить

$$b_1 = \sqrt{(X^-(0))^2 + \frac{1}{3}(\dot{X}^-(0))^2}, \quad b_2 = \sqrt{3}\sqrt{(X^+(0))^2 + (\dot{X}^+(0))^2},$$

$$tg\delta_1 = -\frac{\sqrt{3}\dot{X}^-(0)}{3X^-(0)}, \quad tg\delta_2 = -\frac{\dot{X}^+(0)}{X^+(0)}.$$

Поэтому

$$\xi_1 = b_1 \cos(\sqrt{3}t + \delta_1), \quad \xi_2 = b_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}t + \delta_2\right).$$

5. **Затухающие колебания. Диссипативная функция.** Выше, рассматривая малые колебания, мы подразумевали, что они происходят в пустоте, или предполагали, что влияние среды на движение пренебрежимо мало. При снятии этих ограничений необходимо учесть, что при колебаниях в среде возникает сопротивление, которое замедляет движение, а энергия колеблющегося тела в конце концов превращается в тепло или, как говорят, диссипируется. Движение с диссипацией энергии уже не является чисто механическим, его описание требует рассмотрения движения и свойств самой среды, внутреннего теплового состояния как среды, так и тела. Другими словами, задача о движении тела в среде уже не является задачей механики. Однако для определенной категории явлений движение в среде можно приближенно описать на языке классической механики путем введения в уравнения дополнительных членов. Сюда относятся колебания, периоды которых много больше времени, характерного для завершения диссипативных процессов в однородной среде. В этом случае влияние среды на колебания тела можно учесть введением **силы трения, линейно зависящей от скорости.**

Для многомерных систем обобщенная сила трения, соответствующая координате  $x_i$ , будет линейной функцией скорости:

$$f_i^{TP} = -\sum_k \alpha_{ik} \dot{x}_k.$$

Коэффициенты  $\alpha_{ik}$  определяются исключительно свойствами среды, а используя средства статистической физики, можно показать их симметричность по индексам. Обобщенные силы трения весьма органично вписываются в уравнения Лагранжа, если ввести так называемую **диссипативную функцию**

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \alpha_{i,k} \dot{x}_i \dot{x}_k$$

и определить обобщенные силы в виде производных:

$$f_i^{TP} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}.$$

Тогда эти силы просто добавляются в правую часть уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}.$$

Помимо этой роли, диссипативная функция имеет существенный физический смысл - ею определяется интенсивность диссипации энергии в системе. В этом легко убедиться, подсчитав производную по времени от энергии системы:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L \right) = \sum_i \dot{x}_i \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) = -\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}.$$

Поскольку диссипативная функция – квадратичная функция скоростей, согласно теореме Эйлера об однородных функциях, получаем

$$\frac{dE}{dt} = -2F,$$

– скорость изменения энергии системы во времени дается удвоенной диссипативной функцией. Это соотношение показывает, что диссипативная функция – положительно определенная квадратичная форма, т.к. диссипативные процессы всегда приводят к уменьшению энергии.

Теперь, добавив обобщенные силы трения, мы без труда выпишем уравнения малых колебаний при наличии трения в виде

$$\sum_k (m_{ik}\ddot{x}_k + \alpha_{ik}\dot{x}_k + k_{ik}x_k) = 0.$$

В одномерном случае

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$$

или после деления на  $m$  получим

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \frac{\alpha}{m} = 2\lambda, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2.$$

– линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Согласно принятым правилам решение таких уравнений ищут подстановкой  $x = e^{rt}$ . Тогда для  $r$  имеем характеристическое уравнение

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$$

и общим решением дифференциального уравнения будет

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad \text{где } r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}.$$

По причине, которая выяснится в ходе дальнейшего изложения,  $\lambda$  называют коэффициентом затухания и, в зависимости от его значения, будем различать три случая:

(а)  $\lambda > \omega_0$ , тогда оба значения  $r$  вещественны и отрицательны:

$$x = C_1 \exp[-(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t] + C_2 \exp[-(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t].$$

В этом случае, когда трение достаточно велико,  $x$  убывает, асимптотически приближаясь к положению равновесия. Такой тип движения называют **апериодическим затуханием**.

