Учебно-
методические
пособия
Учебно-научного
центра ОИЯИ
Дубна

УНЦ-2001-10

В.В.Папоян

ЛЕКЦИИ ПО ВЕКТОРНОМУ И ТЕНЗОРНОМУ АНАЛИЗУ

2001

Папоян В.В. УНЦ-2001-10
Лекции по векторному и тензорному анализу

Лекции являются изложением курса «Векторный и тензорный анализ», который в течение ряда лет читается студентам физического факультета Ереванского государственного университета. Программа курса вполне соответствует его вспомогательной роли: он служит введением, способствующим лучшему усвоению математических методов классической механики, электродинамики, гидродинамики и т.п. Изложение ведется на доступном для студентов второго курса уровне, в тех случаях, когда это не приводит к трудностям, используется современный математический язык. Основное внимание уделяется выработке вычислительных навыков, поэтому некоторые утверждения приводятся без доказательств.

Papoyan V.V. УНЦ-2001-10
Lectures on Vector and Tensor Analysis

This is in fact the course of lectures «Vector and Tensor Analysis» that has been given at the Physics Faculty of Yerevan State University for a number of years. The programme of the course totally conforms to its subsidiary role — it serves as an introduction making comprehension of mathematical methods of classical mechanics, electrodynamics, hydrodynamics, etc. easier. The presentation is simple for second-term students even when present-day mathematical terms are used. Main attention is paid to practicing computational abilities; therefore, some statements are given without proofs.

й институт ядерных
, 2001

УНЦ-2001-10

В.В.Папоян

ЛЕКЦИИ ПО ВЕКТОРНОМУ И ТЕНЗОРНОМУ АНАЛИЗУ

I. Введение

Геометрия возникла как экспериментальная наука в связи с практической деятельностью древних (постройка пирамид, землемерие и т.п.). Евклид дал геометрии аксиоматику, превратив ее в объект чистого мышления, что в будущем позволило Канту приписать понятиям и постулатам евклидовой геометрии априорный смысл. Античные и средневековые натурфилософы (Птолемей, Коперник, Галилей, Кеплер) считали предпочтительным использовать геометрические методы. Однако, начиная с Декарта, который ввел понятие координат, геометрия стала рассматриваться как приложение алгебры. С того времени в подготовке математиков-прикладников и особенно физиков геометрии отводилась второстепенная роль. Причины такого подхода, возможно, кроются в глубокой убежденности физиков XIX и начала XX веков в том, что законы природы должны быть сформулированы в форме, которая позволяет представить их в виде дифференциальных уравнений. Поэтому усилия в основном были направлены на изучение огромного разнообразия аналитических методов решения этих уравнений.

Два достижения науки нашего столетия вынудили изменить скептический взгляд на соотношение "анализ – геометрия". Первое – это открытия Эйнштейна: как специальная, так и общая теории относительности довольно наглядно демонстрируют, что адекватная ньютоновским воззрениям евклидова геометрия является лишь приближением к правильному описанию физической картины мира. Вторым, вслед за Картаном, явилось осознание того важного факта, что соотношение "геометрия – анализ" двусторонее: с одной стороны, анализ может служить основанием при изучении геометрии, а с другой стороны, геометрия естественным образом приводит к развитию аналитических методов и понятий (дифференциальные формы, векторы как дифференцирование, многообразия, расслоения и т.п.). Методы современной геометрии играют все более и более существенную роль в теоретической физике как в смысле упрощения математического формализма, так и в смысле углубления восприятия физических явлений. Это возрождение геометрии сказывается не только на геометризованной по своей сути теории гравитации, но и на других разделах физики, которые не используют геометрию физического пространства-времени, а используют геометрию абстрактных пространств (термодинамика, гамильтонов формализм, супергравитация и т. п.).

Геометрия, с которой мы привыкли иметь дело, – это так называемая "внутренняя" геометрия, иначе говоря, это геометрия, содержание которой не зависит от выбора тех или иных координат. В частности, внутренняя геометрия плоскости не зависит от того, каким образом в ней проведены координатные линии, совершенно несущественно, являются ли они криволинейными или декартовыми. Вообще говоря, внутреннюю геометрию пространства с соответствующими геометрическими объектами можно построить, не пользуясь понятием координат. Такой подход априори ковариантен (см. ниже), однако практически неудобен, поэтому обычно вводят координаты, сопоставляя каждой точке пространства некоторое число. При этом интуитивно ясно, что координатная система – это вспомогательное средство, выбор которого в лучшем случае упрощает вычисления, а результаты вычислений не должны зависеть от того, в каких координатах они выполнены.

Ф. Клейн, а вслед за ним и А. Эйнштейн исходили из доминирующего сейчас убеждения, что физические величины должны быть представлены в виде соответствующих геометрических объектов, а законы физики – в виде уравнений, которые являются определенными геометрическими утверждениями относительно этих объектов. Физические явления не могут зависеть от способа описания, поэтому выбор координат не должен влиять на содержание физического закона, и, следовательно, *уравнения, отражающие содержание физической закономерности, записанные в виде соотношений между геометрическими объектами, при допустимых преобразованиях координат не должны менять свой вид, другими словами, во всех системах координат эти уравнения должны иметь одинаковую форму.* Выделенное курсивом составляет содержание **принципа ковариантности,** в дальнейшем используемого в качестве одного из основных постулатов.

Цель настоящего курса состоит в изложении основ векторного и тензорного анализа в объеме, необходимом студентам-физикам, при этом в допустимой для студентов второго года обучения степени мы пытались использовать термины и понятия современной геометрии. По мере возможности материал преподносится в доступной форме, иногда за счет математической строгости.

II. Основные понятия и определения

1. **Отображение.** Операция (правило), которая всякому элементу одного множества ставит в соответствие некоторый *единственный* элемент другого множества, называется **отображением** (см. рис. 1). Высказывание "элемент множества B, который получается из элемента множества A при отображении f, обозначается символом $f(a)$" в краткой записи имеет вид

$$f : A \to B; a \mapsto f(a), a \in A, f(a) \in B.$$

Примеры:

(a) Отображение g, состоящее в удвоении чисел на оси x, $g : R \to R; x \mapsto 2x$.

(b) Обычная вещественнозначная функция на R, $f : R \to R; x \mapsto f(x)$. Рис. 2 показывает, что отображению f соответствует единственный элемент $f(x)$ для каждого $x \in R$, но вовсе не обязательно, чтобы каждому x соответствовало единственное $f(x)$. На рисунке x^1 и x^2 отображаются в одно и то же значение $f(x^1)=f(x^2)$.

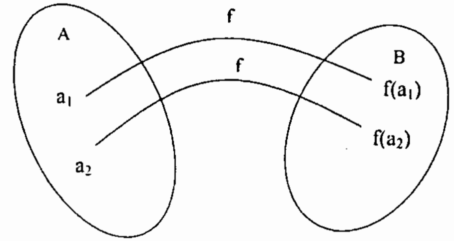

Рис. 1

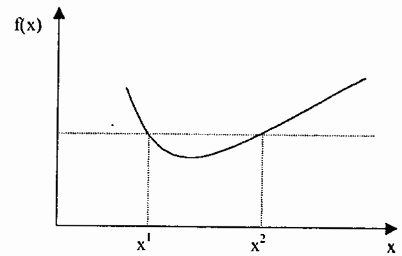

Рис.2

Замечание 1. В общем случае говорят об отображении из **M в N.** Если же каждая точка из N имеет прообраз в M, то говорят об отображении из **M на N.**

Замечание 2. Преобразование координат – это отображение множества на себя. Приведем примеры нескольких часто используемых преобразований:

(a) **растяжения:** $(x, y) \mapsto (kx, ky)$;

(b) **повороты:** $(x, y) \mapsto (x\cos\varphi + y\sin\varphi, -x\sin\varphi + y\cos\varphi)$;

(c) **сдвиги:** $(x, y) \mapsto (\alpha x, y/\alpha)$.

Здесь k, φ, α – параметры преобразований.

2. **Группа.** Множество элементов M образует группу, если в M определена групповая операция, которая каждой паре элементов $a, b \in M$ ставит в соответствие элемент $c \in M$:

$$M \to M; (a, b) \mapsto c = a * b.$$

При этом должны выполняться следующие аксиомы:

(a) ассоциативность:

$$(a * b) * c = a * (b * c);$$

(b) существование единичного элемента: для $\forall a \in M \exists e$ – левая единица, такая, что

$$e * a = a;$$

(c) существование обратного элемента: для $\forall a \in M \exists a^{-1}$ – левый обратный элемент, такой, что

$$a^{-1} * a = e.$$

Значок "$*$" символизирует групповую операцию, которая, в частности, может быть сложением, умножением или любой другой бинарной операцией. Групповая операция определяет признак группы, это означает, что некоторое множество может быть группой относительно конкретной групповой операции и не будет группой относительно другой групповой операции.

Если групповая операция такова, что

$$a * b = b * a,$$

группа называется **коммутативной** или **абелевой.**

Примеры:

(a) Множество действительных чисел образует абелеву группу относительно сложения, единичный элемент 0, обратный к n элемент "$-n$".

(b) Квадратные невырожденные (с определителем, не равным 0) матрицы образуют неабелеву группу. Групповая операция – умножение матриц, единичный элемент – единичная матрица, обратный элемент – обратная матрица.

3. **Линейное пространство.** Линейным пространством V над полем H (обычно над полем действительных или комплексных чисел) называется множество, снабженное внутренней бинарной операцией $V \times V \to V$

$$(a, b) \mapsto a + b$$

и внешней бинарной операцией $H \times V \to V$

$$(k, a) \mapsto ka,$$

которые удовлетворяют следующим аксиомам:

(a) сложение элементов превращает множество V в абелеву группу с единичным элементом 0 и обратным к a элементом "$-a$".

(b) умножение $a \in V$ на элементы поля H **унитарно:**

$$1 * a = a$$

и **ассоциативно:**

$$n(ma) = (nm)a; \forall n, m \in H.$$

(c) сложение и умножение **связаны законом дистрибутивности:**

$$n(a_1 + a_2) = na_1 + na_2; (n_1 + n_2)a = n_1 a + n_2 a.$$

Примеры:

(a) Множество всех векторов на плоскости или в 3-мерном пространстве.

(b) Множество всех вещественных непрерывных функций $f(x)$, определенных на интервале $a \leq x \leq b$.

(c) Множество всех квадратных матриц, причем внутренняя операция – это покомпонентное сложение, а внешняя – покомпонентное умножение на число.

(d) **Нульмерное пространство:** множество, состоящее из одного элемента $V = [0]$.

4. **Линейные операторы.** Пусть A и B – линейные пространства. Говорят, что на множестве $\Re \subset A$ задан **оператор** $\hat{f}$ со значениями в B (оператор, действующий из $\Re$ в B), если $\forall a \in \Re$ поставлен в соответствие элемент $b = \hat{f}(a) \in B$.

Множество $\Re$ называется **областью определения** $\hat{f}$, а совокупность всех элементов b называется **областью значений** $\hat{f}$ и обозначается $\Re_1(\Re) \subseteq B$.

Если $\Re$ является линейным пространством и для любых $a_1, a_2 \in \Re$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in H$ выполняется

$$\hat{f}(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) = \alpha_1 \hat{f}(a_1) + \alpha_2 \hat{f}(a_2),$$

то оператор называется **линейным** и обычно записывается в виде

$$\hat{f}(a) = \hat{f}a.$$

Если область значений оператора $\hat{f}$ – числовая ось, то оператор называется **функционалом,** а если при этом также и область его определения является числовым множеством, то оператор $\hat{f}$ называется **функцией,** в частности, если A – множество всевозможных систем из n чисел $(\alpha_1, ...\alpha_n,)$, составляющих множество E_n, то $\hat{f}$ называется **функцией** n **переменных,** а пространство E_n – n**-мерным арифметическим пространством.**

5. **Координаты, допустимые системы координат.** Каждому физическому событию в математической модели реального мира, в рассматриваемом классической физикой приближении, сопоставляется *арифметическая n-точка* (обычно $n = 4$):

- *арифметической n-точкой* назовем упорядоченную систему из n действительных чисел
$$[x^i] = (x^1, x^2, ...x^n).$$
- *арифметическое пространство n измерений*: множество всех арифметических точек для данного значения n назовем арифметическим пространством n измерений.
- *n-куб с центром в точке x_0* – множество всех точек арифметического пространства n измерений, заданных неравенствами
$$|x^i - x_0^i| < \delta, \qquad \delta > 0.$$
- *n-область*: множество арифметических точек $[x]$ назовем n-областью в том и только в том случае, когда каждая точка x является центром некоторого n-куба, содержащегося в $[x]$.

Взаимооднозначное соответствие подмножества физических событий с арифметической n-областью вполне оправдано в границах применимости классической физики и называется *системой координат* (СК). Важно подчеркнуть, что нет необходимости и оснований требовать наличия глобальной СК для всего физического мира, так же как и требовать физической значимости всех точек арифметического n-пространства. Достаточно говорить о соответствии подмножеств.

Вопрос о том, как задается СК, несомненно физический, но не математический. Если каким-либо способом задана одна СК $[x^i]$, то, определяя n функций $F^k(x^i)$, можно перейти к другой нумерации точек, т.е. к другой СК:
$$\acute{x}^k = F^k(x^i) = \acute{x}^k(x^i).$$

Однако из всех возможных СК, которые можно получить таким образом, физики используют только *допустимые* СК. Определения, которые приводятся ниже, пояснят это понятие:

- *функция класса u*: функцию $F(x^1, x^2, ...x^n)$, определенную для всех точек арифметической n-области $[x]$, назовем функцией класса u, если она и ее производные порядка $\leq u$ существуют и непрерывны в каждой точке $[x]$ области ($u > 0$ - любое, обычно $u \geq 2$).
- *преобразование класса u*: соответствие, при котором арифметической n-области $[x]$ сопоставляется некоторое множество $[\acute{x}]$ при помощи n функций класса u $\acute{x}^1(x), \acute{x}^2(x), ...\acute{x}^n(x)$, называется преобразованием класса u
$$[x] \mapsto [\acute{x}].$$
- *якобиан*: матрицу
$$X_j^i = \begin{pmatrix} \partial\acute{x}^1/\partial x^1 & \partial\acute{x}^1/\partial x^2 & ... & \partial\acute{x}^1/\partial x^n \\ \partial\acute{x}^2/\partial x^1 & \partial\acute{x}^2/\partial x^2 & ... & \partial\acute{x}^2/\partial x^n \\ ... & ... & ... & ... \\ \partial\acute{x}^n/\partial x^1 & \partial\acute{x}^n/\partial x^2 & ... & \partial\acute{x}^n/\partial x^n \end{pmatrix}$$
назовем **якобиевой матрицей** преобразования
$$\acute{x}^i = \acute{x}^i(x^j), \qquad i, j = 1, 2, ...n,$$
а ее определитель $det X_j^i$ – **якобианом** этого преобразования.
- *регулярное преобразование класса u*: преобразование арифметической n-области $[x]$ называется регулярным класса u тогда и только тогда, когда оно взаимно однозначно и его якобиан не обращается в 0 ни в одной точке $[x]$.
- *допустимые СК*: множеством допустимых СК назовем совокупность СК, которые получены из физически заданной СК посредством всевозможных регулярных преобразований
$$\acute{x}^i = \acute{x}^i(x^j).$$

Итак, каждой точке некоторого пространства сопоставляется упорядоченный набор чисел $x^k (k = 1...n)$, которые называют **координатами.** Разным точкам соответствуют разные наборы, совпадающие только в случае совпадения точек. Число координат n обычно называют **размерностью пространства.** Если с какой-либо точкой пространства, например P, связана совокупность чисел x^i, то с этой же точкой можно связать иную совокупность, например $\acute{x}^k$. Поскольку обе совокупности относятся (или описывают) к одной и той же точке, то между ними должно существовать функциональное соотношение
$$P \leftrightarrow (x^i); P \leftrightarrow (\acute{x}^k) \Rightarrow x^i = x^i(\acute{x}^k),$$
которое называют **преобразованием координат** (или **отображением**).

Если наделить координаты специальными свойствами, то тем самым мы определим тип пространства. Например, если

(a) каждой точке соответствуют три координаты (x^1, x^2, x^3),

(b) расстояние между точками $P(x^1, x^2, x^3)$ и $Q(y^1, y^2, y^3)$ есть

$$l^2 = (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2,$$

то пространство называется трехмерным **декартовым**, а координаты – декартовыми.

6. **Векторы. Простейшие представления.** Обычно с точками декартова пространства удобно связывать векторы. Пусть точка О – начало координат, тогда направленный от О к точке P отрезок назовем **радиус-вектором**, а координаты $P(x^1, x^2, x^3)$ – **компонентами** (или координатами) этого вектора.

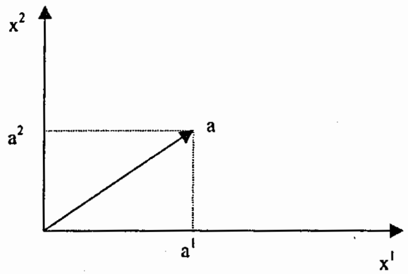

Рис. 3

Рассмотрим несколько примеров на плоскости x^1x^2. Всякий вектор $\vec{a}$ можно разложить на две составляющие в прямоугольной системе координат так, что

$$\vec{a} = a^1\vec{k}_1 + a^2\vec{k}_2.$$

В косоугольных координатах такое разложение, как видно из рис. 4, можно проводить двояко,

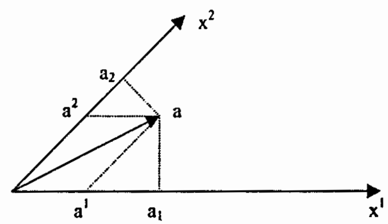

Рис. 4

как и прежде, по a^1 и a^2, так и с помощью ортогональных проекций на оси a_1 и a_2. В общем случае

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n}(a^i\vec{e}_i) \equiv a^i\vec{e}_i,$$

$$a_i = \vec{a}\vec{e}_i, \qquad i = 1...n.$$

Назовем a^i **контравариантными**, a_i – **ковариантными** компонентами вектора $\vec{a}$, а $\vec{e}_1...\vec{e}_n$ – **векторным базисом** координатной системы. Здесь и в дальнейшем будем придерживаться правила суммирования по дважды повторяющимся индексам, один из которых занимает верхнее (контравариантный индекс), а другой – нижнее (ковариантный индекс) положение.

Рассмотрим далее криволинейную систему координат z^1, z^2, z^3. Будем считать радиус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(z^1, z^2, z^3)$ дифференцируемой функцией координат. Вектор $\partial\vec{r}/\partial z^1$ касателен к координатной линии z^1.

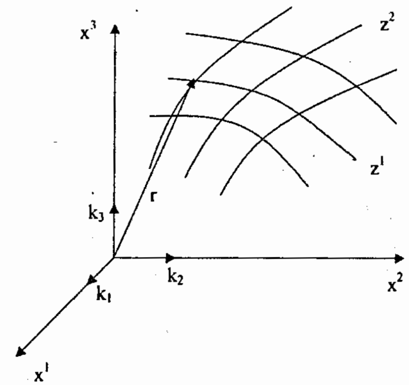

Рис. 5

Таким образом, в каждой точке пространства можно ввести тройку векторов $\vec{e}_i = \partial\vec{r}/\partial z^i (i = 1, 2, 3)$, которые можно принять в качестве базисных векторов при условии их некомпланарности.

Условия некомпланарности векторов $\partial\vec{r}/\partial z^i$, как известно, имеют вид

$$det X^i_j \neq 0,$$

где

$$X^i_j = \begin{pmatrix} \partial x^1/\partial z^1 & \partial x^1/\partial z^2 & \partial x^1/\partial z^3 \\ \partial x^2/\partial z^1 & \partial x^2/\partial z^2 & \partial x^2/\partial z^3 \\ \partial x^3/\partial z^1 & \partial x^3/\partial z^2 & \partial x^3/\partial z^3 \end{pmatrix}$$

– **якобиева матрица преобразования**

$$x^i = x^i(z^1, z^2, z^3).$$

Согласно известной теореме о неявных функциях, если $detX^i_j \neq 0$, то существует также обратное преобразование

$$z^i = z^i(x^1, x^2, x^3)$$

с якобиевой матрицей $Z^i_j \equiv \left(\partial z^i / \partial x^j\right)$ и с отличным от нуля якобианом.

