ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-1944

ПОЛУПРОСТЫЕ ГРУППЫ И СИСТЕМАТИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

(Сборник статей)

Том II

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1965

ICTP 64/7

International Atomic Energy Agency

INTERNATIONAL CENTRE FOR THEORETICAL PHYSICS

THE RELATIVISTIC STRUCTURE OF SU(6)

R. Delbourgo
Abdus Salam
J. Strathdee

Trieste

3 December 1964

152

The Relativistic Structure of SU(6)

by

R. Delbourgo, Abdus Salam and J. Strathdee

International Centre for Theoretical Physics, Trieste

It is shown that a relativistic basis for invariance under SU(6) exists only if the group structure is extended to $U^{+}(6) \otimes U^{-}(6)$ for any interaction terms. The notion of inhomogeneous extension $U^{+}_{W}(6) \otimes U^{-}_{W}(6)$ is introduced. This extension leaves the kinetic energy terms invariant, though it still does not provide a fully satisfactory theory.

THE RELATIVISTIC STRUCTURE OF SU(6)

1. Introduction

We wish to examine in this note the relativistic basis[1] of recent generalisations of Wigner's supermultiplet theory[2] to elementary particle physics. We start with the assumption that so far as the relativistic and internal-symmetry structures are concerned it is sufficient to start with an elementary multiplet of Dirac spinors — elementary in the sense that it corresponds to the fundamental representation of the internal symmetry concerned. More specifically for the internal symmetry group U(3), this fundamental representation corresponds to a Dirac set of three (Sakata-like) quarks. Our assumption then amounts to saying that so far as group theory is concerned all particles can be considered as composed from Dirac quarks. There are three questions to be studied:

(A) The structure of the "algebras" formed from the Dirac matrices and the internal symmetry generators T^i.

(B) For which ones of these "algebras" are the kinetic energy and the mass terms in a free Dirac Hamiltonian invariant?

(C) The types of interaction Hamiltonians (if any) invariant for each "algebra".

2. The Structure of the Combined Algebras

Given a set of hermitian Dirac matrices γ^A and internal symmetry generators [3] T^i, note that

$$[\gamma^A T^i, \gamma^B T^j] = \tfrac{1}{2}\{\gamma^A,\gamma^B\}[T^i,T^j] + \tfrac{1}{2}[\gamma^A,\gamma^B]\{T^i,T^j\}.$$

For the fundamental (n- fold) representation of any unitary group $U(n)$, the $n \times n$ matrices T^i span the entire hermitian basis and therefore both $[T^i,T^j]$ and $\{T^i,T^j\}$ are expressible as the linear sums of the T^i's themselves. So is trivially the case also with the full set of the 16 Dirac matrices. Specialising to U(3) (*i.e.* for the nine matrices T^i, $i = 0,1,\dots,8$), it is clear from the above that the 144 matrices $\gamma^A T^i$ ($A=1,\dots,16$; $i=0,1,\dots,8$) in general provide the set of generators for a U(12) structure.

It is easy to see from the results for the anticommutators of the Dirac γ's given in the Appendix that the general U(12) group contains two U(6) sub-groups each generated by the 36 matrices,

$$\mathcal{U}^+(6): \quad \tfrac{1}{2}(1+i\gamma_5)T^i, \quad \tfrac{1}{2}(1+i\gamma_5)\sigma_{\mu\nu}T^i$$

$$\mathcal{U}^-(6): \quad \tfrac{1}{2}(1-i\gamma_5)T^i, \quad \tfrac{1}{2}(1-i\gamma_5)\sigma_{\mu\nu}T^i \qquad (1)$$

The crucial remark is that since $(1+i\gamma_5)\sigma_{\mu\nu}$ is a set of antisymmetric self-dual matrices, <u>there are only three independent ones among these</u>; and likewise for $(1-i\gamma_5)\sigma_{\mu\nu}$. Clearly a U(6)-invariant parity-conserving theory must necessarily possess $\mathcal{U}^+ \leftrightarrow \mathcal{U}^-$ symmetry. $U^+(6)$ and $U^-(6)$ clearly are straight generalisations of $SU^+(2)$ and $SU^-(2)$ — the two sub-groups into which the (Euclidean) group of rotations in 4-dimensions splits.

The relevant matrices are unimodular

for a Lorentz metric and one must therefore first resort to the "unitary trick" of Weyl, i.e., go to a Euclidean metric, generalise $U^+(2)$, $U^-(2)$ to $U^+(6)$ and $U^-(6)$ and then pass back to the Lorentz metric [4]. Adopting an obvious nomenclature we shall call $U^{\pm}(6)$ the <u>homogeneous symmetry group</u> in contrast to the <u>inhomogeneous</u> groups we consider in the next section.

"Algebras" of the second kind based on the inhomogeneous rather than the homogenous Lorentz group are generated if we combine general relativistic "spin operators" with the T^i's. The "spin operators" are products of the Dirac Matrices with momentum; one example is the set of the Pauli-Lubanski operator (which in the rest-frame of a particle give its intrinsic spin),

$$w_\mu = \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\kappa}\sigma_{\nu\rho}p_\kappa \quad , \quad (p_\mu w_\mu = 0) . \tag{2}$$

Since,

$$[w_\mu, w_\nu] = i\epsilon_{\mu\nu\rho\kappa}p_\rho w_\kappa ,$$

$$\{w_\mu, w_\nu\} = 2(p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu}). \tag{3}$$

A new U(6) algebra [4] is generated by the 36 quantities T^i, $w_\mu T^i$. Since w_κ (like $\sigma_{\mu\nu}$) commute with γ_5, it is also possible to set up the groups $U_w^{\pm}(6)$ with the generators

$$U_w^{\pm}(6) : \qquad \tfrac{1}{2}(1\pm i\gamma_5)T^i , \quad \tfrac{1}{2}(1\pm i\gamma_5)w_\mu T^i$$

Now the w's are only one example of the general class of "spin-operators". Another operator has been described by Calogero [5] this is the tensor

$$w_{\alpha\beta} = -i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma_5\gamma_\mu p_\nu$$

$$w'_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}w_{\gamma\delta} = -i\gamma_5(\gamma_\alpha p_\beta - \gamma_\beta p_\alpha)$$

For a free Dirac particle, Calogero shows that the "even" components of the w_μ and $w_{\mu\nu}$ (in the Foldy-Wouthuysen sense) represent respectively

$$w_b = E\sigma_b^l + m\sigma_b^t , \qquad w_0 = p\cdot\sigma^l$$

$$\tfrac{1}{2}\epsilon_{abc}w_{bc} = m\sigma_a^l + E\sigma_a^t , \qquad w_{a0} = p\times\sigma^t$$

Here σ^l and σ^t are the longitudinal (along p) and transverse components of spin σ. In the rest-frame therefore w_μ and $w_{\mu\nu}$ possess the same physical significance. In a future paper we hope to come back to the complete algebra of these spin operators.

3. <u>Invariance of the Lagrangians</u>

(A) <u>The Free Lagrangian</u>

The Pauli-Lubanski operator w_μ and Calogero operator $w_{\alpha\beta}$ possess the remarkable property that the Dirac operator $D = \gamma\cdot p - m$ commutes with these. Thus

$$\mathcal{L}_0 = \bar\psi(\gamma p - m)\psi$$

is invariant for $U_w(6)$ (with generators T^i, $w_\mu T^i$). Likewise defining $\psi_{L,R} = \frac{1}{2}(1\pm i\gamma_5)\psi$, the terms $\bar\psi_L\gamma p\psi_L$ and $\bar\psi_R\gamma p\psi_R$ are invariant for $U_w^{\pm}(6)$ (generators T^i, $w_\mu^{\pm}T^i$) respectively. This is of course not true of the mass term $m(\bar\psi_R\psi_L + \bar\psi_L\psi_R)$.

Consider now the algebras $U^{\pm}(6)$ generated by the T^i's and the Dirac matrices. The transformations [6]

$$\psi'_L = \left(1 + \frac{i}{2}\alpha^j_{\mu\nu}T^j\sigma_{\mu\nu} + i\alpha^j T^j\right)\psi_L$$

$$\psi'_R = \left(1 + \frac{i}{2}\beta^j_{\mu\nu}T^j\sigma_{\mu\nu} + i\beta^j T^j\right)\psi_R \tag{4}$$

even when taken in conjunction with the Lorentz transformation

$$p'_\mu = p_\mu + \epsilon^0_{\mu\nu} p_\nu$$

do not leave the free Dirac Lagrangian invariant [7]. In fact

$$\delta(\bar{\Psi}_L \gamma p \psi_L) = \alpha^i_{\mu\nu} \bar{\Psi}_L T^i (\gamma_\mu p_\nu - \gamma_\nu p_\mu) \psi_L$$

where the summation is to be carried over $i = 1$ to 8. The conclusion therefore is that so far as the free Lagrangian is concerned, the group $U_W(6)$ is the only one which leaves the Lagrangian invariant; $U^{\pm}_W(6)$ leaves the kinetic energy term unchanged but not the mass term, while for the covariant groups $U^{\pm}(6)$ (defined with Dirac matrices $\sigma_{\mu\nu}$ etc., rather than the spin matrix W_μ) the free Lagrangian possesses no specially desirable transformation character.

(B). <u>The Interaction Lagrangian</u>

It is at this stage that our difficulties start. It has so far appeared impossible to construct an interaction Lagrangian involving a product of a finite number of field operators which is invariant for $U_W(6)$ or $U^{\pm}_W(6)$. It would seem therefore that if U (6) is a relatively exact symmetry of nature, only an S-matrix type of theory can be constructed for it.

On the other hand for the group structures $U^{\pm}(6)$, even though the free Lagrangian is not invariant, one can write invariant interaction terms. For example,[8] in the Euclidian sense

(with $\bar{\Psi} \equiv \psi^+$), the interaction part of the parity conserving Lagrangian

$$\bar{\Psi}(\gamma p - m)\psi + (\bar{\Psi}\gamma_\mu T^i \psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu T^i \psi) - (\bar{\Psi}\gamma_\mu \gamma_5 T^i \psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu \gamma_5 T^i \psi) \qquad (5)$$

is invariant for $U^+(6) \otimes U^-(6)$ transformations. There is a total of 72 currents of which only the SU(3) ninefold $\bar{\Psi}\gamma_\mu T^i \psi$ is conserved. The divergences of these currents are listed in the Appendix.

4. <u>Invariance of $SU^+(3) \otimes SU^-(3)$ under SU(6)</u>

The considerations of section 3 leave us with a dilemma. What is the U(6) group of Gürsey, Radicati and Sakita, if it is not $U_W(6)$? If we are willing to give up covariance of the group-structure (though of course not of the basic Lagrangian) a non-covariant sub-group of the structure $U^+(6) \otimes U^-(6)$ is provided by the 36 generators.

$$T^i, \quad \sigma_{ab} T^i \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, 8 \ ; \ a, b = 1, 2, 3)$$

This structure coincides with the little-group $U_W(6)$ for the rest frame $\mathbf{p} = 0$. Thus the set of transformations,

$$\psi' = \left(1 + i \epsilon^j T^j + \tfrac{1}{2} \epsilon^j_{ab} \sigma_{ab} T^j\right)\psi \qquad (6)$$

$$p'_0 = p_0 \ , \quad p'_a = p_a + \epsilon^0_{ab} p_b \quad \text{(space-rotation)}$$

leaves the interaction $(\bar{\Psi}\gamma_\mu T^i\psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu T^i\psi) + (\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5 T^i\psi)(\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5 T^i\psi)$ as well so the mass term as well as $\psi^+ p_0 \psi$ invariant, changing the kinetic energy term by

$$\delta \mathcal{L} = 2 \epsilon^i_{ab} \bar{\Psi} \gamma_a p_b T^i \psi, \qquad (i = 1, \ldots, 8)$$

The differential conservation law does not hold for the 24 currents

$$\bar{\Psi} \gamma_\mu \sigma_{ab} T^i \psi \qquad i = 1, \ldots, 8 \ ; \ ab = 1, 2, 3 .$$

Note quite generally that $\delta\mathcal{L} = i\sum \epsilon\, \partial_\mu j_\mu$.

Now the Lagrangian (5) postulated above is precisely the type of Lagrangian previously written down in a different connection - in connection with what has been called the $[SU(3)]_L \otimes [SU(3)]_R$ theory [9]. It is perhaps instructive to write the equations of the gauge version of this theory in detail as well as the transformations involved. We shall use the Lorentz metric and not adopt the trick of passing to the Euclidean space.

Start with the Lagrangian

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\sum_{1,2}\left[\tfrac{1}{2} Z^i_{\mu\nu}\left(\partial_\mu Z^i_\nu - \partial_\nu Z^i_\mu + q f^{ijk} Z^j_\mu Z^k_\nu\right) - \tfrac{1}{4} Z^i_{\mu\nu} Z^i_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\mu^2 Z^i_\mu Z^i_\mu\right] +$$

$$+ \bar{\psi}_L \gamma\cdot(p + q Z^i_1 T^i)\psi_L + \bar{\psi}_R \gamma\cdot(p + q Z^i_2 T^i)\psi_R - m\bar{\psi}\psi \ , \qquad (7)$$

where $Z^i_{1\mu}$ and $Z^i_{2\mu}$ are 18 gauge vector fields which can be expressed as sums and differences of vector and axial vector fields,

$$Z_1 = V + A \ , \qquad Z_2 = V - A \ .$$

Now if we specialise to the Weyl representation of the γ-matrices the $U^+(6)\otimes U^-(6)$ transformation written in eq.(4) we have

$$\left.\begin{aligned} \psi'_L &= \left(1 + i\alpha^i T^i + i\underline{\alpha}^i\cdot\underline{\sigma} T^i\right)\psi_L \\ \psi'_R &= \left(1 + i\beta^i T^i + i\underline{\beta}^i\cdot\underline{\sigma} T^i\right)\psi_R \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

or

$$\psi' = \left[1 + i(\epsilon^i + i\gamma_5\eta^i)T^i + i\underline{\sigma}\cdot(\underline{\epsilon}^i + i\gamma_5\underline{\eta}^i)T^i\right]\psi$$

with $\alpha = \epsilon + i\eta$, $\beta = \epsilon - i\eta$. Then it is easy to check that the Yukawa-like interaction terms in (7) are invariant providing

$$\left.\begin{aligned} Z^{i\prime}_{10} &= Z^i_{10} + f^{ijk}\left(\alpha^j Z^k_{10} + \underline{\alpha}^j\cdot\underline{Z}^k_1\right) \\ \underline{Z}^{i\prime}_1 &= \underline{Z}^i_1 + f^{ijk}\left(\alpha^j \underline{Z}^k_1 + \underline{\alpha}^j Z^k_{10}\right) - d^{ijk}\underline{\alpha}^j\times\underline{Z}^k_1 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} Z^{i\prime}_{20} &= Z^i_{20} + f^{ijk}\left(\beta^j Z^k_{20} - \underline{\beta}^j\cdot\underline{Z}^k_2\right) \\ \underline{Z}^{i\prime}_2 &= \underline{Z}^i_2 + f^{ijk}\left(\beta^j \underline{Z}^k_2 - \underline{\beta}^j Z^k_{20}\right) - d^{ijk}\underline{\beta}^j\times\underline{Z}^k \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

However the free Lagrangian changes by

$$\delta\mathcal{L}_0 = 2\,\bar{\psi}_L\underline{\alpha}^i\times\underline{\gamma}\cdot\underline{p}\,T^i\psi_L + 2\,\bar{\psi}_R\underline{\beta}^i\times\underline{\gamma}\cdot\underline{p}\,T^i\psi_R +$$

$$+ im\,(\underline{\alpha}^i - \underline{\beta}^i)\cdot\left(\bar{\psi}_R\underline{\sigma}T^i\psi_L - \bar{\psi}_L\underline{\sigma}T^i\psi_R\right) + \qquad (11)$$

$$+ \text{ meson terms}$$

Clearly the mass term $\bar{\psi}\psi$ is invariant only if the γ_5 containing part of the transformation vanishes ($\eta = 0$ or $\alpha = \beta$). Also as stated before, the kinetic energy term is at least invariant ~~only~~ for the part of the transformation (8) corresponding to pure rotations, viz.

$$\psi \to \left(1 + i\epsilon^i T^i + i\underline{\epsilon}^0\cdot\underline{\sigma}\right)\psi \ , \quad \underline{p} \to \underline{p} + \underline{\epsilon}^0\times\underline{p}$$

Note also that $Z_\mu Z_\mu$ is invariant in the Euclidean sense, i.e. $\delta(Z_0^2 + \underline{Z}^2) = 0$. We have omitted writing the meson equivalents of the fermion kinematic-energy in eq.(11) for the sake of brevity.

5. Conclusions

To summarise the situation in respect of combining the Lorentz with the internal symmetry groups, we succeed in writing down a complete field-theoretic formalism provided we extend the algebra of the homogeneous, and not the inhomogeneous Lorentz group. The operators $(1 \pm i\gamma_5)\sigma_{\mu\nu}$ correspond to the two independent (angular momentum) operators which generate the homogeneous Lorentz group.

The group structures $U^{+}(6) \otimes U^{-}(6)$ are a direct generalisation from $SU^{\pm}(2)$ to $U^{\pm}(6)$ of spinors of each kind. However we note that these generalisations do not leave the kinetic energy terms invariant. The physically significant group with 36 generators is then the generalisation of the homogeneous Lorentz group, this generalisation consisting of 36 generators of space rotations $\boldsymbol{\sigma}$ and the unitary transformations T^{i}, $\boldsymbol{\sigma} T^{i}$. For the rest frame of a single particle, this group coincides with $U_{W}(6)$, the "little group" of Gürsey, Radicati and Sakita.

The authors are deeply indebted to Prof. P. T. Matthews and Dr. J. Charap for stimulating discussions. They have developed the $U^{+}(6) \otimes U^{-}(6)$ formalism independently. After completion of this work the authors have also seen a preprint by M. A. B. Beg and A. Pais on the subject and a reference therein to a preprint by Lee, Cornwall, Freund and Bardakci.

APPENDIX

We list here the commutators and anticommutators that arise in the algebra of $U(12)$. For the $U(3)$ spin part we have

$$[T^{i}, T^{j}] = i f^{ijk} T^{k}, \quad \{T^{i}, T^{j}\} = d^{ijk} T^{k}.$$

The f and d are the same as those of Gell-Mann (Phys. Rev. 125, 1067 (1962)) and $\lambda = \frac{1}{2} T$ establishes the correspondence with his notation.

For the Dirac algebra we use the 16 matrices

$$\gamma^{A} = 1, \ \gamma_{\mu}, \ \sigma_{\mu\nu} = \tfrac{i}{2}[\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}], \ \sigma_{\mu 5} = i\gamma_{\mu}\gamma_{5}, \ \gamma_{5}$$

for which $\bar{\psi}\gamma^{A}\psi$ is real. Then listing the results,

$$[1, \sigma_{\mu\nu}] = 0$$
$$\{1, \sigma_{\mu\nu}\} = 2\sigma_{\mu\nu}$$
$$[\gamma_{\lambda}, \sigma_{\mu\nu}] = 2i(g_{\lambda\mu}\gamma_{\nu} - g_{\lambda\nu}\gamma_{\mu})$$
$$\{\gamma_{\lambda}, \sigma_{\mu\nu}\} = -2\,\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}\,\sigma_{\rho 5}$$
$$[\sigma_{\kappa\lambda}, \sigma_{\mu\nu}] = 2i(g_{\kappa\nu}\sigma_{\lambda\mu} + g_{\lambda\mu}\sigma_{\kappa\nu} - g_{\kappa\mu}\sigma_{\lambda\nu} - g_{\lambda\nu}\sigma_{\kappa\mu})$$
$$\{\sigma_{\kappa\lambda}, \sigma_{\mu\nu}\} = 2(g_{\kappa\mu}g_{\lambda\nu} - g_{\lambda\mu}g_{\kappa\nu}) - 2\,\epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}\gamma_{5}$$
$$\{\sigma_{\lambda 5}, \sigma_{\mu\nu}\} = -2\,\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}\gamma_{\rho}$$
$$[\sigma_{\lambda 5}, \sigma_{\mu\nu}] = 2i(g_{\lambda\mu}\sigma_{\nu 5} - g_{\lambda\nu}\sigma_{\mu 5})$$
$$[\gamma_{5}, \sigma_{\mu\nu}] = 0$$
$$\{\gamma_{5}, \sigma_{\mu\nu}\} = \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\,\sigma_{\rho\lambda}$$

We also include here the currents which generate $U^{+}(6) \oplus U^{-}(6)$. Thus under (4) we have

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\lambda \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda \psi_L)} \delta\psi_L + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda \psi_R)} \delta\psi_R \right] + \text{ meson contributions}$$

$$= -\partial_\lambda \Big[\bar{\psi}_L \gamma_\lambda \left(\tfrac{1}{2} i \alpha^j_{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} T^j + i\alpha^j T^j \right) \psi_L + $$

$$+ \bar{\psi}_R \gamma_\lambda \left(\tfrac{1}{2} i \beta^j_{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} T^j + i\beta^j T^j \right) \psi_R + \cdots \Big]$$

$$= -\tfrac{i}{2} \alpha^j_{\mu\nu} \partial_\lambda J^j_{L\mu\nu,\lambda} - \tfrac{i}{2} \beta^j_{\mu\nu} \partial_\lambda J^j_{R\mu\nu,\lambda} - i\alpha^j \partial_\lambda J^j_{L\lambda} - i\beta^j \partial_\lambda J^j_{R\lambda}$$

where

$$J^j_{L\mu\nu,\lambda} = \bar{\psi}_L \gamma_\lambda \sigma_{\mu\nu} T^j \psi_L + \cdots , \qquad J^j_{L\lambda} = \bar{\psi}_L \gamma_\lambda T^j \psi_L + \cdots$$

and similarly for J_R. Since the only change in the Lagrangian is that of the free part,

$$\partial_\lambda J^j_{L\lambda} = \partial_\lambda J^j_{R\lambda} = 0 , \qquad j = 0, 1, \ldots, 8$$

$$\left.\begin{aligned} \partial_\lambda J^j_{L\mu\nu,\lambda} &= 2\bar{\psi}_L (\gamma_\nu \partial_\mu - \gamma_\mu \partial_\nu) T^j \psi_L + \cdots \\ \partial_\lambda J^j_{R\mu\nu,\lambda} &= 2\bar{\psi}_R (\gamma_\nu \partial_\mu - \gamma_\mu \partial_\nu) T^j \psi_R + \cdots \end{aligned}\right\} j = 1, \ldots, 8$$

$$\text{and} \quad \partial_\lambda J^0_{R\mu\nu,\lambda} = \partial_\lambda J^0_{L\mu\nu,\lambda} = 0 \qquad \text{if} \quad m = 0.$$

1. A. Salam, Phys. Letters, to be published.
F. Gürsey and L. A. Radicati, Phys. Rev. Letters 13, 173 (1964).
R. P. Feynman, M. Gell-Mann and G. Zweig, Phys. Rev. Letters 13, 678 (1964). Unfortunately, the authors did not have the benefit of seeing this paper while the work was in progress.

2. E. Wigner, Phys. Rev. 51, 106 (1937).

3. For details see A. Salam, Lectures in Theoretical Physics, Boulder, Colorado, 1959. (Interscience, New York, 1960).

4. Strictly speaking, this is only an algebra in the rest frame.

5. F. Calogero, Il Nuovo Cimento 10, 280 (1961).

6. Note that the factors $\frac{1}{2}(1 \pm i\gamma_5)$ which appeared in the generators $(1 \pm i\gamma_5)T^i$, $(1 \pm i\gamma_5)\sigma_{\mu\nu}T^i$ in (1) is now incorporated in the $\psi_{L,R}$ in writing (4).