(b)  $\lambda = \omega_0$ . В этом случае характеристическое уравнение имеет только один корень  $r = -\lambda$ , а решение дифференциального уравнения имеет вид

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-\lambda t}.$$

И вновь мы пришли к апериодическому затуханию (не имеет колебательного характера).

(c)  $\lambda < \omega_0$ . В этом случае корни характеристического уравнения комплексно сопряжены, а решение дифференциального уравнения записывается в виде

$$x = \operatorname{Re}\{A \exp(-\lambda t + it\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2})\}.$$

Выделив действительную часть, получим

$$x = a e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}.$$

Таким образом, в этом случае движение можно рассматривать как гармонические колебания с экспоненциально убывающей амплитудой  $a e^{-\lambda t}$ , иначе говоря, как **затухающие колебания**, причем частота колебаний меньше частоты свободных колебаний в отсутствие трения, а скорость убывания амплитуды определяется коэффициентом затухания  $\lambda$ .

6. **Вынужденные колебания при наличии трения.** Допустим, что на механическую систему, которая совершает затухающие колебания (колеблется в среде с трением), действует нестационарная, т.е. зависящая от времени, сила. Предположим, что зависимость этой внешней силы от времени будет следующей:

$$f = f_0 e^{\alpha t} \cos \gamma t.$$

Уравнения движения задачи в этом случае принимают вид

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m} e^{\alpha t} \cos \gamma t$$

или в удобной для расчетов комплексной записи

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m} e^{\alpha t + i\gamma t}.$$

Решение этого уравнения  $x = x_0 + x_1$  есть сумма общего решения однородного уравнения, которое, как известно, имеет характер колебаний только при  $\lambda < \omega_0$  и имеет вид  $x_0 = a e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \beta)$ , где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ , и какого-либо частного решения неоднородного уравнения  $x_1$ . Будем искать

частное решение неоднородного уравнения в виде  $x_1 = Be^{\alpha t + i\gamma t}$ . Подставив в исходное уравнение, получим

$$B = \frac{f_0}{m[\omega_0^2 - \gamma^2 + \alpha^2 + 2\alpha\lambda + 2i\gamma(\lambda + \alpha)]}$$

Поскольку  $B$  - комплексная величина, представим ее в виде  $B = be^{i\delta}$ , определим  $b$  и  $\delta$ . Для этого необходимо представить  $B$  в обычном виде  $u + iv$ , помножив числитель и знаменатель  $B$  на величину, комплексно сопряженную знаменателю, тогда, как известно,  $b = \sqrt{u^2 + v^2}$ , а  $tg\delta = v/u$ . Выделим затем вещественную часть  $x_1$  и в результате получим

$$x_1 = be^{\alpha t} \cos(\gamma t + \delta),$$

где

$$b = \frac{f_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2 + \alpha^2 + 2\alpha\lambda)^2 + 4\gamma^2(\lambda + \alpha)^2}},$$

$$tg\delta = -\frac{2\gamma(\lambda + \alpha)}{\omega_0^2 - \gamma^2 + \alpha^2 + 2\alpha\lambda}.$$

Как уже было сказано, общее решение задачи есть сумма  $x = x_0 + x_1$ , однако общее решение однородного уравнения  $x_0$  затухает со временем, поэтому через достаточно большой промежуток времени решением задачи будет

$$x = x_1 = be^{\alpha t} \cos(\gamma t + \delta).$$

Амплитуда вынужденных колебаний при наличии трения при совпадении частоты вынуждающей силы  $\gamma$  с частотой собственных колебаний  $\omega_0$  растет, но не обращается в бесконечность, как это было при резонансе в отсутствие трения. При заданной амплитуде силы  $f_0$  амплитуда колебаний становится максимальной при частоте  $\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$  (для упрощения расчетов здесь и далее примем  $\alpha = 0$ ).