Итак, если выполнено условие $detX^i_j \neq 0$, в каждой точке пространства существует связанный с криволинейной системой координат базис

$$\vec{e}_i = \partial \vec{r} / \partial x^i,$$

который меняется от точки к точке и поэтому называется **локальным**, причем

$$\vec{e}_i = X^j_i \vec{k}_j, \qquad \vec{k}_i = Z^j_i \vec{e}_j.$$

Докажем это в простом случае двумерного пространства (для n-мерного пространства доказательство проводится аналогично):

$$d\vec{r} = \vec{e}_1 dz^1 + \vec{e}_2 dz^2 = \vec{k}_1 dx^1 + \vec{k}_2 dx^2 = \vec{k}_1 \left(\frac{\partial x^1}{\partial z^1} dz^1 + \frac{\partial x^2}{\partial z^2} dz^2\right) + \vec{k}_2 \left(\frac{\partial x^2}{\partial z^1} dz^1 + \frac{\partial x^2}{\partial z^2} dz^2\right) = \left(\vec{k}_1 \frac{\partial x^1}{\partial z^1} + \vec{k}_2 \frac{\partial x^2}{\partial z^1}\right) dz^1 + \left(\vec{k}_1 \frac{\partial x^1}{\partial z^2} + \vec{k}_2 \frac{\partial x^2}{\partial z^2}\right) dz^2.$$

Нетрудно показать, что якобиевы матрицы X^j_i и Z^j_i взаимообратны:

$$X^i_k Z^k_j = \delta^i_j, \qquad \delta^i_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Действительно, $\vec{e}_i = X^j_i \vec{k}_j = X^j_i Z^k_j \vec{e}_k$, и для того, чтобы правая и левая части равенства совпали, необходимо, чтобы произведение $X^j_i Z^k_j$ равнялось символу Кронекера δ^k_i, который из суммы по k выделит лишь те слагаемые, у которых $k = i$.

Рассмотрим в качестве примеров несколько общеизвестных типов координат.

(a) **Декартовы координаты** $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Базисные векторы $\vec{k}_x$, $\vec{k}_y$ $\vec{k}_z$.

(b) **Цилиндрические координаты** $z^1 = \rho$, $z^2 = \phi$, $z^3 = z$. Базисные векторы $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\phi$, $\vec{e}_z$.

$$x = \rho cos\phi, \qquad y = \rho sin\phi, \qquad z = z,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \phi = arctg\frac{y}{x}.$$

Угловая координата ϕ многозначна, т.к. $\{\rho, \phi, z\}$ и $\{\rho, \phi + 2\pi k, z\}$ изображают одну и ту же точку, поэтому обычно полагают $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Якобиева матрица

$$X^i_j = \begin{pmatrix} cos\phi & -\rho sin\phi & 0 \\ sin\phi & \rho cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

имеет якобиан $Y = \rho$. В области $\rho > 0$ матрица X^i_j невырожденна, а при $\rho = 0$ особенной становится вся ось z. Матрица обратного преобразования

$$Z^i_j = \begin{pmatrix} cos\phi & sin\phi & 0 \\ -sin\phi/\rho & cos\phi/\rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) **Сферические координаты** $z^1 = r$, $z^2 = \theta$, $z^3 = \phi$. Базисные векторы $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\phi$.

$$x = rsin\theta cos\phi, \qquad y = rsin\theta sin\phi, \qquad z = rcos\theta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \qquad \phi = arctg\frac{y}{x}.$$

Многозначность угловых координат устраняют условия $0 \leq \theta \leq \pi$ и $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Якобиева матрица

$$X^i_j = \begin{pmatrix} sin\theta cos\phi & rcos\theta cos\phi & -rsin\theta sin\phi 0 \\ sin\theta sin\phi & rcos\theta sin\phi & rsin\theta cos\phi \\ cos\theta & -rsin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

имеет якобиан $Y = r^2 \sin\theta$. В области $r > 0$ и для $\theta \neq 0$, $\theta \neq \pi$ якобиан $Y \neq 0$ и сферическая система координат не имеет особых точек. Точки $r = 0$, $\theta = 0$, $\theta = \pi$ – особые точки, т.е. r, θ, ϕ нельзя выразить через x, y, z так, чтобы в результате получились дифференцируемые в этих точках функции.

7. **Фундаментальная матрица.** Введем понятие **фундаментальной матрицы** g_{ik}, определив ее как прямое произведение векторов локального базиса

$$g_{ik} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k,$$

откуда сразу следует ее симметричность по индексам:

$$g_{ik} = g_{ki}.$$

В декартовых координатах $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ базисные векторы $\vec{k}_i (i = 1,2,3)$ – константы для всех точек каждой из координатных осей (величину, постоянную на всем множестве, называют *глобальной*, в отличие от меняющейся от точки к точке *локальной* величины) со значениями

$$\vec{k}_1 = \vec{k}_x = (1,0,0), \quad \vec{k}_2 = \vec{k}_y = (0,1,0), \quad \vec{k}_3 = \vec{k}_z = (0,0,1),$$

поэтому

$$^{(0)}g_{ik} = \delta_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Здесь и далее значок $^{(0)}(...)$ означает принадлежность к декартовым координатам.) Найдем фундаментальную матрицу в сферических координатах $z^1 = r$, $z^2 = \theta$, $z^3 = \phi$, считая их связь с декартовыми известной:

$$x = r sin\theta cos\phi, \qquad y = r sin\theta sin\phi, \qquad z = r cos\theta.$$

Подсчитаем компоненты вектора локального базиса $\vec{e}_i$. Используя соотношение

$$\vec{e}_i = \frac{\partial x^l}{\partial z^i}\vec{k}_l,$$

получим

$$\vec{e}_r = \frac{\partial x}{\partial r}\vec{k}_x + \frac{\partial y}{\partial r}\vec{k}_y + \frac{\partial z}{\partial r}\vec{k}_z = \vec{k}_x sin\theta cos\phi + \vec{k}_y sin\theta sin\phi + \vec{k}_z cos\theta;$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta}\vec{k}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta}\vec{k}_y + \frac{\partial z}{\partial \theta}\vec{k}_z = \vec{k}_x r cos\theta cos\phi + \vec{k}_y r cos\theta sin\phi - \vec{k}_z r sin\theta;$$

$$\vec{e}_\phi = \frac{\partial x}{\partial \phi}\vec{k}_x + \frac{\partial y}{\partial \phi}\vec{k}_y = -\vec{k}_x r sin\theta sin\phi + \vec{k}_y r sin\theta cos\phi.$$

Учитывая ортогональность декартовых координат ($\vec{k}_i\vec{k}_l = \delta_{il}$), для неисчезающих компонент фундаментальной матрицы легко найти

$$g_{11} = g_{rr} = 1, \qquad g_{22} = g_{\theta\theta} = r^2, \qquad g_{33} = g_{\phi\phi} = r^2 sin^2\theta,$$

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

Аналогично вычисляются компоненты фундаментальной матрицы в цилиндрических координатах $z^1 = \rho$, $z^2 = \phi$, $z^3 = z$:

$$x = \rho cos\phi, \qquad y = \rho sin\phi, \qquad z = z.$$

Для компонент вектора локального базиса имеем

$$\vec{e}_\rho = \frac{\partial x}{\partial \rho}\vec{k}_x + \frac{\partial y}{\partial \rho}\vec{k}_y + \frac{\partial z}{\partial \rho}\vec{k}_z = \vec{k}_x cos\phi + \vec{k}_y sin\phi,$$

$$\vec{e}_\phi = \frac{\partial x}{\partial \phi}\vec{k}_x + \frac{\partial y}{\partial \phi}\vec{k}_y + \frac{\partial z}{\partial \phi}\vec{k}_z = -\vec{k}_x \rho sin\phi + \vec{k}_y \rho cos\phi,$$

$$\vec{e}_z = \vec{k}_z,$$

а для неисчезающих компонент фундаментальной матрицы

$$g_{11} = g_{\rho\rho} = 1, \qquad g_{22} = g_{\phi\phi} = \rho^2, \qquad g_{33} = g_{zz} = 1,$$

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из определения фундаментальной матрицы легко заключить, что $det g_{ik} \neq 0$ (напомним, что $g_{ik} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k$, а $\vec{e}_i = X_i^j \vec{k}_j$ – локальный базис *допустимой* системы координат, с якобианом $det X_i^j \neq 0$), это означает, что существует матрица g^{ik}, обратная к фундаментальной, компоненты которой определяются как решения системы алгебраических уравнений:

$$g^{ik}g_{kl} = \delta_l^i \quad \Longrightarrow \quad g^{i1}g_{1l} + g^{i2}g_{2l} + g^{i3}g_{3l} = \delta_l^i.$$

Во всех тех случаях, когда, как в рассмотренных выше координатах, фундаментальная матрица диагональна, обратная матрица

$$g^{kk} = 1/g_{kk},$$

(здесь нет суммирования по k). Действительно,

$$\text{пусть} \quad l = 1, \qquad g^{i1}g_{11} = \delta_1^i \quad \Longrightarrow \quad g^{11} = 1/g_{11}, \quad g^{i1}(i \neq 1) = 0,$$

(точно так же и для $l = 2,3$).

Таким образом,

$$^{(0)}g^{ik} = \delta^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^{(0)}g_{ik}, \quad g^{ik}(\rho,\phi,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g^{ik}(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

Найдем закон преобразования фундаментальной матрицы g_{ik} при координатных преобразованиях $x^i = x^i(z^j)$. Будем исходить из определения $g_{ik} = \vec{e}_i\vec{e}_k$ и из закона преобразования базисных векторов $\vec{e}_i = \vec{k}_j(\partial z^j/\partial x^i)$, тогда

$$g_{il} = \vec{e}_i\vec{e}_l = \vec{k}_m\frac{\partial z^m}{\partial x^i}\vec{k}_n\frac{\partial z^n}{\partial x^l} = \frac{\partial z^m}{\partial x^i}\frac{\partial z^n}{\partial x^l}{}^{(0)}g_{mn}.$$

Как будет показано, по такому закону преобразуются тензорные величины, поэтому закрепим за g_{ik} одно из чаще используемых названий – *фундаментальный* или *метрический* тензор.

8. **Скаляры и векторы.** Выше на простых примерах было продемонстрировано, что один и тот же вектор $\vec{a}$ может быть представлен как контравариантными a^i, так и ковариантными a_i компонентами, так что

$$\vec{a} = a^i\vec{e}_i, \qquad a_i = \vec{a}\vec{e}_i.$$

Поскольку это компоненты одного и того же вектора, ясно, что между ними должна существовать связь. Попробуем установить ее, используя выписанные соотношения:

$$a_i = \vec{a}\vec{e}_i = a^k\vec{e}_k\vec{e}_i = g_{ik}a^k,$$

помножив далее обе части равенства на g^{il} и суммируя по l, получим

$$g^{il}a_i = g^{li}g_{ik}a^k = \delta^l_k a^k = a^l.$$

Итак, установлены правила поднятия и опускания индексов:

$$a_i = g_{ik}a^k, \qquad a^i = g^{ik}a_k.$$

Заметим, что в декартовых координатах нет разницы между ко- и контравариантными компонентами вектора:

$${}^{(0)}a^i = {}^{(0)}a_i,$$

поскольку ${}^{(0)}g^{ik} = {}^{(0)}g_{ik}$.

Используя правило поднятия и опускания индексов, введем

$$(\vec{e})^i = g^{ik}\vec{e}_k,$$

следовательно,

$$(\vec{e})^i\vec{e}_l = g^{ik}\vec{e}_k\vec{e}_l = g^{ik}g_{kl} = \delta^i_l, \qquad (\vec{e})^i(\vec{e})^l = g^{ik}\vec{e}_k(\vec{e})^l = g^{ik}\delta^l_k = g^{il},$$

т.е. вектор $(\vec{e})^1$, например, ортогонален $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$, а его произведение с $\vec{e}_1$ дает 1. Совокупность векторов $(\vec{e})^i$ назовем *взаимным* или *сопряженным* (к $\vec{e}_i$) базисом. Векторы локального базиса $\vec{e}_i$ – это меняющиеся от точки к точке векторы, касательные к координатным линиям, в то время как векторы сопряженного базиса не имеют непосредственного отношения к координатам.

Любой вектор можно разложить как по векторам локального $\vec{e}_i$, так и по векторам сопряженного $(\vec{e})^i$ базисов. Действительно,

$$\vec{a} = a^i\vec{e}_i = a^i g_{ik}(\vec{e})^k = a_k(\vec{e})^k, \qquad a^i = \vec{a}(\vec{e})^i, \qquad a_i = \vec{a}\vec{e}_i.$$

Рассмотрим преобразование, связывающее две произвольные системы координат x^i и $\acute{x}^i$:

$$x^i = x^i(\acute{x}^1, \acute{x}^2, ...\acute{x}^n), \quad n = 1, 2, ...n.$$

Если это допустимое преобразование, то существует также обратное преобразование

$$\acute{x}^i = \acute{x}^i(x^1, x^2, ...x^n).$$

В соответствии с принципом ковариантности

$$\vec{a} = a^i\vec{e}_i = \acute{a}^k\acute{\vec{e}}_k.$$

Откуда, имея в виду

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \acute{x}^k}{\partial x^i}\acute{\vec{e}}_k,$$

получим

$$\acute{a}^k = \frac{\partial \acute{x}^k}{\partial x^i}a^i.$$

Точно так же можно получить

$$\acute{a}_k = \frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^k}a_i.$$

- Совокупность n чисел A_i, определенных в каждой точке пространства, которая при преобразованиях координат

  $$x^i = x^i(\acute{x}^j), \qquad i, j, = 1, 2, ...n$$

  преобразуется согласно

  $$A_i = \frac{\partial \acute{x}^j}{\partial x^i}\acute{A}_j,$$

  образует **ковариантный** вектор (или **ковектор**) и называется его **ковариантными** компонентами.

- Совокупность n чисел A^i, определенных в каждой точке пространства, которая при тех же преобразованиях преобразуется согласно

  $$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^j}\acute{A}^j,$$

  образует **контравариантный** вектор (или просто **вектор**) и называется его **контравариантными** компонентами.

Одна из возможностей перемножения векторов, как известно, состоит в том, чтобы составить их скалярное произведение. Назовем

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A^iB_i = g^{ik}A_kB_i = A_kB^k = g_{kl}A^lB^k$$

скалярным произведением векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Отметим, что верхнее и нижнее положение индекса суммирования (иногда этот индекс называют немым) взаимозаменяемы, т.е., подняв один из немых индексов, мы должны опустить парный и, наоборот, опустив один из индексов немой пары, мы должны поднять другой:

$$a^i b_k c^k d_i \equiv a_i b^k c_k d^i.$$

Определим квадрат длины вектора $\vec{A}$ как скалярное произведение его компонент:

$$|(\vec{A})^2| \equiv A^i A_i.$$

Нетрудно убедиться, что скалярное произведение, а вместе с ним и квадрат длины вектора не меняются при преобразованиях координат. Действительно,

$$A^i B_i = \frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^l}\frac{\partial \acute{x}^k}{\partial x^i}\acute{A}^l \acute{B}_k = \delta^k_l \acute{A}^l \acute{B}_k = \acute{A}^l \acute{B}_l.$$

Такие величины называют **инвариантами** координатных преобразований. Вообще, функция $\varphi(x)$ (набор всех координат обозначен одной буквой x), которая при преобразованиях координат сохраняет свое числовое значение

$$\varphi(x) = \acute{\varphi}(\acute{x}),$$

называется **скаляром**.

Инвариантами относительно координатных преобразований являются не только сами скаляры, но и их дифференциалы $d\varphi$:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}dx^i = \frac{\partial\varphi}{\partial \acute{x}^k}\frac{\partial \acute{x}^k}{\partial x^i}dx^i = \frac{\partial\varphi}{\partial \acute{x}^k}\frac{\partial \acute{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^l}d\acute{x}^l$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial \acute{x}^k}\delta^k_l d\acute{x}^l = \frac{\partial\varphi}{\partial \acute{x}^k}d\acute{x}^k.$$

Попутно удалось установить трансформационные свойства производной скаляра $\partial\varphi/\partial x^i$, которая преобразуется, как компоненты ковариантного вектора, и дифференциала координат dx^i, преобразующегося аналогично компонентам контравариантного вектора. Таким образом, $\partial\varphi/\partial x^i$ образует ковариантный, а dx^i – контравариантный векторы.

В декартовых координатах квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками есть

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Легко видеть, имея в виду матричное представление фундаментального тензора g_{ik}, что это выражение можно переписать в виде

$$dl^2 = g_{ik}dx^i \cdot dx^k.$$

Подставив сюда полученные ранее формулы преобразования для g_{ik} и dx^i, нетрудно убедиться в том, что dl^2 – скаляр, причем в произвольной системе координат сохраняется не только его численное значение, но и форма записи:

$$d\acute{l}^2 = \acute{g}_{ik}d\acute{x}^i \cdot d\acute{x}^k.$$

Подобные величины называют *форминвариантами.* Таким образом, фундаментальный тензор g_{ik}, определяя квадрат элемента длины в произвольной системе координат, по существу определяет геометрию пространства (например, позволяет отличить евклидову геометрию от римановой и т.п.), и потому его чаще всего называют *метрическим тензором.* Вычисленные ранее компоненты метрического тензора позволяют записать квадрат элемента длины

- в цилиндрических координатах

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2,$$

- в сферических координатах

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta\phi^2.$$

Проще всего считать, что вектор – это стрелка, направленная от одной точки (A) к другой (B):

$$\vec{a}_{AB} = B - A.$$

В такой трактовке вектор – билокальный объект, связанный с двумя точками. Существует эквивалентный способ описания вектора. Представим стрелку в виде параметризованной прямой $P(\lambda) = A + \lambda(B - A)$, причем $\lambda = 0$ соответствует основанию стрелки, а $\lambda = 1$ – ее острию. Возьмем производную от этого выражения:

$$\frac{d}{d\lambda}\{A + \lambda(B - A)\} = B - A = P(1) - P(0) = \vec{a}_{AB}.$$

В этой трактовке вектор – локальный объект, касательный к линии $P(\lambda)$:

$$\vec{a} = \frac{dP}{d\lambda}.$$

- **Пример:** пусть $P(t)$ – прямая линия, по которой движется свободная частица, t – время движения, параметризующее траекторию движения. Перемещение за 1 секунду дает стрелку $\vec{v} = P(1) - P(0)$, которая в точности совпадает со скоростью частицы. Если же записать $\vec{v}$ как производную $\vec{v} = dP/dt$, то это выражение применимо также и для ускоренного движения.

Таким образом, вектор – это геометрический объект, который может быть определен независимо от координат. (Действительно, траектория и скорость частицы – понятия, не связанные с какими-либо координатами.) Координаты вводят, когда возникает необходимость конкретных расчетов, определяя компоненты вектора и базисные векторы согласно

$$\vec{a} = a^i\vec{e}_i.$$

9. **Символы Кристоффеля. Ковариантная производная.** Найдем производную по координатам произвольного вектора $\partial\vec{A}/\partial x^i$. Поскольку, вообще говоря, $\vec{A} = A^i\vec{e}_i$, а в декартовых координатах базисные векторы – константы, то

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial x^i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i}\vec{k}_i.$$

В произвольных координатах

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial x^k} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k}\vec{e}_i + \frac{\partial\vec{e}_i}{\partial x^k}A^i.$$

Это выражение в частном случае декартовых координат должно совпадать с предыдущим, поэтому необходимо, чтобы оно имело вид произведения некоторого сомножителя с векторами локального базиса, что возможно, если производная вектора локального базиса разложена по этим же векторам. Разложение

$$\frac{\partial\vec{e}_i}{\partial x^k} = \Gamma^l_{ik}\vec{e}_l$$

содержит трехиндексные величины Γ^l_{ik}, которые называют *коэффициентами аффинной связности.* Учитывая это разложение, получим

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial x^k} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k}\vec{e}_i + \Gamma^l_{ik}\vec{e}_l A^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{lk}A^l\right)\vec{e}_i \equiv (\nabla_k A^i)\vec{e}_i.$$

Назовем

$$\nabla_k A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{lk}A^l$$

ковариантной производной контравариантного вектора.