7. If we extended the notion of p_μ to a 72-dimensional vector $p^{j\pm}_\mu$ transforming according to the $(1,35) \oplus (35,1)$ representation then the invariance of the free Lagrangian would be restored.

8. $\delta(\bar{\psi}_L \gamma_\mu T^i \psi_L) = \frac{i}{2} \alpha^j_{\nu\lambda} \bar{\psi}_L \left[i(g_{\mu\nu}\gamma_\lambda - g_{\mu\lambda}\gamma_\nu) d^{ijk} T^k - i\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\gamma_\rho f^{ijk} T^k \right] \psi_L$

9. A. Salam and J. C. Ward, Il Nuovo Cim. 19, 167 (1961) and Phys. Rev. 136 B, 763 (1964).
M. Gell-Mann, Phys. Rev. 125, 1067 (1962).
M. Gell-Mann, Physics 1, 63 (1964).
Y. Nambu and P. G. Freund, Phys. Rev. Letters 12, 717 (1964).

ICTP 64/11

International Atomic Energy Agency

INTERNATIONAL CENTRE FOR THEORETICAL PHYSICS

U(12) AND BROKEN SU(6) SYMMETRY

R. Delbourgo, Abdus Salam and
J. Strathdee

(Submitted to Physical Review Letters)

Trieste

17 December 1964

U(12) AND BROKEN SU(6) SYMMETRY

§ 1. Starting with a spin $\frac{1}{2}$ quark model the most general algebraic structure is the U(12) ring of matrices $\gamma^\mu\tau^{i}$[1]. We wish to point out that this U(12) structure can be used to give a direct covariant formulation of the SU(6) symmetry of GÜRSEY, RADICATI and SAKITA[2], provided that for the physically realised multiplets one writes not only the composite field operators but also their conjugate momentum operators as "independent" components within the same multiplet. The motivation of our remark is as follows: a number of authors[3] have recently suggested that the SU(6) symmetry of ref. 2 may be looked upon as a non-covariant approximation to a symmetry $W(6) = U_L(6) \times U_R(6)$ which itself is a straightforward generalisation of the $U_L(2) \times U_R(2)$ symmetry associated with the homogeneous Lorentz group[4]. Starting with this, a number of examples of interaction Lagrangians invariant for W(6) have been written down.

Now there are serious difficulties in elaboration of these ideas. First, the right and left split of the basic quark implies that $m_q = o$ and therefore W(6) must be badly broken. Second, physical particles correspond to representations of the inhomogeneous Lorentz group, and since kinetic energy terms are not invariant for $U_L(6) \times U_R(6)$ (in contrast to the Lorentz $U_L(2) \times U_R(2)$ case) it has so far been possible to develop theories of physical states at zero momenta[5] only. A third difficulty is related to the second; so long as there is no analogue of the inhomogeneous Lorentz group structure, it is impossible to assign physical particles unambiguously to the multiplets of W(6); thus baryon octet and decimet can belong equally to (56,1) + (1,56) or to (6,21) + (21,6).

For the 4-component Dirac equation, which includes the mass term, the passage to the inhomogeneous group is made in the well-known fashion by extending the sub-algebras $U_L(2) \times U_R(2)$ (with six generators $\sigma^{\mu\nu}$) to the full Dirac algebra U(4). This takes place essentially because U(4) contains in addition to the $\sigma^{\mu\nu}$, the four (translation-like) matrices γ^μ's with commutation rules

$$[\gamma^\mu, \sigma^{\nu\lambda}] = 2i(g^{\mu\nu}\gamma^\lambda - g^{\mu\lambda}\gamma^\nu) \qquad (1)$$

allowing one to write equations invariant for the inhomogeneous group;

$$(\gamma^\mu p^\mu - m)\psi = 0 \quad , \quad w^\mu p^\mu \psi = 0$$

where $w^\mu = \frac{i}{4}\gamma^5 [\gamma^\mu, \gamma^\nu p^\nu]$ (2)

Note in passing that $i\gamma^\mu \gamma^5 w^\mu = \frac{3}{2}\gamma^\mu p^\mu$, so that the first equation may be written in the form

$$[\gamma^\mu (p^\mu + i\gamma^5 w^\mu) + \tfrac{1}{2} m]\psi = 0 \quad . \tag{3}$$

What we wish to emphasise is that there is a close analogy between the group completion $U_L(2) \times U_R(2) \leftrightarrow U(4)$ and $U_L(6) \times U_R(6) \leftrightarrow U(12)$. The generators for $U_L(6) \times U_R(6)$ are the 72 matrices $\sigma^{\mu\nu} T^i$, T^i, $\gamma^5 T^i$. In addition to these U(12) contains another set of 72 matrices,

$$\Gamma^A = \gamma^\mu T^i \, , \quad \Gamma^{A5} = i\gamma^\mu \gamma^5 T^i \; ; \; A = (\mu i) \, , \; i = 0, .. 8, \; \mu = 0, .. 3.$$

with the typical commutation rules (similar to (1)):-

$$[\gamma^\lambda T^i, \sigma^{\mu\nu} T^j] = i d^{ijk}(g^{\lambda\mu}\gamma^\nu - g^{\lambda\nu}\gamma^\mu) T^k + f^{ijk} \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \gamma^\rho \gamma^5$$

$$[\gamma^\lambda \gamma^5 T^i, T^j] = i f^{ijk} \gamma^\lambda \gamma^5 T^k$$

Defining a 72-component vector (P^A, W^A) [6] once again one may write an "(inhomogeneous)W(6)" invariant equation

$$[\Gamma^A (P^A + i\gamma^5 W^A) + M]\psi = 0 \tag{4}$$

Note that $\delta[P^A P^A - W^A W^A] = 0$ and also $\delta[p^\mu p^\mu - w^\mu w^\mu] = 0$ where $p^\mu = P^{\mu 0}$, $w^\mu = W^{\mu 0}$. It is worth stressing too that the Lagrangian mass term remains invariant as well[7].

It is perfectly possible now to write a covariant $U_L(6) \times U_R(6)$ S-matrix formalism, using the U(12) algebra in complete analogy with a Lorentz covariant formalism for spin ½ particles which utilises the U(4) algebra. The chief problem is the passage to the physical limit of such S-matrix elements, the physical limit being defined[8] as $P^A \to p^\mu$, all other components of P and W vanishing. This last step will naturally break the $U_L(6) \times U_R(6)$ symmetry in a well-defined and determinate manner leaving a formalism which is fully Lorentz co-

variant. The symmetry breaking is well defined in the sense that we know precisely the transformation properties of the broken vector $(p^\mu, 0)$.

§ 2. Consider now the problem of higher representations. Starting from a single Dirac field γ^μ and a 4-component spinor one generates successively higher multiplets and their algebras by taking outer products[9]

$$\gamma^\mu_{(r)} = 1 \times 1 \times .. \times \gamma^\mu \times 1 \times .. \times 1 \, .$$

The first concrete example of this is the 4x4 representation of DUFFIN and KEMMER[10] with the associated algebra $\beta^\mu = \frac{1}{2}(\gamma^\mu \times 1 + 1 \times \gamma^\mu)$. This gives rise in the well-known manner to particles of spin one (10 components) and spin zero (5 components) within one multiplet. The crucial point is not that this is obviously the "natural" formalism for extension to U(6) ideas in that it combines zero spin and spin one; it is more, for by imposing the requirement that the field quantity satisfies a linear equation, Kemmer could show that the spin one field is composed of the potential A^μ as well as the field tensor[11,12] $F^{\mu\nu}$. Likewise the spin zero part consists of ϕ as well as its conjugate momentum $\partial_\mu \phi$. Altogether the spin decomposition is $16 = 10 \oplus 5 \oplus 1$. (The "1" does not correspond to any dynamical situation and is called the trivial representation of the algebra.)

The next algebra is generated by the matrices[13]

$$\alpha^\mu = \gamma^\mu \times 1 + 1 \times \beta^\mu$$

the reducible representations describing particles of spins ½ and $\frac{3}{2}$. In a future paper this decomposition will be exhibited in detail; like for the case of the β-algebra, both the field operators as well as their conjugate momenta occur together in the description of a physical system.

The extension of the above to include unitary spin (passage from U(4) to U(12)) presents no essential complications though the formalism gets tedious as is well known from past experience of calculations involving for example β-formalism for mesons. But the compensations are two-fold; first the ambiguities of $U_L(6) \times U_R(6)$ assignments for the same physical multiplet are avoided[14]; the formalism incorporates them all in a specific manner. Second, using the methods of §1 a broken but covariant SU(6) formalism can readily be constructed. In practice since one is hardly ever going to work out the dynamics of particles of spins $> 3/2$; we hope one can set up the necessary formal machinery once and for all. This will be treated elsewhere.

Our thanks are due to Dr. M. A. Rashid for numerous helpful suggestions.

References and Footnotes

1. The nine T^i are the 3x3 Hermitian generators of U(3), while the sixteen Dirac γ's generate U(4).

2. F. GÜRSEY and L. A. RADICATI, Phys. Rev. Letters **13**, 173 (1964).
   B. SAKITA, Phys. Rev. (to be published).

3. A. SALAM, Phys. Letters (to be published).
   R. DELBOURGO, A. SALAM and J. STRATHDEE, submitted to Phys. Rev.
   R. P. FEYNMAN, M. GELL-MANN and G. ZWEIG, Phys. Rev. Letters **13**, 678 (1964).
   K. BARDAKCI, J. M. CORNWALL, P. G. O. FREUND and B. W. LEE, Phys. Rev. Letters **13**, 698 (1964).
   T. FULTON and J. WESS, preprint (Vienna).

4. Adopting Weyl's "unitary trick", one considers a pseudo Euclidian metric for space-time. For a Dirac particle the homogeneous Lorentz group is then generated by $U_L(2) \times U_R(2) \approx (1 \pm i\gamma^5)\sigma^{\mu\nu}$.

5. M. BEG and A. PAIS, submitted to Phys. Rev. We are grateful to the authors for sending us a preprint.

6. A 36-component vector of this type was first considered by FULTON and WESS (ref. 3). For the case we are considering, it is necessary however that the vector have 72 components.

7. In fact the mass term is invariant also for a full U(12) transformation

$$\delta\psi = i(\epsilon^j + \epsilon^{j5} + \epsilon^{j\mu}\gamma^\mu + i\epsilon^{j\mu 5}\gamma^\mu\gamma^5 + \tfrac{1}{2}\epsilon^{j\mu\nu}\sigma^{\mu\nu})\psi .$$

if all the ϵ are real.

8. We realise that the precise meaning of the Hilbert space operators $\mathcal{P}^A$ and $\mathcal{W}^A$ (with eigenvalues P^A and W^A) is, to say the least, obscure. It is interesting nonetheless to observe that the W^A occurring in eq. (4) could be identified with the generalised Pauli-Lubanski-Bargmann spin operators if one relates (in complete analogy

with the case of the normal Dirac equation (eq. (3)) W^A and P^A by the implicit equation

$$W^A(P) = \text{constant} \times i\gamma_5 \left[\Gamma^A , \Gamma^B (P^B + i\gamma^5 W^B)\right] \qquad (5)$$

For the physical limit $P^A \to p^\mu$, eq. (5) solves to give

$$W^{\mu i}(p) \propto \gamma_5 \left[\gamma^\mu T^i , \gamma^\nu p^\nu\right]$$

Clearly, $p^\mu W^{\mu i}(p) = 0$ for all i, and when $i = o$, $W^{\mu o}(p)$ is just the normal spin pseudovector. More generally the 36 operators $W^{\mu i}(p)$ and T^i generate the little group $\mathcal{G}_6$ (or $U_W(6)$ of ref. 3). We have thus demonstrated that the solutions of the free equation $[\Gamma^A (P^A + i\gamma^5 W^A) + M]\psi = 0$ in what we have called the physical limit $P^A \to p^\mu$ can be labelled by the eigenvalues of p^μ, $w^{\mu i}(p)$ and T^i. Note that
$P^{\mu o} P^{\mu o} - W^{\mu o} W^{\mu o}$ = constant now implies with this interpretation of $W^{\mu o}$, the relation:-

$$p^\mu p^\mu = \text{constant} + j(j+1)$$

9. F. J. BELINFANTE, H. A. KRAMERS, J. K. LUBANSKI, Physica 8, 597 (1941).
10. R. J. DUFFIN, Phys. Rev. 54, 1114 (1938).
N. KEMMER, Proc. Roy. Soc. A, 173, 91 (1939).
11. For a Lie-group gauge theory $F^{\mu\nu}$ would correspond to the "generalised" conjugate momentum. For a Yang-Mills type of theory for example $\underline{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu \underline{A}^\nu - \partial^\nu \underline{A}^\mu + 2\,\underline{A}^\mu \times \underline{A}^\nu$.
12. N. KEMMER, Helv. Phys. Acta, 23, 829 (1960), has stressed that both types of quantities A^μ as well as $F^{\mu\nu}$ are completely on par so far as dynamics is concerned and neither of the quantities is in any sense more "fundamental" than the other.
13. A detailed worked-out example of a slightly modified version of the above is the algebra generated by the matrices $\alpha^\mu = \gamma^\mu \times 1 + \gamma^5 \times \beta^\mu$. See HARISH-CHANDRA, Proc. Roy. Soc. 192, 195 (1947). This theory describes also spin $\frac{1}{2}$ and $\frac{3}{2}$ particles. The description of the spin $\frac{1}{2}$ particle is given essentially by the derivative of a spinor $\partial_\mu \psi$ rather than by a fundamental spinor ψ.
14. Note $12 \times \overline{12} = 143 \oplus 1 = 9 \times 10 + 8 \times 5 + 5$ (barring the 9 nine trivial components). Also,

$12 \times 12 \times 12 = 220 \oplus 2\,(572) \oplus 364$, where the $U_L(6) \times U_R(6)$ content of the multiplet is as follows,

$$220 = (20,1) + (15,6) + (6,15) + (1,20)$$
$$572 = (70,1) + (21,6) + (15,6) + (6,15) + (6,21) + (1,70)$$
$$364 = (56,1) + (21,6) + (6,21) + (1,56)$$

Properties of the Weak Interactions.

R. H. Dalitz.
The Clarendon Laboratory, Oxford.

1. Introduction.

In these lectures, we shall be interested in the experimental situations providing evidence for the conservation laws and symmetry principles which appear likely to hold for the weak interactions, and in the predictions and implications of these principles, especially in their possible relationship with unitary symmetry. In discussing weak interaction processes, we shall assume as a general framework the plausible "current-current hypothesis" introduced by Feynman and Gell-Mann[1]. This hypothesis assumes that these processes result from the coupling between two "weak interaction currents" of vector form. Its success makes plausible a further hypothesis, that these weak interactions are actually carried by an intermediate vector meson field coupled directly with the weak interaction current, although there is not yet any direct evidence which requires this "weak vector meson" hypothesis.

The current-current hypothesis is known to describe the situation for the simplest weak interaction, the decay of the muon,

$$\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu , \qquad (1.1)$$

as well as for the nucleon beta-decay $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$. For μ-decay, the decay interaction takes the form

$$G_\mu \left\{ J^\dagger_{\mu\alpha} \quad J_{e\alpha} \right\} + \text{h.c.}, \qquad (1.2)$$

where the currents $J_{\mu\alpha}$ and $J_{e\alpha}$ are given by the form, for $b = \mu$ and e,

$$J_{b\alpha} = \bar{\nu}_b \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) b^+ \qquad (1.3)$$

There is now rather strong evidence for <u>μ-e universality</u>, i.e. for the hypothesis that the muon and electron interactions all have exactly the same strength and form. For weak interactions, this means that the leptonic weak interactions always involve the leptons through a leptonic weak-interaction current, of the form

$$J_{\ell\alpha} = \left\{ \bar{\nu}_e \gamma_\alpha (1+\gamma_5) e^+ + \bar{\nu}_\mu \gamma_\alpha (1+\gamma_5) \mu^+ \right\}. \qquad (1.4)$$

We shall begin (Sections 2 and 3) with a discussion of leptonic modes of decay. Since these processes involve relatively few strongly-interacting particles, their interpretation is simpler than for the non-leptonic modes, which will be discussed in Section 4. The interactions for the description of the leptonic modes take the general form

$$\left\{ J_\alpha + S_\alpha \right\}^\dagger J_{\ell\alpha} + \text{h.c.}, \qquad (1.5)$$

where J_α denotes the weak-interaction current for strangeness-conserving transitions between strongly-interacting particles, and S_α denotes the weak-interaction current for strangeness-changing transitions.

2. The Strangeness-conserving Leptonic Decay Interactions.

The strangeness-conserving decay processes which have been studied to date are for the beta transitions $n \to p$, $\pi^+ \to \pi^0$, and $\Sigma^+ \to \Lambda$.

Generally, the relevant weak current, J_α, consists of a vector part J_α^V and an axial vector part J_α^A, together with some further terms (the tensor and pseudoscalar terms) which are considered not to be present in the primary current (the current remaining when all strong interactions are turned off) but to be induced from the primary current by the effects of the strong interactions (just as the neutron magnetic moment is considered to be an electromagnetic effect induced by the strong interactions).

For the vector current, Feynman and Gell-Mann[1)], and also Zeldovitch and Gerstein[2)], have put forward the hypothesis that J_α^V is proportional to the component $I_{\alpha+}$ of the isospin current $\underset{\sim}{I}_\alpha$. This implies that:

(i) J_α^V is a conserved current, i.e.

$$\frac{\partial J_\alpha^V}{\partial x_\alpha} = 0, \qquad (2.1)$$

since this is the case for the isospin current. However, the converse is not true: the hypothesis that J_α^V is conserved is not sufficient to ensure that J_α^V is related with the isospin current.

(ii) matrix-elements of J_α^V are directly related with the matrix-elements for corresponding electromagnetic processes. Explicitly, if the electromagnetic current is written in terms of I = 0 and I = 1 components,

$$(j_\alpha)_{EM} = e\left\{j^0_\alpha + (j^1_\alpha)_3\right\}, \qquad (2.2)$$

then the matrix-element of J^V_α is proportional to the matrix-element of $(j^1_\alpha)_+$.

(iii) for transitions $\Delta Y = 0$, this form of J^V_α induces only transitions for which $\Delta I = 1$.

To discuss the beta transition $n \to p$, we consider the corresponding matrix-element of j_{EM}, giving the charge and magnetic moment structure of the nucleon. Thus, for small momentum transfer q, we have

$$(N|(j_\alpha)_{EM}|N) = \bar{u}_N\left\{e\gamma_\alpha \frac{1+\tau_3}{2} + \frac{e}{2M}\sigma_{\alpha\beta}q_\beta\left[\mu_p\left(\frac{1+\tau_3}{2}\right) + \mu_n\left(\frac{1-\tau_3}{2}\right)\right]\right\}u_N \qquad (2.3)$$

where μ_p, μ_n denote the magnetic moments of the proton and neutron respectively. Picking out the term j^1_α from (2.3), we obtain the form for J^V_α,

$$J^V_\alpha \sim \left\{\gamma_\alpha\tau_+ + \frac{1}{2M}(\mu_p-\mu_n)\,\sigma_{\alpha\beta}q_\beta\tau_+\right\}, \qquad (2.4)$$

leading to the vector part of the $n \to p$ weak interaction

$$J^{V\dagger}_\alpha J_{\ell\alpha} = G^V_\beta\left\{\tau_+\gamma_\alpha + \tau_+\sigma_{\alpha\beta}\frac{q_\beta}{2M}(\mu_p-\mu_n)\right\}J_{\ell\alpha}. \qquad (2.5)$$

The first term in the curly brackets is the usual vector term. The coefficient G^V_β is determined experimentally, its value being given by $G^V_\beta/G_\mu = 0.980 \pm 0.002$. For larger q^2, the momentum transfer dependence of the vector coefficient is prescribed, being given by $\left\{F^p_{ch}(q^2) - F^n_{ch}(q^2)\right\}$, where F^p_{ch} and F^n_{ch} are the charge form factors for proton and neutron respectively. The terms proportional to $\sigma_{\alpha\beta}$ are the "weak magnetism" terms of Gell-Mann[3], induced by the strong interactions.

A term of the form $(G^V_\beta\tau_+\sigma_{\alpha\beta}q_\beta\,\delta/2M)$ is always possible. As pointed out by Gell-Mann[3], such a term modifies the allowed beta spectrum for a $1+ \to 0+$ transition by a factor $(1 + \frac{8}{3}aE)$, where E is the electron energy and

$$a = \pm\left|(G^V_\beta/G^A_\beta)\right|\,(1+\delta)/2M, \qquad (2.6)$$

where the + sign holds for electron emission, and the - sign for positron emission. Following Gell-Mann's suggestion, the existence of such a term has been established by the comparison of the beta spectra for B^{12} and N^{12} decay to the ground state of C^{12}, as described in Professor Wu's lectures[4]. The particular feature of the CVC hypothesis is that the value of δ is prescribed, namely $\delta = (\mu_p - \mu_n)$, and the experimental data on N^{12} and B^{12} decay does give $\delta_{exp}/(\mu_p-\mu_n) = 0.97 \pm 0.24$.

The pion beta decay,

$$\pi^+ \to \pi^0 + e^+ + \nu_e, \qquad (2.7)$$

provides another check on the CVC hypothesis. If the isospin current of the pion is included in the above expression for J^V_α, we have

$$J^{V\dagger}_\alpha J_{\ell\alpha} = G^V_\beta\left\{\bar{N}\tau_+\gamma_\mu N + \sqrt{2}\left(\overline{\pi^+}\frac{\partial\pi^0}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial\overline{\pi^+}}{\partial x_\alpha}\pi^0\right) + \ldots\right\}J_{\ell\alpha}, \qquad (2.8)$$

from which we can obtain at once the matrix-element for the process (2.7). Since the pion beta decay involves very small momentum transfer, the matrix-element is given by the $\alpha = 0$ component of the pion current, i.e. pion beta decay is an allowed vector transition, with the matrix element $\sqrt{2}G^V_\beta(m_\pi + m_{\pi^0})$. Again, as pointed out by Feenberg and Primakoff[5], the existence of the process (2.7) is always to be expected; the particular feature of the CVC hypothesis is that its matrix-element should have this definite value, corresponding to a branching ratio 1.07×10^{-8} relative to $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ decay. The experimental values available[6] are in good agreement (within 20% accuracy) with this expectation from the CVC hypothesis.

2.2 The Axial Vector Current and the Goldberger-Treiman relation.

The axial vector part J^A_α of the $\Delta s=0$ weak current is certainly not conserved for the physical particles. However, the hypothesis that J^A_α is a "partially-conserved current" appears to work rather well, as we shall see.

For example, consider a transition between two baryon states $B \to C$. The matrix-element of the axial vector current has the general form

$$(C|J^A_\alpha|B) = \bar{u}_C\left\{G^A_{BC}\,\gamma_\alpha\gamma_5 + G^P_{BC}\,q_\alpha\gamma_5 + G^T_{BC}\,\sigma_{\alpha\beta}\,q_\beta\,\gamma_5\right\}u_B, \tag{2.9}$$

where q_α denotes the momentum transfer, $q_\alpha = p_{C\alpha} - p_{B\alpha}$.