Рассмотрим область вблизи резонанса  $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$  ( $\varepsilon \ll \omega_0$ ), будем считать также  $\lambda \ll \omega_0$ , тогда

$$\gamma^2 - \omega_0^2 = (\gamma + \omega_0)(\gamma - \omega_0) \approx 2\omega_0\varepsilon, \quad 2i\gamma\lambda = 2i\lambda\omega_0,$$

поэтому

$$B = -\frac{f_0}{2m\omega_0(\varepsilon - i\lambda)}, \quad b = \frac{f_0}{2m\omega_0\sqrt{\varepsilon^2 + \lambda^2}}, \quad tg\delta = \frac{\lambda}{\varepsilon}.$$

При установившемся движении

$$x = b\cos(\gamma t + \delta)$$

энергия системы остается неизменной. В то же время система непрерывно поглощает энергию от источника вынуждающей силы, которая диссипируется благодаря трению. Если обозначить посредством  $I(\gamma)$  количество энергии, поглощаемой в среднем в единицу времени, то, как было показано в предыдущем пункте,

$$I(\gamma) = 2\bar{F},$$

где  $\bar{F}$  - среднее за период значение диссипативной функции. В одномерном случае  $F = \alpha\dot{x}^2/2 = \lambda m\dot{x}^2$  или  $F = \lambda mb^2\gamma^2 \sin^2(\gamma t + \delta)$ , тогда, имея в виду, что среднее от квадрата синуса за период есть  $1/2$ , имеем

$$I(\gamma) = \lambda mb^2\gamma^2.$$

Подставив сюда выражение амплитуды колебаний вблизи резонанса, получим

$$I(\varepsilon) = \frac{f_0^2}{4m} \frac{\lambda}{\varepsilon^2 + \lambda^2}.$$

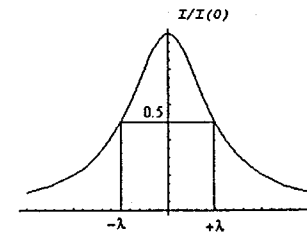


Рис. 16

Такой вид зависимости поглощения от частоты называют **дисперсионным**.  $I(\varepsilon)$  максимально при  $\varepsilon = 0$ :

$$I(0) = \frac{f_0^2}{4m\lambda}.$$

Таким образом, при резонансе поглощение наибольшее, а при уменьшении коэффициента затухания резонансная кривая становится уже и выше. Полушириной резонансной кривой называют значение  $\varepsilon$ , при котором

$$I(\varepsilon) = I(0)/2.$$

Из формулы для  $I(\varepsilon)$  легко заметить, что эта полуширина совпадает с показателем затухания.

7. **Нарушение симметрии при колебаниях в поле симметричного потенциала.** В приближенных к реальным задачам о колебаниях линейного осциллятора потенциальная энергия предполагается зависящей также и от дополнительных параметров, которые называют управляющими. Примером таких колебаний является движение в потенциальном поле:

$$U(x, k) = \frac{kx^2}{2} + \frac{\gamma x^4}{4}, \quad \gamma > 0. \quad (60)$$

Положение равновесия определяется как корень уравнения

$$\frac{dU}{dx} = kx + \gamma x^3 = 0. \quad (61)$$

(а) Пусть  $k > 0$ , тогда (61) имеет единственный корень  $x_0 = 0$ , который соответствует положению устойчивого равновесия  $\frac{d^2U}{dx^2}|_{x_0} > 0$ .

(б) Пусть  $k < 0$ , тогда вместо (61) имеем  $\gamma x^2 = |k|$  с тремя корнями:

$$x_{1,3} = \pm \sqrt{\frac{|k|}{\gamma}}, \quad \frac{d^2U}{dx^2}|_{x_{1,3}} = 2|k| > 0, \quad (62)$$

$$x_2 = 0, \quad \frac{d^2U}{dx^2}|_{x_2} = -|k| < 0. \quad (63)$$

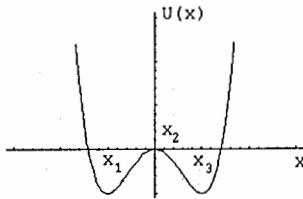


Рис. 17

Во втором случае возможны два симметричных положения устойчивого равновесия  $x_1$  и  $x_3$ . При непрерывном изменении параметра  $k$  от положительных значений к отрицательным положение устойчивого равновесия  $x_0$  превращается в неустойчивое  $x_2$  и эта неустойчивость нарушает симметрию, присущую энергии взаимодействия  $U(x, k) = U(-x, k)$ , поскольку при движении с  $E < 0$  частица может оказаться или в левой, или в правой потенциальных ямах. В окрестности точки  $x_3$  при движении с  $E < 0$

$$x(t) = x_3 + a \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2|k|}{m}}$$

решение не обладает симметрией взаимодействия. Таким образом, при переходе параметра (в данном случае  $k$ ) через критическое значение (здесь

$k = 0$ ) происходит качественная перестройка системы. Это явление называют бифуркацией.