Исходя из соотношения $(\vec{e})^i\vec{e}_k = \delta^i_k$, нетрудно показать, что

$$\frac{\partial(\vec{e})^i}{\partial x^k} = -\Gamma^i_{kl}(\vec{e})^l.$$

Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial x^l}((\vec{e})^i\vec{e}_k) = \vec{e}_k\frac{\partial(\vec{e})^i}{\partial x^l} + (\vec{e})^i\frac{\partial\vec{e}_k}{\partial x^l} = 0,$$

следовательно,

$$\vec{e}_k\frac{\partial(\vec{e})^i}{\partial x^l} = -(\vec{e})^i\Gamma^m_{kl}\vec{e}_m = -\delta^i_m\Gamma^m_{kl} = -\Gamma^i_{kl}.$$

Помножим обе части равенства на $(\vec{e})^l$ и просуммируем по l, что с учетом $(\vec{e})^l\vec{e}_k = \delta^l_k$ завершает доказательство. Теперь, исходя из выписанного выше разложения производной вектора сопряженного базиса и представления $\vec{A} = A_i(\vec{e})^i$, получим выражение ковариантной производной ковариантного вектора:

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}(A_i(\vec{e})^i) = (\vec{e})^i\frac{\partial A_i}{\partial x^k} + A_i\frac{\partial(\vec{e})^i}{\partial x^k} = (\vec{e})^i\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - A_l\gamma^l_{ki}(\vec{e})^i = (\vec{e})^i(\nabla_k A_i).$$

Итак, *ковариантная производная ковариантного вектора*

$$\nabla_k A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - A_l\Gamma^l_{ki}.$$

Найдем закон преобразования коэффициентов аффинной связности при координатных преобразованиях $x^i = x^i(\acute{x}^j)$, исходя из их определения:

$$\frac{\partial\vec{e}_i}{\partial x^k} = \Gamma^l_{ik}\vec{e}_l \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial\acute{x}^n}\left(\frac{\partial\acute{x}^m}{\partial x^i}\acute{\vec{e}}_m\right)\frac{\partial\acute{x}^n}{\partial x^k} = \acute{\vec{e}}_m\left(\frac{\partial^2\acute{x}^m}{\partial x^i\partial x^k} + \frac{\partial\acute{x}^p}{\partial x^i}\frac{\partial\acute{x}^n}{\partial x^k}\acute{\Gamma}^m_{pn}\right) = \acute{\vec{e}}_m\Gamma^l_{ik}\frac{\partial\acute{x}^m}{\partial x^l}.$$

Откуда получаем

$$\Gamma^l_{ik} = \frac{\partial x^l}{\partial\acute{x}^m}\left(\frac{\partial\acute{x}^p}{\partial x^i}\frac{\partial\acute{x}^n}{\partial x^k}\acute{\Gamma}^m_{pn} + \frac{\partial^2\acute{x}^m}{\partial x^i\partial x^k}\right).$$

Уместно отметить, что т.к. в нашем изложении векторы локального базиса определены как $\vec{e}_i = \partial\vec{r}/\partial x^i$, то, исходя из определения коэффициентов аффинной связности, можно заключить, что они симметричны по нижним индексам:

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}.$$

Это обстоятельство позволяет связать их с фундаментальным тензором, если учесть, что $g_{ik} = \vec{e}_i\vec{e}_k$, тогда

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \frac{\partial\vec{e}_i}{\partial x^l}\vec{e}_k + \vec{e}_i\frac{\partial\vec{e}_k}{\partial x^l} = g_{mi}\Gamma^m_{kl} + g_{mk}\Gamma^m_{il}.$$

Точно так же

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} = g_{mi}\Gamma^m_{lk} + g_{ml}\Gamma^m_{ik}, \qquad \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = g_{ml}\Gamma^m_{ki} + g_{mk}\Gamma^m_{li}.$$

Сложим последние два равенства и вычтем из суммы первое, умножая далее результат на $g^{nl}/2$ с последующим суммированием по l, получим

$$\Gamma^l_{ik} = \frac{1}{2}g^{lm}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right).$$

Таким образом, если заданы компоненты метрического тензора, то последняя формула определяет Γ^l_{ik} и тем самым ковариантные производные векторов. Заметим, что коэффициенты аффинной связности, выраженные через компоненты метрического тензора согласно выписанной выше формуле, называют *символами Кристоффеля.*

Подсчитаем символы Кристоффеля, предполагая фундаментальную матрицу диагональной (все компоненты метрического тензора, кроме диагональных, равны нулю), а её элементы – зависящими лишь от x^1 и x^2.

- Пусть $l = 1$

$$\Gamma^1_{ik} = \frac{1}{2}g^{1m}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right) = \frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{i1}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k1}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^1}\right);$$

$l = 1, i = 1$

$$\Gamma^1_{1k} = \frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k1}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{1k}}{\partial x^1}\right) = \frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^k};$$

$l = 1, i = 2$

$$\Gamma^1_{2k} = \frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k1}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{2k}}{\partial x^1}\right);$$

$l = 1, i = 2, k = 1$

$$\Gamma^1_{21} = \frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1}\right) = \frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2};$$

$l = 1, i = 2, k = 2$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1};$$

$l = 1, i = 2, k = 3$

$$\Gamma^1_{23} = 0;$$

$l = 1, i = 3$

$$\Gamma^1_{3k} = \frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{1k}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{3k}}{\partial x^1}\right).$$

Итак, отличны от нуля

$$\Gamma^1_{1k} = \frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^k};$$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1};$$

$$\Gamma^1_{33} = -\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1}.$$

- Пусть $l = 2$

$$\Gamma^2_{ik} = \frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{i2}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k2}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^2}\right);$$

$l = 2, i = 1$

$$\Gamma^2_{1k} = \frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{k2}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{1k}}{\partial x^2}\right);$$

$l = 2, i = 1, k = 1$

$$\Gamma^2_{11} = -\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2};$$

$l = 2, i = 1, k = 2$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1};$$

$$\Gamma^2_{13} = 0;$$

$l = 2, i = 2$

$$\Gamma^2_{2k} = \frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k2}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{2k}}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^k};$$

$l = 2, i = 3$

$$\Gamma^2_{3k} = \frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{23}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k2}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{3k}}{\partial x^2}\right) = -\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{3k}}{\partial x^2}.$$

Итак, отличны от нуля

$$\Gamma^2_{11} = -\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2};$$

$$\Gamma^2_{2k} = \frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^k};$$

$$\Gamma^2_{33} = -\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2}.$$

- Пусть $l = 3$

$$\Gamma^3_{ik} = \frac{1}{2}g^{33}\left(\frac{\partial g_{i3}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k3}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^3}\right);$$

$l = 3, i = 1$

$$\Gamma^3_{1k} = \frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1};$$

$l = 3, i = 2$

$$\Gamma^3_{2k} = \frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2};$$

$l = 3, i = 3$

$$\Gamma^3_{3k} = \frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^k}.$$

Итак, отличны от нуля

$$\Gamma^3_{3k} = \frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^k}.$$

- **Декартовы координаты.** В декартовых координатах компоненты метрического тензора являются глобальными величинами и постоянны, поэтому символы Кристоффеля равны нулю:

$$g_{ik} = g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma^l_{ik} = 0.$$

- **Цилиндрические координаты:**

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma^1_{22} = -\rho, \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{\rho}.$$

- **Сферические координаты:**

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 sin^2\theta \end{pmatrix},$$

$$\Gamma^1_{22} = -r, \qquad \Gamma^1_{33} = -r sin^2\theta, \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^2_{33} = -sin\theta cos\theta,$$

$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^3_{23} = ctg\theta.$$

10. **Матричные обозначения.** Язык матриц заметно упрощает как использование, так и запись соотношений между геометрическими объектами хотя бы потому, что можно обойтись без индексов:

$$b_i = A^k_i \cdot a_k \quad (i, k, ... = 1, 2, 3,) \Longrightarrow \hat{b} = \hat{A} \cdot \hat{a},$$

подчеркивая тем самым независимость формы этих соотношений от выбора координатной системы, причем векторам (одноиндексным объектам) ставятся в соответствие одностолбцовые матрицы

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

– для компонент ковариантного вектора и

$$\hat{a}^* = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$$

– для компонент контравариантного вектора. Точно так же определим одностолбцовые матрицы для векторов локального и сопряженного базисов:

$$\hat{e} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}, \qquad \hat{e}^* = \begin{pmatrix} (\vec{e})^1 \\ (\vec{e})^2 \\ (\vec{e})^3 \end{pmatrix}.$$

С тем чтобы согласовать определения скалярного произведения, фундаментальной матрицы и т.п. с матричными обозначениями, введем также однострочные матрицы как транспонированные к $\hat{a}$, $\hat{a}^*$, $\hat{e}$, $\hat{e}^*$, тогда для фундаментальной матрицы будем иметь

$$\hat{g} = (g_{ik}) = \hat{e}\hat{e}^T = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{e}_1\vec{e}_1 & \vec{e}_1\vec{e}_2 & \vec{e}_1\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2\vec{e}_1 & \vec{e}_2\vec{e}_2 & \vec{e}_2\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3\vec{e}_1 & \vec{e}_3\vec{e}_2 & \vec{e}_3\vec{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}.$$

Точно так же

$$\hat{g}^{-1} = (g^{ik}) = \hat{e}^*(\hat{e}^*)^T = \begin{pmatrix} (\vec{e})^1 \\ (\vec{e})^2 \\ (\vec{e})^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\vec{e})^1 & (\vec{e})^2 & (\vec{e})^3 \end{pmatrix},$$

а для скалярного произведения

$$\vec{a}\vec{b} = \hat{a}^T\hat{b}^* = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} = a_1b^1 + a_2b^2 + a_3b^3.$$

Понятно, что

$$a_i = g_{ik}a^k \Longrightarrow \hat{a} = \hat{g}\hat{a}^*, \qquad a^i = g^{ik}a_k \Longrightarrow \hat{a}^* = \hat{g}^{-1}\hat{a};$$

$$\hat{e} = \hat{g}\hat{e}^*, \qquad \hat{e}^* = \hat{g}^{-1}\hat{e},$$

откуда для однострочных матриц, учитывая симметричность фундаментальной матрицы ($g_{ik} = g_{ki} \longrightarrow \hat{g} = \hat{g}^T$), получаем

$$\hat{a}^T = (\hat{a}^*)^T\hat{g} \Longrightarrow (\hat{a}^*)^T = \hat{a}^T\hat{g}^{-1}.$$

Легко проверить соотношения

$$\vec{a} = \hat{a}^T\hat{e}^* = a_1(\vec{e})^1 + a_2(\vec{e})^2 + a_3(\vec{e})^3, \quad \vec{a} = (\hat{a}^*)^T\hat{e} = a^1\vec{e}_1 + a^2\vec{e}_2 + a^3\vec{e}_3.$$

Допустим, что матрица $\hat{A}$ задает преобразование базисных векторов двух координатных систем:

$$(\hat{e})' = \hat{A}\hat{e}.$$

Ясно, что при этом одностолбцовые матрицы, соответствующие ковариантным векторам, преобразуются так же:

$$(\hat{a})' = \hat{A}\hat{a},$$

а фундаментальная матрица – согласно

$$(\hat{g})' = (\hat{e})' \cdot (\hat{e})^T = \hat{A}\hat{e}\hat{e}^T\hat{A}^T = \hat{A}\hat{g}\hat{A}^T \Longrightarrow (\hat{g}^{-1})' = (\hat{A}^T)^{-1}\hat{g}^{-1}\hat{A}^{-1}.$$

Два последних соотношения, с учетом $\hat{a}^* = \hat{g}^{-1}\hat{a}$, позволяют без труда найти формулу преобразования одностолбцовых матриц, соответствующих контравариантным векторам:

$$(\hat{a}^*)' = (\hat{A}^T)^{-1}\hat{a}^*.$$

Пусть некая матрица $\hat{D}$ – оператор, который в рамках одной и той же координатной системы преобразует вектор $\hat{a}$ в вектор $\hat{b}$:

$$\hat{b} = \hat{D}\hat{a} \quad \text{или} \quad \hat{b}' = \hat{D}'\hat{a}'.$$

Предположим далее, что $\hat{A}$ – это матрица преобразования координат от одной системы к другой:

$$\hat{a}' = \hat{A}\hat{a} \quad \text{или} \quad \hat{b}' = \hat{A}\hat{b},$$

поэтому $\hat{b} = \hat{A}^{-1}\hat{D}'\hat{A}\hat{a}$, откуда

$$\hat{D} = \hat{A}^{-1}\hat{D}'\hat{A} \quad \text{или} \quad \hat{D}' = \hat{A}\hat{D}\hat{A}^{-1}.$$

Последнее преобразование называют *преобразованием подобия*. Заметим, что если матрицы $\hat{A}$ и $\hat{D}$ коммутируют, то матрица $\hat{D}$ является инвариантом преобразования $\hat{A}$. В частности, единичная матрица $\hat{I}$ коммутирует с любой матрицей, и поэтому она инвариант любого преобразования, и наоборот: всякая матрица – инвариант тождественного преобразования.

В теоретической физике часто используется понятие *след матрицы*, обозначаемое $Tr\hat{A}$ или $Sp\hat{A}$, – сумма диагональных элементов $\hat{A}$:

$$Sp\hat{A} = A^i_i.$$

Из определения сразу же следуют свойства этой операции:

$$Sp\hat{A}^T = Sp\hat{A}, \qquad Sp(\hat{A}\hat{B}) = Sp(\hat{B}\hat{A}), \qquad Sp(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) = Sp(\hat{C}\hat{A}\hat{B}).$$

Легко обнаружить также, что след матрицы – инвариант преобразования подобия, т.е. $Sp\hat{A}' = Sp\hat{A}$, если $\hat{A}' = \hat{D}\hat{A}\hat{D}^{-1}$.

11. **Общая характеристика преобразований. Примеры.** *Преобразование некоего множества X – это взаимно однозначное отображение $f : X \to X$ этого множества на себя, что подразумевает существование обратного отображения $f^{-1} : X \to X$, причем*

$$f \cdot f^{-1} = f^{-1} \cdot f = e,$$

где $f \cdot g$ – последовательно выполняемые отображения:

$$(f \cdot g)x = f \cdot (g \cdot x), \qquad x \in X,$$

а e – тождественное преобразование $ex = x$.

Совокупность G преобразований множества X называют **группой преобразований**, если G содержит

- тождественное преобразование e,
- вместе с преобразованием $g \in G$ обратное $g^{-1} \in G$, причем

$$g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e,$$

- вместе с преобразованиями $g_1, g_2 \in G$ и их произведение $g_1 \cdot g_2 \in G$.

Преобразования, сохраняющие расстояние $l(x_1, x_2)$ между двумя точками пространства $l(g(x_1), g(x_2)) = l(x_1, x_2)$, образуют **группу движений** этого пространства. Группа тех или иных преобразований, сохраняющих некий объект или какие-либо его свойства, обычно интерпретируется как совокупность симметрий. Продемонстрируем "измеримость" понятия симметрии на простом примере: покажем, что большую симметричность равнобедренного треугольника по сравнению с неравнобедренным и равностороннего по сравнению с равнобедренным можно оценить количественно. Действительно, число перемещений, переводящих треугольник в себя, состоит из

- только *одного* преобразования – тождественного для неравнобедренного треугольника;
- из *двух* преобразований – тождественного и отражения относительно оси симметрии для равнобедренного треугольника;
- из *шести* преобразований – тождественного, отражений относительно трех осей симметрии, поворотов на 120° и 240° для равностороннего треугольника.

Симметрию принято приписывать и аналитическим выражениям. В частности, говорят, что некоторый объект f, заданный на множестве X, симметричен относительно преобразований X, если это преобразование не меняет f. Группу этих преобразований называют *группой симметрий*. Для современной физики важнейшей характеристикой является симметрия физических законов. Это означает, что существует группа преобразований, сохраняющих закон.

В физических приложениях чаще всего встречаются *линейные преобразования*

$$x^i = A^i_k \acute{x}^k, \quad \text{где} \quad A^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^k} = const.$$

Разумеется, рассматриваются допустимые преобразования, т.е. преобразования с $det A^i_k \neq 0$, а это означает существование матрицы $\hat{B} = \hat{A}^{-1}$ обратного преобразования

$$\acute{x}^i = B^i_k x^k, \quad \text{причем} \quad A^i_k B^k_l = \delta^i_l.$$

Линейные преобразования наиобщего вида

$$x^i = A^i_k \acute{x}^k + A^i, \qquad \acute{x}^i = B^i_k x^k + B^i,$$

где, помимо A^i_k и B^i_k, постоянны также A^i и B^i, называются ***аффинными***. Они взаимообратны при условиях

$$A^i_k B^k_l = \delta^i_l, \quad A^i = -A^i_k B^k, \quad B^i = -B^i_k A^k.$$

Принята следующая классификация аффинных преобразований.

(a) **Центроаффинные преобразования**

$$A^i = 0, \qquad B^i = 0.$$

(b) **Эквиаффинные преобразования**

$$det(A^i_k) = \pm 1.$$

(c) **Унимодулярные преобразования**

$$det(A^i_k) = 1.$$

(d) **Преобразования трансляций**

$$A^i_k = \delta^i_k, \qquad B^i_k = \delta^i_k.$$

(e) **Ортогональные преобразования.** Аффинные преобразования *декартовых* систем координат

$$x^i = A^i_k \acute{x}^k, \qquad \acute{x}^i = B^i_k x^k,$$

сохраняющие расстояние между двумя точками. Условие ортогональности преобразования следует из определения:

$$x^i x_i = A^i_l \acute{x}^l A^m_i \acute{x}_m = \acute{x}^m \acute{x}_m, \quad \text{если} \quad A^i_l A^m_i = \delta^m_l \Longrightarrow \hat{A}^T \cdot \hat{A} = \hat{I}.$$

Последнее соотношение и есть условие ортогональности, помножив его слева на A^{-1}, получим эквивалентное условие

$$\hat{A}^T = \hat{A}^{-1}.$$

Ортогональные преобразования образуют группу симметрии заданной в трехмерном декартовом пространстве функции $f(x^2+y^2+z^2)$, что непосредственно следует из их определения. Отметим, что иногда матрицу ортогонального преобразования называют просто *ортогональной матрицей*.

Примеры:

- Матрицы

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

описывают преобразование

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \hat{x}' = \hat{I}\hat{x}, \qquad \hat{x}' = \hat{C}\hat{x},$$

которое называют *преобразованием инверсии*. Легко проверить, что матрицы $\hat{I}$ и $\hat{C}$ образуют группу, причем

$$det\hat{C} = -1, \qquad \hat{C}^{-1} = \hat{C}.$$

- Набор матриц

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} cos\phi & sin\phi & 0 \\ -sin\phi & cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \phi \le 2\pi$$

образует группу, параметризуемую углом ϕ, причем единичному элементу соответствует $\phi = 0$, кроме того,

$$\hat{A} = \hat{A}^{-1}, \quad \text{т.е.} \quad \hat{A} \cdot \hat{A}^t = \hat{I},$$

а это означает, что матрицы $\hat{A}$ представляют частный случай ортогональных преобразований. Легко убедиться, что преобразование

$$\hat{x}' = \hat{A}\hat{x} \quad \text{с} \quad det\hat{A} = 1$$

описывает поворот исходной системы координат на угол ϕ вокруг оси z.

- Рассмотренные в предыдущем примере преобразования образуют подгруппу общей группы преобразований
$$\hat{x}' = \hat{A}_{\phi_1}\hat{A}_\theta\hat{A}_{\phi_2}\hat{x},$$
которая называется собственной группой ортогональных преобразований или *группой вращений*. Матрицы $\hat{A}_{\phi_1}$ и $\hat{A}_{\phi_2}$ имеют такой же вид, что и матрица $\hat{A}$ предыдущего примера, с заменой ϕ на ϕ_1 и ϕ_2 соответственно, а
$$\hat{A}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \theta \le \pi.$$
Найдите самостоятельно элементы матрицы $\hat{A} = \hat{A}_{\phi_1}\hat{A}_\theta\hat{A}_{\phi_2}$, ее детерминант и след. Докажите, что эта матрица – частный случай матрицы ортогональных преобразований.
- **Справка:** подгруппой N группы M назовем подмножество элементов группы M, которые образуют группу относительно групповой операции, установленной в M.

III. Геометрические объекты 2-го и выше рангов

Большинство физических величин задают в виде числовых функций от точки в пространстве. Если у нас несколько таких величин – несколько функций точки (в трехмерном пространстве – 3, в n-мерном пространстве – n), то их можно использовать для задания вектор-функции точки. Физические, геометрические величины описываются набором функций точки лишь после того, как в пространстве задана какая-либо система координат, а числовая запись этих величин существенно меняется, если будут заданы другие координаты. Большой класс объектов такого рода составляют *тензоры*, простейшим примером которых служат уже знакомые нам ко- и контравариантные векторы. Тривиальный частный случай тензорных величин представляют скаляры, которые не меняются при замене координат.

1. **Алгебра геометрических объектов.** Пусть в каждой системе координат (x^1, x^2, x^3) и в каждой точке пространства задано 3^{n+m} чисел (в N-мерном пространстве – N^{n+m} чисел). В этом случае говорят, что в пространстве определен геометрический объект ранга $n+m$ с n контравариантными и m ковариантными индексами. Законы преобразования компонент геометрического объекта могут быть весьма разнообразными. Простейшими примерами геометрических объектов являются скаляры – объекты 0-го ранга, ко- и контравариантные векторы – объекты 1-го ранга.