Now consider the corresponding matrix-element of $\partial J^A_\alpha/\partial x_\alpha$:

$$-i\left(C\left|\frac{\partial J^A_\alpha}{\partial x_\alpha}\right|B\right) = q_\alpha\,(C|J^A_\alpha|B)$$

$$= \left\{-G^A_{BC}\,(M_B + M_C) + G^P_{BC}\,q^2\right\}(\bar{u}_C\,\gamma_5\,u_B). \tag{2.10}$$

Clearly, this matrix-element is not identically zero; for this to be true would require $G^P_{BC} \approx G^A_{BC}(0)\,(M_B + M_C)/q^2$ for small q^2, which is certainly not the case. The hypothesis that J^A_α is "partially conserved" is the hypothesis that the matrix-elements of $\partial J^A_\alpha/\partial x_\alpha$ do approach zero for sufficiently large momentum transfer, sufficiently rapidly that an unsubtracted dispersion

relation holds for these matrix-elements. For the matrix-element just considered, this means that the coefficent within the curly brackets of (2.10) is given by the expression

$$G^A_{BC}(M_B+M_C) - G^P_{BC}q^2 = \frac{G_{\pi BC}\,F_{\pi\ell\nu}\,m_\pi^2}{q^2-m_\pi^2} + \int_{(3m_\pi)^2}^{\infty}\frac{F(\sigma^2)}{q^2-\sigma^2}\,d\sigma^2. \tag{2.11}$$

The sum on the right-hand side of this dispersion relation is over the contributions from intermediate states with B = 0, ($G=-1$, $I = 1$,) and spin-parity (0-). The state of lowest mass corresponds to one-pion-exchange, as depicted in Fig.1b, and this gives rise to the isolated pole term of (2.11). The coefficient $F_{\pi\ell\nu}$ is defined in terms of the pion decay amplitude,

$$M(\pi \to \ell\nu) = F_{\pi\ell\nu}\,p_{\pi\alpha}\,(\bar{\nu}\gamma_\alpha(1+\gamma_5)\ell), \tag{2.12a}$$

$$= F_{\pi\ell\nu}\,m_\ell\,(\bar{\nu}(1-\gamma_5)\ell), \tag{2.12b}$$

and is directly related with the pion lifetime,

$$\Gamma(\pi \to \ell\nu) = (F^2_{\pi\ell\nu}/4\pi)\,m_\pi\,m_\ell^2\,(1-m_\ell^2/m_\pi^2). \tag{2.13}$$

$G_{\pi BC}$ denotes the pseudoscalar coupling constant for the interaction $C \to \pi + B$. The remaining terms correspond to intermediate states including three or more pions. Thus, the function considered has a pole of known residue at $q^2 = m_\pi^2$, and a branch cut along the positive real q^2-axis, from $q^2 = 9m_\pi^2$.

Near $q^2 = 0$, the region of physical interest for the decay processes to be considered, the pole term is very much closer than that due to the branch cut, so that the latter contribution may be regarded as a background term. Evaluating (2.11) at $q^2 = 0$, we have

$$- G^A_{BC}(0)(M_B + M_C) = G_{\pi BC} F_{\pi \ell \nu}(1 + b_{BC}). \qquad (2.13)$$

For $b = 0$, this is the Goldberger-Treiman relation[7]. Its validity depends both on the hypothesis of partial conservation, and on the dominance of the pole term over the background from the higher-mass contributions.

For nuclear beta-decay, we then have

$$-2M\, G^A_\beta = \sqrt{2}\, G_{\pi NN} F_{\pi \ell \nu}(1 + b). \qquad (2.14)$$

For this case, all of the coupling parameters are known, so that the value of b can be deduced. With $G^A_\beta / G^V_\beta = 1.15 \pm 0.05$[4], Eq.(2.14) gives $(1 + b) = 0.86 \pm 0.04$, so that the background term is of order 10%.

The pseudoscalar coefficient G^P_{BC} can then be obtained by evaluating (2.11) at some point $q^2 \neq 0$. Equivalently, we may differentiate both sides of (2.11) with respect to q^2 and equate the two derivatives at $q^2 = 0$, with the result

$$-\tfrac{1}{3} G^A_{BC}(0) R^2 (M_B + M_C) - G^P_{BC}(0) = -G_{\pi BC} F_{\pi \ell \nu}(1 + \mathcal{D})/m_\pi^2 , \qquad (2.15)$$

where R denotes the r.m.s. radius for the axial vector form factor, and the background term has been written as $- G_{\pi BC} F_{\pi \ell \nu}\{ b + \mathcal{D}(q^2/m_\pi^2) + \ldots \}$. We note that the amplitude b of the background term does not appear in this expression (2.15); only the slope $\mathcal{D}$ of the background term appears. It is reasonable to expect $\mathcal{D}$ to have a value of order $\mathcal{D} \approx b (m_\pi/\bar{m})^2 \leq b/9$, where $\bar{m}$ corresponds to the mass region from which the integral of expression (2.11) along the branch cut $\sigma^2 \geq 9m_\pi^2$ derives its major contribution.

Thus, the Goldberger-Treiman relation between G^A_{BC} and $G_{\pi BC}$,

$$G^A_{BC}(0)/G_{\pi BC} = - F_{\pi \ell \nu}/(M_B + M_C), \qquad (2.16)$$

is not exact. Its validity depends on the importance of the background term b relative to the one-pion-pole contribution. It is difficult to give an estimate of b_{BC} since there are no known mesonic resonant states with the quantum numbers (0-), $G = -1$, $I = 1$, which could dominate the background integral. Later, we shall discuss the use of the Goldberger-Treiman relation to connect the weak and strong interaction coupling constants. It will then be important to remember that the corresponding value for b_{BC} may not always be as small as the value known for b_{NN}.

2.3 Σ-Λ Beta Decay.

First we discuss the theoretical expectations for these processes,

$$\Sigma^- \to \Lambda + e^- + \bar{\nu}_e , \qquad (2.17a)$$

$$\Sigma^+ \to \Lambda + e^+ + \nu_e . \qquad (2.17b)$$

With the CVC hypothesis, as discussed by Cabibbo and Gatto[8] and by Cabibbo and Franzini[9], the vector weak current generates the matrix-element

$$\langle \Lambda | J_\alpha^V | \Sigma \rangle = \left(V(q^2)\gamma_\alpha + L(q^2)\sigma_{\alpha\beta}q_\beta + N(q^2)q_\alpha \right). \qquad (2.18)$$

The current conservation condition gives at once,

$$q_\alpha \langle \Lambda | J_\alpha^V | \Sigma \rangle = V(q^2)(M_\Lambda - M_\Sigma) + N(q^2)q^2 = 0. \qquad (2.19)$$

Further, identification of J_α^V with the isospin current gives the result

$$V(0) = 0 \qquad (2.20)$$

since the isospin current is necessarily diagonal in the particle fields and does not include any $\Sigma\Lambda$ term. We may then write $V(q^2) = V_1(q^2)q^2/M^2$, with $N(q^2) = V_1(q^2)(M_\Sigma - M_\Lambda)/M^2$. Finally, the coefficient $L(0)$ is directly related with the $\Sigma\Lambda$ transition magnetic moment*, $L(0) = \mu_{\Sigma\Lambda}/(M_\Sigma + M_\Lambda)$. Since the momentum transfers of interest are relatively small ($q \leq 80$ MeV/c), the contribution of the vector current to these decay rates is expected to be rather small.

---

* With unitary symmetry, Coleman and Glashow[10] obtained the result $\mu_{\Sigma\Lambda} = (\sqrt{3}/2)\mu_n$, where μ_n denotes the neutron magnetic moment. This value corresponds to a lifetime of 2.6×10^{-19} sec. for the transition $\Sigma^0 \to \Lambda + \gamma$. Unitary symmetry also predicts $V(q^2) = -q^2R_n^2/6 + \ldots$ for small q^2, where R_n denotes the charge radius for the neutron, known to be very small ($R_n = (0 \pm 0.08) \times 10^{-13}$ cm.[11])).

The matrix-element of J_α^A is dominated by $G_{\Sigma\Lambda}^A \gamma_\alpha \gamma_5$, where the relation (2.13) gives

$$G_{\Sigma\Lambda}^A = - \frac{G_{\pi\Sigma\Lambda} F_{\pi\ell\nu}(1 + b_{\Sigma\Lambda})}{M_\Sigma + M_\Lambda} \qquad (2.21)$$

← Nothing is known about $b_{\Sigma\Lambda}$ so it is usually neglected. With this value (2.21), the rates expected are

$$\Gamma(\Sigma_{\Lambda e}^-)/\Gamma_{tot}(\Sigma^-) = 1.3 \times 10^{-4}(G_{\pi\Sigma\Lambda}/G_{\pi NN})^2, \qquad (2.22a)$$

$$\Gamma(\Sigma^+_{\Lambda e})/\Gamma_{tot}(\Sigma^+) = 0.4 \times 10^{-4} (G_{\pi\Sigma\Lambda}/G_{\pi NN})^2. \qquad (2.22b)$$

The branching ratio expected for Σ^+ decay is about four times smaller than that for Σ^- decay both because of the smaller energy release in $\Sigma^+ \to \Lambda$ decay, the final phase space being 60% of that for the $\Sigma^- \to \Lambda$ decay, and because of the shorter lifetime for Σ^+ decay, $\Gamma_{tot}(\Sigma^+)/\Gamma_{tot}(\Sigma^-)$ being about 2. The strength of the coupling constant $G_{\pi\Sigma\Lambda}$ is believed to be comparable with $G_{\pi NN}$, from the following arguments:

(i) the comparison of the ^1S_o $\Lambda\Lambda$ interaction with the ^1S_o ΛN interaction. These interactions are both due dominantly to two-pion exchange, whose contribution is proportional to $(G_{\pi\Sigma\Lambda})^4$ for the $\Lambda\Lambda$ system, and to $(G_{\pi\Sigma\Lambda}G_{\pi NN})^2$ for the ΛN system, so that a direct comparison of the interaction strengths[12-14] gives a rough measure of the ratio $G_{\pi\Sigma\Lambda}/G_{\pi NN}$, with the result $G_{\pi\Sigma\Lambda}/G_{\pi NN} \approx 1$. Also, for such a value of $G_{\pi\Sigma\Lambda}$, the absolute strength of the ^1S_o ΛN potential is in good accord with the experimental evidence, for a reasonable value of the hard-core radius[15].

(ii) for the $\pi\Lambda$ system, the Y_1^* (1385) resonance is the analogue of the $N^*_{3/2}$ (1238) resonance in the $p_{3/2}$ state of the πN system. The branching ratio $\Sigma\pi/\Lambda\pi$ for Y_1^* (1385) decay is unexpectedly low, which appears as an indication that the coupling constant $G_{\pi\Sigma\Sigma}$ is small relative to $G_{\pi\Sigma\Lambda}$ and that the resonance state is dominantly in the $\pi\Lambda$ channel. Then, in order that this correspondence should hold between the Y_1^* resonance at $Q(\pi\Lambda) = 130$ MeV and the $N^*_{3/2}$ resonance at $Q(\pi N) = 160$ MeV, it is necessary that the attractive interactions in the $\pi\Lambda$ and πN systems should have comparable strength, which requires that $G_{\pi\Sigma\Lambda}/G_{\pi NN}$ should be comparable with unity. Alternatively, in the relativistic Chew-Low theory of the $p_{3/2}$ decuplet in unitary symmetry[16], the attraction in the $p_{3/2}$ state is strongest for the decuplet state, relative to all other unitary multiplets (except possibly the unitary singlet) for values of the mixing coefficient f (cf. Sec. 3.6 below), which occurs in the expression for the meson-baryon coupling, in the neighbourhood of $f = \frac{1}{4}$. Since $G_{\pi\Sigma\Lambda}/G_{\pi NN} = 2(1-f)/\sqrt{3}$, and $G_{\pi\Sigma\Sigma}/G_{\pi NN} = 2f$, the observed situation that the decuplet resonance does lie lowest again requires $G_{\pi\Sigma\Lambda}/G_{\pi NN} \approx 1$ and $G_{\pi\Sigma\Sigma}/G_{\pi\Sigma\Lambda} \lesssim 1/2$. In fact, the calculations for $f = 1/4$ give a $\Sigma\pi/\Lambda\pi$ ratio of about 9%, larger than the observed ratio of $2\pm2\%$[17]. A smaller value for f, in the range $0 < f < 1/4$, would reduce this discrepancy.

The branching ratios observed by Burnstein et al.[18],

$$\Gamma(\Sigma^-_{\Lambda e})/\Gamma_{tot}(\Sigma^-) = (0.75 \pm 0.28) \times 10^{-4}, \qquad (2.23a)$$

$$\Gamma(\Sigma^+_{\Lambda e})/\Gamma_{tot}(\Sigma^+) = (0.66 \pm 0.35) \times 10^{-4}, \qquad (2.23b)$$

are in reasonable agreement with the expectation (2.22), in view of the uncertainties in the use of the Goldberger-Treiman relation.

The momentum distribution of the recoil Λ particles (measured in the Σ rest frame) has also been obtained by Burnstein et. al. for 19 $\Sigma^-_{\Lambda e}$ events, as shown in Fig.2. In part, this spectrum reflects the form of the electron-neutrino angular correlation; since the spectrum is plotted as function of p_Λ^2, the phase space factor approaches zero like p_Λ, for small p_Λ. The curve V shown on Fig. 2 gives the spectral shape expected for an allowed vector interaction, i.e. with a non-zero value for the coefficient V(0), and its strong vanishing at $p_\Lambda = 0$ reflects the e-ν correlation form $(1 + \cos\theta_{e\nu})$ appropriate to an allowed vector interaction; this vanishes for $p_\Lambda = 0$ since the electron and neutrino then necessarily have opposite directions and $\cos\theta_{e\nu} = -1$. The observed distribution gives a poor fit to the curve V. With $V(0) = 0$, as expected from the CVC hypothesis, the recoil spectrum will be correspondingly peaked still more strongly towards the upper end. The curve A gives the expected distribution for an allowed axial vector transition, for which the eν angular correlation has essentially the form $(1 - \frac{1}{3}\cos\theta_{e\nu})$ and leads to the fall-off in the spectrum at the upper end. This is the distribution expected according to the above considerations and it provides a good fit to the limited data available.

Observations on the longitudinal polarization of the recoil Λ particles would give the most direct evidence on the form and magnitude of the vector part of the ΣΛ beta interaction, since this polarization depends on the V-A interference. However, a large increase in statistics will be required for an investigation of this effect.

3. The Strangeness-changing Leptonic Decay Processes.

The decay processes available for discussion are the leptonic modes of K-meson decay,

(i) the $K_{\ell 2}$ mode, $K \rightarrow \ell\nu_\ell$,

(ii) the $K_{\ell 3}$ modes, $K \rightarrow \pi\ell\nu_\ell$,

(iii) the $K_{\ell 4}$ modes, $K \rightarrow \pi\pi\ell\nu_\ell$,

and the leptonic modes of hyperon decay,

(i) $\Lambda_\ell \rightarrow p + \ell^- + \bar{\nu}_\ell$, (3.1)

(ii) $\Sigma_\ell^- \rightarrow n + \ell^- + \bar{\nu}_\ell$, (3.2)

(iii) $\Xi_\ell^- \rightarrow \Lambda + \ell^- + \bar{\nu}_\ell$. (3.3)

The absence of evidence for the mode $\Sigma^+ \rightarrow n + \ell^+ + \nu_\ell$ is also particular significance.

The general properties observed for these modes, and hence for the strangeness-changing weak interaction current S_α, are as follows:

1. $\Delta Y = \pm 1$ only, where Y denotes the hypercharge of the strongly interacting particles. There is no evidence for $\Delta Y = \pm 2$ transitions with strength comparable to those for the $\Delta Y = \pm 1$ transitions, especially not for the mode $\Xi^- \rightarrow n + \ell^- + \bar{\nu}_\ell$.

2. $\Delta I = \frac{1}{2}$ holds for the relationship between the initial and final isospins for the strongly interacting particles in these processes. $\Delta I = \frac{1}{2}$ necessarily holds for $K_{\ell 2}$ decay, for the Λ_ℓ decay (3.1), and for the Ξ_ℓ^- decay (3.3); for the Σ_ℓ^- decay

(3.2), this rule provides no restriction.* The tests available

* For the inverse antineutrino-induced reactions,

$$\bar{\nu}_\ell + p \to \ell^+ + \Sigma^0,$$

$$\bar{\nu}_\ell + n \to \ell^+ + \Sigma^-,$$

the $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule does require the cross-section ratio $\Sigma^0/\Sigma^- = \frac{1}{2}$.

therefore come essentially from the study of the $K_{\ell 3}$ mode, as will be discussed in Sec. 3.1. The implications for the $K_{\ell 4}$ mode will be discussed briefly in Sec. 3.5.

3. $\Delta Y/\Delta Q = +1$ holds. A $\Delta Y/\Delta Q = -1$ current would allow the decay processes $\Sigma^+ \to n\nu\ell^+$ and $K^+ \to \pi^+\pi^+e^-\bar{\nu}_e$, for which there is no strong evidence. In the work of Burnstein et al.[18], the ratios $(\Sigma^+_\mu/\Sigma^-_\mu) = 0/22$ and $\Sigma^+_e/\Sigma^-_e = 0/52$ were obtained, for corresponding decay configurations, such as to avoid identification biases. Nauenberg et al.[19] have reported one possible example of the Σ^+_e mode (to be compared with 16 examples of the Σ^-_e mode), and Barkas[20] has reported one possible example of the Σ^+_μ mode. For the K^+_{e4} processes, Birge et al.[21] have found no examples of the $\Delta Y/\Delta Q = -1$ mode $K^+ \to \pi^+\pi^+e^-\bar{\nu}_e$, compared with the observation of 75 $K^+ \to \pi^+\pi^-e^+\nu_e$ events satisfying the $\Delta Y/\Delta Q = +1$ rule. There is also evidence on the $\Delta Y/\Delta Q = -1$ rule from the study of the $K_{\ell 3}$ mode for neutral K-mesons, since the interactions $K^0 \to \pi^+\ell^-\bar{\nu}_\ell$ and $\bar{K}^0 \to \pi^-\ell^+\nu_\ell$ could occur if the $\Delta Y/\Delta Q = +1$ rule were violated. Although some earlier evidence suggesting the violation of the $\Delta Y/\Delta Q = +1$ rule was reported, the most detailed evidence available now on the decay of neutral K mesons[22,23] is completely consistent

with the absence of $\Delta Y/\Delta Q = -1$ transitions. However, all these data would also be consistent with the presence of a small $\Delta Y/\Delta Q = -1$ amplitude, of order less than 20% of the $\Delta Y/\Delta Q = +1$ amplitude. Since this $\Delta Y/\Delta Q = -1$ amplitude is not required by the data, we shall assume that $\Delta Y/\Delta Q = -1$ transitions are completely absent.

These selection rules, and the selection rule $\Delta I = 1$ for $\Delta Y = 0$, for the leptonic decay modes (for which necessarily $\Delta Q = \pm 1$ for the strongly-interacting particles) run parallel with the quantum numbers for the charged members of a unitary octet, and would therefore follow naturally from the hypothesis that the currents J_α, S_α are themselves members of a unitary octet of weak interaction currents. This hypothesis, which has been considered especially by Cabibbo[24], will be considered in detail below, in Secs. 3.2 and 3.6.

3.1 The $\Delta I = \frac{1}{2}$ Rule for $K_{\ell 3}$ Decay.

The test of the $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule for the weak current S_α which is possible at present involves the comparison of the decay interactions for the processes,

$$K^+ \to \pi^0 + \ell^+ + \nu_\ell, \qquad (3.4a)$$

$$K^0 \to \pi^- + \ell^+ + \nu_\ell, \qquad (3.4b)$$

and for the corresponding antiparticle decay processes. With the $\Delta Y/\Delta Q = +1$ rule, and with CP invariance, the information on the neutral K-decays is essentially contained in the information on the K_2^0 decay processes,

$$K_2^0 \to \pi^- + \ell^+ + \nu_\ell, \tag{3.5a}$$

$$\to \pi^+ + \ell^- + \bar{\nu}_\ell. \tag{3.5b}$$

The transition $K \to \pi$ is limited to the isospin changes $\Delta I = \frac{1}{2}$ and $\Delta I = \frac{3}{2}$, with $\Delta I_3 = -\frac{1}{2}$.

The most convenient way to calculate the decay amplitudes corresponding to these isospin changes is to use the <u>spurion</u> procedure, and to consider the processes $K \to \pi + sp(I)$, with $I = \frac{1}{2}$ and $\frac{3}{2}$ in turn. The Clebsch-Gordan coefficients appropriate to these transitions are as follows:

$$K^+ \to \pi^0 + sp(\tfrac{1}{2}) \qquad C(\tfrac{1}{2},+\tfrac{1}{2};1,\tfrac{1}{2},0,+\tfrac{1}{2}) = -\sqrt{(1/3)}$$

$$K^0 \to \pi^- + sp(\tfrac{1}{2}) \qquad C(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2};1,\tfrac{1}{2},-1,+\tfrac{1}{2}) = \sqrt{(2/3)}$$

$$K^+ \to \pi^0 + sp(\tfrac{3}{2}) \qquad C(\tfrac{1}{2},+\tfrac{1}{2};1,\tfrac{1}{2},0,+\tfrac{1}{2}) = \sqrt{(2/3)}$$

$$K^0 \to \pi^- + sp(\tfrac{3}{2}) \qquad C(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2};1,\tfrac{1}{2},-1,+\tfrac{1}{2}) = \sqrt{(1/3)}$$

If we introduce amplitudes A_1, A_3, characteristic of the $\Delta I = \frac{1}{2}$ and $\Delta I = \frac{3}{2}$ transitions respectively, then the matrix-elements become

$$(K^+|\pi^0\ell^+\nu_\ell) = -\sqrt{\tfrac{1}{3}}A_1 + \sqrt{\tfrac{2}{3}}A_3, \tag{3.6a}$$

$$(K^0|\pi^-\ell^+\nu_\ell) = \sqrt{\tfrac{2}{3}}A_1 + \sqrt{\tfrac{1}{3}}A_3. \tag{3.6b}$$

Assuming CP invariance, we have also that

$$(\bar{K}^0|\pi^+\ell^-\bar{\nu}_\ell) = (K^0|\pi^-\ell^+\nu_\ell) = \sqrt{\tfrac{2}{3}}A_1 + \sqrt{\tfrac{1}{3}}A_3. \tag{3.7}$$

For the K_2^0 state actually studied, we have*

$$K_2^0 = (K^0 + \bar{K}^0)/\sqrt{2}, \tag{3.8}$$

* Note that here the following sign conventions have been used: $CK^0 = \bar{K}^0$, and $PK^0 = -K^0$. It is convenient to adopt the parity -1 for the K-meson since it belongs to the same unitary multiplet as the π and η mesons, which have parity -1. We recall that the $K\Lambda$ parity has been established to be -1, so that this convention assigns parity +1 to the Λ hyperon, which is also appropriate since the Λ particle belongs to the same unitary multiplet as the nucleons. With these conventions, the state (3.8) is an eigenstate of CP, with CP = -1, the eigenvalue physically appropriate for the K_2^0 meson.

so that

$$(K_2^0|\pi^-\ell^+\nu_\ell) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(K^0|\pi^-\ell^+\nu_\ell) = \sqrt{\tfrac{1}{3}}A_1 + \sqrt{\tfrac{1}{6}}A_3, \tag{3.9a}$$

$$(K_2^0|\pi^+\ell^-\bar{\nu}_\ell) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\bar{K}^0|\pi^+\ell^-\bar{\nu}_\ell) = \sqrt{\tfrac{1}{3}}A_1 + \sqrt{\tfrac{1}{6}}A_3. \tag{3.9b}$$

If the $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule holds, then $A_3 = 0$, and the K^+ and K_2^0 decay rates satisfy

$$\Gamma_2(\ell^\pm) = 2\Gamma^+(\ell), \tag{3.10}$$

where $\Gamma_2(\ell^\pm)$ denotes the total rate for K_2^0 decay into leptons $\ell^\pm$ and $\Gamma^+(\ell)$ is the decay rate for $K^+ \to \pi^0\ell^+\nu_\ell$. In this case, the decay spectra ~~for K_2^0 decay spectra~~ for $K_2^0 \to \pi\ell\nu_\ell$ and $K^+ \to \pi^0\ell^+\nu_\ell$ are expected to be identical, and the data available on the K_2^0 decay spectra[25] and the K^+ decay spectra[26] are quite consistent with this expectation.