## VIII. ДВИЖЕНИЕ В НЕИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА. ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Как определяется неинерциальная система отсчета (НСО)? Ответ на этот вопрос в названии — любая СО, которая не удовлетворяет определению инерциальной системы отсчета (ИСО), является неинерциальной. Из достаточно большого числа такого рода "отрицающих" определений выделим одно — СО, в которой радиус-вектор изолированной частицы не является линейной функцией времени, назовем неинерциальной. Попробуем выяснить, какими будут уравнения движения частицы в НСО. Понятно, что мы не можем пользоваться лагранжевой функцией

$$L_0 = \frac{mv_0^2}{2} - U,$$

вид которой был установлен с привлечением принципа относительности, т.е. существенно использовалась инерциальность СО. Однако уравнения Лагранжа были получены как следствие принципа наименьшего действия, который сформулирован безотносительно к СО, поэтому лагранжевы уравнения движения имеют один и тот же вид в ИСО, и в НСО:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0.$$

Таким образом, для того чтобы выписать уравнения движения в НСО, необходимо преобразовать функцию Лагранжа. Прделаем это в два этапа. Во-первых, перейдем от ИСО  $K_0$  к НСО  $K'$ , движущейся относительно  $K_0$  поступательно, но со скоростью, которая является произвольной функцией времени. Ясно, что

$$\vec{v}_0 = \dot{\vec{v}} + \vec{V}(t),$$

подставив которое в выражение  $L_0$ , найдем

$$\dot{L} = \frac{m\dot{v}^2}{2} + \frac{mV^2}{2} + m\vec{V}(t)\dot{\vec{v}} - U.$$

Отбросим второе слагаемое, которое есть функция от времени и поэтому может быть представлена как полная производная по времени от другой функции, и, замечая, что  $m\vec{V}(t)\dot{\vec{v}} + m\dot{\vec{W}}(t)\vec{r} = d(m\vec{V}(t)\vec{r})/dt$ , окончательно имеем

$$\dot{L} = \frac{m\dot{v}^2}{2} - m\dot{\vec{W}}(t)\vec{r} - U,$$

где  $\vec{W}(t)$  – ускорение поступательного движения СО  $\dot{K}$  относительно  $K_0$ . Подставив это выражение в уравнение Лагранжа, получим уравнение движения частицы в  $\dot{K}$ :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - m\vec{W}(t).$$

Итак, ускоренное поступательное движение СО равноценно наличию однородного силового поля, причем действующая в этом поле сила есть  $m\vec{W}$ , направление которой противоположно направлению ускорения. Эта эквивалентность однородного силового поля неинерциальности системы отсчета сформулирована Эйнштейном в виде принципа эквивалентности и явилась одним из краеугольных камней построения релятивистской теории тяготения – общей теории относительности.

• **Примечание. Принцип эквивалентности.** Какова реакция физической системы на воздействие внешнего гравитационного поля? Ответ на этот вопрос в общем виде дает принцип эквивалентности (ПЭ). Основной ПЭ служит гипотеза о равенстве инертной и гравитационной масс (Галилей, Гюйгенс, Ньютон), проверенная экспериментально с большой точностью (Бессель, Этвеш, Дикке, Брагинский). Утверждается, что **никакое внешнее статическое и однородное гравитационное поле не может быть обнаружено в свободно падающем лифте, поскольку наблюдатель, пробные тела и сам лифт приобретают в этом поле одинаковые ускорения независимо от их массы** ( $m_{\text{инерц.}} = m_{\text{грав.}}$ ). Это нетрудно продемонстрировать для системы  $N$  частиц, движущихся с нерелятивистскими скоростями под действием силы  $F(\vec{r}_a - \vec{r}_b)$  и внешнего гравитационного поля. Уравнения движения в инерциальной системе отсчета (наблюдатель  $K$ ) имеют вид

$$m_a \frac{d^2 \vec{r}_a}{dt^2} = m_a \vec{g} + \sum_b F(\vec{r}_a - \vec{r}_b).$$