   Рассмотрим алгебру этих объектов.

- *Сложение.* В сложении могут участвовать объекты одинакового строения (с одинаковым числом индексов, их расположением и чередованием):
$$A^{i.lm}_{.k} + B^{i.lm}_{.k} = C^{i.lm}_{.k}.$$
Ранг суммы равен рангу каждого из слагаемых.
- *Умножение на число:*
$$B^{i...k}_{r...s} = a \cdot A^{i...k}_{r...s}.$$
- *Внешнее произведение.* Внешним произведением объектов произвольного строения (например, $A^{i.lm}_{.k}$ и $B^{p.s}_{.r}$) называют объект C с компонентами
$$C^{i.lmp.s}_{.k...r} = A^{i.lm}_{.k} \cdot B^{p.s}_{.r}.$$
Как следствие определения отметим некоммутативность произведения геометрических объектов. Ранг внешнего произведения равен сумме рангов сомножителей.
- *Перестановка индексов.* Если произвольно переставить один или несколько индексов объекта A, то полученное образует *новый* объект B того же ранга. Такая операция называется перестановкой индексов. Рассмотрим частные случаи этой операции:
  - **симметризация**
  $$B^i_{kl} = \frac{1}{2}(A^i_{kl} + A^i_{lk}) \equiv A^i_{(kl)}$$
  или по трем индексам
  $$A_{(ikl)} = \frac{1}{3!}(A_{ikl} + A_{lik} + A_{kli} + A_{kil} + A_{lki} + A_{ill});$$
  - **антисимметризация** (иначе альтернирование)
  $$B_{ik} = \frac{1}{2}(A_{ik} - A_{ki}) \equiv A_{[ik]}$$
  или по трем индексам
  $$A_{[ikl]} = \frac{1}{3!}(A_{ikl} + A_{lik} + A_{kli} - A_{kil} - A_{lki} - A_{ill}).$$
  - Геометрический объект называется *симметричным*, если его ко- или контравариантные компоненты не меняются от перестановки двух или нескольких индексов, например,
  $$A_{...kl...} = A_{...lk...},$$
  и *антисимметричным* по отношению к данным индексам, если его компоненты меняют свой знак на обратный при любой нечетной перестановке индексов и остаются неизменными при любой четной, например,
  $$A_{...ikl...} = -A_{...ilk...} = A_{...lik...}.$$

- *Свертка.* Эта операция возможна только над объектами, которые имеют не менее чем по одному ко- и контравариантному индексу. Свертка состоит в замене одного контравариантного (ковариантного) индекса на такой же ковариантный (контравариантный) с последующим суммированием по этому индексу. Например, для объекта A^i_{kl} свертка состоит в том, что индекс k заменяется на i с последующим суммированием:

$$B_l = A^i_{il} = A^1_{1l} + A^2_{2l} + A^3_{3l} + \dots$$

В частности, скалярное произведение векторов a^i и b_k содержит две операции - их произведение $a^i \cdot b_k$ и последующую свертку:

$$\vec{a}\vec{b} = a^i \cdot b_i = a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3 + \dots$$

Скалярное произведение – пример *внутреннего произведения.* Внешнее произведение со сверткой между сомножителями станет *внутренним произведением* геометрических объектов. Например,

$$C^i_{.km} = A^{il}_{..m} \cdot B_{lk}.$$

Ранг внутреннего произведения равен сумме рангов сомножителей минус удвоенное число индексов, по которым проводилась свертка; в последнем примере свертка проводилась по одному индексу и ранг внутреннего произведения равен $3 = (3 + 2) - 2 \cdot 1$.

2. **Тензоры.** Геометрический объект, который при допустимых преобразованиях координат преобразуется согласно

$$A^{i\dots k}_{l\dots m} = \frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^n} \cdots \frac{\partial x^k}{\partial \acute{x}^p} \frac{\partial \acute{x}^r}{\partial x^l} \cdots \frac{\partial \acute{x}^s}{\partial x^m} \acute{A}^{n\dots p}_{r\dots s},$$

назовем *тензором.*

Тензорный закон преобразования обладает групповыми свойствами, что легко увидеть, учитывая известное соотношение

$$\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} = \frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^l} \frac{\partial \acute{x}^l}{\partial \tilde{x}^k}.$$

Заметим также, что геометрический объект, который является тензором относительно одной группы преобразований, может не быть таковым относительно какой-либо другой.

Из закона преобразования тензоров следует, что если все компоненты тензора равны нулю в одной системе координат, то они остаются равными нулю в любой другой координатной системе. Это, в свою очередь, означает, что если физический закон имеет форму равного нулю тензорного

соотношения, то этот закон будет иметь такую же форму в любой из допустимых координатных систем. Исходя из закона преобразования тензоров, можно показать, что симметричность и антисимметричность тензора – свойства абсолютные, т.е. не зависящие от выбора координатной системы.

Существует так называемый **"обратный тензорный признак"** (иногда этот признак называют *строгой теоремой частного*), который позволяет выяснить, является ли геометрический объект тензором. Суть его состоит в следующем: пусть в результате свертки этого объекта с некоторым вектором A^k получается другой вектор B^i, т.е.

$$T^i_k A^k = B^i,$$

тогда можно утверждать, что T^i_k – тензор. В самом деле, учитывая закон преобразования контравариантного вектора и то обстоятельство, что в штрихованной системе координат $\acute{T}^i_k \acute{A}^k = \acute{B}^i$, имеем

$$T^i_k \frac{\partial x^k}{\partial \acute{x}^l} \acute{A}^l = \frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^m} \acute{B}^m = \frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^m} \acute{T}^m_l \acute{A}^l.$$

Помножим обе части равенства на $\partial \acute{x}^p / \partial x^i$ и, просуммировав по i, получим

$$(T^i_k \frac{\partial \acute{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial \acute{x}^l} - \acute{T}^p_l) \acute{A}^l = 0.$$

Поскольку вектор $\acute{A}^l$ произволен, то ясно, что T^i_k преобразуется, как тензор.

Докажем также, что свертка двух тензоров по одному индексу является тензором:

$$S^k_{in} = A^{km}_i B_{mn} = \frac{\partial x^k}{\partial \acute{x}^l} \frac{\partial x^m}{\partial \acute{x}^p} \frac{\partial \acute{x}^q}{\partial x^i} \acute{A}^{lp}_q \frac{\partial \acute{x}^r}{\partial x^m} \frac{\partial \acute{x}^t}{\partial x^n} \acute{B}_{rt} = \frac{\partial x^k}{\partial \acute{x}^l} \frac{\partial \acute{x}^q}{\partial x^i} \frac{\partial \acute{x}^t}{\partial x^n} \delta^r_p \acute{A}^{lp}_q \acute{B}_{rt}$$

$$= \frac{\partial x^k}{\partial \acute{x}^l} \frac{\partial \acute{x}^q}{\partial x^i} \frac{\partial \acute{x}^t}{\partial x^n} \acute{S}^l_{qt}.$$

Аналогично можно убедиться, что в результате полной свертки тензора, имеющего одинаковое число ко- и контравариантных индексов, получается скаляр.

Ранее, исходя из определения фундаментальной матрицы $g_{ik} = \vec{e}_i \vec{e}_k$ и закона преобразования векторов локального базиса $\vec{e}_i$, был найден закон преобразования фундаментальной матрицы:

$$g_{ik} = \frac{\partial \acute{x}^m}{\partial x^i} \frac{\partial \acute{x}^n}{\partial x^k} \acute{g}_{mn}.$$

Это позволяет заключить, что g_{ik}, так же как и g^{ik}, – тензорные величины, поэтому в дальнейшем, как это принято в геометрии, будем называть g_{ik} *фундаментальным* (или *метрическим*) тензором. Задание метрического тензора определяет расстояние между двумя бесконечно близкими точками:

$$dl^2 = g_{ik} dx^i dx^k.$$

По определению, если учесть векторный характер dx^i, это расстояние – инвариант.

Фундаментальный и обратный ему тензор, так же как и в случае векторов, будем использовать для поднятия и опускания индексов. Например, для тензора 2-го ранга

$$T^{ik} = g^{il} g^{km} T_{lm}, \qquad T_{ik} = g_{il} g_{km} T^{lm}, \qquad T^i_k = g^{il} g_{km} T^m_l.$$

Теперь покажем, что символ Кронекера δ^i_k, определенный как

$$\delta^i_k = g^{il} g_{lk},$$

является единичным тензором 2-го ранга. Действительно,

$$\delta^i_k = g^{il} g_{lk} = \frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^m} \frac{\partial x^l}{\partial \acute{x}^n} \frac{\partial \acute{x}^p}{\partial x^l} \frac{\partial \acute{x}^q}{\partial x^k} \acute{g}^{mn} \acute{g}_{pq} = \frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^m} \frac{\partial \acute{x}^q}{\partial x^k} \delta^p_n \acute{g}^{mn} \acute{g}_{pq} = \frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^m} \frac{\partial \acute{x}^q}{\partial x^k} \acute{g}^{mn} \acute{g}_{nq}$$

$$= \frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^m} \frac{\partial \acute{x}^q}{\partial x^k} \acute{\delta}^m_q,$$

а единичность этого символа видна из

$$A^i = \delta^i_k A^k.$$

3. **Символ и тензор Леви-Чивита. Плотность псевдотензора, тензорная плотность, псевдотензоры.** Совокупность величин $\epsilon_{ik...l}$ или $\epsilon^{ik...l}$ с числом индексов, совпадающим с размерностью пространства, антисимметричных по всем своим индексам ("совершенно антисимметричных величин"), причем $\epsilon_{123...n} = 1$, назовем **символом Леви-Чивита**. Из определения следует, что

- если среди индексов есть одинаковые, то $\epsilon_{ik...l} = \epsilon^{ik...l} = 0$,
- если последовательность индексов получена из $123...n$ четной перестановкой, то $\epsilon_{ik...l} = \epsilon^{ik...l} = +1$,
- если последовательность индексов получена из $123...n$ нечетной перестановкой, то $\epsilon_{ik...l} = \epsilon^{ik...l} = -1$.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением 3-мерного случая, поскольку обобщение на n-мерный труда не представляет. Итак,

$$\epsilon_{ikl} = \epsilon^{ikl} = \begin{cases} +1 & ikl \text{ получено из } 1,2,3 \text{ четной перестановкой}, \\ -1 & ikl \text{ получено из } 1,2,3 \text{ нечетной перестановкой}. \end{cases}$$

В оставшихся случаях, т.е. при совпадении индексов, символ Леви-Чивита равен нулю.

Прямым вычислением нетрудно убедиться, что определитель произвольной матрицы $\hat{A}$ с матричными элементами A^i_k связан с символом Леви-Чивита соотношением

$$\epsilon_{mnp} det(A^i_k) = \epsilon_{ikl} A^i_m A^k_n A^l_p.$$

В частности, если $\hat{A}$ – якобиева матрица преобразования координат, то якобиан Y выражается через символы Леви-Чивита согласно

$$Y \epsilon_{mnp} = \epsilon_{ikl} \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^m} \frac{\partial \acute{x}^k}{\partial x^n} \frac{\partial \acute{x}^l}{\partial x^p}.$$

Это соотношение определяет трансформационные свойства символа Леви-Чивита. Если преобразования координат имеют якобиан $Y = 1$, то ясно, что ϵ_{ikl} преобразуется, как ковариантный тензор 3-го ранга. Возникает вопрос: можно ли в произвольной системе координат ввести тензорную величину, аналогичную по своим свойствам символу Леви-Чивита? Преобразуем с этой целью ϵ_{ikl} от системы координат, в которой эта величина – тензор, к произвольной системе координат. В результате получим тензор

$$E_{ikl} = \epsilon_{mnp} \frac{\partial \acute{x}^m}{\partial x^i} \frac{\partial \acute{x}^n}{\partial x^k} \frac{\partial \acute{x}^p}{\partial x^l},$$

учитывая закон преобразования символа Леви-Чивита, получим

$$E_{ikl} = Y \epsilon_{ikl}.$$

С другой стороны, компоненты метрического тензора преобразуются согласно

$$g_{ik} = \frac{\partial \acute{x}^m}{\partial x^i} \frac{\partial \acute{x}^n}{\partial x^k} \acute{g}_{mn},$$

откуда

$$det(g_{ik}) = Y^2 \cdot det(\acute{g}_{mn}).$$

Допустим, что $\acute{g}_{mn}$ – метрический тензор в той координатной системе, в которой ϵ_{ikl} обладает тензорными свойствами. Такой системой координат является, например, декартова, где $det(\acute{g}_{mn}) = 1$, поэтому

$$Y = \sqrt{g}, \quad \text{где} \quad g = |det g|$$

и величина

$$E_{ikl} = \sqrt{g}\epsilon_{ikl}$$

есть совершенно антисимметричный тензор 3-го ранга, который назовем *тензором Леви-Чивита.* Контравариантные компоненты этого тензора

$$E^{ikl} = g^{im}g^{kn}g^{lp}E_{mnp} = \sqrt{g}g^{im}g^{kn}g^{lp}\epsilon_{mnp},$$

а детерминант любой матрицы, в частности g^{ik}, выражается через символ Леви-Чивита согласно

$$\epsilon^{ikl}det(g^{ik}) = g^{im}g^{kn}g^{lp}\epsilon_{mnp}.$$

Тогда

$$E^{ikl} = \sqrt{g}\epsilon^{ikl}det(g^{ik}).$$

Ввиду того, что $g^{il}g_{lk} = \delta^i_k$, для $det(g^{ik})$ имеем $det(g^{ik}) = 1/g$, поэтому контравариантные компоненты совершенно антисимметричного тензора определяются символом Леви-Чивита согласно

$$E^{ikl} = \frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{ikl}.$$

Определение символа Леви-Чивита позволяет просто получить

$$\epsilon^{ikl}\epsilon_{mnp} \equiv \delta^{ikl}_{mnp} = \begin{Vmatrix} \delta^i_m & \delta^i_n & \delta^i_p \\ \delta^k_m & \delta^k_n & \delta^k_p \\ \delta^l_m & \delta^l_n & \delta^l_p \end{Vmatrix};$$

$$\epsilon^{ikl}\epsilon_{mnl} \equiv \delta^{ik}_{mn} = \begin{Vmatrix} \delta^i_m & \delta^i_n \\ \delta^k_m & \delta^k_n \end{Vmatrix};$$

$$\epsilon^{ikl}\epsilon_{mkl} = 2\delta^i_m \qquad \epsilon^{ikl}\epsilon_{ikl} = 3!$$

(В n-мерном пространстве $\epsilon^{ik...l}\epsilon_{ik...l} = n!$). Учитывая эти равенства для детерминанта $\hat{A}$, получим

$$det(A^i_k) = \frac{1}{3!}\epsilon^{mnp}\epsilon_{ikl}A^i_m A^k_n A^l_p,$$

а для якобиана координатных преобразований

$$Y = \frac{1}{3!}\epsilon^{mnp}\epsilon_{ikl}\frac{\partial\acute{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial\acute{x}^k}{\partial x^n}\frac{\partial\acute{x}^l}{\partial x^p}.$$

Наряду с совершенно антисимметричным тензором Леви-Чивита, введем тензор, который остается неизменным при четной перестановке индексов

и меняет знак при их нечетной перестановке, назовем его ***совершенно антисимметричным тензором ранга, равного размерности пространства.*** Такой тензор определяется всего одним числом. Например, в трехмерном пространстве

$$T_{123} = T_{312} = T_{231} = -T_{213} = -T_{321} = -T_{132} = T.$$

Понятно, что тензоры такого типа

$$T_{ikl} = T\epsilon_{ikl} \quad \text{или} \quad T^{ikl} = T\epsilon^{ikl},$$

а при преобразованиях координат

$$T = Y\acute{T}.$$

Действительно,

$$T = T_{123} = \frac{\partial\acute{x}^i}{\partial x^1}\frac{\partial\acute{x}^k}{\partial x^2}\frac{\partial\acute{x}^l}{\partial x^3}\acute{T}_{ikl} = \frac{\partial\acute{x}^i}{\partial x^1}\frac{\partial\acute{x}^k}{\partial x^2}\frac{\partial\acute{x}^l}{\partial x^3}\acute{T}\epsilon_{ikl} = Y\acute{T}\epsilon_{123} = Y\acute{T}.$$

В заключение приведем общее определение, которое позволяет классифицировать геометрические объекты по трансформационным свойствам.

Геометрический объект, компоненты которого при преобразованиях координат преобразуются согласно

$$A^{i...k}_{l...m} = Y^p \cdot sgnY\frac{\partial x^i}{\partial\acute{x}^n}\cdots\frac{\partial x^k}{\partial\acute{x}^p}\frac{\partial\acute{x}^r}{\partial x^l}\cdots\frac{\partial\acute{x}^s}{\partial x^m}\acute{A}^{n...p}_{r...s},$$

назовем **плотностью псевдотензора ранга $n+m$ и веса $p \geq 0$.** Итак,

- при $sgnY = 1$ и $p = 0$ объект A является истинным тензором;
- при $sgnY = 1$ и $p \neq 0$ объект A называется **тензорной плотностью** веса p. Например, $det(g_{ik})$ - скалярная плотность веса 2, а ϵ_{ikl} - тензорная плотность веса 1;
- при $sgnY = -1$ и $p = 0$ объект A называется **псевдотензором.**

4. **Ковариантная производная тензора. Абсолютный дифференциал.** Преимущества тензорного исчисления состоят прежде всего в возможности записывать уравнения в ковариантной форме, не зависящей от выбора системы координат. Поэтому при изложении тензорного анализа следует с самого начала определить операцию, с одной стороны, обладающую всеми основными свойствами частной производной, а с другой – сохраняющую тензорный характер. В предыдущем изложении было показано, что частная производная скалярной функции – ковариантный вектор, т.е. величина, тензорный характер которой очевиден. С тем чтобы сохранить

тензорные свойства, было введено понятие ковариантной производной вектора. Это понятие поддается разумному обобщению на случай тензоров. В самом деле, нетрудно видеть, что при замене координат преобразование, соответствующее каждому из ко- или контравариантных тензорных индексов, идентично преобразованию ко- или контравариантных векторов. Поэтому, развивая эту аналогию, весьма правдоподобно предположить, что ковариантная производная тензора составляется из слагаемых трех типов:

- 1-й тип – частная производная тензора по соответствующей координате:
$$\frac{\partial T^{\dots}_{\dots}}{\partial x^k};$$
- 2-й тип, со знаком плюс, составляется для каждого контравариантного тензорного индекса (например, i в $T^{i\dots}_{\dots}$) в виде произведения компоненты тензора на символ Кристоффеля, причем этот контравариантный индекс i присваивается символу Кристоффеля, а взамен него ставится немой индекс, который приписывается и символу Кристоффеля в качестве одного из нижних индексов; второй нижний индекс у символа Кристоффеля – индекс дифференцирования k:
$$+\Gamma^i_{lk}T^{l\dots}_{\dots};$$
- 3-й тип, со знаком минус, составляется для каждого ковариантного тензорного индекса (например, m в $T^{\dots}_{m\dots}$) в виде произведения компоненты тензора на символ Кристоффеля, причем этот индекс m заменяется на немой индекс суммирования, который приписывается также и символу Кристоффеля в качестве верхнего индекса; один из нижних индексов у символа Кристоффеля – индекс дифференцирования k, а второй – m:
$$-\Gamma^n_{mk}T^{\dots}_{n\dots}.$$

При всей своей правдоподобности это предположение нуждается в доказательстве, к которому мы приступим. Рассмотрим для этого некий скаляр φ, который есть результат полной свертки тензора A^i_k и векторов b_l, c^m:

$$\varphi = A^i_k b_i c^k.$$

Найдем ковариантную производную φ, учитывая, что частная производная скалярной функции преобразуется, как компонента ковариантного вектора, и поэтому, в смысле тензорных свойств, совпадает с ковариантной производной:

$$\nabla_l\varphi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x^l} = \frac{\partial A^i_k}{\partial x^l}b_i c^k + A^i_k\Big(\frac{\partial b_i}{\partial x^l}c^k + b_i\frac{\partial c^k}{\partial x^l}\Big)$$

$$= \frac{\partial A^i_k}{\partial x^l}b_i c^k + A^i_k\Big[\Big(\nabla_l b_i + \Gamma^m_{li}b_m\Big)c^k + b_i\Big(\nabla_l c^k - \Gamma^k_{lm}c^m\Big)\Big]$$
$$= A^i_k\nabla_l(b_i c^k) + \Big[\frac{\partial A^i_k}{\partial x^l} + \Gamma^i_{lm}A^m_k - \Gamma^m_{lk}A^i_m\Big]b_i c^k.$$

Заметим, что, во-первых, согласно обратному тензорному признаку содержимое квадратных скобок последней части равенства есть тензор 3-го ранга, во-вторых, сравнивая с очевидным соотношением

$$\nabla_l\varphi = A^i_k\nabla_l(b_i c^k) + (\nabla_l A^i_k)b_i c^k,$$

получим выражение для *ковариантной производной тензора* A^i_k:

$$\nabla_l A^i_k = \frac{\partial A^i_k}{\partial x^l} + \Gamma^i_{lm}A^m_k - \Gamma^m_{lk}A^i_m.$$

Итак, предположение, обобщающее понятие ковариантной производной вектора, доказано. Одновременно удалось показать, что *ковариантная производная повышает на единицу ранг тензора.*

Уместно ввести связанное с ковариантной производной понятие абсолютного дифференциала. *Абсолютным (ковариантным) дифференциалом* тензора A (иногда мы будем пользоваться таким обозначением тензора, подразумевая, что ему может быть приписано какое угодно число индексов и их расположение) назовем произведение ковариантной производной A по x^l на dx^l с последующим суммированием по l:

$$DA \equiv \nabla_l A\cdot dx^l.$$

Нетрудно понять, что абсолютный дифференциал DA имеет ранг тензора A (докажите!).