Including the possibility of a $\Delta I = \frac{3}{2}$ transition, and assuming that the spin and momentum dependences of A_1 and A_3 are essentially the same, the relationship between these decay rates is given by

$$\Gamma_2(\ell^{\pm})/\Gamma^{+}(\ell) = 2\left|(A_1+\sqrt{\tfrac{1}{2}}A_3)/(A_1-\sqrt{2}A_3)\right|^2. \qquad (3.11)$$

First, we consider $\Gamma^{+}(\ell)$. The experimental situation is that the K^{+} branching ratios are really not so well known for the $K_{\ell 3}$ modes as one would reasonably expect at this stage in K meson physics. The $K^{+}_{\mu 3}$ and K^{+}_{e3} branching ratios obtained from emulsion data and from the xenon bubble chamber are as follows:

	Xenon bubble chamber (ref.27).	Emulsion data.	
$K_{\mu 3}$	$3.0 \pm 1.0\%$	$2.8 \pm 0.4\%$	(ref. 28)
		$2.8 \pm 1.0\%$	(ref. 29)
		$5.9 \pm 1.3\%$	(ref. 30)
K_{e3}	$4.6 \pm 0.3\%$	$3.2 \pm 1.3\%$	(ref. 29)
		$5.1 \pm 1.3\%$	(ref. 30)

The $K^{+}_{\mu 3}/K^{+}_{e3}$ ratio obtained from the xenon chamber is 0.65 ± 0.2. This is compatible with the μ/e ratio of 0.73 ± 0.15 obtained by Luers et al.[25] for K_2^0 decay. Since these ratios are in agreement, as expected, we shall compare the total leptonic rates for K^{+} and K_2^0 decay. From the known value of the K^{+} lifetime, and the branching ratios from the xenon chamber, we have

$$\Gamma^{+}(\ell) = (0.062 \pm 0.009) \times 10^{8}\ \text{sec}^{-1} \qquad (3.12)$$

For $\Gamma_2(\ell^{\pm})$, there are two independent determinations. First, we shall discuss an indirect method, based on quite a substantial amount of data. This depends on three items of input data:
(i) the K_2^0 lifetime. A Brookhaven group[31] has recently made an accurate determination of the K_2^0 decay rate, in agreement with all earlier and less accurate values, giving $\Gamma_2 = (18.5 \pm 2.0) \times 10^{6}\text{sec}^{-1}$.
(ii) the ratio $\Gamma_2(000)/\Gamma_2(\text{charged})$ for K_2^0 decay, where $\Gamma_2(000)$ denotes the rate for the mode $K_2^0 \to 3\pi^0$. Anikina et al.[32] have obtained the value 0.24 ± 0.08 for this ratio, by counting internal pairs from the $\pi^0 \to \gamma + e^{+} + e^{-}$ decay of pions resulting from $K_2^0 \to 3\pi^0$ decay, in a cloud chamber exposed to a K_2^0 beam. They assume, as appears reasonable, that all γ rays from neutral modes of K_2^0 decay arise from the $3\pi^0$ mode, for example that the $K_2^0 \to \gamma + \gamma$ mode is insignificant relative to the $3\pi^0$ mode. Here we shall assume that the neutral modes of K_2^0 decay are strongly dominated by the $3\pi^0$ decay mode.
(iii) the branching ratio $\Gamma_2(+-0)/\Gamma_2(\text{charged})$ for K_2^0 decay, where $\Gamma_2(+-0)$ denotes the decay rate for $K_2^0 \to \pi^{+}\pi^{-}\pi^{0}$. Three values are available for this ratio; Luers et al.[25] have obtained the value 0.157 ± 0.03, Astier et al.[33] have obtained 0.185 ± 0.035, and Anikina et al.[32] have obtained 0.14 ± 0.05. We shall adopt 0.165 ± 0.02 as a reasonable weighted average.

From these values, we obtain

$$\Gamma_2(\text{charged})/\Gamma_2 = 1/(1.24 \pm 0.08),$$

$$\Gamma_2(\ell^{\pm})/\Gamma_2(\text{charged}) = (1 - 0.165 \pm 0.02) = 0.835 \pm 0.02.$$

With the above value for Γ_2, these ratios lead to the estimate

$$\Gamma_2(\ell^{\pm}) = (0.125 \pm 0.017) \times 10^{8}\ \text{sec}^{-1} \qquad (3.13)$$

This result is in good agreement with the expectation $\Gamma_2(\ell^{\pm}) = (0.124 \pm 0.018) \times 10^{8}\text{sec}^{-1}$ obtained from (3.12) and the $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule.

A direct determination of $\Gamma_2(\ell^{\pm})$ has been made by Alexander et al.[34), but with considerably less statistical accuracy. Their experiment used K^0 mesons produced in the reaction $\pi^- + p \rightarrow \Lambda + K^0$. For those production events for which the Λ particle was observed, the number of K_2^0 mesons produced is known, and the velocity and direction of each K_2^0 is known from the production kinematics. Then, the number of leptonic decay events along these K_2^0 paths is counted; since the individual velocities are known, the total time (measured in the K_2^0 rest frame) corresponding to this path length is known, and so the decay rate $\Gamma_2(\ell^{\pm})$ may be determined absolutely. The value obtained was $(0.093 \pm 0.025) \times 10^6\ \mathrm{sec}^{-1}$, which is in satisfactory accord with the above expectation from the $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule.

Very recently, Aubert et al.[79) have made a direct determination of $\Gamma_2(e^{\pm})$ along the same lines, based on the observation of $(K_2^0)_{e3}$ decay events in a heavy liquid chamber, with the result $\Gamma_2(e^{\pm}) = (7.58 \pm 1.3) \times 10^6\ \mathrm{sec}^{-1}$. Since the K^+_{e3} branching ratio is especially well known from the xenon chamber studies, it is convenient to compare $\Gamma_2(e^{\pm})$ directly with the K^+_{e3} decay rate, $\Gamma^+(e) = (3.84 \pm 0.25) \times 10^6\ \mathrm{sec}^{-1}$. This ratio $\Gamma_2(e^{\pm})/\Gamma^+(e) = (1.97 \pm 0.35)$ provides an independent check on the $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule for the K_{e3} processes.

We may note that quite a small value for A_3 can cause a considerable deviation from the prediction $\Gamma_2(\ell^{\pm})\,\Gamma^+(\ell) = 2$. For small A_3, this ratio is given by $2\{1 + 3\sqrt{2}A_3/A_1 + \cdots\}$. A 25% deviation from the $\Delta I = \frac{1}{2}$ prediction only requires $A_3/A_1 \approx 1/17$, i.e. about 5% admixture of $\Delta I = \frac{3}{2}$ interaction. Hence, the agreement found implies a strong dominance of the weak $K \rightarrow \pi$ transition by a $\Delta I = \frac{1}{2}$ interaction.

3.2 The Octet Hypothesis of Cabibbo[24)

As mentioned above, it is an attractive hypothesis that the weak interaction currents J_α and S_α are members of a unitary octet of currents. The essential implication of this hypothesis is that, for different leptonic decay transitions, the matrix-elements would be related by the same Clebsch-Gordan coefficients as would the corresponding members of the octet. It is useful to refer to the pseudoscalar meson octet, whose elements are given by the (1,1) traceless tensor M^i_j (with i,j = 1,2,3) and which may be conveniently arranged in a matrix form:

$$M^i_j \equiv \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K^0} & -\frac{2\eta}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

in which the lower index refers to the row, and the upper index refers to the column, of this matrix. Thus M^2_1 denotes π^+, and M^3_1 denotes K^+. The three axes 1,2,3 are such* that the 1-axis is

* It is frequently convenient to recall the now-obsolete Sakata model, according to which there were three basic baryonic fields associated with these three axes, and having the same quantum numbers as p, n, Λ. In this model, axis 1 was associated with $\psi_1 \equiv p$, axis 2 was associated with $\psi_2 \equiv n$, and axis 3 was associated with $\psi_3 \equiv \Lambda$.

associated with charge (+ for a suffix, - for a superfix position), and the 3-axis is associated with hypercharge (- for a suffix, + for a superfix position).

The hypothesis is then that the currents J_α, S_α are members of an octet of weak currents $(J^i_j)_\alpha$, whose transformation properties under the operations of unitary symmetry are the same as those for the members of the meson octet M^i_j. As far as the leptonic decay modes are concerned, only the currents J^2_1 and J^3_1, which transform like π^+ and K^+ respectively, are of interest (for the antileptonic modes, it is the currents J^1_2 and J^1_3, which transform like π^- and K^- respectively, which are physically relevant). In order to give an explicit example, consider the Sakata model based on the three fields $\psi_i = (p, n, \Lambda)$; for this model, possible forms for these primary weak currents would be

$$J_\alpha = (J^2_1)_\alpha = \bar{n}\gamma_\alpha(1 + \gamma_5)p, \tag{3.13a}$$

$$S_\alpha = (J^3_1)_\alpha = \bar{\Lambda}\gamma_\alpha(1 + \gamma_5)p. \tag{3.13b}$$

Although this Sakata model is not compatible with the facts of strong interaction physics, analogous forms for J_α and S_α are appropriate possibilities in any triplet model (e.g. for the quark model of Gell-Mann[35] based on three $B = \frac{1}{3}$ spinor fields $\psi_i = (d_+, d_-, s)$) of unitary symmetry.

With this octet hypothesis, the observed selection rules then follow as consequences:

(i) $S_\alpha = (J^3_1)_\alpha$ has the properties $|\Delta I| = \frac{1}{2}$ and $\Delta Y = -1$, with $\Delta Q = -1$. The hermitian conjugate current $S^\dagger_\alpha = (J^1_3)_\alpha$ leads to $\Delta Y = +1$, with $\Delta Q = +1$. Thus the strangeness-changing current satisfies $\Delta Y/\Delta Q = +1$. Also there are no weak currents in the octet $(J^i_j)_\alpha$ which lead to $\Delta Y = \pm 2$.

(ii) $J_\alpha = (J^2_1)_\alpha$ is an isospin vector, so leads to $|\Delta I| = 1$ for $\Delta Y = 0$ as required.

However, the rate observed for $\Delta Y = \pm 1$ decays is slower than expected from the $\Delta Y = 0$ leptonic interactions, by about a factor 20. For example, the branching ratio for $\Lambda \to p\bar{\nu}_e e^-$ is about 0.8×10^{-3}, compared with the expectation 1.5×10^{-2} for a beta interaction with the same form and strength as for $n \to p\bar{\nu}_e e^-$. Similarly, for $K \to \mu\nu_\mu$ decay, the lifetime is comparable with that for $\pi \to \mu\nu_\mu$ decay, although the energy release is very much larger.

The complete weak current is some linear combination of the currents $(J^i_j)_\alpha$. It is not apparent that all of these currents should appear with the same strength. As far as the currents appropriate to leptonic decays are concerned, Cabbibbo[24] has adopted a parametrization in terms of an angle θ, such that

$$\mathcal{J}_\alpha = \cos\theta\,(J_1^2)_\alpha + \sin\theta\,(J_1^3)_\alpha . \tag{3.14}$$

To adopt this form assumes that the same value of θ holds for the vector and axial vector parts of $\mathcal{J}_a$, and this is not obvious a priori. However, with the forms (3.13) of the triplet models for unitary symmetry, this would appear a rather natural assumption; also, as we shall see below, this assumption is well in accord with the experimental data.

Consider first the $K \to \ell\nu_\ell$ and $\pi \to \ell\nu_\ell$ decay modes. Since these transitions are $0- \to 0+$ for the strongly-interacting particles, they are induced only by the axial vector component $\mathcal{J}_a^A$. For the K-meson decay, the matrix-element is

$$M(K \to \ell\nu_\ell) = \langle 0|\mathcal{J}_\alpha^A|K^+\rangle J_{\ell\alpha} . \tag{3.15}$$

Since the only vector available in the matrix-element $\langle 0|\mathcal{J}_a^A|K^+\rangle$ is $p_{Ka} = p_{\ell a} + p_{\nu a}$, it may be written

$$\langle 0|\mathcal{J}_\alpha^A|K^+\rangle = F_{K\ell\nu}\, p_{K\alpha} . \tag{3.16}$$

Using (3.14), this may be written

$$F_{K\ell\nu}\, p_{K\alpha} = \langle 0|(J_1^3)_\alpha^A|K^+\rangle \sin\theta , \tag{3.17}$$

since only the component J_1^3 has the correct quantum numbers to give a non-zero matrix-element. For the process $\pi \to \mu\nu$, we have again the same form (3.16) with $F_{K\ell\nu}$ replaced by $F_{\pi\ell\nu}$, where

$$F_{\pi\ell\nu}\, p_{\pi\alpha} = \langle 0|\mathcal{J}_\alpha^A|\pi^+\rangle$$

$$= \langle 0|(J_1^2)_\alpha^A|\pi^+\rangle \cos\theta . \tag{3.18}$$

Since J_1^2 transforms like π^+, and J_1^3 like K^+, the assumption of

unitary symmetry implies that

$$\langle 0|(J_1^2)_\alpha^A|\pi^+\rangle = \langle 0|(J_1^3)_\alpha^A|K^+\rangle . \tag{3.19}$$

With exact unitary symmetry, the π^+ and K^+ masses are equal, and therefore also are the momenta p_{Ka}, $p_{\pi a}$ appropriate to K^+ and π^+ decay. It then follows that, with unitary symmetry, $F_{K\ell\nu}$ and $F_{\pi\ell\nu}$ are directly related

$$F_{K\ell\nu}/F_{\pi\ell\nu} = \tan\theta . \tag{3.20}$$

Finally, using expression (2./3), the ratio of decay rates is given by

$$\frac{\Gamma(K^+\to\mu\nu)}{\Gamma(\pi^+\to\mu\nu)} = \tan^2\theta\,\frac{m_K}{m_\pi}\,\frac{(1-m_\mu^2/m_K^2)}{(1-m_\mu^2/m_\pi^2)} . \tag{3.21}$$

Using the $K^+_{\mu 2}$ branching ratio from the xenon bubble chamber[26)], and the known K^+ and π^+ lifetimes, this ratio leads to the estimate[36)]

$$\theta_A = 0.266 \pm 0.005 \tag{3.22}$$

for the angle θ appropriate to the axial vector current $\mathcal{J}_a^A$.

Next, Cabbibo considers the comparison between the decay rates for the processes $\pi^+ \to \pi^0 + e^+ + \nu_e$ and $K^+ \to \pi^0 + e^+ + \nu_e$. Since these transitions involved $0- \to 0-$ for the strongly-interacting particles, i.e. they are pure Fermi-transitions, they are due only to the vector component $\mathcal{J}_a^V$ of the weak interaction current. We know already (cf. Sec. 2.1) that the $\Delta s = 0$ transition $\pi^+ \to \pi^0$ is induced by a weak current which is proportional to the isospin current and the CVC hypothesis gives us the form and value of its matrix-element:

$$M(\pi^+ \to \pi^0 e^+ \nu_e) = \sqrt{2}\, G_\beta^V (p_+ + p_0)_\alpha J_{e\alpha}. \qquad (3.23)$$

However, in terms of the weak current (3.14), this matrix-element also has the form

$$\langle \pi^0 | \mathcal{J}_\alpha^V | \pi^+ \rangle J_{e\alpha} = \cos\theta \langle \pi^0 | (J_1^2)_\alpha^V | \pi^+ \rangle J_{e\alpha}, \qquad (3.24)$$

from which we conclude that

$$\langle \pi^0 | (J_1^2)_\alpha^V | \pi^+ \rangle = C (p_+ + p_0)_\alpha, \qquad (3.25)$$

where

$$C = \sqrt{2}\, G_\beta^V / \cos\theta. \qquad (3.26)$$

The matrix-element for K_{e3}^+ decay is then, similarly,

$$M(K^+ \to \pi^0 e^+ \nu_e) = \langle \pi^0 | \mathcal{J}_\alpha^V | K^+ \rangle J_{e\alpha}$$

$$= \langle \pi^0 | (J_1^3)_\alpha^V | K^+ \rangle \sin\theta\, J_{e\alpha}. \qquad (3.27)$$

In the limit of exact unitary symmetry (cf. Sec. 3.3 below), the $K \to \pi$ matrix-element must have the same form as the $\pi \to \pi$ matrix-element, apart from a Clebsch-Gordan coefficient. Using the F-type (antisymmetric) coefficients* given in the tables published by de Swart,[53] we have

* In considering these matrix-elements, it is convenient to take the positively charged meson from the right to the left of the matrix-element (in which case it becomes the corresponding negatively charged meson) and to consider the transitions $(J_1^2)^V \to \pi^0\pi^-$, and $(J_1^3)^V \to \pi^0 K^-$. Since π and K belong to the same octet, and since they are necessarily in a relative p-wave (J_j^i is a vector interaction),

Bose statistics requires that they be in an odd state as far as the interchange of their SU_3 wavefunction is concerned. This excludes the D-type coupling (which is even for interchange of the two octets being combined) and allows only the F-type coupling.

$$\langle \pi^0 | (J_1^3)_\alpha^V | K^+ \rangle = \tfrac{1}{2} C (p_+ + p_0)_\alpha. \qquad (3.28)$$

Starting with the matrix-element (3.25) known from the CVC hypothesis (the experimental branching ratio for pion beta decay is compatible with this matrix-element but the accuracy of the experimental value is only about 20%), the K_{e3}^+ decay rate can be calculated, apart from a factor $\tan^2\theta$, from the matrix-element (3.28). From the observed K_{e3}^+ branching ratio[26] and the K^+ lifetime, a value for $\tan^2\theta$ is thus obtained, giving

$$\theta_V = 0.241 \pm 0.008 \qquad (3.29)$$

for the vector current $\mathcal{J}_\alpha^V$.

These two values, θ_V and θ_A, for the vector and axial-vector parts of $\mathcal{J}$ are in quite remarkable agreement. The errors quoted arise essentially from the uncertainties in the K^+ branching ratios. The small difference between θ_V and θ_A can readily be attributed to the effect of deviations from unitary symmetry, since these can certainly cause appreciable and different modifications to θ_A and θ_V from the values they would have if unitary symmetry were exact for the strong interactions.

The significance of the particular combination $(J_1^2 \cos\theta + J_1^3 \sin\theta)$ is not completely clear. If the SU_3 axes (in the three-dimensional space with axes 1,2,3) were rotated by angle θ about the 1-axis, this form would transform to the simple form $J_1^{2'}$, where $2'$ denotes the new position of the 2-axis. With exact unitary symmetry, the strong interactions would give no means for distinguishing any particular set of axes in the SU_3 space. However, in fact, we know that there are medium-strong interactions which break the symmetry in such a way as to separate states of different hypercharge and total isospin, by distinguishing a special axis in this space to be the 3-axis, but still leaving no means to distinguish the 1-and 2-axes. Next, the electromagnetic interactions define electric charge, and the property of charge then allows a unique definition of the 1-axis in the SU_3 space, thus fixing also the 2-axis. It appears that the weak interactions discussed above choose to pick out a 2'-axis in the 1-2 plane which is skew to the 2-axis by an angle θ, rather than to favor the 2-axis itself. There is not yet any natural theoretical interpretation for this situation.

Cabibbo has suggested that an appropriate form of the hypothesis of a universal strength for the weak interactions would be the hypothesis of equality for the coupling strength G_μ for the μ-e decay interaction (1.1) and the coupling strength G of the leptonic decay interaction just discussed, in the form

$$H_W = G\{\mathcal{J}_\alpha J_{\ell\alpha} + h.c.\}$$

$$= G\{(J_1^{2'})_\alpha J_{\ell\alpha} + h.c.\}. \qquad (3.30)$$

The coupling coefficient G is given by

$$G = G_\beta^V/\cos\theta \qquad (3.31)$$

and has the value $(1.011 \pm 0.003)\ G\mu$, rather close to the value required by this modified hypothesis. Since the strong interactions can give rise to a renormalization of G, and since G and G_μ are not connected by any conservation law, there is no rigorous argument requiring equality for G and G_μ, even if there were some symmetry principle requiring G and G_μ to be equal in the primary weak interactions when all strong interactions are turned off. Nevertheless, G and G_μ are indeed remarkably close, and it is entirely possible that the deviation between them may be due to the modification of the strangeness-changing currents due to the effects of symmetry-breaking strong interactions. Sakurai[37)] has pointed out that the weak K-π vertex due to the strangeness-changing vector interaction is closely related with the vertex $K^* \to K + \pi$ for the decay of the vector meson K*, the weak π-π vertex being related in a similar way with the vertex $\rho \to \pi + \pi$ for the decay of the vector meson ρ, and has attempted to relate the renormalization factor for these weak vertices with the widths of the corresponding vector meson decays. Since the K* width (50 MeV) is about 50% larger than expected, on the basis of unitary symmetry and the known ρ width (100 MeV), Sakurai concludes that the renormalization effects associated with symmetry-breaking interactions may enhance the weak K-π vertex by about 50% relative to the weak π-π vertex. This would mean that the value observed for θ_V is larger by 25% than the true value appropriate to exact unitary symmetry, the value which would be obtained if the symmetry-breaking interactions could be turned off. With θ_V reduced to 0.19, as a result, the value obtained for G from (3.31) would be in good accord with G_μ. Although Sakurai's argument is far from rigorous, the correspondence between the weak K-π vertex and the strong $K^* \to K + \pi$ vertex being far from complete, this argument does serve to illustrate rather well the possible influence of the unitary symmetry-breaking interactions on the relationships implied by unitary symmetry models between the weak interaction processes.

3.3 The Structure of the $K_{\ell 3}$ Interaction.

In the decay process $K \to \pi \ell \nu_\ell$, there are two momenta, p_K and p_π, characterizing the strongly-interacting particles. The general form possible for the K-π matrix-element in this decay is therefore

$$\langle \pi | \mathcal{J}^V_\alpha | K \rangle = \left\{ f_+(q^2)(p_K+p_\pi)_\alpha + f_-(q^2)(p_K-p_\pi)_\alpha \right\}, \tag{3.32}$$

where $q = p_K - p_\pi$ denotes the momentum transfer to the leptons. With time-reversal invariance, the form factors $f_\pm(q^2)$ are real. The decay spectrum corresponding to this matrix-element has been given in many forms in the literature; in practice, the most convenient form is given in terms of the pion momentum P (the corresponding energy being $E = \{m_\pi^2 + P^2\}^{\frac{1}{2}}$) and the angle θ between the pion and lepton directions, all specified in the rest frame of the K-meson:

$$\frac{P^2(m_K^2+m_\pi^2-m_\ell^2-2m_K E)^2}{E(m_K-E+P\cos\theta)^4}\left\{P^2\sin^2\theta f_+^2 + \frac{m_\ell^2}{4m_K^2}\left[f_+(m_K+E-P\cos\theta)+f_-(m_K-E+P\cos\theta)\right]^2\right\} dP\, d(\cos\theta) \tag{3.33}$$

In these variables, the momentum transfer is given by

$$q^2 = (p_K - p_\pi)^2 = m_K^2 + m_\pi^2 - 2m_K E, \tag{3.34}$$

a function only of the pion energy.

The situation is simplest for K_{e3} decay, since the term proportional to f_- in the decay interaction reduces to

$$f_-(p_K-p_\pi)_\alpha J_{\ell\alpha} = f_- m_\ell(\bar{\nu}_\ell(1-\gamma_5)\ell^+), \tag{3.35}$$

which may be neglected relative to the f+ term, for the electron decay mode. As is apparent in the differential probability (3.33), in the limit $m_e = 0$, the K_{e3} spectrum thus involves only the form function $f_+(q^2)$.