Перейдем в свободно падающую относительно  $K$  неинерциальную систему отсчета (наблюдатель  $\dot{K}$ ) согласно

$$\dot{\vec{r}} = \vec{r} - \frac{\vec{g}t^2}{2}, \quad \dot{t} = t,$$

тогда

$$m_a \frac{d^2 \dot{\vec{r}}_a}{dt^2} = \sum_b F(\dot{\vec{r}}_a - \dot{\vec{r}}_b).$$

Итак, наблюдатель  $K$  и его свободно падающий коллега  $\dot{K}$  не обнаружат никаких различий в законах движения за исключением того, что  $K$  будет фиксировать действие гравитационного поля, а  $\dot{K}$  не будет его фиксировать – **гравитационная сила скомпенсирована неинерциальностью наблюдателя.**

Принцип эквивалентности утверждает, что компенсация (т. е. эквивалентность) гравитационной силы и силы инерции возникает во всех свободно падающих системах отсчета независимо от того, описывается ли ситуация простыми уравнениями, при этом гравитационное поле должно быть строго однородным. В неоднородных или меняющихся со временем гравитационных полях такой компенсации нет, однако можно ожидать их приближенной компенсации, если ограничить рассмотрение настолько малыми областями пространства и промежутками времени, чтобы изменения гравитационного поля можно было считать пренебрежимо малыми. С учетом этого обстоятельства перефразируем ПЭ следующим образом: **в каждой точке пространства-времени в произвольном гравитационном поле можно выбрать локально-инерциальную систему отсчета так, чтобы в достаточно малой окрестности рассматриваемой точки физические законы имели такую же форму, как и в неускоренных декартовых системах координат.**

Отметим глубокую аналогию между ПЭ и аксиомой, которую Гаусс положил в основу своей геометрии. Гаусс предполагал, что в окрестности любой точки искривленной поверхности можно задать декартову систему координат, в которой выполняются соотношения евклидовой геометрии (например, теорема Пифагора).

Перейдем теперь от системы отсчета  $\dot{K}$ , движущейся поступательно с произвольной скоростью  $V(t)$ , к СО  $K$ , которая имеет общее с  $\dot{K}$  начало координат (т.е.  $\dot{\vec{r}} = \vec{r}$ ) и вращается с зависящей от времени угловой скоростью  $\Omega(t)$  относительно общего начала НСО  $\dot{K}$  и  $K$ . В этом случае

$$\dot{\vec{v}} = \vec{v} + [\vec{\Omega}, \vec{r}].$$

Подставив последнее в выражение для  $\dot{L}$ , получим общий вид функции Лагранжа частицы в произвольной неинерциальной системе отсчета:

$$L = \frac{mv^2}{2} + m \cdot \vec{v}[\vec{\Omega}, \vec{r}] + \frac{m \cdot [\vec{\Omega}, \vec{r}]^2}{2} - m\vec{W}(t)\vec{r} - U.$$

Для того чтобы выписать уравнения движения, найдем полный дифференциал последнего выражения:

$$\begin{aligned} dL &= m\vec{v}d\vec{v} + m d\vec{v}[\vec{\Omega}, \vec{r}] + m \cdot \vec{v}[\vec{\Omega}, d\vec{r}] + m \cdot [\vec{\Omega}, \vec{r}][\vec{\Omega}, d\vec{r}] - m\vec{W}(t)d\vec{r} - \frac{dU}{d\vec{r}}d\vec{r} \\ &= m\vec{v}d\vec{v} + m d\vec{v}[\vec{\Omega}, \vec{r}] + m d\vec{r}[\vec{v}, \vec{\Omega}] + m[[\vec{\Omega}, \vec{r}]\vec{\Omega}]d\vec{r} - m\vec{W}(t)d\vec{r} - \frac{dU}{d\vec{r}}d\vec{r}, \end{aligned}$$