Для того, чтобы еще раз обосновать необходимость введения понятий ковариантной производной и абсолютного дифференциала, покажем, что dA_i не вектор (а $\partial A_i/\partial x^k$ не тензор). Действительно, поскольку dA_i есть разность векторов, расположенных в разных (хотя и бесконечно близких) точках пространства, в которых эти векторы преобразуются с различными (зависящими от точки) коэффициентами преобразовния, dA_i не может преобразовываться, как вектор. В сказанном легко убедиться непосредственно:

$$dA_i = d\Big(\frac{\partial \acute{x}^k}{\partial x^i}\acute{A}_k\Big) = \frac{\partial \acute{x}^k}{\partial x^i}d\acute{A}_k + \acute{A}_k\frac{\partial^2\acute{x}^k}{\partial x^i\partial x^l}dx^l.$$

Таким образом, dA_i (так же как и $\partial A_i/\partial x^k$), вообще говоря, преобразуется не как вектор (тензор). dA_i превращается в компоненты вектора, а $\partial A_i/\partial x^k$ – тензора только в случае линейных преобразований координат, т.е. если вторая производная в последнем выражении обращается в нуль (например, в декартовых координатах). (Кстати, это неплохой пример уже обсуждавшейся ситуации, когда одна и та же величина является вектором (тензором) относительно одной группы преобразований координат и не является таковым относительно другой.) С другой стороны, ковариантная производная имеет тензорный характер, а в произвольных координатах играет такую же роль, что и $\partial A_i/\partial x^k$ в декартовых координатах.

Докажем важное утверждение – *фундаментальный (метрический) тензор ковариантно постоянен*, что означает обращение в нуль его ковариантной производной. Как и для любого тензора 2-го ранга,

$$\nabla_l g^{ik} = \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{lm} g^{mk} + \Gamma^k_{ln} g^{in}.$$

Подставив сюда выраженные через метрический тензор символы Кристоффеля

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^i m \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right),$$

получим

$$\nabla_l g^{ik} = \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + g^{in} g^{km} \frac{\partial g^{mn}}{\partial x^l}.$$

Тензор g^{ik} можно рассматривать как результат поднятия индексов у g_{mn}, т.е. g^{ik} можно представить в виде

$$g^{ik} = g^{im} g^{kn} g_{mn}.$$

Продифференцировав это соотношение по x^l, получим

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = \frac{\partial g^{in}}{\partial x^l} \delta^k_n + \frac{\partial g^{km}}{\partial x^l} \delta^i_m + g^{in} g^{km} \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^l} = 2\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + g^{in} g^{km} \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^l}$$

или

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = -g^{in} g^{km} \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^l} \quad \Longrightarrow \quad \nabla_l g^{ik} = 0.$$

Точно так же можно убедиться, что

$$\nabla_l g_{ik} = 0.$$

Наряду с метрическим тензором ковариантно постоянны символы Кронекера и Леви-Чивита, первый – вследствие известного соотношения $g^{il} g_{lk} = \delta^i_k$, а второй – ввиду того, что выражается через определитель матрицы, элементами которой являются символы Кронекера, т.е. через сумму произведений δ^i_k.

5. **Тензоры, порождаемые производными первого порядка. Ковариантные производные второго порядка.** Рассмотрим геометрические объекты, которые получаются в результате ковариантного дифференцирования ко- и контравариантных тензоров.

(a) **Градиент скалярной функции** получается как результат ковариантного дифференцирования скаляра и просто равен частной производной скаляра:

$$\nabla_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \equiv (\varphi)_{,i}$$

и поэтому преобразуется, как ковариантный вектор.

(b) **Дивергенция** получается как результат свертки одного из контравариантных индексов тензора с индексом ковариантного дифференцирования:

$$\nabla_i T^{(i\ldots)}_{(\ldots)}.$$

В результате получается тензор, ранг которого на единицу меньше ранга исходного тензора. В частности, дивергенция вектора (контравариантного) – скаляр. Покажем, что если дивергенция берется от вектора или антисимметричного тензора, то она простым образом выражается через частную производную. Действительно, согласно общему правилу

$$\nabla_l T^{ik\ldots l} = \frac{\partial T^{ik\ldots l}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ml} T^{mk\ldots l} + \Gamma^k_{ml} T^{im\ldots l} + \ldots + \Gamma^l_{ml} T^{ik\ldots m}.$$

Символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам, поэтому все слагаемые, содержащие $\Gamma^{(\cdot)}_{ml}$, за исключением последнего, обращаются в нуль, так как оба нижних индекса сворачиваются с индексами антисимметричного тензора. Таким образом,

$$\nabla_l T^{ik\ldots l} = \frac{\partial T^{ik\ldots l}}{\partial x^l} + \Gamma^l_{ml} T^{ik\ldots m}.$$

Подсчитаем Γ^l_{ml}:

$$\Gamma^l_{ml} = \frac{1}{2} g^{ln} \left(\frac{\partial g_{nm}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{nl}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^n} \right) = \frac{1}{2} g^{ln} \frac{\partial g_{nl}}{\partial x^m}.$$

- Докажем, что для любой матрицы $\hat{a}$ с элементами a_{ik} и детерминантом $a_0 = det\hat{a}$

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_{ik}} = A^{ik}, \qquad (*)$$

где

$$A^{ik} = \frac{1}{(3-1)!} \epsilon^{ivw} \epsilon^{knp} a_{vn} a_{wp}$$

– алгебраическое дополнение. (Предположено, что пространство трехмерно, обобщение на большее число измерений не представляет трудностей.) Считая определитель

$$a_0 = \frac{1}{3!} \epsilon^{uvw} \epsilon^{mnp} a_{um} a_{vn} a_{wp}$$

функцией своих элементов a_{ik}, дифференцируя по a_{ik} с учетом того, что $\partial a_{uv}/\partial a_{ik} = \delta^i_u\delta^k_v$, получим

$$\frac{\partial a_0}{\partial a_{ik}} = \frac{1}{3!}(\epsilon^{ivw}\epsilon^{knp}a_{vn}a_{wp} + \epsilon^{uiw}\epsilon^{mkp}a_{um}a_{wp} + \epsilon^{uvi}\epsilon^{mnk}a_{um}a_{vn}) =$$

$$\frac{1}{3}(A^{ik} + A^{ik} + A^{ik}) = A^{ik}.$$

Предположим далее, что существует объект a^{ik}, для которого

$$a_{ik}a^{kl} = \delta^l_i.$$

Покажем, что

$$a^{kl} = \frac{A^{kl}}{a_0},$$

для чего подсчитаем свертку:

$$a_{ik}\frac{A^{kl}}{a_0} = \frac{1}{(3-1)!a_0}\epsilon^{kvw}\epsilon^{lnp}a_{vn}a_{wp}. \qquad (**)$$

Согласно известному соотношению

$$\epsilon_{inp}a_0 = \epsilon^{kuw}a_{ik}a_{nu}a_{pw} \Longrightarrow \epsilon^{lnp}\epsilon_{inp}a_0 = \epsilon^{lnp}\epsilon^{kuw}a_{ik}a_{nu}a_{pw}$$

и ввиду того, что

$$\epsilon^{lnp}\epsilon_{inp}a_0 = 2!a_0\delta^l_i,$$

после сравнения с $(**)$ имеем

$$a_{ik}\frac{A^{kl}}{a_0} = \delta^l_i. \qquad (^*_*)$$

Используя $(*)$ и $(^*_*)$, получаем

$$\frac{1}{a_0}\frac{\partial a_0}{\partial x^m} = a^{kl}\frac{\partial a_{kl}}{\partial x^m}$$

или в общем виде для любой невырожденной матрицы $A(x)$

$$Sp\Big(A^{-1}\frac{\partial A}{\partial x^i}\Big) = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(ln(detA)\Big).$$

Этот результат позволяет завершить вычисление

$$\Gamma^l_{ml} = \frac{1}{2}g^{nl}\frac{\partial g_{ln}}{\partial x^m} \Longrightarrow \Gamma^l_{ml} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^m}, \quad \text{где} \quad g = detg_{ik},$$

и выражения для дивергенции антисимметричного тензора

$$\nabla_l T^{ik...l} = \frac{\partial T^{ik...l}}{\partial x^l} + \Gamma^l_{ml}T^{ik...m} = \frac{\partial T^{ik...l}}{\partial x^l} + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^m}T^{ik...m}$$

или окончательно

$$\nabla_l T^{ik...l} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^l}\Big(\sqrt{g}T^{ik...l}\Big).$$

В частности, для вектора A^i и антисимметричного тензора 2-го ранга $A^{ik} = -A^{ki}$ имеем

$$\nabla_i A^i = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^l}\Big(\sqrt{g}A^l\Big), \qquad \nabla_i A^{ik} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\sqrt{g}A^{ik}\Big).$$

Подсчитаем теперь ковариантную дивергенцию для смешанных компонент симметричного тензора $A^{ik} = A^{ki}$. Имеем

$$\nabla_k A^k_i = \frac{\partial A^k_i}{\partial x^k} + \Gamma^k_{lk}A^l_i - \Gamma^l_{ki}A^k_l = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\Big(\sqrt{g}A^k_i\Big) - \Gamma^l_{ki}A^k_l.$$

Последнее слагаемое здесь равно

$$-\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}A^{kl}\Big).$$

Из-за симметрии A^{kl} первый и третий члены сокращаются, и окончательно

$$\nabla_k A^k_i = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\Big(\sqrt{g}A^k_i\Big) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}A^{kl}.$$

(c) **Ротор**. Контравариантный вектор

$$R^m = \frac{1}{(n-2)!}\frac{\epsilon^{mli...k}}{\sqrt{g}}\frac{\partial A_{i...k}}{\partial x^l}$$

назовем ротором антисимметричного тензора $A_{i...k}$ ранга $n-2$. В согласии с этим в трехмерном пространстве вектор ротора определяется следующим образом:

$$R^i = \frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{ikl}\frac{\partial A_l}{\partial x^k}.$$

Таким образом, в трехмерии вектор ротора сопоставляется вектору, и только в пространствах размерности $n \geq 4$ он может быть сопоставлен антисимметричным тензорам (в 4-мерии – тензору 2-го ранга и т.д.). Антисимметричному тензору 2-го ранга можно сопоставить так называемый *тензор Стокса – Пуанкаре*, который в этом частном случае имеет вид

$$P_{ikl} = \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}, \quad F_{ik} = -F_{ki}.$$

Интересно отметить, что если

$$F_{ik} = \nabla_i A_k - \nabla_k A_i = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k},$$

то прямой подстановкой можно убедиться, что в этом случае тензор Стокса – Пуанкаре равен нулю. (В последнем соотношении разность ковариантных производных совпадает с разностью частных производных, т.к. слагаемые с символами Кристоффеля у выражений ковариантных производных из-за симметрии этих символов по нижним индексам сокращаются.)

Замечание. Операция *дуальности* позволяет построить новые тензоры из антисимметричных тензоров. В трехмерии для любого вектора V_i и любого антисимметричного тензора второго ранга $T_{ik} = T_{[ik]}$ новые тензоры определяются равенствами

$$*V^{kl} = \frac{\epsilon^{kli}}{\sqrt{g}} V_i, \qquad *T^l = \frac{\epsilon^{lik}}{\sqrt{g}} T_{[ik]}.$$

Тензоры со звездой называют дуальными тем тензорам, из которых они построены. В четырехмерном пространстве дуальные тензоры сопоставляются вектору, антисимметричному тензору 2-го ранга и антисимметричному тензору 3-го ранга по правилам

$$*F^m = \frac{1}{3!}\frac{\epsilon^{mikl}}{\sqrt{g}} F_{[ikl]}, \qquad *T^{lm} = \frac{1}{2}\frac{\epsilon^{lmik}}{\sqrt{g}} T_{[ik]}, \qquad *V^{klm} = \frac{\epsilon^{klmi}}{\sqrt{g}} V_i.$$

Теперь нетрудно убедиться в том, что ротор – это вектор, дуальный тензору Стокса – Пуанкаре. Действительно, в четырехмерии

$$*F^m = \frac{1}{3!}\frac{\epsilon^{mikl}}{\sqrt{g}} P_{[ikl]} = \frac{1}{3!}\frac{\epsilon^{mikl}}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}\right) =$$

$$\frac{1}{3!}\frac{\epsilon^{mikl}}{\sqrt{g}} 3\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} = \frac{1}{2!\sqrt{g}}\epsilon^{mlik}\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}$$

совпадает с определением ротора антисимметричного тензора F_{ik}.

(d) **Ковариантные производные второго порядка.** Каким будет результат свертки g^{ik} с дважды ковариантно продифференцированным скаляром φ? Обозначим такую конструкцию

$$\Delta\varphi \equiv g^{ik}\nabla_i\nabla_k\varphi$$

и назовем ее *оператором Лапласа*. Легко показать, что $\Delta\varphi$ достаточно просто выражается через обычные производные. В самом деле,

$$\Delta\varphi = g^{ik}\nabla_i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right) = g^{ik}\left(\frac{\partial\varphi_{,k}}{\partial x^i} - \Gamma^l_{ik}\varphi_{,l}\right).$$

Подсчитаем свертку:

$$g^{ik}\Gamma^l_{ik} = \frac{1}{2}g^{ik}g^{lm}\left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\right).$$

Поскольку

$$g^{lm}g_{mi} = \delta^l_i \Longrightarrow g^{lm}\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} = -g_{mi}\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^k} \Longrightarrow \frac{1}{2}g^{ik}g^{lm}\left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i}\right) = -\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^m},$$

то

$$g^{ik}\Gamma^l_{ik} = -\frac{1}{2}g^{ik}g^{lm}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} - \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^m} = -\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^m} - \frac{g^{lm}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^m} = -\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^m}(\sqrt{g}g^{lm}).$$

Подставив это в выражение для оператора Лапласа, получим

$$\Delta\varphi = g^{ik}\left(\frac{\partial\varphi_{,k}}{\partial x^i} - \Gamma^l_{ik}\varphi_{,l}\right) = g^{im}\frac{\partial\varphi_{,i}}{\partial x^m} + \frac{\varphi_{,i}}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^m}(\sqrt{g}g^{im}).$$

Итак, ковариантное выражение для оператора Лапласа имеет вид

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right).$$

IV. Векторный анализ в трехмерном евклидовом пространстве

1. **Системы ортогональных координат.** Систему криволинейных координат назовем ортогональной, если в каждой точке (x^1, x^2, x^3) векторы локального базиса, так же как и координатные линии, взаимно перпендикулярны, а метрический тензор $g_{ik}(x^1, x^2, x^3)$ диагонален. Простейшие примеры ортогональных криволинейных координат – это цилиндрические координаты (вместе со своим частным случаем – полярными координатами) и сферические координаты. В произвольной системе координат "расстояние между двумя близкими точками"

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k,$$

а в ортогональной системе координат

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2.$$

Введем "элемент длины" по каждой из координатных линий:

$$dl_i = \sqrt{g_{ii}}dx^i \text{ (суммирования по } i \text{ нет)},$$

тогда

$$ds^2 = (dl^1)^2 + (dl^2) + (dl^3)^2,$$

и для элемента объема будем иметь

$$dV = \sqrt{dl_1 dl_2 dl_3} dx^1 dx^2 dx^3 = \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3.$$

В цилиндрических координатах

$$ds^2 = g_{\rho\rho}d\rho^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2 + g_{zz}dz^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2,$$

$$dl_\rho = d\rho, \quad dl_\phi = \rho d\phi, \quad dl_z = dz, \qquad dV = \rho d\rho d\phi dz.$$

В сферических координатах

$$ds^2 = g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\phi^2,$$

$$dl_r = dr, \quad dl_\theta = rd\theta, \quad dl_{/phi} = rsin\theta d\phi, \qquad dV = r^2 sin\theta dr d\theta d\phi.$$

Как в цилиндрических, так и в сферических координатах векторы локального базиса не единичны и не безразмерны. Возникает вопрос: можно ли ввести такую систему координат, в которой в каждой точке базисные векторы являются безразмерными и единичными? Этого можно достичь, если принять в качестве базисных векторов

$$\hat{e}_i = \frac{\vec{e}_i}{\mid \vec{e}_i \mid}.$$

В ортогональной системе координат $\mid \vec{e}_i \mid^2 = g_{ii}$ (суммирования по i нет), т.е.

$$\hat{e}_i = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\vec{e}_i.$$

Тогда в цилиндрической системе

$$\hat{e}_\rho = \vec{e}_\rho, \qquad \hat{e}_z = \vec{e}_z, \qquad \hat{e}_\phi = -\vec{i}sin\phi + \vec{j}cos\phi,$$

а в сферической системе

$$\hat{e}_r = \vec{e}_r, \qquad \hat{e}_\theta = \vec{i}cos\theta cos\phi + \vec{j}cos\theta sin\phi - \vec{k}sin\theta, \qquad \hat{e}_\phi = -\vec{i}sin\phi + \vec{j}cos\phi.$$

Любая векторная функция $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(x,y,z)$ может быть однозначно представлена в виде

$$\vec{A} = \hat{A}^i\hat{e}_i = A^i\vec{e}_i = A_i\vec{e}^i,$$

где $\hat{A}^i$ – так называемые "физические" компоненты вектора $\vec{A}^i$. Легко видеть, что

$$\hat{A}^i\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\vec{e}_i = A^i\vec{e}_i \Longrightarrow \hat{A}^i = \sqrt{g_{ii}}A^i \quad \text{или} \quad \hat{A}^k = \sqrt{g^{kk}}A_k.$$

В каждой точке пространства как базисные векторы $\hat{e}_i$, так и "физические" компоненты вектора $\vec{A}^i$ касательны к координатным линиям. Из-за наличия множителей $\sqrt{g_{ii}}$ и $\sqrt{g^{ii}}$ "физические" компоненты не подчиняются законам преобразования векторов и поэтому не являются ковариантными величинами.

Связь "физических" компонент векторов в цилиндрической или сферической системах координат с соответствующими компонентами в декартовой системе можно найти достаточно просто, имея компоненты метрического тензора. Например,

- в сферических координатах

$$\hat{A}^r = \sqrt{g_{rr}}A^r = A^r = g^{rr}A_r = A_r = \frac{\partial x^i}{\partial r}A_i = \frac{\partial x}{\partial r}A_x + \frac{\partial y}{\partial r}A_y + \frac{\partial z}{\partial r}A_z.$$

Следовательно,

$$\hat{A}^r = A^r = A_r = A_x sin\theta cos\phi + A_y sin\theta sin\phi + A_z cos\theta.$$

Точно так же

$$\hat{A}^\theta = \sqrt{g^{\theta\theta}}A_\theta = \sqrt{g^{\theta\theta}}\frac{\partial x^i}{\partial\theta}A_i = \sqrt{g^{\theta\theta}}\Big(\frac{\partial x}{\partial\theta}A_x + \frac{\partial y}{\partial\theta}A_y + \frac{\partial z}{\partial\theta}A_z\Big),$$

поэтому

$$\hat{A}^\theta = A_x cos\theta cos\phi + A_y cos\theta sin\phi - A_z sin\theta, \quad A^\theta = r\hat{A}^\theta, \quad A_\theta = \frac{\hat{A}^\theta}{r},$$

$$\hat{A}^\phi = -A_x sin\phi + A_y cos\phi, \quad A^\phi = rsin\theta\hat{A}^\phi, \qquad A_\phi = \frac{\hat{A}^\phi}{rsin\theta}.$$

В частности, "физические" компоненты градиента

$$(grad\psi)^{\hat{i}} = \sqrt{g^{ii}}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}, \quad (grad\psi)^{\hat{r}} = \frac{\partial\psi}{\partial r},$$

$$(grad\psi)^{\hat{\theta}} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad (grad\psi)^{\hat{\phi}} = \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}.$$

Аналогично этому

- в цилиндрических координатах

$$A^{\hat{\rho}} = A^{\rho} = A_{\rho} = A_x cos\phi + A_y sin\phi, \quad A^{\hat{z}} = A_z = A^z = A_z,$$

$$A^{\hat{\phi}} = -A_x sin\phi + A_y cos\phi, \quad A^{\phi} = \rho A^{\hat{\phi}}, \quad A_{\phi} = \frac{A^{\hat{\phi}}}{\rho}.$$

А "физические" компоненты градиента имеют следующий вид:

$$(grad\psi)^{\hat{\rho}} = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}, \quad (grad\psi)^{\hat{\phi}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}, \quad (grad\psi)^{\hat{z}} = \frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Далее в этом разделе, если это специально не оговорено, используются декартовы координаты, поэтому ко- и контравариантные индексы различаются только для того, чтобы сохранить правило суммирования Эйнштейна.