The K_{e3} spectrum has been studied by Luers et al.[25] for K_2^0 decay in a hydrogen bubble chamber, and by Roe et al.[38] for K^+ decay in a xenon chamber. In the work of Luers et al., the complete decay configuration (i.e. the direction and momenta of both pion and electron) is determined, although there is sometimes a two-fold ambiguity in the analysis of the configuration. Although the K_2^0 direction is known a priori, its momentum is known only to lie within certain broad limits; however, the effect of these ambiguities can be taken into account in the comparison with theory. In the K^+ study, the direction of the electron can be determined and the directions of the two γ-rays resulting from the $\pi^0 \to \gamma + \gamma$ decay in the chamber are observed. Since the distribution $\phi(\theta_{\gamma\gamma}, P)$ of the angle $\theta_{\gamma\gamma}$ between the two γ-ray directions, is known for given π^0 momentum P, the form of the function $f_+(E)$ can be determined by comparing the observed $\theta_{\gamma\gamma}$ distribution with the distribution obtained by integrating (3.33) over θ and folding

$\phi(\theta_{\gamma\gamma}, P)$ with the resulting P distribution. After determining $f_+(E)$ in this way, the θ distribution then expected from (3.33) can be most conveniently compared with the data by computing the expected distribution of the angle between the electron direction and the direction of the bisector between the two γ-ray directions. In both experiments, good agreement is found with the distribution (3.33) resulting from the vector interaction (3.32) with form function $f_+(q^2)$ essentially constant. For example, Roe et al.[38] find $f_+ = (1 + \lambda q^2/m_\pi^2)$ provides a good fit, with $\lambda = 0.04 \pm 0.045$.

For $K_{\mu 3}$ decay, the most detailed and reliable studies are those due to Brown et al.[26], based on 76 complete decay events observed in a xenon chamber, and to Bisi et al.[39], who have obtained a complete muon spectrum, the lower part of the spectrum being obtained from observations of $K^+_{\mu 3}$ decay in a hydrogen chamber, the upper part of the spectrum being obtained from observations in a heavy liquid chamber, with appreciable overlap between these two parts of the spectrum. In the xenon chamber study, the determination of the muon momentum and direction and of the directions of the two γ-rays from the $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ decay allow the reconstruction of each $K^+_{\mu 3}$ decay event; generally, two solutions are possible for the π^0 direction and momentum but usually only one of these is compatible with rough estimates of the energies of the two γ-rays.

Brown et al.[26] have analysed their $K^+_{\mu 3}$ and K^+_{e3} data together using the same form factor shape $(1 + \lambda q^2/m_\pi^2)$ for $f_+(\mu)$ and $f_+(e)$, and allowing a different form factor shape $(1 + \lambda' q^2/m_\pi^2)$ for $f_-(\mu)$.

They find that the ratio $f_+(\mu)/f_+(e)$ depends weakly on the shape parameters, λ and λ', and has the value 1.07 ± 0.18, providing a direct check on μ-e universality for $K_{\ell 3}$ decay. With $f_+(\mu) = f_+(e)$, and definite values for λ, λ', the ratio f_-/f_+ can be obtained from the relative rates for $K_{\mu 3}$ and K_{e3} decay. There are always two solution: to illustrate, consider $\lambda = \lambda' = 0$, for which case the integration of (3.32) leads to the following quadratic expression for this ratio:

$$\frac{\Gamma(K_{\mu 3})}{\Gamma(K_{e3})} = 0.65 + 0.124\left(\frac{f_-}{f_+}\right) + 0.019\left(\frac{f_-}{f_+}\right)^2. \qquad (3.36)$$

For K_2^0 decay, Luers et al.[25] obtained the ratio 0.73 ± 0.15, leading to the values $f_-/f_+ = 0.66^{+0.9}_{-1.3}$ or $-6.6^{+0.7}_{-1.5}$. For K^+ decay, Roe et al.[27] have obtained the ratio 0.65 ± 0.2, which leads to $f_-/f_+ = 0 \pm 1.5$ or -6.5 ± 0.8. The muon momentum spectra corresponding to (3.33) for these two solutions f_-/f_+ are shown in Fig.3 and differ quite considerably. The second solution predicts a spectrum which favors high energy muons and low energy pions and gives rather low intensity for low energy muons; this solution can be rejected directly by comparison with the muon spectra obtained by Brown et al. and by Bisi et al., especially by the latter (shown in Fig.3) since this includes the low energy part of the spectrum which is particularly important in discriminating between these two possibilities. If the shape parameter λ' is permitted to vary, the ratio f_-/f_+ does not vary strongly; the present data does not allow the determination of λ', which is not surprising since f_- is small.

Further information on the ratio f_-/f_+ can be obtained from the study of the μ^+ polarization from $K^+_{\mu 3}$ decay. As pointed out by Cabibbo and Maksymowicz[40] and others, if the π^0 and μ^+ momentum are specified, then the μ^+ has 100% polarization in some direction lying in the plane of the decay process. These authors have recently reported calculations of the angle Θ between the μ^+ polarization vector and the μ^+ momentum, as function of the pion and muon energies, and have found that Θ is a fairly sensitive function of f_-/f_+. For example, for muon kinetic energy 95 MeV and pion kinetic energy 35 MeV, the angle Θ ranges from -25° to -80° as f_-/f_+ varies from -1 to $+1$, and has the value $+115^\circ$ for $f_-/f_+ = -6$. Such detailed polarization measurements have not yet been made. However, several measurements of the mean longitudinal polarization for muons emitted with kinetic energy in the range 40-100 MeV have recently been reported. Using nuclear emulsions, Smirnitski and Weisenberg[41] obtained $\bar{P}_\mu = +0.7 \pm 0.45$, this helicity being opposite to that for μ^+ from $\pi^+ \to \mu^+$ decay. Gidal et al.[42], using a heavy liquid bubble chamber, obtained $\bar{P}_\mu = +0.74 \pm 0.16$, which allows the values -0.15 ± 0.9 or -4.0 ± 0.75 for f_-/f_+.

3.4 Partial-Conservation for the $\Delta Y = \pm 1$ Vector Current.

In the limit of exact unitary symmetry, the strangeness-changing current $(J^3_1)^V_\alpha$ will be a conserved current, since it may be obtained by an SU_3 transformation from the $\Delta Y = 0$ current $(J^2_1)^V_\alpha$ which is known to be conserved (being a component of the isospin current) even after the symmetry-breaking interactions are introduced. In

the actual world, we may then expect that $(J^3_1)^V_\alpha$ may still satisfy this conservation law in the limit of large momentum transfers, i.e. that this current may still be "partially conserved".

In the unitary symmetry limit, the weak K-π vertex will necessarily have the same form as the weak π-π vertex (3.23). This means that, in this limit, weak K-π vertex corresponds to current of the same form as (2.8) for the weak π-π vertex, namely

$$\left(\bar{K}^+ \frac{\partial \pi^0}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \bar{K}^+}{\partial x_\alpha} \pi^0\right). \tag{3.37}$$

This corresponds to a $K \to \pi \ell \nu_\ell$ matrix-element of the form f_+, i.e. to $f_-/f_+ = 0$. Hence it is rather satisfactory that the $K_{\mu 3}$ data does lead to a small value for this ratio f_-/f_+; although the uncertainty in f_-/f_+ is of order ± 1, the values obtained are compatible with the value zero.

For the actual $K \to \pi \mu \nu_\mu$ interaction, the symmetry-breaking interactions can still introduce an f_- term. To illustrate this, let us consider a particular model, in which the interaction is transferred from the K-π vertex to the μν vertex dominantly through an intermediate K^* meson, as depicted in Fig.4. The $K^* \to \ell \nu_\ell$ interaction will have the form $\sigma K^*_\alpha J_{\ell\alpha}$, and the matrix-element corresponding to this decay diagram is given by

$$M(K \to \pi \ell \nu_\ell) = \sigma f^*(p_K + p_\pi)_\beta (q^2 - M^{*2})^{-1} (\delta_{\alpha\beta} - q_\alpha q_\beta / M^{*2}) J_{\ell\alpha}, \tag{3.38}$$

where $q = p_K - p_\pi$, M^* denotes the K^* mass, and $f^*(p_K + p_\pi)_\alpha$ is the matrix-element for the strong decay process $K^* \to K + \pi$. This expression reduces to the form

$$\sigma f^*(q^2-M^{*2})^{-1}\{(p_K+p_\pi)_\alpha-(p_K-p_\pi)_\alpha(m_K^2-m_\pi^2)/M^{*2}\}J_{\ell\alpha}. \quad (3.39)$$

For the small q^2 of interest for $K_{\mu 3}$ decay, the first coefficient is essentially $\sigma f^*/M^{*2}$; if K^* exchange is the only intermediate state, then the conservation law in the unitary symmetry limit requires $\sigma f^*/M^{*2} = G \sin\theta$, but there can certainly be contributions from other intermediate states.

The f_- term introduced in (3.39) corresponds to

$$f_-/f_+ = -(m_K^2-m_\pi^2)/M^{*2} = -0.3, \quad (3.40)$$

a value which is certainly quite compatible with the data. We note that this value has such a form as to ensure that it vanishes in the limit of exact unitary symmetry. There can also be further contributions to f_- arising from intermediate s-wave K-π systems, but relatively little is known about the magnitude appropriate for these terms. No strong s-wave K-π resonance is known which could dominate these s-wave exchanges; possibly the κ(730) meson is an s-wave resonance, but, as its width is rather narrow, it would not be expected to contribute a large term to f_-. The fact that f_+ dominates is most probably a consequence of the conservation of the ΔY = ±1 weak vector current in the unitary symmetry limit, i.e. of the partial conservation of the ΔY = ± 1 weak vector current. However, this could also be the result of the dominance of K^* exchange in this process, as emphasized in the dispersion theoretic treatments[43] of $K_{\ell 3}$ decay.

3.5 The Properties of the $K_{\ell 4}$ Decay Mode.

Recently, 75 examples of the K^+_{e4} decay mode,

$$K^+_{e4} \longrightarrow \pi^+ + \pi^- + e^+ + \nu_e \quad (3.41)$$

have been observed by Birge et al.[21], from which the branching ratio $\Gamma(K^+_{e4})/\Gamma_{tot}(K^+) = (4.3 \pm 0.9) \times 10^{-5}$ was obtained. The π-π mass distribution for these 75 events is shown in Fig.5.

For a first orientation, let us consider some phase space ratios. For the ratio $(K_{e3}/K_{\mu 2})$, we have[44]

$$\Gamma(K_{e3})/\Gamma(K_{\mu 2}) = 2.1 \times 10^{-2}\,(m_K L)^2. \quad (3.42)$$

The characteristic length L measures the ratio of the matrix-elements for the $K_{\ell 2}$ and $K_{\ell 3}$ decay processes, since these differ in dimensions by a length. For the K_{e4} rate, we have

$$\Gamma(K_{e4})/\Gamma(K_{e3}) = 8.9 \times 10^{-4}\,(m_K L)^2, \quad (3.43)$$

where the same characteristic length has been assumed to relate the $K_{\ell 3}$ and $K_{\ell 4}$ matrix-elements. Since the ratio (3.42) is known to be about 1/14, we obtain the estimate $L \approx 1.8/m_K$, certainly a very reasonable value. With this estimate, the phase space estimate (3.43) becomes, for K^+ decay,

$$\Gamma(K^+_{e4})/\Gamma_{total}(K^+) = 14 \times 10^{-5}. \quad (3.44)$$

As remarked above, the rate observed experimentally for K^+_{e4} decay is only about three times less than this rough phase-space estimate, and so appears a rather reasonable result, in order of magnitude. The phase space estimate for the ratio $K^+_{\mu 4}/K^+_{e4}$

found by Mathur[44] is

$$\Gamma(K^+_{\mu 4})/\Gamma(K^+_{e4}) = 1/7.3. \tag{3.45}$$

No $K^+_{\mu 4}$ events have yet been reported, although this estimate and the branching ratio (3.44) would make it reasonable to expect about 10 $K^+_{\mu 4}$ decay events in the present data.

As pointed out by Mathur[44] and Shabalin[45], the matrix-element for $K_{\ell 4}$ decay has the general form

$$M(K \to \pi\pi \ell \nu_\ell) = (\pi\pi | \mathcal{J}_\alpha | K)\, J_{\ell\alpha}, \tag{3.46}$$

where

$$(\pi\pi | \mathcal{J}_\alpha | K) = (A p_\alpha + B q_\alpha + C(p_K - p)_\alpha)/m_K + D \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} p_{K\beta} p_\gamma q_\delta / m_K^3, \tag{3.47}$$

where $p = p_1 + p_2$, $q = p_1 - p_2$, p_1 and p_2 denote the four-momenta of the two pions, and p_K is the initial K-meson four-momentum. The terms A, B and C arise from the axial-vector current $\mathcal{J}^A_\alpha$; the term D arises from the vector current $\mathcal{J}^V_\alpha$. The factors m_K have been included for dimensional reasons, the characteristic mass in the intermediate states being m_K, or greater. Owing to the smallness of p/m_K and q/m_K, the term D is expected to contribute relatively little ($\lesssim 1\%$) to the $K^+_{\ell 4}$ decay rate; the $K_{\ell 4}$ decay process is due dominantly to the axial-vector current. For K^+_{e4} decay, the term C can be neglected, since it is proportional to the lepton mass; with $p_K - p = p_\ell + p_\nu$, this term has the form $(p_\ell + p_\nu)_\alpha J_{\ell\alpha} = m_\ell(\bar{\nu}_\ell(1-\gamma_5)\ell)$.

The scalar coefficients A,B,C and D are functions of the scalar products p^2, $p_K\cdot p$ and $p_K\cdot q$. The total c.m. energy of the π-π system is given by $m^2_{\pi\pi} = p^2$, and $p_K\cdot p = m_K(m^2_{\pi\pi} + \underline{p}^2)^{\frac{1}{2}}$, where $\underline{p}$ is the total momentum of the two pions, measured in the K^+ rest frame. The variable $p_K\cdot q$ is directly related with the angle θ between the π-π relative momentum $\underline{q}$ measured in the π-π c.m. system and the momentum $\underline{p}$ just defined, the explicit relation being $p_K\cdot q = \cos\theta\; pq m_K/m_{\pi\pi}$, where p and q denote the magnitudes of these momentum vectors $\underline{p}$ and $\underline{q}$.

With the $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule, the $K \to \pi\pi$ weak transition can lead only to final π-π states with I = 0 or I = 1. For I = 0, Bose statistics require that the matrix-element (3.47) be even for interchange of the pion lables, 1 and 2. This requires that A and C be even functions of $p_K\cdot q$, and that B and D be odd functions of $p_K\cdot q$; thus,

$$A^{(0)} = A_0 + A_2(p_K\cdot q/m_K^2)^2 + .. \tag{3.48a}$$

$$B^{(0)} = (p_K\cdot q)/m_K^2\left(B_1 + B_3(p_K\cdot q/m_K^2)^2 + ..\right), \tag{3.48b}$$

where the A_i and B_i are functions of $m_{\pi\pi}$ and $(\underline{p})^2$. For I = 1 final states, the matrix-element (3.46) must be odd with respect to the pion labels 1 and 2. For this case, A and C must be odd functions of $p_K\cdot q$, and B, D must be even functions of $p_K\cdot q$; thus,

$$A^{(1)} = (p_K\cdot q)/m_K^2\left\{A_1 + A_3(p_K\cdot q/m_K^2)^2 + \cdots\right\}, \tag{3.49a}$$

$$B^{(1)} = B_0 + B_2(p_K\cdot q/m_K^2)^2 + \cdots \tag{3.49b}$$

Since $p_K\cdot q/m_K^2$ is small, we shall neglect it in these expressions. With this simplification, the dominant terms in the K_{e4} decay matrix-element are

$$\left\{\left(A_0(m_{\pi\pi},\underline{p}^2) + A_1(m_{\pi\pi},\underline{p}^2)(p_K\cdot q/m_K^2)\right)p_\alpha + B_0(m_{\pi\pi},\underline{p}^2)q_\alpha\right\} J_{\ell\alpha}. \qquad (3.50)$$

Here A_0 describes transitions to the I = 0 s-wave π-π system, and A_1, B_0 describe transitions to the I = 1, p-wave π-π system. Generally, for $K^+_{\ell 4}$ decay, transitions to final I = 0 and I = 1 states will both occur; for $K^0_{\ell 4}$ decay,

$$K^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^- + \ell^+ + \nu_\ell; \qquad (3.51)$$

the charge relationships and the $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule allow only final I = 1 states. If A_1, B_1, C_1 and D_1 denote the amplitudes for $K^+_{\ell 4}$ decay, the amplitudes for the $K^0_{\ell 4}$ decay (3.51) are given by $B_0/\sqrt{2}$, $D_0/\sqrt{2}$, $A_1/\sqrt{2}$, $C_1/\sqrt{2}$, $B_2/\sqrt{2}$, etc., the other amplitudes being zero. Thus, for K^0_2 decay, the amplitude for the mode (3.51) is obtained from (3.50) by the replacements $A_0 \rightarrow 0$, $A_1 \rightarrow \frac{1}{2}A_1$ and $B_0 \rightarrow \frac{1}{2}B_0$. As we shall see later, the I = 1 transitions contribute relatively little to the $K^+_{\ell 4}$ decay rate, so that we may expect the $(K^0_2)_{\ell 4}$ decay rate to be about an order of magnitude smaller than that for $K^+_{\ell 4}$ decay.

Next, the Watson final state interaction theorem[46] tells us that, assuming time-reversal holds for the weak interactions, each $K \rightarrow \pi\pi$ amplitude has phase equal to the π-π scattering phase in the π-π scattering state appropriate to the final system. Thus we have $A_0 = R_0 e^{i\delta_0}$, where δ_0 denotes the s-wave π-π scattering phase as function of the c.m. energy $m_{\pi\pi}$ and R_0 is real), and $A_1 = R_1 e^{i\delta_1}$, $B_0 = S_1 e^{i\delta_1}$, where δ_1 denotes the p-wave π-π scattering phase and R_1, S_1 are real coefficients. As pointed out by Cabibbo and Maksymowicz[47],

there are two effects of particular interest which depend on these phases δ_0 and δ_1. The square of the matrix-element (3.46), with C = D = 0, summed over electron and neutrino spins, takes the form

$$(A^*p_\alpha + B^*q_\alpha)(Ap_\beta + Bq_\beta)\left\{(p_{e\alpha}p_{\nu\beta} + p_{\nu\alpha}p_{e\beta} - \delta_{\alpha\beta}p_e\cdot p_\nu) + \epsilon_{\alpha\beta\lambda\mu}p_{e\lambda}p_{\nu\mu}\right\}, \qquad (3.52)$$

where the first term within the curly brackets results from the parity-conserving terms of the decay interaction, and the second term, having the opposite parity, is the result of interference between the parity-conserving and parity-reversing interactions. With $p_e - p_\nu = Q$, and the energy-momentum conservation equation $p_e + p_\nu = p_K - p$, the A-B interference in the parity-conserving terms leads to the following term in the differential decay probability;

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}(A^*B)\left\{2(p_K-p)\cdot q\, p_K\cdot q - 2Q\cdot q\, Q\cdot p\right\}, \qquad (3.53)$$

taking into account the identity $p.q = 0$. Averaging over the electron and neutrino directions for fixed pion momenta leads to $\langle Q_\alpha Q_\beta\rangle = \frac{1}{3}\left((p_K-p)_\alpha(p_K-p)_\beta - \delta_{\alpha\beta}(p_K-p)^2\right)$, and the corresponding term of (3.53) proportional to $\cos\theta$ is then

$$\tfrac{2}{3}R_0S_1\cos(\delta_0-\delta_1)(p_K-p)\cdot q\, p_K\cdot q = \tfrac{2}{3}R_0S_1\cos(\delta_0-\delta_1)\left[m_K\sqrt{(m_{\pi\pi}^2+\underline{p}^2)} - m_{\pi\pi}^2\right]p_K\cdot q, \qquad (3.54)$$

recalling from above that $p_K.q$ is directly proportional to $\cos\theta$. There is one other significant term which leads to a $\cos\theta$ term of comparable magnitude, which arises from the interference of A_0 and A_1. This is included in the A^*A term of (3.52), and contributes to the differential decay probability the following term:

$$\frac{1}{2} R_0 R_1 \cos(\delta_0-\delta_1)(p_K\cdot q)/m_K^2 \left\{2((p_K-p)\cdot q)^2 - 2(p\cdot Q)^2 - p^2((p_K-p)^2 - Q^2)\right\}. \tag{3.55}$$

Averaging this term over electron and neutrino directions results in the contribution,

$$\tfrac{2}{3} R_0 R_1 \cos(\delta_0-\delta_1)(p_K\cdot q)\left((p_K\cdot p)^2 - p_K^2 p^2\right)/m_K^2 = \tfrac{2}{3} R_0 R_1 \cos(\delta_0-\delta_1)(\underline{p})^2(p_K\cdot q), \tag{3.56}$$

where $\underline{p}$ denotes the total π-π momentum in the K rest frame.

The second effect of particular interest concerns the up-down asymmetry of the electron distribution relative to the plane defined by the two pion momenta. This is an effect of parity non-conservation and arises from the last term of expression (3.52). The only non-zero term arises from the A-B interference, giving

$$\tfrac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\lambda\mu} (A^*B - AB^*)\, p_\alpha q_\beta (p_K-p)_\lambda Q_\mu \tag{3.57}$$

In the K rest frame, this reduces to*

$$m_K R_0 S_1 \sin(\delta_0-\delta_1)\, \underline{Q}\cdot\underline{p}\times\underline{q} = 2m_K R_0 S_1 \sin(\delta_0-\delta_1)\, \underline{p_e}\cdot\underline{p}\times\underline{q}, \tag{3.58}$$

---

* In this expression, $\underline{q}$ may be evaluated either in the K rest frame or in the π-π rest frame. Only the component of $\underline{q}$ transverse to $\underline{p}$ contributes to (3.58). Since the Lorentz transformation between the π-π rest frame and the K rest frame is along the vector $\underline{p}$, the transverse component of $\underline{q}$ is the same in either frame.

---

since $\underline{Q} = 2\underline{p}_e - \underline{p}$. Cabibbo and Maksymowicz point out that the ratio of the coefficients of $p_K\cdot q$ in (3.54) and of $\underline{p}_e\cdot\underline{p}\times\underline{q}$ in

(3.57) for configurations of given $m_{\pi\pi}$ and $\underline{p}^2$ gives $\tan(\delta_0 - \delta_1)$ as function of $m_{\pi\pi}$, apart from known functions, independent of the $m_{\pi\pi}$ and $\underline{p}^2$ dependences of the amplitudes R_0 and S_1. In this way one may hope to obtain rather direct and unambiguous information on the pion-pion phase shifts. However, the situation is confused by the possibility of the $p_K\cdot q$ term (3.56), which adds to the term (3.54) considered by Cabibbo and Maksymowicz. However, this additional term is proportional to $\underline{p}^2$, and since relatively low momenta are favoured for the pions, it is possible that this additional term may be relatively unimportant. Since $K^+_{\ell 4}$ decay has the rather unique feature that it leads to final states including only two strongly-interacting particles, these two-pion states being spread in C.M. kinetic energy from 0 to (effectively) 150 MeV, this possibility of obtaining rather direct information about the low-energy π-π interaction is perhaps the outstanding motivation for the further study of the $K_{\ell 4}$ processes.