что позволяет выписать искомое уравнение движения:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{dU}{d\vec{r}} - m\vec{W} + m[\vec{r}, \dot{\vec{\Omega}}] + 2m[\vec{v}, \vec{\Omega}] + m[\vec{\Omega}, [\vec{r}, \vec{\Omega}]].$$

Первый член в правой части этого уравнения – сила, обусловленная взаимодействием, остальные слагаемые вызваны неинерциальностью СО и исчезают при переходе к ИСО. Первое такое слагаемое пропорционально ускорению  $W$  поступательно движущейся НСО, второе обязано своим происхождением изменению со временем угловой скорости вращения НСО, третье, пропорциональное первой степени  $\Omega$ , называют кориолисовой силой и последнее – центробежная сила, направленная в плоскости, проходящей через  $r$  и  $\Omega$ , перпендикулярно к оси вращения, по величине она равна  $m\rho\Omega^2$ , где  $\rho$  – расстояние от оси вращения.

Рассмотрим особо случай равномерно вращающейся СО, не имеющей поступательного ускорения. Функция Лагранжа в такой ИСО

$$L = \frac{mv^2}{2} + m \cdot \vec{v}[\vec{\Omega}, \vec{r}] + \frac{m \cdot [\vec{\Omega}, \vec{r}]^2}{2} - U,$$

а уравнения движения

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{dU}{d\vec{r}} + 2m[\vec{v}, \vec{\Omega}] + m[\vec{\Omega}, [\vec{r}, \vec{\Omega}]].$$

Вычислим энергию в этом случае:

$$E = \vec{v} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = \frac{mv^2}{2} - m \cdot [\vec{\Omega}, \vec{r}]^2 + U.$$

Линейный по  $\Omega$  член отсутствует, т.е. изменение энергии, обусловленное вращением СО, происходит за счет центробежной, но не кориолисовой силы. Эту дополнительную энергию называют центробежной.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

I. Введение. Основные понятия и принципы.....	1
(материальная точка (3), событие (3), система отсчета (4) степени свободы (5), обобщенные координаты (5))	
Основная задача вариационного исчисления. Принцип наименьшего действия. Уравнения Лагранжа.....	6
Принцип относительности, преобразования Галилея.....	11
Функция Лагранжа системы материальных точек.....	16
II. Интегралы движения. Теорема Нетер. Законы сохранения...	19
Интегралы движения.....	19
Теорема Нетер.....	20
Энергия.....	23
Импульс.....	24
Момент импульса.....	26
III. Механическое подобие. Теорема вириала. Одномерное движение .....	31
Механическое подобие.....	31
Теорема вириала.....	33
Общие свойства одномерного движения.....	34
Движение в поле с потенциалом Экарта.....	36
IV. Задача двух тел. Общие свойства движения в центральном поле. Задача Кеплера.....	38
Задача двух тел.....	38
Общие свойства движения в центральном поле.....	40
Формула Бине.....	42
Задача Кеплера.....	45
Интеграл Лапласа – Рунге - Ленца.....	45
V. Распад и рассеяние частиц. Формула Резерфорда.....	48
Распад частиц .....	49
Упругие столкновения частиц.....	50
Рассеяние частиц.....	53
Формула Резерфорда.....	56
VI. Гамильтонов формализм.....	57
Канонические уравнения Гамильтона.....	57
Действие как функция координат.....	60
Понятие о фазовом пространстве.....	61
Скобки Пуассона.....	62

Канонические преобразования. Примеры.....	65
Инварианты канонических преобразований.....	69
Бесконечно малые канонические преобразования.....	72
Уравнение Гамильтона – Якоби. Схема решения задач методом Гамильтона - Якоби .....	75
Решение уравнения Гамильтона – Якоби в простейших случаях.....	80
VII. Малые колебания.....	82
Постановка задачи.....	83
Вынужденные колебания. Резонанс. Биения.....	86
Функции Грина в классической механике.....	88
Колебания систем со многими степенями свободы.....	93
Затухающие колебания. Диссипативная функция.....	101
Вынужденные колебания при наличии трения.....	103
Нарушение симметрии при колебаниях в поле симметричного потенциала.....	106
VIII. Движение в неинерциальной системе отсчета. Принцип эквивалентности.....	107

Рукопись поступила в издательский отдел  
15 января 2001 года.