2. **Векторное произведение, смешанное произведение, двойное векторное произведение.** Векторное произведение векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в трехмерном евклидовом пространстве определяется следующим образом:

$$\vec{a} = [\vec{b}, \vec{c}] = \begin{Vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{Vmatrix} = \vec{i}(b_y c_z - c_y b_z) + \vec{j}(b_z c_x - c_z b_x) + \vec{k}(b_x c_y - c_x b_y).$$

Нетрудно убедиться, что в компонентах это определение выглядит следующим образом:

$$a^i = \epsilon^{ikl} b_k c_l,$$

а в криволинейных координатах

$$a^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ikl} b_k c_l.$$

Теперь без труда можно показать, что смешанное произведение допускает циклические перестановки:

$$\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}] = \vec{c}[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{b}[\vec{c}, \vec{a}].$$

Действительно,

$$\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}] = a_i \epsilon^{ikl} b_k c_l = c_l \epsilon^{lik} a_i b_k = b_k \epsilon^{kli} c_l a_i.$$

В тензорных обозначениях легко получить также формулу для двойного векторного произведения:

$$[\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}]]_i = \epsilon_{ikl} a^k \epsilon^{lmn} b_m c_n = (\delta_i^m \delta_k^n - \delta_k^m \delta_i^n) a^k b_m c_n =$$

$$b_i a^n c_n - c_i a^k b_k = b_i(\vec{a}\vec{c}) - c_i(\vec{a}\vec{b}).$$

Два полезных тождества – так называемое *тождество Якоби*

$$[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]] + [\vec{c}[\vec{a}\vec{b}]] + [\vec{b}[\vec{c}\vec{a}]]$$

и

$$[\vec{a}, \vec{b}]^2 = a^2 b^2 - (\vec{a}\vec{b})^2$$

доказаны в разделе "Решения".

3. **Векторный анализ в тензорных обозначениях.** Основная задача векторного анализа состоит в том, чтобы дифференцированием заданных скалярных или векторных функций получить новые величины, которые обладают ковариантными свойствами, т.е. преобразуются, как скаляры или векторы. Как было отмечено выше, такими свойствами в произвольной системе координат обладает оператор ковариантного дифференцирования, который в трехмерной декартовой системе координат можно представить в виде

$$\vec{\nabla} = \nabla_i (\vec{e})^i = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \pm \Gamma_{i.}^{\cdot}\right)(\vec{e})^i = \vec{k}^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \vec{k}^i = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}.$$

Итак, в декартовых координатах дифференциальный оператор

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

который обычно называют *оператором набла*, генерирует новые скалярные или векторные величины из заданных.

(a) **Скалярное поле, поверхности уровня и градиент.** Допустим, в некоторой области пространства M задана функция $\varphi = \varphi(x, y, z)$, которая предполагается однозначной, непрерывной и имеющей непрерывные частные производные первого порядка. В этом случае говорят, что в M задано скалярное поле. Точки, в которых функция $\varphi(x, y, z)$ принимает одно и то же значение, принадлежат поверхности

$$\varphi(x, y, z) = C, \quad \text{где} \quad C = const.$$

Семейство поверхностей одинаковых значений $\varphi(x, y, z)$, которое параметризуется константами $C_1, C_2, \ldots$, называется *поверхностями уровня* или *эквипотенциальными поверхностями* этого скалярного поля $\varphi(x, y, z)$. Например, температура воздуха или атмосферное давление в разных точках пространства образуют поле температур или поле давлений, а поверхности, образованные точками с одинаковыми значениями температуры $(T_1, T_2, \ldots)$ (давления $(P_1, P_2, \ldots)$) являются изотермическими (изобарическими) поверхностями уровня.

Примеры:

- Заряд e, расположенный в начале координат, создает поле, потенциал которого в произвольной точке A с координатами x, y, z есть
$$\varphi = \frac{e}{r}, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$
Скалярное поле определено везде, кроме начала координат $r = 0$.
- Скалярное поле
$$\varphi = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}$$
определено лишь в части пространства,ограниченной сферой $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ с центром в начале координат, т.к. φ принимает действительные значения только при $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$. Поверхностями уровня будет семейство концентрических сфер $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 - C^2$.
- Скалярное поле с потенциалом
$$\varphi = arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
определено во всех точках вне и на поверхности кругового конуса, уравнение которого имеет вид $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Эквипотенциальные поверхности определяются уравнением $z^2 = (x^2 + y^2)sin^2C$.

В каждой точке скалярного поля можно построить вектор, если подействовать векторным оператором набла на потенциал скалярного поля. Полученный в результате вектор
$$\vec{\nabla}\varphi \equiv grad\varphi = \vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \qquad (grad\varphi)_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$$
– это уже знакомый нам *вектор градиента скалярной функции*
$$\varphi(x, y, z),$$
который образует векторное поле. Таким образом, оператор набла по заданному скалярному полю генерирует векторное поле.

Рассмотрим скалярное поле $\varphi(x, y, z)$, заданное в некоторой области M, точку $Q \in M$ и связанный с этой точкой вектор $\vec{s}$. Предположим, что существует предел отношения
$$\frac{\varphi(P) - \varphi(Q)}{PQ}$$
при стремлении P к Q в направлении вектора $\vec{s}$. Тогда
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{s}} = lim_{P\to Q}\frac{\varphi(P) - \varphi(Q)}{PQ}$$

называется производной скалярной функции $\varphi(x, y, z)$ в точке Q по направлению $\vec{s}$ и характеризует скорость изменения скалярного поля φ в направлении $\vec{s}$. Ясно, что
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{s}} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\vec{s}} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\vec{s}} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\vec{s}} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}cos\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}cos\gamma,$$
где α, β, γ – углы между осями x, y, z и вектором $\vec{s}$ соответственно. Итак, производная по направлению – это проекция градиента на это направление, и если $\vec{\tau} = \vec{s}/s$ – единичный вектор в направлении $\vec{s}$, то
$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{s}} = \vec{\tau}\cdot grad\varphi = grad_{\vec{\tau}}\varphi = grad\varphi\cdot cos\psi,$$
где ψ – угол между направлениями $\vec{\tau}$ и $grad\varphi$. Если $\vec{\tau}$ расположен в плоскости, касательной к эквипотенциальной поверхности, то $\partial\varphi/\partial\vec{s} = 0$, т.к. на эквипотенциальной поверхности $\varphi = const$. Таким образом, $grad\varphi$ направлен в сторону возрастания φ по нормали к эквипотенциальной поверхности (т.е. перпендикулярен плоскости, которая касательна к поверхности уровня в каждой точке) и численно равен скорости изменения функции $\varphi(x, y, z)$ по этому направлению. Рассмотрим два примера.

i. Найдем $gradf(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:
$$gradf(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k},$$
$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \Longrightarrow gradf(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r}.$$
В частности,
$$f(r) = r \Longrightarrow grad(r) = \frac{\vec{r}}{r}, \qquad f(r) = \frac{1}{r} \Longrightarrow grad\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

ii. Найдем $grad(\vec{a}\cdot\vec{r})$, где $\vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z$ – постоянный вектор:
$$\vec{a}\cdot\vec{r} = xa_x + ya_y + za_z \Longrightarrow grad(\vec{a}\cdot\vec{r}) = \vec{a}.$$

Используя полученные ранее формулы, приведем для справок выражения для вектора градиента в декартовых, цилиндрических и сферических координатах:
$$\vec{\nabla}\varphi = \hat{e}_i\cdot(grad\varphi)^i =$$
$$\vec{i}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z} =$$

$$\hat{e}_\rho \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \hat{e}_\phi \cdot \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi} + \hat{e}_z \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial z} =$$

$$\hat{e}_r \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \hat{e}_\theta \cdot \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \hat{e}_\phi \cdot \frac{1}{r sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}.$$

Введем также понятие *производной векторной функции* $\vec{a}$ *по направлению* $\vec{c}$. Составим для этого скалярное произведение $\vec{c}$ и $\vec{\nabla}$ и получившимся скалярным дифференциальным оператором подействуем на векторную функцию $\vec{a}$. В результате получим производную $\vec{a}$ по направлению $\vec{c}$:

$$(\vec{c}\cdot\vec{\nabla})\vec{a} = \vec{i}\Big(c_x\frac{\partial}{\partial x} + c_y\frac{\partial}{\partial y} + c_z\frac{\partial}{\partial z}\Big)a_x +$$

$$\vec{j}\Big(c_x\frac{\partial}{\partial x} + c_y\frac{\partial}{\partial y} + c_z\frac{\partial}{\partial z}\Big)a_y + \vec{k}\Big(c_x\frac{\partial}{\partial x} + c_y\frac{\partial}{\partial y} + c_z\frac{\partial}{\partial z}\Big)a_z$$

или в компонентах

$$(\vec{c}\cdot\vec{\nabla})a_i = c_k\frac{\partial a_i}{\partial x^k}.$$

(b) **Векторное поле, векторные линии, поток векторного поля, дивергенция.** Если каждой точке некоторой области пространства M сопоставлена векторная функция $\vec{A}(x,y,z)$, то говорят, что в этой области определено *векторное поле* $\vec{A}$. Иначе говоря, задать векторное поле означает каждой точке $P \in M$ поставить в соответствие одну векторную $\vec{A}(P) = \vec{A}(\vec{r})$ или три скалярные функции $A_x(\vec{r}), A_y(\vec{r}), A_z(\vec{r})$.

Для графического изображения векторного поля вводят понятие векторных или силовых линий, которые имеют также и определенный физический смысл. Кривую, в каждой точке которой касательная к ней совпадает с направлением векторного поля в точке касания, назовем *векторной (или силовой) линией.* Через каждую точку векторного поля, вообще говоря, проходит одна векторная линия, касательная к которой совпадает с вектором $\vec{A}$ в этой точке. В качестве наглядного примера векторного поля рассмотрим поток несжимаемой жидкости. Допустим, что в каждой точке жидкость движется со скоростью, которая зависит только от положения точки, но не зависит от времени – так называемое стационарное течение. Вектор скорости жидкости $\vec{v}(x,y,z)$ дает в каждой точке направление, по которому будет продвигаться частица, попавшая в эту точку, а векторные линии будут линиями тока жидкости.

Найдем систему дифференциальных уравнений, определяющую векторные линии поля. Поскольку элемент длины $d\vec{l}$ векторной линии направлен по касательной к ней, то в силу определения векторной линии образующий поле вектор $\vec{A}$ и $d\vec{l}$ коллинеарны, т.е. имеют пропорциональные проекции:

$$\frac{dl_1}{\hat{A}^1} = \frac{dl_2}{\hat{A}^2} = \frac{dl_3}{\hat{A}^3}.$$

Поэтому уравнения

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}, \qquad \frac{d\rho}{A^\rho} = \frac{\rho d\phi}{A^\phi} = \frac{dz}{A^z}, \qquad \frac{dr}{A^r} = \frac{r d\theta}{A^\theta} = \frac{r sin\theta d\phi}{A^\phi}$$

являются дифференциальными уравнениями векторных (силовых) линий поля $\vec{A}$ в декартовых, цилиндрических и сферических координатах.

Введем теперь важное понятие – *поток вектора.* Допустим, что попрежнему векторное поле определяется функцией $\vec{A}(x,y,z)$. Назовем потоком вектора $\vec{A}(x,y,z)$ через произвольную поверхность S

$$\Phi = \int_S \vec{A}d\vec{\sigma} = \int_S A_n d\sigma,$$

где $d\vec{\sigma} = \vec{n}d\sigma$, а $d\sigma$ – элемент рассматриваемой поверхности S, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к этой поверхности. Физический смысл этого определения прозрачен: если считать $\vec{A}(x,y,z)$ вектором скорости некоторого потока несжимаемой жидкости, то количество жидкости, которое протекает в единицу времени через произвольную поверхность S, находящуюся в этом потоке, очевидно, совпадает с Φ.

Поток вектора – скалярная величина. Учитывая $d\vec{\sigma} = dydz\vec{i} + dxdz\vec{j} + dxdy\vec{k}$ и разложение $\vec{A}$ по ортам той же координатной системы, представим Φ в форме поверхностного интеграла по координатам:

$$\Phi = \int_S \vec{A}d\vec{\sigma} = \int_S A_n d\sigma = \int_S A_x \cdot dydz + A_y \cdot dxdz + A_z \cdot dxdy.$$

Особый интерес представляет случай, когда поверхность S замкнута и ограничивает некий объем V. Сформулируем и примем без доказательства часто используемую теорему, известную как **теорема Гаусса – Остроградского:**

Поток вектора $\vec{A}$ через замкнутую поверхность S равен интегралу от $div\vec{A}$, взятому по объему V, причем S ограничивает или охватывает этот объем:

$$\oint_S \vec{A}d\vec{\sigma} = \int_V div\vec{A}dV.$$

Здесь $div\vec{A}$ – дивергенция векторного поля $\vec{A}$ – операция, определенная ранее, которая по заданному векторному порождает скалярное поле:

$$div\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}.$$

Используя полученные выше соотношения и формулы, приведем выражения для

$$\nabla_i \hat{A}^i = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{g}\hat{A}^l\right):$$

- в декартовых координатах

$$div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

- в цилиндрических координатах

$$div\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A^\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A^\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A^z}{\partial z},$$

- в сферических координатах

$$div\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A^r)}{\partial r} + \frac{1}{r sin\theta}\frac{\partial(sin\theta A^\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r sin\theta}\frac{\partial A^\phi}{\partial \phi}.$$

Теорема Гаусса – Остроградского позволяет выяснить физический смысл дивергенции. Вернемся к аналогии с потоком жидкости. Поток жидкости через замкнутую поверхность равен нулю, если количество жидкости, вытекающей из объема, ограниченного рассматриваемой замкнутой поверхностью, равно количеству жидкости, втекающему в этот объем, т.е. если число источников и стоков жидкости в объеме одинаково или их нет. Если жидкость вытекает из объема, то, т.к. угол между $\vec{n}$ и скоростью жидкости острый, поток через замкнутую S положителен, а суммарное число источников в объеме больше числа стоков. И, наконец, если жидкость втекает в объем, то угол между $\vec{n}$ и скоростью жидкости тупой, поток через поверхность отрицателен, а суммарное число источников в объеме меньше числа стоков. Теперь ясно, что согласно теореме Гаусса – Остроградского можно утверждать следующее:

- если в какой-либо области пространства $div\vec{A} = 0$, то суммарное число источников и стоков векторного поля $\vec{A}$ равно нулю. Другими словами, векторные линии $\vec{A}$ замкнуты (нигде не начинаются и нигде не кончаются);
- если в какой-либо области пространства $div\vec{A} > 0$, то суммарное число источников больше числа стоков, т.е. векторные линии $\vec{A}$ выходят из этой области (начинаются на одной или нескольких точках внутри области);
- если в какой-либо области пространства $div\vec{A} < 0$, то суммарное число источников меньше числа стоков, т.е. векторные линии $\vec{A}$ входят в эту область (заканчиваются на одной или нескольких точках внутри области).

Два свойства дивергенции:

-
$$div(\vec{a} + \vec{b}) = div\vec{a} + div\vec{b}.$$

  Действительно,

$$div(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{\partial(\vec{a} + \vec{b})^i}{\partial x^i} = \frac{\partial \vec{a}^i}{\partial x^i} + \frac{\partial \vec{b}^i}{\partial x^i} = div\vec{a} + div\vec{b}.$$

-
$$div(\varphi \cdot \vec{a}) = \frac{\partial(\varphi \cdot \vec{a})^i}{\partial x^i} = \varphi\frac{\partial \vec{a}^i}{\partial x^i} + \vec{a}^i\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \varphi \cdot div\vec{a} + \vec{a} \cdot grad\varphi.$$

(c) **Интеграл по контуру, циркуляция вектора, ротор, лапласиан.** Рассмотрим некоторую дугу произвольной кривой L в поле вектора $\vec{A}$. Дифференциал $d\vec{r}$ радиус-вектора точки, которая перемещается вдоль L, лежит на касательной к этой кривой и, как известно, имеет модуль, равный дифференциалу дуги dl. Криволинейный интеграл

$$W = \int_L \vec{A}d\vec{l} = \int_L \vec{A}d\vec{r} = \int_L (A_x dx + A_y dy + A_z dz)$$

называют *линейным интегралом* или *интегралом по контуру.* Его можно интерпретировать как работу "сил" векторного поля $\vec{A}$ при перемещении точки по кривой L. (Здесь $d\vec{l}$ означает вектор, направленный по касательной к кривой в данной точке, модуль которого равен дифференциалу дуги dl.) В случае, когда кривая L замкнута и этот интеграл берется по всей кривой, он называется *циркуляцией* C вектора вдоль кривой L:

$$\mathrm{C} = \oint_L \vec{A}d\vec{l} = \oint_L A_l dl = \oint_L (A_x dx + A_y dy + A_z dz)$$

(в правой системе координат контур принято обходить против часовой стрелки).

Сформулируем и примем без доказательства еще одну часто используемую интегральную теорему, известную как **теорема Стокса:** *Циркуляция вектора $\vec{A}$ по замкнутому контуру L равна потоку вектора $rot\vec{A}$ через находящуюся в рассматриваемом векторном поле произвольную поверхность S, на которую опирается линия L:*

$$\oint_L \vec{A}d\vec{r} = \int_S rot\vec{A}d\vec{\sigma} \quad \text{или} \quad \oint_L \vec{A}_l dl = \int_S rot_n\vec{A}d\sigma.$$

Здесь вектор $rot\vec{A}$ – ротор векторного поля $\vec{A}$ – операция, определенная ранее, которая по заданному векторному полю порождает новое векторное поле:

$$rot\vec{A} = (rot\vec{A})^i\hat{e}_i = \hat{e}_i\frac{\epsilon^{ikl}}{\sqrt{g}}\frac{\partial \hat{A}_k}{\partial x^l}.$$

Прямой расчет показывает, что в эквивалентной записи

$$rot\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{Vmatrix} \hat{e}_{x^1} & \hat{e}_{x^2} & \hat{e}_{x^3} \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ \hat{A}_{x^1} & \hat{A}_{x^2} & \hat{A}_{x^3} \end{Vmatrix}.$$

Используя теперь полученные выше нужные соотношения, найдем выражения для $rot\vec{A}$:

- в декартовых координатах

$$rot\vec{A} = [\vec{\nabla}, \vec{A}] = \begin{Vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{Vmatrix},$$

- в цилиндрических координатах

$$rot\vec{A} = \frac{1}{\rho} \begin{Vmatrix} \hat{e}_\rho & \hat{e}_\phi & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{Vmatrix},$$

- в сферических координатах

$$rot\vec{A} = \frac{1}{r^2 sin\theta} \begin{Vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\theta & \hat{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & rsin\theta A_\phi \end{Vmatrix}.$$

Векторное поле $\vec{A}$ с равным нулю ротором $rot\vec{A} = 0$ называют *безвихревым* или *потенциальным*. Происхождение этого названия легко прояснить, если учесть соотношение $rotgradu = [\vec{\nabla}, \vec{\nabla}u] \equiv 0$, которое означает, что любой вектор с равным нулю ротором можно представить как градиент некоторой скалярной функции, которую принято называть потенциалом поля, созданного этим вектором. На основании теоремы Стокса можно заключить, что в потенциальном векторном поле работа "сил" вектора по замкнутому контуру равна нулю, а это означает, что работа не зависит от пути, по которому эти "силы" перемещают точку между двумя фиксированными положениями, или *работа потенциального векторного поля вдоль некоторой кривой не зависит от формы этой кривой и равна разности значений потенциала поля в начальной и конечной точках.* Верно и обратное утверждение: векторное поле является потенциальным (т.е. имеет нулевой ротор), если работа поля вдоль любой замкнутой кривой равна нулю. Основная особенность потенциального векторного поля состоит в том, что потенциальное векторное поле вполне определяется одной скалярной функцией – его потенциалом, тогда как для задания произвольного векторного поля требуется задание трех скалярных функций – проекций вектора на оси координат.