An estimate of the energy dependence of A_0, the s-wave amplitude which is expected to give the dominant term, may be obtained using Watson's approximation[48], according to which A_0 is estimated by

$$R_0 e^{i\delta_0} = (\sin\delta_0/k)\, H e^{i\delta_0}, \tag{3.59}$$

where $k = q/2$ is here the c.m. momentum in the π-π system, and H is a constant. In the low-energy region of interest in K_{e4} decay, the phase shift δ_0 may be represented by the relativistic effective range formula of Chew and Mandelstam[49]

$$k\cot\delta_0 = \frac{1}{a_0} + \frac{2}{\pi}\ln\left\{(1+k^2/m_\pi^2)^{\frac{1}{2}} + k/m_\pi\right\}, \tag{3.60}$$

where a_0 is the I = 0 s-wave π-π scattering length. From indirect arguments, based on the ABC experiments on 2π production in p-d collisions[50] and on the analysis of the energy dependence of s-wave π-N scattering[51], it is believed that the low-energy I = 0 π-π interaction is very strongly attractive; Hamilton et al.[51] have estimated $a_0 = 1.3/m_\pi$ for the corresponding scattering length.* In Fig. 5, the $m_{\pi\pi}$ distribution in K^+_{e4}

---

* On the other hand, all the direct experiments which involve the production and observation of 2π states, for example in the reactions $\pi N \rightarrow \pi\pi N$ and in $K^+ \rightarrow 3\pi$ decay, have really given no indication of such large low-energy scattering, and an alternative interpretation of the ABC effect has been suggested by Anisovitch and Dahnko[52].

---

decay obtained with the energy-dependence (3.59) corresponding to $a_0 = 1.3/m_\pi$ is compared with the distribution calculated for A_0 = constant (neglecting p-wave contributions) and with the data. The spectrum for A_0 = constant provides an adequate fit to the data; for example, the mean value predicted for $m_{\pi\pi}$ is $\bar{m}_{\pi\pi}$ = 327 MeV, to be compared with the observed value 320.5 ± 3.5 MeV obtained from the data shown. The curve (c) shown on Fig.5 gives the $m_{\pi\pi}$ distribution for the p-wave transition, with $B_0 = A_0$ = constant; naturally it peaks for much larger $m_{\pi\pi}$. The inclusion of some p-wave transition would therefore worsen significantly the

the agreement with the data; for example, an admixture of p-transition amounting to 10% in intensity would lead to $\bar{m}_{\pi\pi}$ = 329 MeV. The spectrum corresponding to the s-wave matrix-element (3.59) with $a_0 = 1.3/m_\pi$ peaks more strongly at low $m_{\pi\pi}$ and gives a better fit to the observed spectrum. For example, it leads to $\bar{m}_{\pi\pi}$ = 317 MeV; the inclusion of a small admixture of the p-wave transition B_0 would then lead to rather satisfactory agreement. The amplitude of the p-wave transition is best estimated from the magnitude of the cos θ term in the cos θ-distribution, but the data on this distribution are not yet available.

In view of the uncertainties concerning the p-wave and higher transition, and concerning the $m_{\pi\pi}$ and $p_K \cdot p$ dependences of A_0 beyond the Watson approximation, it is not really possible to distinguish the case A_0 = constant from the case (3.59) with $a_0 = 1.3/m_\pi$ with the present data. It is only possible to exclude the possibility of very large values for a_0 (for example, values $a_0 \geqslant 2.8/m_\pi$ would give a much larger peak at low energies than that observed), or of I = 0 s-wave π-π resonances below about 400 MeV.

It is also of interest to consider the relative rates for the K^+_{e4} and $K^+_{\mu4}$ modes, using the matrix-element (3.47). Here, we limit ourselves to constant values for A,B and C, with D = 0. The spectra then obtained have been integrated by Shabalin[45], with the result

$$\frac{\Gamma(K^+_{\mu4})}{\Gamma(K^+_{e4})} = \frac{0.11|A|^2 + 0.051\,\mathrm{Re}(A^*C) + 0.008|C|^2 + 0.015|B|^2}{|A|^2 + 0.20|B|^2}. \tag{3.61}$$

Owing to the A-C interference term, this ratio can fall considerably below the phase-space ratio for suitable values of C/A. It reaches its least value,

$$\left(0.03|A|^2 + 0.015|B|^2\right)/\left(|A|^2 + 0.20|B|^2\right), \tag{3.62}$$

for $C/A \approx -3$. For B = 0, then, $\Gamma(K^+_{\mu 4})/\Gamma(K^+_{e4})$ must exceed 3%, and this lower limit does not increase appreciably over the range of reasonable values for B. It is reasonable to expect the term C to be comparable with A, and the presence of this term C may well account for the low value of the $K^+_{\mu 4}/K^+_{e4}$ ratio, and the absence of any reported $K^+_{\mu 4}$ events.

With the $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule, the $(K_2^0)_{\ell 4}$ decay rates follow at once. Assuming constant matrix-elements, only B (and D) can contribute. The ratio of decay rates is

$$\frac{\Gamma(K_2^0 \to \pi^+\pi^0\ell^-\bar{\nu}_\ell \text{ and } \pi^-\pi^0\ell^+\nu_\ell)}{\Gamma(K^+ \to \pi^+\pi^-\ell^+\nu_\ell)} = \frac{\frac{1}{2}\times 0.20|B|^2}{|A|^2 + 0.20|B|^2}. \tag{3.63}$$

In principle, the magnitude of B could be determined from the $(K_2^0)_{\ell 4}$ decay rate. In practice, this would be exceedingly difficult. For $B \approx A$, the $(K_2^0)_{\ell 4}$ decay rate predicted by (3.63) is about 300 sec^{-1}, which corresponds to a K_2^0 branching ratio of 1.7×10^{-5}. Even if the branching ratio were much larger, the separation of these $(K_2^0)_{\ell 4}$ events from the dominant $(K_2^0)_{\ell 3}$ events would be exceedingly difficult.

3.6 The Leptonic Modes of Hyperon Decay.

In this section we shall discuss the application of Cabibbo's octet hypothesis for the weak current $\mathcal{J}_\alpha$ with the data available on the leptonic modes of hyperon decay. The matrix-element

appropriate to the transition $C \to D$ is then

$$\frac{G}{\sqrt{2}}\left(D\middle|\cos\theta\left((J_1^2)^V_\alpha + (J_1^2)^A_\alpha\right) + \sin\theta\left((J_1^3)^V_\alpha + (J_1^3)^A_\alpha\right)\middle|C\right). \tag{3.64}$$

The initial and final baryons which we consider belong to the same octet, whose elements we denote by $\mathcal{B}^i_j$, with i,j = 1,2,3. These elements are conveniently arrayed as a matrix

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} - \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} - \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & n \\ \Xi^- & -\Xi^0 & \frac{2\Lambda}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

It is convenient also to denote the elements of the antibaryon octet by $\bar{\mathcal{B}}^i_j$, this being the antiparticle to $\mathcal{B}^j_i$. The corresponding matrix is

$$\bar{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{\bar{\Sigma}^0}{\sqrt{2}} - \frac{\bar{\Lambda}}{\sqrt{6}} & \bar{\Sigma}^- & \bar{\Xi}^- \\ \bar{\Sigma}^+ & -\frac{\bar{\Sigma}^0}{\sqrt{2}} - \frac{\bar{\Lambda}}{\sqrt{6}} & \bar{\Xi}^0 \\ \bar{p} & -\bar{n} & \frac{2\bar{\Lambda}}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

The matrix-elements which we require are composed of matrix-elements*

$$\left(\mathcal{B}^\alpha_\beta\middle| J^i_j \middle|\mathcal{B}^\sigma_\rho\right) = C^{\beta i \sigma}_{\alpha j \rho} \tag{3.65}$$

---

* The α and β are inverted on the right-side of (3.65) since the matrix-element involves the complex conjugate of the wavefunction of state $\mathcal{B}^\alpha_\beta$, which transforms like $\bar{\mathcal{B}}^\beta_\alpha$.

These coefficients $C^{\beta i\sigma}_{\alpha j\rho}$ are essentially Clebsch-Gordan coefficients, apart from over-all multiplying factors. They are characterized completely by the fact that the form

$$\Phi = \sum \left(C^{\beta i\sigma}_{\alpha j\rho} \; J^j_i \, \bar{\mathcal{B}}^\alpha_\beta \, \mathcal{B}^\rho_\sigma \right), \tag{3.66}$$

where the summation is over all indices from 1 to 3, should be a unitary scalar. This remark is essentially equivalent to the statement of the Wigner-Eckart theorem. The Clebsch-Gordan coefficients necessary can readily be obtained by reference to tables in the literature[53]. Here we shall derive these directly.

We have to construct scalar quantities from the product $J^j_i \bar{\mathcal{B}}^\beta_\alpha \mathcal{B}^\rho_\sigma$. This can be done only by contraction of upper indices with lower indices. There are just two ways in which this can be done, giving $(\Sigma\, J^j_i \bar{\mathcal{B}}^i_\alpha \mathcal{B}^\alpha_j)$ and $(\Sigma\, J^j_i \bar{\mathcal{B}}^\alpha_j \mathcal{B}^i_\alpha)$. In terms of the convenient matrix notation, these combinations can be written as traces, $\mathrm{Tr}(J\bar{\mathcal{B}}\mathcal{B})$ and $\mathrm{Tr}(J\mathcal{B}\bar{\mathcal{B}})$, respectively. The combinations of special interest are those symmetrical and antisymmetrical in $\mathcal{B}$ and $\bar{\mathcal{B}}$, called the D and F couplings. Hence, the most general unitary scalar is

$$D\,\mathrm{Tr}\{J(\bar{\mathcal{B}}\mathcal{B}+\mathcal{B}\bar{\mathcal{B}})\} + F\,\mathrm{Tr}\{J(\bar{\mathcal{B}}\mathcal{B}-\mathcal{B}\bar{\mathcal{B}})\}, \tag{3.67}$$

so that there are two reduced matrix-elements D and F necessary for the specification of the matrix-elements (3.65).

For the strangeness-conserving decays, we need the matrix-elements (3.65) of J^2_1. These are obtained from the coefficients of J^1_2 in the expression (3.67), i.e. from the terms

$$(D-F)(\mathcal{B}\bar{\mathcal{B}})^2_1 + (D+F)(\bar{\mathcal{B}}\mathcal{B})^2_1. \tag{3.68}$$

Explicitly, we have

$$(\bar{\mathcal{B}}\mathcal{B})^2_1 = \overline{\Sigma^+}\left(\frac{\Sigma^0}{\sqrt2}-\frac{\Lambda}{\sqrt6}\right) - \left(\frac{\overline{\Sigma^0}}{\sqrt2}+\frac{\bar\Lambda}{\sqrt6}\right)\Sigma^- + \overline{\Xi^0}\,\Xi^-, \tag{3.69a}$$

$$(\mathcal{B}\bar{\mathcal{B}})^2_1 = \left(\frac{\overline{\Sigma^0}}{\sqrt2}-\frac{\bar\Lambda}{\sqrt6}\right)\Sigma^- + \overline{\Sigma^+}\left(-\frac{\Sigma^0}{\sqrt2}-\frac{\Lambda}{\sqrt6}\right) + \bar{p}n. \tag{3.69b}$$

For the strangeness-changing decays, we need the matrix-elements (3.65) of J^3_1. For these, we have to consider the terms

$$(D-F)(\mathcal{B}\bar{\mathcal{B}})^3_1 + (D+F)(\bar{\mathcal{B}}\mathcal{B})^3_1. \tag{3.70}$$

Again, we have explicitly,

$$(\bar{\mathcal{B}}\mathcal{B})^3_1 = \bar{p}\left(\frac{\Sigma^0}{\sqrt2}-\frac{\Lambda}{\sqrt6}\right) - \bar{n}\Sigma^- + \frac{2}{\sqrt6}\bar\Lambda\,\Xi^-, \tag{3.71a}$$

$$(\mathcal{B}\bar{\mathcal{B}})^3_1 = \left(\frac{\overline{\Sigma^0}}{\sqrt2}-\frac{\bar\Lambda}{\sqrt6}\right)\Xi^- - \overline{\Sigma^+}\,\Xi^0 + \frac{2}{\sqrt6}p\bar\Lambda. \tag{3.71b}$$

With these expressions, we can read off the desired matrix-elements, as follows

$$(p|J^2_1|n) = D+F, \tag{3.72a}$$

$$(\Lambda|J^2_1|\Sigma^-) = (\Sigma^+|J^1_2|\Lambda) = -2D/\sqrt6, \tag{3.72b}$$

$$(p|J^3_1|\Lambda) = (D+3F)/\sqrt6, \tag{3.72c}$$

$$(n|J^3_1|\Sigma^-) = -D+F, \tag{3.72d}$$

$$(\Lambda|J^3_1|\Xi^-) = (D-3F)/\sqrt6. \tag{3.72e}$$

These matrix-element forms are now used in the expression (3.64) for the corresponding decay matrix-element. Here we shall make the following assumptions:

(i) for the current $\mathcal{J}^V_\alpha$, the components $(J^2_1)^V_\alpha$ and $(J^1_2)^V_\alpha$ are directly proportional to the isospin currents $(I_+)_\alpha$ and $(I_-)_\alpha$. Hence it is natural to assume that the components $(J^i_j)^V_\alpha$ form an octet directly proportional to the octet of currents to which the isospin current belongs. However, since the isospin current has no $\Sigma\Lambda$ component, it follows from (3.72b) that the isospin current gives rise to a pure F-type coupling. Hence, for the weak current $\mathcal{J}^V_\alpha$, it follows that $D_V=0$.

(ii) Unitary symmetry is assumed to hold exactly in the calculation of these matrix-elements. For the $\Delta s=0$ vector transitions, there are no renormalization effects, since this vector current is conserved (CVC hypothesis). However, for the other vector transitions, and for the axial-vector transitions, the matrix-elements will be caused to deviate from the pattern (3.72) by the renormalization effects of the symmetry-breaking interactions. These effects are necessarily neglected here.

(iii) The Cabibbo angle θ is assumed to be the same for the vector and axial-vector currents, as was found compatible with the data in the comparison of K and π decay processes. Here, the hyperon leptonic decay processes lead to a further independent estimate for the angle θ.

With the general form (3.64), and the individual matrix-elements given in expressions (3.72), the matrix-elements for the leptonic decay processes of particular interest are readily obtained, as listed in Table I. For the vector interaction, $D_V = 0$ and $F_V = 1$; for the axial vector interaction, the coefficients D_A and F_A are parameters to be determined from experiment. From the magnitude of G^A_β/G^V_β obtained by Professor Wu[4)] from the data on neutron beta-decay, these coefficients must be constrained to fit the relation:

$$D_A + F_A = -1.15 \pm 0.04. \tag{3.73}$$

The most accurate branching ratios available from Table I are those for the $\Lambda \to p$ and $\Sigma^- \to n$ leptonic transitions, from which we can then obtain D_A, F_A and $\sin\theta$. The ratio of these branching ratios does not depend on $\sin\theta$, being given by

$$\frac{\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(D_A + 3F_A)^2\right) \times 1.5}{\left(1 + 3(-D_A + F_A)^2\right) \times 5.8} = \frac{(8.1 \pm 1.0)}{(13 \pm 2)}. \tag{3.74}$$

Taken together with (3.73), this quadratic equation leads to two solutions for (D_A, F_A):

Solution I: $D_A = -0.76 \pm 0.05$, $F_A = -0.39 \pm 0.05$,

Solution II: $D_A = -0.23 \pm 0.05$, $F_A = -0.92 \pm 0.05$.

For each set (D_A, F_A), $\sin\theta$ may then be determined from the branching ratio for Λ beta-decay.

$$\frac{1}{4}\sin^2\theta \left\{ \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(D_A + 3F_A)^2 \right\} \times 1.5 \times 10^{-2} = (8.1 \pm 1.0) \times 10^{-4} \tag{3.75}$$

For solution I, we thus obtain $\theta_I = 0.26 \pm 0.02$, a value in good agreement with the values θ_A and θ_V obtained from the K and π decay rates in Sec.3.2. Solution II leads to $\theta_{II} = 0.195 \pm 0.015$, a value which is appreciably below these independent estimates for θ.

A check on these solutions can be obtained from the branching ratio for $\Sigma^- \to \Lambda$ beta-decay. From Table I, this branching ratio is given by $\frac{3}{4}(\frac{2}{3} D_A^2 \cos^2\theta) \times 2.4 \times 10^{-4}$. Since solution I gives a much larger value for D_A than does solution II, the comparison between this value and the experimental branching distinguishes between these two solutions rather clearly. Solution I predicts a branching ratio $\Sigma^-_{\Lambda e}/\Sigma^-_{tot} = (0.65 \pm 0.08) \times 10^{-4}$, which is in good agreement with the experimental value of $(0.75 \pm 0.28) \times 10^{-4}$. However, solution II predicts a branching ratio $(0.06 \pm 0.03) \times 10^{-4}$, which is significantly smaller than the experimental value.*

---

* The most satisfactory procedure is to make a least squares fit to all of the data in terms of D_A, F_A, and θ. This has recently been done for the hyperon decay data by Snow et al. (private communication from Dr. G. Snow, August, 1964) using the Λ_e, $\Sigma^-_{\Lambda e}$, Σ^-_e and Ξ^-_e branching ratios, G^A_β/G^V_β and G^V_β/G_μ as input data. The two solutions thus found were:

  I. $D_A = -0.74$, $F_A = -0.44$, $\theta = 0.272$, with χ^2 probability 32%,

  II. $D_A = -0.38$, $F_A = -0.75$, $\theta = 0.246$, with χ^2 probability 8%.

The inclusion of G^V_β/G_μ in this analysis makes solution II appear somewhat more favorable than in our discussion above. This solution II also leads to a rather low branching ratio (0.16×10^{-4}) for $\Sigma^-_{\Lambda e}$.

For the $\Xi^- \to \Lambda$ leptonic transition, the branching ratio is given by

$$\frac{1}{4}\left\{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(D_A - F_A)^2\right\} \sin^2\theta \times 2.0 \times 10^{-2} \qquad (3.76)$$

The predicted value is then $(5.1 \pm 0.7) \times 10^{-4}$ for solution I, and $(8.5 \pm 1.1) \times 10^{-4}$ for solution II. Although these values appear much smaller than the experimental value quoted in Table II, this value is based only on three observed events, so that this apparent discrepancy may well result from a statistical fluctuation. Further data on the Ξ^- beta decay will be of particular interest, as a check on this prediction of the octet hypothesis.

The matrix-elements of Table I now lead to definite predictions concerning the (V,A) character of these strangeness-changing beta-decay interactions, and these predictions are summarized in Table II. It will be seen that the predicted interactions $(V + \lambda A)$ differ appreciably from the (V-A) form. The value of λ has been determined experimentally only for the $\Lambda \to p$ beta-transition. The most accurate determination is that of Rubbia et al.[55] who measured the up-down asymmetry of the electrons emitted in the decay of polarized Λ particles in a spark chamber experiment, obtaining from this the value $\lambda = -0.8 \pm 0.3$, in good agreement with the expectation given in Table II for either solution. The most striking prediction given in Table II is that, for the $\Sigma^- \to n$ beta-transition with solution I, the coefficient λ should have sign opposite that known for the $n \to p$ and $\Lambda \to p$ beta-transitions; a positive value for λ is an unexpected prediction, so that its verification would provide a striking check on the validity of the octet hypothesis. With solution I, the coefficient λ is predicted to be quite small for the $\Xi^- \to \Lambda$ beta-transition, another striking prediction of this analysis of the hyperon decays.

For the favored solution I, the axial-vector coupling is dominantly of D-type, with

$$F_A/(D_A + F_A) = 0.34 \pm 0.05. \qquad (3.77)$$

This appears also to be the case for the Yukawa strong-interaction coupling between the pseudoscalar meson octet and the baryon octet. For this interaction, the coupling strengths are usually written $\sim G(1-f)$ for the D-type coupling, and $\sim Gf$ for the F-type coupling, G being the pion-nucleon coupling constant, $G^2/4\pi = 13.5$. Our knowledge of the parameter f is not particularly precise at present. However, the following arguments appear relevant:

(i) the known $p_{3/2}$ resonances for the meson-baryon system form a decuplet, $N^*_{3/2}(1238)$, $Y^*_1(1385)$, $\Xi^*_{\frac{1}{2}}(1530)$, and $\Omega_0(1680)$. The extension of the relativistic Chew-low theory of $N^*_{3/2}(1238)$ to the discussion of the $p_{3/2}$ meson-baryon resonances in unitary symmetry has been carried out by Martin and Wali[16]. They have pointed out that the attraction in the decuplet state due to the one-baryon exchange process is greater than that in any other SU_3 representation over the range $1/4 \leq f \leq (1+\sqrt{3})/4$. In the decuplet state, the attraction is greatest for $f = 1/4$, and only the singlet representation has greater attractive interaction than the decuplet over the range $0 \leq f \leq 1/4$. There are other interactions[56] which are considered likely to be important for the singlet representation, although not for the decuplet representation, which may well weaken the attraction in the singlet representation. Hence, the observation that the low-lying $p_{3/2}$ resonances do form a decuplet suggests strongly that the value of f should lie in the neighbourhood of $1/4$, probably somewhere in the range 0.1 - 0.5.

(ii) the reciprocal bootstrap mechanism relating this $\mathcal{B}^*$ decuplet and the $\mathcal{B}$ octet has been discussed by Cutkosky[57] and the self-consistency of this mechanism leads to a definite estimate for f, $f = (\sqrt{6}-1)/(\sqrt{6}+2) = 0.326$. In this mechanism, the generation of the baryon octet is assumed to be due dominantly to the exchange of the $p_{3/2}$ $\mathcal{B}^*$ decuplet, and there are certainly other processes which can contribute significantly to this. Nevertheless, it is rather satisfactory and encouraging that this simple estimate for f does lie in the range allowed by the above considerations (i).

(iii) with $f = 1/4$, the $(\Sigma\pi/\Lambda\pi)$ ratio calculated for the two modes of Y^*_1 decay is about 0.065, which is ~~rather larger than~~ the observed ratio (0.02 ± 0.02)[17]. Since the calculated ratio falls with decrease of the ratio $G_{\Sigma\Sigma\pi}/G_{\Sigma\Lambda\pi}$, and since $G_{\Sigma\Sigma\pi} = 2fG$, $G_{\Sigma\Lambda\pi} = 2(1-f)G/\sqrt{3}$, the experimental ratio suggests that the value for f should be somewhat less than $1/4$, perhaps as small as 0.15.

(iv) the K couplings are given by $G_{\Lambda NK} = -(1+2f)G/\sqrt{3}$ and $G_{\Sigma NK} = (1-2f)G$, according to unitary symmetry. For $f = \frac{1}{4}$, the expected values are $G^2_{\Lambda NK}/4\pi \approx 10$, and $G^2_{\Sigma NK}/4\pi \approx 3.5$. The only data bearing at all directly on these coupling parameters are the threshold cross-sections for Λ and Σ photoproduction from protons.

The interpretation of these data depends on the application of the Kroll-Ruderman theorem, which may well be significantly inaccurate for K-meson photoproduction (especially in view of the existence of strong competing processes with lower thresholds). On the basis of calculations based on one-baryon and one K-meson exchange processes, and including the magnetic interactions, the data appears compatible with values as large as $G^2_{\Lambda NK}/4\pi$, $G^2_{\Sigma NK}/4\pi \approx 3$. If f is too large, or too small, one or other of these coupling parameters will greatly exceed this estimate; however, for f in the neighbourhood of $1/8$, the unitary symmetry values for $G^2_{\Lambda NK}/4\pi$ and $G^2_{\Sigma NK}/4\pi$ are both in the region of 7, a magnitude for which there is still some hope of obtaining agreement with the photoproduction data.

The fact that D-type coupling dominates for both the strong $\bar{\mathcal{B}}\mathcal{B}$ M coupling and the weak $\bar{\mathcal{B}}\mathcal{B}$ J coupling, with the comparable values of $f \approx 1/4$ and $F_A/(D_A + F_A) \approx 0.34$ respectively, may simply reflect the validity of the Goldberger-Treiman relationship,

$$G^A_{BC}/G_{BC\pi} = F_{\pi l\nu}(1+b_{BC})/(M_B+M_C), \tag{3.78}$$

for the $\Delta s = 0$ transitions $C \rightarrow B$. The denominator $(M_B + M_C)$ does not differ by more than 20% from its mean value for these baryon transitions; if the background terms b_{BC} are small, then this relationship would lead directly to the expectation that the ratios f and $F_A/(F_A + D_A)$ should be quite comparable in value. Essentially, this argument depends only on the $\Delta s = 0$ transitions, for which the pole term in (2.11) corresponds to

one-pion exchange, a favorable situation since the pole is then very much closer to the physical region than is the branch-cut. However, if ratio $G^A_{BC}/G_{BC\pi}$ is the same (with $b \approx 0$) for all the $\Delta s = 0$ transitions, unitary symmetry requires it to have the value

$$G^A_{BC}/G_{BCK} = \tan\theta\, F_{\pi l\nu}/(M_B+M_C) = F_{Kl\nu}/(M_B+M_C) \tag{3.79}$$

for the $\Delta s = \pm 1$ transitions. In other words, the Goldberger-Treiman relation should be expected to hold valid also for $\Delta s = \pm 1$ transitions, even though the branch-cut begins not very much further from the physical region than the position of the K-pole which gives rise to the Goldberger-Treiman relation, i.e. the background term from the branch cut must also be unimportant relative to the pole term, even for $\Delta s = \pm 1$ exchange.

The general agreement of the data with the Octet Hypothesis of Cabibbo is quite remarkable at this stage. Most striking is the agreement between the three independent estimate obtained for the angle θ, from the $\pi_{\mu 2}$-$K_{\mu 2}$ comparison, the π_{e3}-K_{e3} comparison, and from the analysis of the hyperon decay rates. However, the above comparison with the hyperon data has neglected the induced interactions (weak magnetism, and the pseudoscalar term) and the possibility of form factors, which may not be at all negligible for those decay processes which involve a large energy release (e.g. $\Sigma^- \rightarrow n$, where the energy release is about 260 MeV). The more complete interaction can be used without introducing any further parameters, since the weak magnetism terms are prescribed by unitary symmetry and the knowledge of the neutron and proton magnetic moments, and the pseudoscalar terms are given by the Goldberger-Treiman relation. The only quantities which are unknown are the form factors associated with D_A and F_A, but these form factors are certainly quite unimportant for any reasonable r.m.s. radii. Some calculations using these complete interactions have recently been summarized briefly by Brene et al.[36], and it appears that the inclusion of these refinements does not affect the conclusions significantly.

4. The Non-Leptonic Decay Processes.

With the current-current picture, the interaction Lagrangian describing the non-leptonic weak interaction processes is proportional to $\mathcal{J}_a^\dagger \mathcal{J}_a$. Since the elements of $\mathcal{J}_a$ are members of an octet, the elements of $\mathcal{J}_a^\dagger$ being members of the same octet, the elements of this Lagrangian have transformation properties which correspond to the representations included in the product of two identical octets. These representations are (1), (8) and (27). The singlet representation (1) does not contribute to the leptonic decays observed, since these involve $\Delta Y = \pm 1$ and a half-integral change in the total isospin. The octet representation allows only $\Delta Y = \pm 1$ transitions, with $\Delta I = \frac{1}{2}$. The (27) representation has $\Delta Y = \pm 1$ elements giving both $\Delta I = \frac{1}{2}$ and $\Delta I = \frac{3}{2}$ transitions, as well as $\Delta Y = \pm 2$ transitions for which $\Delta I = 1$ holds. We must emphasize that the presence in $\mathcal{J}_a^\dagger \mathcal{J}_a$ of some elements of a given representation does not necessarily imply the presence of all the elements of this representation. This is illustrated by the form of $\mathcal{J}_a$ itself. The form required by the leptonic decay

processes requires only the presence of J_1^2 and J_1^3; the complete form for $\mathcal{J}_a$ may include other elements J_j^i, as the study of the non-leptonic processes may indicate, but this is not necessary à priori. Thus, the presence of ($\Delta Y = \pm 1$, $\Delta I = \frac{3}{2}$) elements of the (27) representation in $\mathcal{J}_a^\dagger \mathcal{J}_a$ does not require that the ($\Delta Y = \pm 2$, $\Delta I = 1$) elements of this representation should also be present. This point will be illustrated by a specific model in Sec.4.2.

The experimental situation is that:

(i) for $\Delta Y = \pm 1$, the $\Delta I = \frac{1}{2}$ transitions appear to be dominant. The experimental evidence for this conclusion will be reviewed briefly in Sec.4.1.

(ii) there are no $\Delta Y = \pm 2$ non-leptonic interactions with amplitude larger than the square of the amplitude of the $\Delta Y = \pm 1$ interactions. A $\Delta Y = \pm 2$ interaction of amplitude g would have a matrix-element of order g between K^0 and $\bar{K}^0$ states, which would lead to a $K_1^0 - K_2^0$ mass difference δm_{12} of order g. Empirically, this mass difference is of order $\delta m_{12} \approx 1/\tau(K_1^0)$, an effect of second order in the weak interaction coupling G.

To account for the $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule within the scheme of unitary symmetry for weak interactions, there has been put forward the hypothesis of octet dominance[58-60,74-5], that the terms of $\mathcal{J}_a^\dagger \mathcal{J}_a$ in the octet representation are enhanced relative to those in the (27) representation. Coleman and Glashow[60] have suggested a specific mechanism to achieve this result, the "tadpole mechanism" which is a generalization of the "$K_1^0 \rightarrow$ Vacuum" mechanism proposed earlier by Salam and Ward[61]. This implies the view that the

$\Delta I = \frac{1}{2}$ selection rule is an approximate rule, and that $\Delta I = \frac{3}{2}$ transitions should also be expected to occur, but with some smaller amplitude. Actually, this hypothesis of octet dominance is much stronger than the experimental data requires at present. As mentioned above, $\Delta Y = \pm 2$ non-leptonic transitions are absent, and only the $\Delta Y = \pm 1$ non-leptonic transitions are known empirically. Hence the data requires only that the strangeness-changing elements of $\mathcal{J}_a^+ \mathcal{J}_a$ should transform like K^0 and $\bar{K}^0$. Essentially nothing is known empirically about strangeness-conserving non-leptonic interactions, that is about the $\Delta Y = 0$ elements of $\mathcal{J}_a^+ \mathcal{J}_a$.

4.1 The $\Delta I = \frac{1}{2}$ Rule.

In this section, we shall summarize briefly the evidence concerning the $\Delta I = \frac{1}{2}$ selection rule for $\Delta Y = \pm 1$ non-leptonic decay processes[62].

1. $K \to 2\pi$. The $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule was first proposed by Gell-Mann and Pais[63] to account for the large value of the ratio $\Gamma(K_1^0 \to 2\pi)/\Gamma(K^+ \to \pi^+\pi^0) \approx 500$. With $\Delta I = \frac{1}{2}$, the final 2π states which can be reached in $K \to 2\pi$ decay are limited to $I = 0$ and $I = 1$. Since $\ell = 0$ holds for the 2π system, Bose statistics allows only $I = 0$ and $I = 2$ final states. These two constraints allow K_1^0 transitions to the $I = 0$ 2π state, whereas they are inconsistent for K^+ decay, so that the $K^+ \to \pi^+\pi^0$ decay process is forbidden, except through deviations from the $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule. This interpretation requires that the K_1^0 branching ratio $\Gamma(K_1^0 \to 2\pi^0)/\Gamma_{tot}(K_1^0)$ should have the value $1/3$, characteristic of a final $I = 0$ state, and this prediction is quite well satisfied

when allowance is made for the small $\Delta I = \frac{3}{2}$ and $\frac{5}{2}$ amplitudes implied by the observed $K^+_{2\pi}$ mode.

by the data, In the recent compilation of Chretien et al.[64], for example, the three most accurate determinations listed for this ratio were 0.335 ± 0.014, 0.288 ± 0.021, and 0.260 ± 0.024.

2. $\Lambda \to N\pi$. Writing the $\Lambda \to N\pi$ decay matrix-element in the form $(s + p\sigma\cdot q)$, the $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule requires

$$s_0/s_- = p_0/p_- = -1/\sqrt{2}. \qquad (4.1)$$

The $(\pi^0 n)/(\pi^- p)$ branching ratios observed are in excellent agreement with the expectation $(|s_0|^2 + |p_0|^2)/(|s_-|^2 + |p_-|^2) = 0.5$. For example, in the recent compilation by Chretien et al.[64], the four most accurate determinations listed for this ratio were 0.460 ± 0.037, 0.555 ± 0.040, 0.410 ± 0.075 and 0.595 ± 0.075. The asymmetry coefficients α (given by $2\mathrm{Re}(s^*p)/(|s|^2 + |p|^2)$) have been measured for the $n\pi^0$ and $p\pi^-$ modes, the ratio being $\alpha_0/\alpha_- = 1.10 \pm 0.27$, in agreement with the equality expected from (4.1).

For $\Lambda \to p\pi^-$ decay, polarization studies have established that the decay is dominantly s-wave ($p_-/s_- = 0.35 \pm 0.03$). The same conclusion has also been reached for the $\Lambda \to n\pi^0$ interaction, from the branching ratio observed for $({}_\Lambda He^4 \to$ all π^0 modes$)/({}_\Lambda He^4 \to$ all π^- modes$)$, which leads to the estimate $p_0/s_0 = 0.39^{+0.2}_{-0.12}$, in agreement with the ratio for the $p\pi^-$ mode, as expected with (4.1). Hence, the forms of the $\Lambda \to N\pi$ decay amplitudes are in agreement with expectation from the $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule, in some detail.

3. $\Xi\to N\pi$. The $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule predicts

$$\Gamma(\Xi^-\to\Lambda\pi^-)/\Gamma(\Xi^0\to\Lambda\pi^0) = 1/2. \tag{4.2}$$

The experimental results are $\Gamma(\Xi^-\to\Lambda\pi^-) = (1.76 \pm 0.05) \times 10^{10}\,\mathrm{sec}^{-1}$, to be compared with the values $\Gamma(\Xi^0\to\Lambda\pi^0) = (2.42 \pm 0.3) \times 10^{10}\,\mathrm{sec}^{-1}$ obtained by the Alvarez group at Berkeley, $3.5^{+0.9}_{-0.7} \times 10^{10}\,\mathrm{sec}^{-1}$, obtained by the U.C.L.A. group, and $3.8^{+1.0}_{-0.7} \times 10^{10}\,\mathrm{sec}^{-1}$ obtained by the Ecole Polytechnique group[65]. The ratio observed for these decay rates is not far from the expected value (4.2). If we take the mean value of these Ξ^0 decay rates, the deviation from this value can be accounted for by a $\Delta I = \frac{3}{2}$ admixture about 10% in amplitude.

4. $\Sigma\to N\pi$. With the $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule, the matrix-elements for the three observable $\Sigma\to N\pi$ decay processes can be written in terms of two amplitudes.

$$\Sigma^+\to n\pi^+: \qquad \Sigma_+^+ = \tfrac{2}{3}T_1 + \tfrac{1}{3}T_3, \tag{4.3a}$$

$$\Sigma^+\to p\pi^0: \qquad \Sigma_0^+ = +\tfrac{\sqrt{2}}{3}T_1 \mp \tfrac{\sqrt{2}}{3}T_3, \tag{4.3b}$$

$$\Sigma^-\to n\pi^-: \qquad \Sigma_-^- = T_3, \tag{4.3c}$$

where T_1 is the amplitude leading to the $I = \frac{1}{2}$ final state, and T_3 the amplitude leading to the $I = \frac{3}{2}$ final state. From these expressions (4.3), there follows the $\Delta I = \frac{1}{2}$ relationship,

$$\sqrt{2}\,\Sigma_0^+ = -\Sigma_-^- + \Sigma_+^+. \tag{4.4}$$

This relationship holds for both s- and p-wave parts of the decay amplitudes. With time-reversal invariance, Watson's final state interaction theorem[46] states that these amplitudes are real except for final-state scattering phases. These phases are known and are small, the largest being about 12°. It is therefore an adequate approximation to assume the amplitudes (4.3) to be real. With the form $(s + p\underline{\sigma}.\underline{q})$ for each of these amplitudes, it is convenient to represent each amplitude as a vector in an (s,p) plane, as first done by Gell-Mann and Rosenfeld[66].

The magnitudes of these vectors are obtained from the corresponding partial lifetimes,

$$\Gamma(\Sigma_+^+) = (0.63 \pm 0.04) \times 10^{10}\,\mathrm{sec}^{-1}, \tag{4.5a}$$

$$\Gamma(\Sigma_0^+) = (0.63 \pm 0.04) \times 10^{10}\,\mathrm{sec}^{-1}, \tag{4.5b}$$

$$\Gamma(\Sigma_-^-) = (0.63 \pm 0.025) \times 10^{10}\,\mathrm{sec}^{-1}. \tag{4.5c}$$

Their orientations are indicated by the corresponding asymmetry parameters α (given by $2sp/(s^2 + p^2)$),

$$\alpha(\Sigma_+^+) = -0.03 \pm 0.08, \tag{4.6a}$$

$$\alpha(\Sigma_0^+) = -0.78 \pm 0.10, \tag{4.6b}$$

$$\alpha(\Sigma_-^-) = -0.10 \pm 0.15, \tag{4.6c}$$

the value $\alpha(\Sigma_o^+)$ being a weighted average of the values 0.73 ± 0.11 obtained by Beall et al.[67] and 0.90 ± 0.25 obtained by Tripp et al[68] and the value $\alpha(\Sigma_-^-)$ being a weighted average of the values -0.16 ± 0.21 obtained by Tripp et al.[68] and -0.04 ± 0.023 obtained by Nussbaum et al.[69]. With $\alpha(\Sigma_+^+) \approx 0$, the Σ_+^+ decay amplitude is essentially either pure s-wave or pure p-wave. Similarly, the Σ_-^- amplitude is dominantly pure s-wave or pure p-wave.

If the triangular relation (4.4) is to hold, the equality of the magnitudes (4.5) indicate that the triangle formed by $\sqrt{2}\Sigma_o^+, \Sigma_+^+$, and Σ_-^- must be approximately right-angled. If the amplitude Σ_+^+ is along the p-axis, then Σ_-^- must be approximately along the s-axis; alternatively, Σ_+^+ may be along the s-axis, in which case Σ_-^- must be approximately along the p-axis. In either case, relation (4.4) then requires Σ_o^+ to make an angle of -45^o with the s-axis, so that $\alpha(\Sigma_o^+) \approx -1$ is predicted by the $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule.

With the experimental value (4.6b) for $\alpha(\Sigma_o^+)$, the triangle actually does not close. Since this value $\alpha(\Sigma_o^+)$ is compatible with two values for p_o/s_o, which are reciprocal, there are two directions possible for Σ_o^+, as shown in Fig.6. The best solutions obtained by least squares fitting deviate from the closed triangle predicted with the $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule, by about one standard deviation in one case, and by about 1.5 standard deviations in the other case. The best fits require the value $\alpha(\Sigma_o^+) = -0.95$, rather larger than the present experimental value.

The assumption that Σ_+^+ lies along the s-axis, and Σ_-^- lies along the p-axis, or vice versa, urgently needs a direct experimental test.

For each of the decays $\Sigma^\pm \rightarrow n + \pi^\pm$, the (s,p) orientation of the corresponding amplitude could be established by determining the γ-coefficient[70] in the distribution of neutron polarization for the decay of polarized $\Sigma^\pm$, since each γ is proportional to the corresponding $(s^2 - p^2)/(s^2 + p^2)$. In fact, at the present stage, only the sign of each γ need be determined to establish which axes each of the Σ_+^+ and Σ_-^- lie along. However, to date there has been no attempt at these difficult experimental measurements.

5. <u>$K \rightarrow 3\pi$</u>. All of the data available on the decays $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-$ and $\pi^+\pi^o\pi^o$ and $K_2^o \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^o$ are comparable with the requirements of the $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule. The only features of these decays which provide a significant test for the absence of $\Delta I = 3/2$ transitions are as follows:

(i) the ratio $\Gamma(K_2^o \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^o)/\Gamma(K^+ \rightarrow \pi^+\pi^o\pi^o)$ is predicted to have the value 2.06, with $\Delta I = \frac{1}{2}$. The experimental values available[62] lead to the average value 1.60 ± 0.3 for this ratio. This can be attained with a small $\Delta I = \frac{3}{2}$ admixture, of relative amplitude $7 \pm 5\%$.

(ii) the slopes of the π^o spectrum (divided by the phase-space spectrum) in K_2^o decay and the π^- spectrum (divided by phase-space) in $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-$ decay are required to be equal, by the $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule. The experimental ratio is $(13 \pm 8)/(11 \pm 6)$, in accord with this expectation. However, this observation allows the $\Delta I = \frac{3}{2}$ amplitude to have the value $16 \pm 40\%$ relative to the relevant $\Delta I = \frac{1}{2}$ amplitude.

4.2 Weak Vector Mesons and Unitary Symmetry.

Lee and Yang[71] have discussed the generation of the weak decay interactions $\mathcal{J}_\alpha^\dagger \mathcal{J}_\alpha$, $\mathcal{J}_\alpha^\dagger J_{\ell\alpha}$, and $J_{\ell\alpha}^\dagger J_{\ell\alpha}$, through the coupling of intermediate vector fields $W_{1\alpha}$ with the currents $\mathcal{J}_\alpha$ and $J_{\ell\alpha}$. In particular, they have discussed the conditions which these W-fields and their couplings must satisfy in order to ensure the absence of $\Delta Y = \pm 2$ transitions, and the existence of the $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule. Here we shall adapt their arguments to the situation where the currents $\mathcal{J}_\alpha$ belong to an octet.

The coupling between the charged $\Delta Y = 0$ current J_α (for which $\Delta I = 1$) and the charged $\Delta Y = 1$ current S_α (for which $\Delta I = \frac{1}{2}$) is generated by their coupling with a charged intermediate vector meson field $W_{1\alpha}$, and takes a form propotional to $(J_\alpha^\dagger S_\alpha + h.c.)$. This form is necessarily a superposition of $\Delta I = \frac{1}{2}$ and $\Delta I = \frac{3}{2}$ interactions. The simplest procedure to remove the $\Delta I = \frac{3}{2}$ terms is to introduce corresponding $\Delta Y = 0$ and $\Delta Y = 1$ neutral currents, whose coupling also leads necessarily to a superposition of $\Delta I = \frac{1}{2}$ and $\Delta I = \frac{3}{2}$ interactions, and then to combine these charged and neutral couplings in such a way as to eliminate the $\Delta I = \frac{3}{2}$ terms. This procedure necessarily involves the introduction of neutral vector mesons $W_{2\alpha}$ coupled with these neutral currents. The absence of $\Delta s = \pm 2$ transitions then makes it clear that the neutral field $W_{2\alpha}$ must be distinct from its antiparticle field $W_{2\alpha}^\dagger$. Hence, the minimum number of weak vector mesons required is four, consisting of the doublet (W_1, W_2) and their antiparticles.

Within the unitary symmetry scheme, the neutral $\Delta Y = 1$ current corresponding to J_3^1 is necessarily J_3^2. The coupling of the (W_1, W_2) doubled to these strangeness-changing currents then takes the form

$$L_{WS} = f\sin\theta\,\{(J_3^1)_\alpha W_{1\alpha} + (J_3^2)_\alpha W_{2\alpha} + h.c.\}, \qquad (4.7)$$

where W_1 and W_2 transform like an isospin doublet. With $I = \frac{1}{2}$ for (W_1, W_2), then, this interaction conserves isospin. Since W_2 is distinct from $W_2^\dagger$, this interaction cannot generate any $\Delta Y = \pm 2$ matrix-elements.

The neutral $\Delta Y = 0$ currents corresponding to J_2^1 are J_1^1 and J_2^2. These may be combined to form a neutral isovector $(J_1^1 - J_2^2)/\sqrt{2}$, and an isoscalar $(J_1^1 + J_2^2)/\sqrt{2}$. In order to obtain the $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule, the W-J coupling must be an isospinor; two $\Delta I = \frac{1}{2}$ terms may be constructed, giving

$$L_{WJ} = f\cos\theta\{(J_{2\alpha}^1 W_{1\alpha} - \tfrac{1}{2}(J_{1\alpha}^1 - J_{2\alpha}^2)W_{2\alpha}) + h.c. + \tfrac{1}{2}\lambda(J_{1\alpha}^1 + J_{2\alpha}^2)W_{2\alpha} + h.c.\}. \qquad (4.8)$$

In expressions (4.7) and (4.8), the coefficients $f\sin\theta$ and $f\cos\theta$ have been chosen such that the observed leptonic interation (3.14) results from the coupling of these currents with the weak lepton current, through the charged vector meson coupling

$$L_{W\ell} = f(J_{\ell\alpha} W_{1\alpha} + h.c.). \qquad (4.9)$$

The coupling coefficient f is then fixed by the requirement

$$f^2/M_W^2 = G_\mu, \qquad (4.10)$$

that the coupling of $J_{\ell\alpha}$ with itself should have the observed form. Since there is no direct information possible on the neutral currents, the coefficient λ in expression (4.8) is still a free parameter, except that time-reversal invariance requires that it should be real.*

* We note that the L_{WJ} given by (4.8) cannot be written in the Schizon form of Lee and Yang[71] unless λ is purely imaginary. In this case, L_{WJ} does not satisfy time-reversal invariance.

This failure of time-reversal invariance is a serious objection to the possibility of a schizon form with the above Lagrangians; since the two terms of (4.8) involve the same currents J_1^1 and J_2^2, their contributions will necessarily be coherent and there will be a failure of time-reversal invariance for the non-leptonic interactions generated by W_2 exchange (unless $\lambda = 0$).

The non-leptonic strangeness-changing decay interactions generated by W-exchange have initially the form

$$\langle L_{WS} L_{WJ} \rangle = f^2 \sin\theta\cos\theta \left(\frac{\delta_{\alpha\beta} - q_\alpha q_\beta / M_W^2}{q^2 - M_W^2} \right) \Big\{ (J_3^1)_\alpha (J_1^2)_\beta - \tfrac{1}{2} (J_3^2)_\alpha (J_1^1 - J_2^2)_\beta$$
$$+ \tfrac{1}{2}\lambda (J_3^2)_\alpha (J_1^1 + J_2^2)_\beta + h.c. \Big\}, \qquad (4.11)$$

where q denotes the W momentum transfer. Since this form will be strongly modified by radiative corrections due to the strong interactions, our interest in this interaction lies only in its SU_3 properties, since these will be preserved by strong interactions invariant with respect to SU_3. The form (4.11) certainly guarantees $\Delta I = \frac{1}{2}$ for $\Delta Y = \pm 1$, as a necessary consequence of the structure of (4.7) and (4.8). However, the interaction (4.11) is not generally of octet form; it still includes elements belonging to the (27) representation. Omitting the suffices α,β, and making use of the relation $(J_1^1 + J_2^2 + J_3^3) = 0$, the curly bracket of (4.11) may be written

$$(J_3^1 J_1^2 + J_3^2 J_2^2 + J_3^3 J_3^2) - \frac{\lambda+1}{2} (J_3^2 J_3^3) + h.c. \qquad (4.12)$$

The first bracket of this expression is T_3^2, an element of an octet. The second bracket $J_3^2 J_3^3$ is not of octet form, but includes the

element T_{33}^{23} of a (27) representation. However, it is easy to eliminate the (27) term, by the choice $\lambda = -1$. The interaction (4.11) illustrates the point made earlier, that the absence of $\Delta Y = \pm 2$ nonleptonic interactions and the $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule for the $\Delta Y = \pm 1$ non-leptonic interactions are not sufficient to ensure that the $\Delta Y = \pm 1$ weak non-leptonic interactions have the octet form. The octet hypothesis for the $\Delta Y = \pm 1$ non-leptonic interactions does involve still more specific assumptions, as we have just seen.