Помимо этого, ротор обладает и следующими свойствами:

- Дивергенция ротора векторного поля равна нулю. Действительно,

$$div(rot\vec{A}) = \vec{\nabla}[\vec{\nabla}, \vec{A}] = \vec{A}[\vec{\nabla}, \vec{\nabla}] = 0.$$

Другими словами, векторное поле, созданное ротором любого вектора, *соленоидально* – так называют поле вектора, дивергенция которого равна 0.

- $rot(u\vec{A}) = u \cdot rot\vec{A} + [gradu, \vec{A}]$.
В самом деле, в декартовых координатах

$$\{rot(u\vec{A})\}^i = \epsilon^{ikl}\frac{\partial(u\vec{A})_l}{\partial x^k} = u \cdot \epsilon^{ikl}\frac{\partial(\vec{A})_l}{\partial x^k} + = \epsilon^{ikl}\frac{\partial u}{\partial x^k}(\vec{A})_l =$$

$$u \cdot rot\vec{A} + [gradu, \vec{A}].$$

- $div[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{b}rot\vec{a} - \vec{a}rot\vec{b}$.
Нетрудно видеть, что

$$div[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{\nabla}[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{b}[\vec{\nabla}, \vec{a}] + \vec{a}[\vec{b}, \vec{\nabla}] =$$

$$\vec{b}[\vec{\nabla}, \vec{a}] - \vec{a}[\vec{\nabla}, \vec{b}] = \vec{b}rot\vec{a} - \vec{a}rot\vec{b}.$$

Такие понятия теории поля, как градиент, дивергенция и ротор, имеют определенный физический смысл; например, градиент есть скорость изменения скалярной функции по направлению, по которому эта скорость достигает своего максимума; дивергенция выражает удельную плотность источников или стоков поля; ротор дает, грубо говоря, циркуляцию вектора, приходящуюся на единицу площади поверхности с такой ориентацией, чтобы эта циркуляция была наибольшей. Эти понятия связаны с дифференциальным оператором – *оператором Гамильтона*,или, как мы его называли, набла, который содержит частные производные первого порядка. Важную роль в физике играет оператор Лапласа, который представляет собой квадрат (скалярное произведение на самого себя) оператора Гамильтона и поэтому содержит частные производные второго порядка. Ковариантное выражение оператора Лапласа в общем виде

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right)$$

было полученно ранее. Приведем для справок выражение этого оператора:

- в декартовых координатах

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

• в цилиндрических координатах

$$\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

• в сферических координатах

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$+\frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.$$

Оператор Лапласа может действовать как на скалярную $\Delta\varphi$, так и на векторную функцию

$$\Delta\vec{A} = \Delta(\hat{A}^i\hat{e}_i).$$

Если потенциал скалярного поля удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0,$$

то $\varphi(x,y,z)$ называется гармонической функцией. Интересно отметить, что векторное поле, которое одновременно является потенциальным и соленоидальным, удовлетворяет уравнению Лапласа. Действительно, условие потенциальности $rot\vec{A} = 0$ означает существование скалярной функции $\varphi(x,y,z)$, которая определяет $\vec{A} = grad\varphi$. Подставив последнее в условие соленоидальности $div\vec{A} = 0$, получим

$$divgrad\varphi \equiv \Delta\varphi = 0.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти якобиевы матрицы прямого и обратного преобразований, якобиан преобразования и построить локальный базис новой системы координат
   (a) при переходе от декартовой системы координат к цилиндрической;
   (b) при переходе от декартовой системы координат к сферической.
2. Найти компоненты метрического тензора и символы Кристоффеля в
   (a) цилиндрической системе координат;
   (b) сферической системе координат.

3. Показать, что в декартовой системе координат ко- и контравариантные компоненты геометрических объектов совпадают.
4. Показать, что при преобразованиях типа $x^i = x^i(\acute{x}^k)$ длина вектора A_iA^i - инвариант, а $\sum A^kA^k$ не является инвариантом.
5. Показать, что при преобразованиях типа $x^i = x^i(\acute{x}^k)$ величина $d\varphi$ – инвариант, если φ – скаляр.
6. Показать, что при преобразованиях типа $x^i = x^i(\acute{x}^k)$ величины $\partial\varphi/\partial x^i$ преобразуются, как компоненты ковектора, а dx^i – как компоненты вектора.
7. Показать, что символ Кронекера – тензор, компоненты которого во всех системах координат имеют одно и то же значение.
8. Доказать справедливость формулы
$$\frac{\partial e^i}{\partial x^k} = -\Gamma^i_{kl}e^l.$$
9. Получить закон преобразования символов Кристоффеля.
10. Доказать справедливость формул
$$\nabla_i A^k = g^{kl}\nabla_i A_l,$$
$$\nabla_i A_k = g_{kl}\nabla_i A^l.$$
11. Доказать, что при преобразованиях типа $x^i = x^i(\acute{x}^k)$ ковариантная производная $\nabla_i A^k$ – тензор 2-го ранга, а $\partial A^k/\partial x^i$ не тензор.
12. Указать группу преобразований координат, относительно которых ϵ_{ikl} является тензором.
13. Показать, что если $\varphi = A^i_k b^k a_i$ – скаляр, где b^k и a_i – векторы, то A^i_k – тензор.
14. Доказать, что
$$\nabla_l(T^i_k + S^i_k) = \nabla_l T^i_k + \nabla S^i_k,$$
$$\nabla_l(A^l_k B^m) = B^m\nabla_l A^i_k + A^i_k\nabla_l B^m.$$
15. Показать, что фундаментальный тензор g_{ik} ковариантно постоянен.
16. Показать, что если φ – скаляр, а $\vec{A}$ – вектор, то абсолютный дифференциал
$$D(\varphi\vec{A}) = \varphi D\vec{A} + \vec{A}d\varphi.$$

17. Доказать, что

$$SpÃ = SpA,$$

$$SpAB = SpBA,$$

$$SpABC = SpCAB = SpBCA.$$

18. Показать, что след матрицы – инвариант преобразования подобия.

19. Какими матрицами можно описать группу инверсии?

20. Показать, что $g = detg_{ik}$ не является скаляром, и найти закон преобразования величины g.

21. Найти свертку $A^{ik}S_{ik}$, если $A^{ik} = -A^{ki}$, а $S_{ik} = S_{ki}$.

22. Как преобразуется свертка $T^{ik}P_{ik}$, если T^{ik} - тензор, а P_{ik} - псевдотензор 2-го ранга?

23. Показать, что симметричность или антисимметричность тензоров 2-го ранга – свойства абсолютные.

24. Показать, что для произвольного тензора T^{ik}

(a) $T^{ik}A_{ik} = T^{[ik]}A_{ik}$,

(b) $T^{ik}S_{ik} = T^{(ik)}S_{ik}$,

если $A_{ik} = -A_{ki}$, а $S_{ik} = S_{ki}$.

25. Показать, что сумма диагональных компонент тензора 2-го ранга – инвариант.

26. Найти вид матрицы преобразования компонент вектора при инверсии трех координатных осей, а также при повороте координат вокруг оси z на угол φ.

27. Показать, что если A – матрица ортогонального преобразования, то $\tilde{A} = A^{-1}$.

28. Показать, что при отражениях четного числа координатных осей якобиан преобразования равен +1, а при отражениях нечетного числа осей он равен -1.

29. Доказать, что символ Леви-Чивита в декартовой системе координат образует совершенно антисимметричный единичный тензор 3-го ранга.

30. Вычислить $\varepsilon_{ikl}\varepsilon^{ikl}$.

31. Доказать, что для любого тензора A^i_k выполняется

$$\varepsilon_{ikl}A^i_m A^k_n A^l_p = \varepsilon_{mnp} det A^i_k.$$

32. Показать, что в трехмерном пространстве компоненты антисимметричного тензора 2-го ранга при вращениях преобразуются, как компоненты вектора.

33. Показать, что матрица бесконечно малого поворота системы координат может быть записана в виде $\hat{A} = \hat{I} + \hat{\varepsilon}$, где матрица $\hat{\varepsilon}$ антисимметрична.

34. Показать, что единственным вектором, компоненты которого одинаковы во всех системах координат, является нуль-вектор.

35. Показать, что всякий тензор 2-го ранга, компоненты которого одинаковы во всех системах координат, пропорционален δ_{ik}.

36. Доказать, что для любой невырожденной матрицы $A(x)$ выполняется соотношение

$$Sp\Big(A^{-1}\frac{\partial A}{\partial x^i}\Big) = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(ln(det A)\Big).$$

37. Доказать следующие соотношения:

(a) $g_{ik,l} = \Gamma_{ikl} + \Gamma_{kil}$,

(b) $g_{ik}(g^{kl})_{,m} = -g^{kl}g_{ik,m}$,

(c) $(g^{ik})_{,l} = -\Gamma^i_{ml}g^{mk} - \Gamma^k_{ml}g^{mi}$,

(d) $g_{,i} = gg^{kl}g_{kl,i}$, $\quad g = detg_{ik}$,

(e) $\Gamma^i_{ik} = (ln\sqrt{g})_{,k} = \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g})_{,k}$,

(f) $(A^i)_{;i} = \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}A^i)_{,i})$,

(g) $(A^k_i)_{;k} = \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}A^k_i)_{;k} - \Gamma^m_{in}A^n_m$,

(h) $(A^{ik})_{;k} = \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}A^{ik})_{;k} \quad (A^{ik} = -A^{ki})$,

(i) $\triangle S \equiv (S_{;i})^{;i} = \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}g^{ik}S_{,k})_{,i}$.

38. Пусть $A = detA_{ik}$, где A_{ik} – тензор 2-го ранга. Доказать, что A не скаляр и поэтому ковариантную производную нельзя определять как $\nabla_i A \equiv A_{;i} = A_{,i}$. Как нужно определить $A_{;i}$ (через $A_{,i}$ и A)?

39. Доказать, что

(a) $[\vec{a}\cdot\vec{b}]^2 = a^2b^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$,

(b) $[\vec{a}\cdot[\vec{b}\cdot\vec{c}]] + [\vec{c}\cdot[\vec{a}\cdot\vec{b}]] + [\vec{b}\cdot[\vec{c}\cdot\vec{a}]] = 0$.

40. Доказать, что

$$grad(\varphi \cdot \psi) = \varphi \cdot grad\psi + \psi \cdot grad\ \varphi,$$

$$grad(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} + [\vec{a}, rot\vec{b}] + [\vec{b}, rot\vec{a}].$$

41. Доказать, что

$$div(\varphi \cdot \vec{a}) = \varphi \cdot div\vec{a} + \vec{a} \cdot grad\varphi,$$

$$div[\vec{a} \cdot \vec{b}] = \vec{b} \cdot rot\vec{a} - \vec{a} \cdot rot\vec{b}.$$

42. Показать, что из общего определения ротора следует

$$rot\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\| \begin{array}{ccc} \hat{e}_{x^1} & \hat{e}_{x^2} & \hat{e}_{x^3} \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ \hat{A}_{x^1} & \hat{A}_{x^2} & \hat{A}_{x^3} \end{array} \right\|.$$

43. Доказать, что

$$rot(\varphi \cdot \vec{a}) = \varphi \cdot rot\vec{a} - [\vec{a} \cdot grad\varphi],$$

$$rot[\vec{a} \cdot \vec{b}] = \vec{a} \cdot div\vec{b} - \vec{b} \cdot div\vec{a} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b}.$$

44. Показать, что

- $divgrad\varphi = \triangle\varphi,$
- $rotrot\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \triangle\vec{A},$
- $rotgrad\varphi = 0,$
- $divrot\vec{A} = 0.$

45. Найти $gradf(r)$, $div\vec{r}$, $rot\vec{r}$.

46. Найти "физические" компоненты базисных векторов в

(a) цилиндрической системе координат,

(b) сферической системе координат.

47. Найти "физические" компоненты градиента в цилиндрических и сферических координатах.

48. Показать, что "физические" компоненты векторного произведения $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в произвольной координатной системе имеют вид

$$\hat{c}^i = \sqrt{\frac{g_{ii}}{g}} \cdot \epsilon^{ikl} a_k b_l.$$

49. Как преобразуются компоненты $rot\vec{a}$ и векторного произведения $[\vec{a} \cdot \vec{b}]$ при вращениях и отражениях, если

(a) $\vec{a}$, $\vec{b}$ - истинные векторы;

(b) $\vec{a}$ – вектор, а $\vec{b}$ – псевдовектор;

(c) $\vec{a}, \vec{b}$ - псевдовекторы.

50. Показать, что одновременно потенциальное и соленоидальное векторное поле определяется уравнением Лапласа.

51. Вычислить

$$grad(\vec{A}(r) \cdot \vec{r}), \qquad \vec{A} \cdot \vec{r} = \varphi(r),$$

$$grad(\vec{A}(r) \cdot \vec{B}(r),$$

$$div(\varphi(r) \cdot \vec{A}(r)), \qquad \vec{A}(r) = \vec{r},$$

$$rot(\varphi(r) \cdot \vec{A}(r)), \qquad \vec{A}(r) = \vec{r}.$$

52. Доказать, что

$$[[\vec{\nabla}, \vec{A}]\vec{B}] = \vec{A} \cdot div\vec{B} - (\vec{A} \cdot \nabla) \cdot \vec{B} - [\vec{A}, rot\vec{B}] - [\vec{B}, rot\vec{A}],$$

$$[[\vec{A}, \vec{\nabla}]\vec{B}] = -\vec{A} \cdot div\vec{B} + (\vec{A} \cdot \nabla) \cdot \vec{B} + [\vec{A}, rot\vec{B}].$$

РЕШЕНИЯ

- к упражнению 4.

$$A^i A_i = \frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^k} \acute{A}^k \frac{\partial \acute{x}^l}{\partial x^i} \acute{A}_l = \delta^l_k \acute{A}^k \acute{A}_l = \acute{A}^k \acute{A}_k.$$

В то же время

$$A^k A^k = \frac{\partial x^k}{\partial \acute{x}^l} \frac{\partial x^k}{\partial \acute{x}^m} \acute{A}^l \acute{A}^m$$

не является инвариантом.

- к упражнению 10. Воспользуемся ковариантным постоянством фундаментального тензора $\nabla_i g^{kl} = 0$ и правилом поднятия и опускания индексов
$A^k = g^{kl} A_l$,
$A_k = g_{kl} A^l$, тогда

$$\nabla_i A^k = \nabla_i (g^{kl} A_l) = A_l \nabla_i g^{kl} + g^{kl} \nabla_i A_l = g^{kl} \nabla_i A_l.$$

- к упражнению 13. φ – скаляр, поэтому в штрихованной системе координат

$$A^i_k b^k a_i = \acute{A}^i_k \acute{b}^k \acute{a}_i.$$

Далее,

$$A^i_k b^k a_i = A^i_k \frac{\partial x^k}{\partial \acute{x}^l} \acute{b}^l \frac{\partial \acute{x}^m}{\partial x^i} \acute{a}_m = A^m_l \frac{\partial x^l}{\partial \acute{x}^k} \acute{b}^k \frac{\partial \acute{x}^i}{\partial x^m} \acute{b}^k \acute{a}_i = \acute{A}^i_k \acute{b}^k \acute{a}_i,$$

что доказывает тензорный характер A^i_k.

- к упражнению 14. Докажем это для векторов (обобщение на случай тензоров элементарно). Пусть $C^i = A^i + B^i$, тогда

$$\nabla_k C^i = \frac{\partial C^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{km} C^m = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \frac{\partial B^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{km} A^m + \Gamma^i_{km} B^m = \nabla_k A^i + \nabla_k B^i.$$

Теперь положим $C^i_k = A^i B_k$, тогда

$$\nabla_l C^i_k = \frac{\partial C^i_k}{\partial x^l} + \Gamma^i_{lm} C^m_k - \Gamma^m_{lk} C^i_m = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} B_k + A^i \frac{\partial B_k}{\partial x^l} + (\Gamma^i_{lm} A^m) B_k + A_i(\Gamma^m_{lk} B_m)$$
$$= (\nabla_l A^i) B_k + A^i \nabla_l B_k).$$

- к упражнению 16.

$$D(\varphi \vec{A}) = \nabla_k(\varphi \vec{A}) dx^k = \varphi(\nabla_k \vec{A}) dx^k + \vec{A}(\nabla_k \varphi) dx^k = \varphi D\vec{A} + \vec{A} d\varphi.$$

- к упражнению 17. По определению след матрицы – это сумма ее диагональных элементов, а операция транспонирования ($\tilde{A} \equiv A^T$) не затрагивает диагональных элементов матрицы, поэтому $Sp\tilde{A} = SpA$.

  Согласно правилу умножения матриц и ввиду того, что немые индексы (индексы суммирования) можно переименовывать, имеем

$$SpAB = A^i_k B^k_i = B^i_k A^k_i = SpBA,$$
$$SpABC = A^i_k B^k_l C^l_i = C^i_k A^k_l B^l_i = SpCBA.$$

- к упражнению 18. Преобразование подобия матрицы A осуществляется матрицей D согласно $\acute{A} = DAD^{-1}$, а

$$Sp\acute{A} = Sp(DAD^{-1}) = Sp(D^{-1}DA) = SpA.$$

- к упражнению 21. Согласно условиям задачи

$$A^{ik} S_{ik} = -A^{ki} S_{ki},$$

а возможность переименовывания немых индексов дает

$$A^{ik} S_{ik} = A^{ki} S_{ki}.$$

Сравнение этих соотношений приводит к заключению

$$A^{ik} S_{ik} = 0.$$

- к упражнению 22. Если P_{ik} был бы тензором 2-го ранга, то его свертка с T^{ik} дала бы истинный скаляр. В отличие от закона преобразования истинного тензора, преобразование псевдотензора содержит знак якобиана преобразования $sgnY = -1$, который будет присутствовать и после свертки $T^{ik} P_{ik} = -\acute{T}^{ik} \acute{P}_{ik}$, т.е. эта свертка – псевдоскаляр.

- к упражнению 23. Допустим, что в штрихованной системе координат тензор $\acute{S}_{ik}$ симметричен, т.е. $\acute{S}_{ik} = \acute{S}_{ki}$ или $\acute{S}_{ik} - \acute{S}_{ki} = 0$:

$$S_{ik} = \frac{\partial \acute{x}^l}{\partial x^i} \frac{\partial \acute{x}^m}{\partial x^k} \acute{S}_{lm}, \qquad S_{ki} = \frac{\partial \acute{x}^n}{\partial x^k} \frac{\partial \acute{x}^p}{\partial x^i} \acute{S}_{np} = \frac{\partial \acute{x}^m}{\partial x^k} \frac{\partial \acute{x}^l}{\partial x^i} \acute{S}_{ml},$$

поэтому

$$S_{ik} - S_{ki} = \frac{\partial \acute{x}^l}{\partial x^i} \frac{\partial \acute{x}^m}{\partial x^k} (\acute{S}_{lm} - \acute{S}_{ml}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad S_{ik} = S_{ki}.$$

Точно так же можно продемонстрировать, что антисимметричность тензора $\acute{A}_{ik}$ – свойство абсолютное.

- к упражнению 24. Любой тензор можно представить как сумму симметричной и антисимметричной частей:

$$T^{ik} = \frac{1}{2} T^{ik} + \frac{1}{2} T^{ik} + \frac{1}{2} T^{ki} - \frac{1}{2} T^{ki} = \frac{1}{2}(T^{ik} + T^{ki}) + \frac{1}{2}(T^{ik} - T^{ki})$$
$$\equiv T^{(ik)} + T^{[ik]}.$$

Свертка симметричного и антисимметричного тензоров дает нуль, т.е. если $A_{ik} = -A_{ki}$, а $S_{ik} = S_{ki}$, то

1. $T^{ik} A_{ik} = T^{[ik]} A_{ik}$,
2. $T^{ik} S_{ik} = T^{(ik)} S_{ik}$,

что и требовалось доказать.

- к упражнению 25.

$$A^i_i = \frac{\partial x^i}{\partial \acute{x}^k} \frac{\partial \acute{x}^l}{\partial x^i} \acute{A}^k_l = \delta^l_k \acute{A}^k_l = \acute{A}^k_k.$$

- к упражнению 28. Матрица преобразования, соответствующая отражению i-й координатной оси, диагональна, причем ii-й диагональный элемент равен -1, а остальные $+1$. Если отражению подверглось нечетное число координатных осей, то на диагонали – нечетное число"-1", поэтому детерминант такой матрицы равен -1. Если же число отраженных осей четное, то на диагонали матрицы такого преобразования четное число "-1" (остальные $+1$), а ее детерминант равен $+1$.

- к упражнению 30. По определению ненулевые компоненты символа Леви-Чивита равны +1 или −1. Поскольку каждое слагаемое суммы – произведение одинаковых ε_{ikl}, то искомый результат есть сумма слагаемых, каждое из которых равно +1, а число этих слагаемых для трехмерного пространства равно $2 \cdot 3 = 3!$

- к упражнению 32. Любому антисимметричному тензору 2-го ранга A_{ik} в трехмерном пространстве можно сопоставить псевдовектор A^i согласно

$$A^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ikl}A_{kl}. \qquad (1)$$

(В этом случае A^i и A_{ik} называют *дуальными* друг другу). Вообще говоря, A_{kl} – тензор, а ε^{ikl} – псевдотензор, поэтому согласно обратному тензорному признаку A^i – псевдовектор. Однако поскольку якобиан преобразований, обусловленных вращениями, $I = 1$, а при таких преобразованиях ε^{ikl} преобразуется, как тензор, то величины A^i образуют истинный вектор. Остается показать, что в трехмерном пространстве соотношение (1) выполняется для любого антисимметричного тензора 2-го ранга. Действительно, т.к. $A_{ik} = -A_{ki}$, то

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно (1)

$$2A^1 = \varepsilon^{1kl}A_{kl} = \varepsilon^{123}A_{23} + \varepsilon^{132}A_{32} = A_{23} - A_{32} = 2A_{23}.$$

Точно так же

$$A^2 = A_{31}, \qquad A^3 = A_{12}.$$

- к упражнению 33. При повороте на угол $\varphi = 0$ матрица $\hat{A} = \hat{I}$ совпадает с матрицей тождественного преобразования, а если угол поворота мал, то $\hat{A} = \hat{I} + \hat{\varepsilon}$, причем $\varepsilon_{ik} \ll 1$, тогда

$$x^i x_i = A^i_k \acute{x}^k A^l_i \acute{x}_l = (\delta^i_k + \varepsilon^i_k)\acute{x}^k(\delta^l_i + \varepsilon^l_i)\acute{x}_l \approx$$
$$\delta^i_k\delta^l_i\acute{x}^k\acute{x}_l + \delta^i_k\varepsilon^l_i\acute{x}^k\acute{x}_l + \delta^l_i\varepsilon^i_k\acute{x}^k\acute{x}_l.$$

Поскольку длина вектора при вращениях неизменна $x^i x_i = \acute{x}^k\acute{x}_l$, то

$$\delta^i_k\varepsilon^l_i\acute{x}^k\acute{x}_l + \delta^l_i\varepsilon^i_k\acute{x}^k\acute{x}_l = 0 \quad \text{или} \quad \varepsilon_{kl}\acute{x}^k\acute{x}^l = -\varepsilon_{lk}\acute{x}^k\acute{x}^l \Longrightarrow \varepsilon_{kl} = -\varepsilon_{kl}.$$

Итак, матрица $\hat{\varepsilon}$ антисимметрична. Введем вектор, дуальный ε_{ik}, так чтобы

$$\delta\varphi^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ikl}\varepsilon_{kl},$$

поэтому

$$2\epsilon_{mni}\delta\varphi^i = \epsilon^{kli}\epsilon_{mni}\varepsilon_{kl} = (\delta^k_m\delta^l_n - \delta^k_n\delta^l_m)\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{mn} - \varepsilon_{nm} = 2\varepsilon_{mn}.$$

Следовательно,

$$\varepsilon^{ik} = \epsilon^{ikl}\delta\varphi_l.$$

Ввиду того, что

$$x^i = (\delta^i_k + \varepsilon^i_k)\acute{x}^k = \acute{x}^i + \varepsilon^{ik}\acute{x}_k = \acute{x}^i + \epsilon^{ikl}\acute{x}_k\delta\varphi_l,$$

в векторных обозначениях

$$\delta\vec{r} = [\delta\vec{\varphi} \cdot \vec{r}].$$

Таким образом, антисимметричная матрица $\hat{\varepsilon}$ описывает бесконечно малый поворот системы координат, а дуальный ей вектор $\delta\vec{\varphi}$ есть угол бесконечно малого поворота (величина этого вектора совпадает с $\delta\varphi$, а направление – с направлением базисного вектора оси вращения).

- к упражнению 34. По условию задачи $A_x = \acute{A}_x$, $A_y = \acute{A}_y$, $A_z = \acute{A}_z$. Любое преобразование координат должно быть совместимо с этим условием. Допустим,

$$\hat{A} = \hat{T}(\hat{A})',$$

где

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} cos\varphi & sin\varphi & 0 \\ -sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– матрица вращения на угол φ вокруг оси z. Выберем $\varphi = \pi$, тогда $A_x = -\acute{A}_x$, $A_y = -\acute{A}_y$, $A_z = \acute{A}_z$, что совместимо с условиями задачи, только если $A_x = A_y = 0$. Если выбрать теперь $\hat{T}$ так, чтобы она представляла вращение на угол $\varphi = \pi$ вокруг оси x, то точно так же получим $A_x = 0$. Таким образом, $\vec{A} = 0$.

- к упражнению 35. Произвольный тензор можно представить в виде суммы симметричной $S_{ik} = T_{(ik)}$ и антисимметричной $A_{ik} = T_{[ik]}$ частей:

$$T_{ik} = \frac{1}{2}(T_{ik} + T_{ki}) + \frac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki})$$
$$= T_{(ik)} + T_{[ik]}.$$

Антисимметричной части можно сопоставить дуальный псевдовектор, и согласно результатам задачи 34 его компоненты будут одинаковы во всех системах координат, только если это нуль-вектор. Выберем далее систему координат, в которой $S_{ik} = T_{(ik)}$ имеет диагональный вид

$$S_{ik} = \lambda^{(m)}\delta_{ik}, \quad \delta_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если $\lambda^{(1)} \neq \lambda^{(2)} \neq \lambda^{(3)}$, то компоненты S_{ik} будут зависеть от выбора координат, что противоречит условиям задачи. Остается предположить,

$$S_{ik} = \lambda \cdot \delta_{ik},$$

что и завершает доказательство.

- к упражнению 37a. Учитывая часто используемое обозначение частной производной

$$(...)_{,l} \equiv \frac{\partial(...)}{\partial x^l},$$

имеем

$$g_{ik,l} = (\vec{e}_i\vec{e}_k)_{,l} = (\vec{e}_i)_{,l}\vec{e}_k + \vec{e}_i(\vec{e}_k)_{,l} = \Gamma^m_{il}\vec{e}_m\vec{e}_k + \vec{e}_i\Gamma^m_{kl}\vec{e}_m = g_{mk}\Gamma^m_{il} + g_{im}\Gamma^m_{kl}.$$

Подставив выраженные через метрический тензор символы Кристоффеля

$$\Gamma^m_{ik} = \frac{1}{2}g^{mn}\Big(\frac{\partial g_{ni}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{nk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^n}\Big),$$

получим

$$g_{ik,l} = \Gamma_{ikl} + \Gamma_{kil},$$

где

$$\Gamma_{ikl} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\Big).$$

Утверждение доказано.

- к упражнению 37b. Продифференцировав известное соотношение

$$g^{ik}g_{kl} = \delta^i_l$$

по x^m и имея в виду равенство нулю производной от единичного тензора δ^i_l, получим искомый результат.

- к упражнению 37c. Фундаментальный (метрический) тензор ковариантно постоянен, т.е.

$$\nabla_l g^{ik} = \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{lm}g^{mk} - \Gamma^k_{lm}g^{im} = 0.$$

Если использовать обозначение

$$(g^{ik})_{,l} \equiv \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l},$$

получим

$$(g^{ik})_{,l} = -\Gamma^i_{ml}g^{mk} - \Gamma^k_{ml}g^{mi}.$$

- к упражнению 38. Тензор 2-го ранга A_{ik} преобразуется согласно

$$A_{ik} = \frac{\partial \acute{x}^l}{\partial x^i}\frac{\partial \acute{x}^m}{\partial x^k}\acute{A}_{lm}$$

или если ввести матрицу Якоби $X^l_i = \partial\acute{x}^l/\partial x^i$, то в матричных обозначениях

$$A = X\acute{A}X^T.$$

Поэтому

$$det A = det X det \acute{A} det X^T = Y^2 det \acute{A}.$$

Таким образом, $A = det(A_{ik})$ – тензорная плотность веса 2.

Как и любая ковариантная производная, $A_{;i}$ должна быть линейной по $A_{,i}$ и A:

$$A_{;i} = A_{,i} + K_i A,$$

здесь K_i – неопределенные коэффициенты.

Определитель g метрического тензора, как и A, является тензорной плотностью веса 2, а ковариантная производная g должна быть равна нулю, т.е.

$$g_{;i} = g_{,i} + K_i g = 2g\Gamma^k_{ik} + K_i g = 0 \quad\Longrightarrow\quad K_i = -2\Gamma^k_{ik}.$$

- к упражнению 39a.
$[\vec{a}\cdot\vec{b}]^2 = [\vec{a}\cdot\vec{b}][\vec{a}\cdot\vec{b}] = \vec{b}[[\vec{a}\cdot\vec{b}]\vec{a}] = \vec{a}[\vec{b}[\vec{a}\cdot\vec{b}]] =$

$$\vec{a}(\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{b}) - \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{b})) = a^2b^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2.$$

- к упражнению 39b.
$[\vec{a}\cdot[\vec{b}\cdot\vec{c}]] + [\vec{c}\cdot[\vec{a}\cdot\vec{b}]] + [\vec{b}\cdot[\vec{c}\cdot\vec{a}]] =$

$$\vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) + \vec{a}(\vec{c}\vec{b}) - \vec{b}(\vec{c}\vec{a}) + \vec{c}(\vec{b}\vec{a}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c}) = 0.$$

- к упражнению 40. $(grad\varphi)_i \equiv \partial\varphi/\partial x^i$, поэтому

$$(grad\varphi\cdot\psi)_i = \psi\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} + \varphi\frac{\partial\psi}{\partial x^i}.$$

Воспользовавшись полученным в тексте соотношением

$$\frac{\partial a_k}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^k} = \epsilon_{ikl}(rot\vec{a})^l,$$

имеем

$$(grad(\vec{a}\cdot\vec{b}))_i = a^k(\epsilon_{ikl}(rot\vec{b})^l + \frac{\partial b_i}{\partial x^k}) + b_k(\epsilon^{ikl}(rot\vec{a})_l + \frac{\partial a^i}{\partial x^k}) =$$

$$a^k\frac{\partial b_i}{\partial x^k} + b_k\frac{\partial a_i}{\partial x^k} + [\vec{a}, rot\vec{b}]_i + [\vec{b}, rot\vec{a}]_i.$$

• к упражнению 43.

$$(rot[\vec{a}\cdot\vec{b}])^i = \epsilon^{ikl}\epsilon_{lmn}\frac{\partial(a^m b^n)}{\partial x^k} = (\delta^i_m\delta^k_n - \delta^i_n\delta^k_m)\left(a^m\frac{\partial b^n}{\partial x^k} + b^n\frac{\partial a^m}{\partial x^k}\right) =$$

$$a^i(\vec{\nabla}\vec{b}) - b^i(\vec{\nabla}\vec{a}) + \left(b^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right)a^i - \left(a^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right)b^i = \vec{a}div\vec{b} - \vec{b}div\vec{a} + (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b}.$$

• к упражнению 44.

- $divgrad\varphi = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\varphi) = (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\varphi = \nabla^2\varphi = \triangle\varphi,$
- $rotrot\vec{A} = [\vec{\nabla},[\vec{\nabla},\vec{A}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} = graddiv\vec{A} - \triangle\vec{A},$
- $rotgrad\varphi = [\vec{\nabla},\vec{\nabla}\varphi] = 0,$
- $divrot\vec{A} = \vec{\nabla}[\vec{\nabla},\vec{A}] = [\vec{\nabla},\vec{\nabla}]\vec{A} = 0.$

• к упражнению 45. $div\vec{r} = \frac{\partial r^i}{\partial x^i} = 3.$

$$rot\vec{r} = \begin{Vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{Vmatrix} = 0.$$

Решения остальных упражнений приводятся в тексте лекций.

БИОГРАФИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

• **ГАМИЛЬТОН Вильям Роуан (1805 – 1865)** – ирландский математик и физик, президент Ирландской Академии в Дублине. Окончил Тринити-колледж, с 1827 г. профессор Дублинского университета и директор астрономической обсерватории. Развитая Гамильтоном аналогия между волновой и корпускулярной оптикой почти через сто лет была использована Шредингером при формулировке основ квантовой механики. Гамильтон установил аналогию между классической механикой и геометрической оптикой, ввел понятие групповой скорости, разработал вариационный принцип наименьшего действия и аналитический аппарат классической механики.

• **ГАУСС Карл Фридрих (1777 – 1855)** - немецкий математик, названный современниками королем математики. Родился в Брауншвейге в семье водопроводчика. Его удивительные математические способности

обнаружились, когда ему исполнилось три года. Вычислительную технику, в которой он был непревзойденным мастером, Гаусс совершенствовал всю жизнь. После обнаружения малой планеты Церера, предвычисленной Гауссом, он стал считаться величайшим математиком мира и получил почетное звание "геттингенского колосса". Гаусс вошел в историю математики как один из создателей неевклидовой геометрии. Трудно указать такую область чистой и прикладной математики, в которую бы Гаусс не внес существенного вклада.

• **ГРИН Джордж (1793 – 1841)** – английский математик-самоучка. Грин поступил в Кембриджский университет в сорокалетнем возрасте и окончил его в 1838 г. В 1828 г. Грин опубликовал книгу "Опыт применения математического анализа в теории электричества и магнетизма". В ней он впервые ввел в науку понятие и термин "потенциал" и развил теорию электромагнетизма. Книга Грина, вышедшая незначительным тиражом, оставалась неизвестной до ее переиздания (1845) даже в самой Англии. За это время другими учеными были переоткрыты некоторые результаты Грина.

• **ДЕКАРТ Рене** - выдающийся французский математик, физик, философ, физиолог. Родился в 1596 г. в дворянской семье. С 1629 по 1649 г. прожил в Голландии. Умер в 1650 г. в Стокгольме. Математические исследования Декарта тесно связаны с его философскими и физическими работами. Декарт впервые ввел понятие координат, переменной величины и функции, что составило его основную заслугу в математике.

• **ЕВКЛИД** – древнегреческий математик, автор первого из дошедших до нас теоретических трактатов по математике. Его научная деятельность протекала в Александрии в начале III в. до н.э. Главная работа Евклида "Начала" составила целую эпоху в развитии элементарной геометрии. В "Началах" Евклида, состоящих из 13 книг, дан образец дедуктивного изложения геометрического материала на основе предпосланной системы аксиом. По свидетельствам современников Евклид был мягким, очень скромным и независимым человеком.

• **КАРТАН Эли (1861 – 1951)** – французский математик; преподавал в Лионе, Нанси, с 1912 г. - в Парижском университете. С 1931 г. член Парижской академии наук. Автор многочисленных работ по теории непрерывных групп, теории открытых им спиноров и теории относительности.

• **КЛЕЙН Феликс (1849 – 1925)** - немецкий математик; обучался в Бонне, профессор математики в Эрлангене, Мюнхене и Геттингене. Автор ряда фундаментальных работ по неевклидовой геометрии, теории непрерывных групп и различным вопросам геометрии. В своей работе под названием "Эрлангенская программа" (1892) Клейн разработал общую схему геометрического исследования. Эта работа оказала сильное влияние на дальнейшее развитие геометрии.

- **КРИСТОФФЕЛЬ Эльвин Бруно** - немецкий геометр. Родился в Монтуа (на Рейне) в 1829 г., умер в Страсбурге в 1900 г. Профессор Политехнической школы в Цюрихе, Берлинской промышленной академии и Страсбургского университета. Ученик Дирихле, а в широком смысле и Римана. Известен замечательными исследованиями алгебраических и абелевых функций, уравнений в частных производных и дифференциальной геометрии.

- **КРОНЕКЕР Леопольд (1823 – 1891)** - немецкий математик. Член Берлинской академии и профессор Берлинского университета (с 1861 г.). Основные работы Кронекера относятся к алгебре и теории чисел, теории квадратичных форм и теории групп. Кронекер был сторонником "арифметизации" математики, которая, по его мнению, должна быть сведена к арифметике целых чисел, так как только последняя, как он утверждал, обладает подлинной реальностью. Защищая эти взгляды, Кронекер вел упорную борьбу с последователями теоретико-функциональной школы Вейерштрасса и теоретико-множественной школы Кантора.

- **ЛАПЛАС Пьер Симон** - французский математик и механик. Родился в Бомоне в 1749 г., умер в Париже в 1827 г. Член Парижской академии наук, один из основателей Нормальной и Политехнической школ. Основные работы Лапласа относятся к области небесной механики. Ему принадлежит ряд фундаментальных работ по дифференциальным уравнениям и теории вероятности. Исследования Лапласа по физике касаются вопросов теории капиллярности, акустики и электромагнетизма.

- **ЛЕВИ-ЧИВИТА Туллио (1873 – 1942)** - итальянский математик и механик, профессор в Падуе и Риме. Автор исследований по теории дифференциальных уравнений, небесной механике, гидродинамике; им разработан тензорный анализ, обоснована теория адиабатических инвариантов; ему принадлежат работы по механике и геометрии неголономных систем и релятивистской механике.

- **ПУАНКАРЕ Анри** - крупнейший французский математик. Родился в Нанси в 1854 г., умер в Париже в 1912 г. Обучался в Политехнической и Горной школах в Париже. С 1886 г. профессор Парижского университета. Член Парижской академии наук. Его исследования об устойчивости движения и о фигурах равновесия жидкой вращающейся массы открыли новые горизонты в астрономии и космогонии, позволяя применять более совершенные методы современного анализа. Он является также одним из основателей специальной теории относительности. Исследования Пуанкаре охватывают почти все разделы математики и математической физики.

- **РИМАН Георг Фридрих Бернхард (1826 – 1866)** - выдающийся немецкий математик. Родился в Брезеленце (Ганновер), умер от туберкулеза в Италии. В Геттингенском университете слушал лекции Гаусса, многие идеи которого были развиты им позже. Там же сблизился с физиком Вебером, который пробудил в нем глубокий интерес к вопросам математического естествознания. Риман положил начало новому направлению теории аналитических функций и широкому применению идей и методов математической физики, дал основные идеи топологии. Он рассматривал геометрию в весьма широком смысле, как учение о непрерывных многообразиях. Введение римановых пространств раскрыло новые пути в развитии математики. Большое значение для физики XX в. имел разработанный Риманом (1861) аппарат дифференциальных квадратичных форм.

- **РИЧЧИ Курбастро Грегорио (1853 – 1925)** - итальянский геометр. Профессор Падуанского университета. Риччи является одним из основателей тензорного исчисления. В работе "Методы абсолютного дифференциального исчисления и их приложения" (1901), написанной им совместно с Леви-Чивита, дано не только первое систематическое изложение тензорного исчисления, но и его приложения к классической механике, теоретической физике и римановой геометрии.

- **СТОКС Джордж Габриель (1819 – 1903)** - английский физик и математик, член Лондонского королевского общества. Труды Стокса охватывают различные вопросы оптики, гидродинамики и математической физики. Среди гидродинамических работ наибольшее значение имеют труды по теории движения вязкой жидкости (уравнение Навье – Стокса). Стокс – автор ряда крупных математических исследований.

- **ЭЙНШТЕЙН Альберт** – величайший физик со времен Ньютона. Родился в 1879 г. (Ульм, Германия), умер в 1955 г. (Принстон, США). В истории естествознания занимает совершенно особое место. Созданием теории относительности Эйнштейн завершил классическую физику и одновременно заложил основы нового учения о пространстве, времени и тяготении. Его фундаментальные исследования по квантовой теории света, развивающие идею Планка о дискретной природе теплового излучения, положили начало новой эре – эре физики атома и атомного ядра.

- **ЯКОБИ Карл Густав Якоб** - немецкий математик. Родился в Потсдаме в 1804 г., умер в Берлине в 1852 г. Профессор Берлинского университета. С 1827 г. член Берлинской академии наук. Им получены фундаментальные результаты в области уравнений с частными производными. В своих лекциях по динамике и в ряде исследований по теории эллиптических функций Якоби решил ряд важнейших вопросов чистой и прикладной математики. Он усовершенствовал предложенный Гамильтоном метод интегрирования дифференциальных уравнений динамики, известный как метод Гамильтона – Якоби.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 января 2001 года.

ОГЛАВЛЕНИЕ