With $\lambda = -1$, the effective Lagrangian for the weak $\Delta Y = \pm 1$ non-leptonic interactions has the SU_3 form,

$$L_{JS} = T_3^2 + T_2^3 \qquad (4.13)$$

This is precisely the form obtained in Okubo's discussion[72] of the intermediate vector mesons in unitary symmetry. Now, since T_3^2 transforms under unitary symmetry like K^0, and T_2^3 like $\bar{K}^0$, this interaction transforms under unitary symmetry like $(K^0 + \bar{K}^0)$, i.e. like the K_2^0 state. In Gell-Mann's notation[73], L_{JS} transforms like the sixth component F_6 of the unitary spin.

As far as its space-time properties are concerned, L_{JS} transforms like the K_1^0 state since it necessarily has CP = +1. It is of interest to note[58-9] that the particular tadpole transition $K_1^0 \rightarrow$ vacuum is forbidden by unitary symmetry, since a weak interaction (L_{JS}) transforming like the K_2^0 state necessarily has zero matrix-element between vacuum and K_1^0 state, the K_1^0 and K_2^0 states being orthogonal with respect to unitary symmetry.

We may note explicitly that the hypothesis of "octet dominance" is stronger than the hypotheses which lead to the form (4.13). With $\lambda = -1$, the $\Delta Y = 0$ weak non-leptonic interactions have the following form with respect to unitary symmetry:

$$\langle L_{WJ} L_{WJ} \rangle \sim (J^1_{2\alpha} J^2_{1\alpha} + J^1_{1\alpha} J^1_{1\alpha}) \cos^2\theta + (J^1_{3\alpha} J^3_{1\alpha} + J^2_{3\alpha} J^3_{2\alpha}) \sin^2\theta$$

$$= (J^1_{i\alpha} J^i_{1\alpha} \cos^2\theta + J^i_{3\alpha} J^3_{i\alpha} \sin^2\theta) - J^1_{3\alpha} J^3_{1\alpha} \cos^2\theta - J^3_{3\alpha} J^3_{3\alpha} \sin^2\theta. \quad (4.14)$$

The first bracket of this expression consists of T^1_1 and T^3_3, but the last two /terms again include terms from the (27) representation. More complicated schemes, involving at least another neutral W meson, are needed if it is required that all elements of the weak non-leptonic interaction belong to an octet, i.e. if true "octet dominance" is required to hold exactly, rather than as an approximation resulting from some dynamical enhancement of the octet terms. However, there is really no experimental evidence at present which requires hypotheses beyond those leading to the form (4.13).

4.3 Octet Dominance for $\Delta Y = \pm 1$ Decay Processes.

In this section we wish to discuss consequences of the form

$$\langle L_{WS} L_{WJ} \rangle = T^2_3 + T^3_2 \quad (4.15)$$

appropriate for the $\Delta Y = \pm 1$ non-leptonic weak interactions in the scheme of unitary symmetry with octet dominance for these interactions. The most convenient way to discuss these is through the introduction of an "octet spurion" S, whose matrix form is

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

The weak interaction (4.15) can then be written in the form Tr(OT).

Charge conjugation parity $\mathcal{C}$ can be defined for an octet of mesons, or for an octet of currents which is charge conjugate to itself. The eigenvalue $\mathcal{C}$ is necessarily equal to the charge conjugation parity of the diagonal elements of the octet. For the octet product of two octets, $\mathcal{C}$ has value equal to the product of the separate $\mathcal{C}$ values times +1 if the coupling is D-type, or -1 if the coupling is F-type: this is seen directly as follows

$$\mathcal{C}(A^1_j B^j_1 \pm A^j_1 B^1_j) = C^{-1} A^1_j C C^{-1} B^j_1 C \pm C^{-1} A^j_1 C C^{-1} B^1_j C$$

$$= \mathcal{C}_A \mathcal{C}_B (A^j_1 B^1_j \pm A^1_j B^j_1)$$

$$= \pm \mathcal{C}_A \mathcal{C}_B (A^1_j B^j_1 \pm A^j_1 B^1_j). \quad (4.17)$$

Since the current $\mathcal{J}_\alpha$ is parity non-conserving, it is really necessary to introduce two octet spurions, $S^{(+)}$ and $S^{(-)}$, for the parity-conserving and parity-reversing parts of the decay interaction. Since CP = +1 for the weak interaction, the spurion $S^{(+)}$ which corresponds to the terms $\mathcal{J}^{V\dagger}_\alpha \mathcal{J}^V_\alpha$ and $\mathcal{J}^{A\dagger}_\alpha \mathcal{J}^A_\alpha$ has $\mathcal{C} = +1$, and the spurion $S^{(-)}$ which corresponds to the terms $\mathcal{J}^{A\dagger}_\alpha \mathcal{J}^V_\alpha$ and $\mathcal{J}^{V\dagger}_\alpha \mathcal{J}^A_\alpha$ has $\mathcal{C} = -1$.

Consider the decay interaction $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$. This is a $0- \rightarrow 0+$ transition, so that it involves the octet spurion $S^{(-)}$, and it is convenient to consider the decay interaction in the form

$$K^0 + \pi^+ + \pi^- \rightarrow S^{(-)}. \tag{4.18}$$

The π and K mesons belong to the same octet M^i_j. In order to form this interaction, we are required to form an octet from three identical meson octets; the only combination possible is the symmetric product* $(M^i_j M^j_k M^k_\ell)$. Since $\mathcal{C} = +1$ for $M(\mathcal{C}(\pi^0) = +1$, since $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ occurs), the interaction thus formed necessarily has $\mathcal{C} = +1$. Since $\mathcal{C} = -1$ holds for $S^{(-)}$, it follows that,

---

* This statement assumes that the interaction involves only the field strengths, not their derivatives. For example, allowing first-order derivatives we could form the combination

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(M^i_j)\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(M^j_k)\, M^k_\ell - M^j_k \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(M^k_\ell)\right) \tag{i}$$

which has $\mathcal{C} = -1$. With exact unitary symmetry, these antisymmetric terms necessarily vanish since all the meson fields are then on the same footing (e.g. this interaction (i) may be re-written $(m_2^2 - m_3^2) \times M^i_j(1)M^j_k(2)M^k_\ell(3)$ which vanishes when $m_1 = m_2 = m_3$), and the interactions can all be reduced to the form given in the text. In the symmetry-broken situation, antisymmetric combinations can be formed, but their coefficients are necessarily proportional to the mass differences. However, for $K \rightarrow 2\pi$ decay, the simplest factor is $(m_K^2 - m_\pi^2)/M^2$, where M is some characteristic intermediate mass (of order 1 BeV), and this may not be such a small factor.

---

with octet dominance, the $K_1^0 \rightarrow 2\pi$ decay is forbidden in the limit of exact unitary symmetry.

This conclusion that octet dominance forbids $K_1^0 \rightarrow 2\pi$ decay appears rather distressing, since a strong motivation for the introduction of octet dominance was the $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule, which arose from the attempt to explain why $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$ decay appeared forbidden in comparison with $K_1^0 \rightarrow 2\pi$ decay. However, Gell-Mann[58] and Cabibbo[59] have emphasized that, with octet dominance, the $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$ decay is allowed only through electromagnetic deviations from the $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule. Such electromagnetic corrections would be expected to give rise to a ratio $\Gamma(K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0)/\Gamma(K_1^0 \rightarrow 2\pi) \approx (\alpha/\pi)^2 \approx 10^{-5}$, so that it has never been easy tc understand how the ratio could be as large as the observed value, of about 1/500, on this basis. With octet dominance, $K_1^0 \rightarrow 2\pi$ decay is also forbidden but can occur through the effect of the symmetry-breaking interactions, which are moderately strong, with a typical coupling parameter about 1/10. With these estimates, the branching ratio $\Gamma(K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0)/\Gamma(K_1^0 \rightarrow 2\pi)$ is expected to be of order (electro-magnetic interactions/symmetry-breaking interactions)$^2 \approx 10^{-3}$, as observed experimentally.

Next we discuss the implications of octet dominance for the non-leptonic decay interactions of the baryons, for which the observed transitions are of the form $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} + \pi$. Generally, these weak interaction processes may be written, with introduction of the octet spurion,

$$\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} + \mathcal{M} + \mathcal{S}. \tag{4.19}$$

In this form, the interactions (4.19) have an invariant form with respect to unitary symmetry. The most general form is obtained by contraction of the indices in the product $\bar{\mathcal{B}}^\alpha_\lambda \mathcal{B}^\beta_\mu M^\gamma_\nu \mathcal{S}^\delta_\sigma$ in all possible ways. Taking into account the tracelessness of the octets, this form consists of nine terms:

$$M_1 Tr(\bar{B} S m B) + M_2 Tr(\bar{B} m B S) + M_3 Tr(\bar{B} B S m) + M_4 Tr(\bar{B} S B m)$$
$$+ M_5 Tr(\bar{B} m S B) + M_6 Tr(\bar{B} B m S) + M_7 Tr(\bar{B} m) Tr(B S)$$
$$+ M_8 Tr(\bar{B} S) Tr(B m) + M_9 Tr(\bar{B} B) Tr(m S), \qquad (4.20)$$

with scalar coefficients M_i. Actually, there exists one linear relationship between these nine traces. This may be obtained by considering the identity

$$\sum_P (-1)^P \bar{B}^\alpha_\lambda B^\beta_\mu m^\gamma_\nu S^\delta_\sigma \equiv 0 \qquad (4.21)$$

where the sum is over all permutations P among the four suffices, and $(-1)^P$ has the value ± 1, according as the permutation P is even or odd. This identity holds since these suffices $(\lambda\mu\nu\sigma)$ are each limited to the values 1,2,3, so that some two of them are necessarily equal. If we now carry out the contractions $(\lambda\beta)$, $(\mu\gamma)$, $(\nu\delta)$ and $(\alpha\sigma)$, the identity (4.21) reduces to the following identity between the nine traces, as pointed out by Okubo[72],

$$Tr(\bar{B} S m B) + Tr(\bar{B} m B S) + Tr(\bar{B} B S m) + Tr(\bar{B} S B m)$$
$$+ Tr(\bar{B} m S B) + Tr(\bar{B} B m S) - Tr(\bar{B} m) Tr(B S)$$
$$- Tr(\bar{B} S) Tr(B m) - Tr(\bar{B} B) Tr(m S) \equiv 0 \qquad (4.22)$$

This means that all the matrix-elements for individual processes given by (4.19) remain unchanged if M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 and M_6 are increased by an arbitrary amount ϕ, while M_7, M_8, and M_9 are decreased by the same amount ϕ, i.e. one linear combination of these amplitudes is arbitrary. Hence, only eight linearly

independent amplitudes are necessary for the specification of the form (4.19).

The matrix-elements for the individual processes (4.18) of physical interest can be picked out from (4.19), leading to the following expressions, given by Sugawara[74]:

$$M(\Lambda \to p\pi^-) = -\sqrt{2}\, M(\Lambda \to n\pi^0) = -\sqrt{\tfrac{2}{3}}\, M_1 + \sqrt{\tfrac{1}{6}}\, M_2 + \sqrt{\tfrac{1}{6}}\, M_3, \qquad (4.23a)$$

$$M(\Sigma^+_+) = M_2 + M_7, \qquad (4.23b)$$

$$M(\Sigma^-_-) = M_3 + M_7, \qquad (4.23c)$$

$$M(\Sigma^+_0) = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, M_2 - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, M_3, \qquad (4.23d)$$

$$M(\Xi^- \to \Lambda\pi^-) = \sqrt{2}\, M(\Xi^0 \to \Lambda\pi^0) = -\sqrt{\tfrac{1}{6}}\, M_1 + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, M_3 - \sqrt{\tfrac{1}{6}}\, M_4. \qquad (4.23e)$$

The amplitudes M_5, M_6, M_8 and M_9 do not contribute to the observed processes (for example, the term M_9 clearly does not change Y for the baryons, and so describes only K^0 (or $\bar{K}^0$) emission processes).

We note that the amplitudes M_i can be eliminated from Eqns. (4.23b-d) to give the linear relation,

$$\sqrt{2}\, \Sigma^+_0 = -\Sigma^-_- + \Sigma^+_+ \qquad (4.24)$$

obtained previously (cf. Sec.4.1) from the $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule. Obviously, this relation must also be obtained in the present discussion, since the model of octet dominance was constructed in order to achieve the $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule within a framework of unitary symmetry.

Since the five amplitudes listed above are expressed in terms of four independent amplitudes (e.g. M_1-M_2, M_1-M_3, M_2+M_7 and M_3+M_7), this is the only relation between these amplitudes which can be obtained without further assumptions.

One further relation between these amplitudes can be obtained by appeal to CP invariance. However, this relation depends on the assumption that, when the decay interaction $\mathcal{B} \to \mathcal{B} + \mathcal{M}$ is written in the relativistic form

$$(\bar{\mathcal{B}}_\lambda^\alpha (A - B\gamma_5)\mathcal{B}_\mu^\beta)\mathcal{M}_\nu^\gamma \tag{4.25}$$

the coefficient A, B have the forms (4.23) appropriate to unitary symmetry. If unitary symmetry were exact, this assumption would not involve any limiation on the validity of the relation given below. In the physical symmetry-broken situation, the interactions can always be reduced to this form but, since the relation between different forms depends on the physical masses, there be appreciable deviations from unitary symmetry for (A,B) generated in the use of the form (4.25). For example, there could be a term $C\gamma_a(p_f - p_i)_a$ in the parity-reversing term of (4.25); this term contributes $C(m_f-m_i)$ to A, a contribution which would be zero in the limit of exact symmetry. Similarly, there could be a term $D\gamma_5\gamma_a(p_f+p_i)_a$ in the parity-conserving term of (4.25), which would contribute $D(m_f-m_i)$ to B. Essentially, the assumption here is that terms with these properties are not dominant in the $\mathcal{B} \to \mathcal{B} + \pi$ interaction, so that the deviations of (A,B) from the forms (4.23) may be neglected, in first approximation.

Under the operation of charge conjugation, the baryon and meson octets transform as follows:

$$\mathcal{B}_\lambda^a \xrightarrow{C} \bar{\mathcal{B}}_a^\lambda, \tag{4.26a}$$

$$\mathcal{M}_\nu^\gamma \xrightarrow{C} \mathcal{M}_\gamma^\nu. \tag{4.26b}$$

The corresponding transformations for the traces in expression (4.19) are then,

$$Tr(\bar{\mathcal{B}}S\mathcal{M}\mathcal{B}) \longleftrightarrow Tr(\bar{\mathcal{B}}\mathcal{M}S\mathcal{B}), \tag{4.27a}$$

$$Tr(\bar{\mathcal{B}}\mathcal{B}S\mathcal{M}) \longleftrightarrow Tr(\bar{\mathcal{B}}\mathcal{B}\mathcal{M}S), \tag{4.27b}$$

$$Tr(\bar{\mathcal{B}}\mathcal{M})Tr(\mathcal{B}S) \longleftrightarrow Tr(\mathcal{B}\mathcal{M})Tr(\bar{\mathcal{B}}S), \tag{4.27c}$$

with $Tr(\bar{\mathcal{B}}\mathcal{M}\mathcal{B}S)$, $Tr(\bar{\mathcal{B}}S\mathcal{B}\mathcal{M})$, and $Tr(\bar{\mathcal{B}}\mathcal{B})Tr(\mathcal{M}S)$ remaining invariant. For the A-term of (4.25), we have $P = -1$, and CP-invariance for the weak interaction $\mathcal{B} \to \mathcal{B} + M$ then requires that expression (4.19) for the A-interactions should reverse sign under the operation C . Thus CP invariance requires

$$A_2 = A_4 = A_9 = 0, \tag{4.28a}$$

$$A_3 = -A_6, \tag{4.28b}$$

$$A_7 = -A_8, \tag{4.28c}$$

$$A_1 = -A_5. \tag{4.28d}$$

Expressions (4.23) then become

$$A(\Lambda^0_-) = -\sqrt{\tfrac{2}{3}}A_1 + \sqrt{\tfrac{1}{6}}A_3, \tag{4.29a}$$

$$A(\Sigma^+_0) = -\sqrt{\tfrac{1}{2}}A_3, \tag{4.29b}$$

$$A(\Xi^-_-) = -\sqrt{\tfrac{1}{6}}A_1 + \sqrt{\tfrac{2}{3}}A_3, \tag{4.29c}$$

where $A(B^Q_q)$ refer to the decay mode of baryon B of charge Q, leading to a pion of charge q. These expressions (4.29) imply one additional relationship,

$$2A(\Xi^-_-) - A(\Lambda^0_-) = -\sqrt{3}A(\Sigma^+_0), \tag{4.30}$$

first pointed out as a consequence of CP invariance by Gell-Mann[58].

For the B-term of the interaction (4.25), we have P = +1, and CP invariance for this weak interaction therefore requires that the corresponding expression (4.19) should be invariant under the operation C. This requires

$$B_1 = B_5, \tag{4.31a}$$

$$B_3 = B_6, \tag{4.31b}$$

$$B_7 = B_8, \tag{4.31c}$$

with no new constraint on B_2, B_4 and B_9. These conditions do not impose any new relationship on the B amplitudes.

With the form (4.25), the amplitudes A and B are related to the decay rate as follows:

$$\Gamma(B_i \to B_f + \pi) = \frac{q}{8\pi M_i^2}\left\{|A|^2\left((M_i+M_f)^2 - m_\pi^2\right) + |B|^2\left((M_i-M_f)^2 - m_\pi^2\right)\right\}, \tag{4.32}$$

where q denotes the final c.m. momentum. The asymmetry parameter α for this decay mode is given by $\alpha = 2x/(1 + x^2)$, where

$$x = p/s = (B/A)\left\{\left[(M_i-M_f)^2 - m_\pi^2\right]\Big/\left[(M_i+M_f)^2 - m_\pi^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{4.33}$$

where we have assumed again that A and B are real, on the basis of time reversal invariance and the smallness of the π - B_f scattering phases. For Ξ^-_- and Λ^0_- decays, the amplitudes A and B are well known from rather detailed polarization studies; for the $\Sigma^\pm$ decays, the amplitudes given are obtained from the partial lifetimes and asymmetry coefficients given in Eqns. (4.5) and (4.6). The amplitudes (A,B) for each of these decay processes are collected together in Table III. For a given decay process, only the sign of B/A is determined by the experimental data. The absolute signs are not known for the individual sets (A,B). As a convention, we take $A(\Lambda^0_-)$ to be positive; then, the question is whether agreement with the predictions following from the Cabibbo current-current form and octet dominance can be obtained for some assignment of the signs for the A amplitudes for the $\Sigma^\pm$ and Ξ^-_- decay modes. With the sign choices shown in Table IV, we have $2A(\Xi^-_-) - A(\Lambda^0_-) = +0.51 \pm 0.04$, to be compared with the two possible values (i) $+0.29 \pm 0.04$, and (ii) $+0.62 \pm 0.06$. The agreement with possibility (ii) appears reasonably satisfactory; the agreement would be improved* for both of these possibilities if the value $\alpha(\Sigma^+_0)$ were close to -1.

Further relationships, especially for the B-amplitudes, have been obtained by Sugawara[74] and by Lee[76]. Sugawara assumed

---

* A better fit is obtained in the discussion of the empirical status of the relation (4.30) by Stevenson et al.[75], who have used the value $\alpha(\Sigma^+_0) = -0.90 \pm 0.25$ obtained by Tripp et al.[68]

that R invariance should hold for the weak non-leptonic interaction, where R denotes the operation of hypercharge conjugation. For an octet X^i_j, the operation R is given by

$$R\, X^i_j\, R^{-1} = \epsilon_X\, X^j_i, \tag{4.34}$$

where the choice $\epsilon_X = \pm 1$ is characteristic of the octet X^i_j. For the baryon and antibaryon octets, we have+

$$\bar{\mathcal{B}}^\alpha_\lambda \xrightarrow{R} \bar{\mathcal{B}}^\lambda_\alpha, \qquad \mathcal{B}^\beta_\mu \xrightarrow{R} \mathcal{B}^\mu_\beta. \tag{4.35}$$

+ It is unimportant which choice is made for ϵ here, since all the expressions of interest involve both $\mathcal{B}$ and $\bar{\mathcal{B}}$, so we choose $\epsilon_B = +1$.

Then, for the pseudoscalar meson octet, it is necessary to choose

$$\mathcal{M}^\gamma_\nu \xrightarrow{R} +\mathcal{M}^\nu_\gamma, \tag{4.36}$$

since the $\bar{\mathcal{B}}\mathcal{B}\mathcal{M}$ strong interaction is dominantly a D-type coupling (and so the product $\bar{\mathcal{B}}\mathcal{B}$ is even under R). The effect of R on expression (4.19) is then simply to reverse the order of the matrices in the traces. R-invariance for (4.19) then requires

$$A_1 = A_6, \quad A_2 = A_4, \quad A_3 = A_5, \tag{4.37}$$

with no conditions on A_7, A_8 and A_9, and

$$B_1 = B_6, \quad B_2 = B_4, \quad B_3 = B_5, \tag{4.38}$$

with no conditions on B_7, B_8 and B_9. It has been emphasized by Hara[77] that the conditions obtained above from CP invariance must still be taken into account. With (4.37) and (4.38), these lead to the following equalities for the amplitudes,

$$A(\Lambda^0_-) = A(\Xi^-_-) = -\sqrt{3}\, A(\Sigma^+_0) = -\sqrt{\tfrac{3}{2}}\, A_1, \tag{4.39}$$

$$B(\Lambda^0_-) = -B(\Xi^-_-) = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\, B(\Sigma^+_0) = -\sqrt{\tfrac{1}{6}}\,(B_1 - B_2). \tag{4.40}$$

These expressions are necessarily consistent with the Gell-Mann relation (4.30) for the A-amplitudes; however, they are also consistent with the same relationship for the B-amplitudes,

$$2\,B(\Xi^-_-) - B(\Lambda^0_-) = -\sqrt{3}\, B(\Sigma^+_0), \tag{4.41}$$

given first by Sugawara[74] and by B.W.Lee[76]. The expressions (4.39) and (4.40) are roughly in accord with the data shown on Table III. Exact agreement would not be expected, in any case, for it is known that R-invariance does not hold exactly for the strong interactions. The outstanding requirements of R-invariance for the strong interactions, which disagree with the experimental data, are as follows:

(i) R invariance requires the meson-baryon Yukawa coupling to be entirely D-type or F-type, and does not allow a mixed coupling. As discussed earlier, this coupling is dominantly D-type, the f/(f+d) ratio probably being in the lower half of the range 0.1 - 0.5. Pure D-type coupling would require the existence of a $(\overline{10})$ decuplet ($(\bar{K}N)_0$, $N^*_{\frac{1}{2}}$, Y^*_1, $\Xi^*_{\frac{3}{2}}$) of $p_{3/2}$ resonances, degenerate with the known (10) decuplet in the limit of zero mass splittings. These $(\overline{10})$ decuplet resonances certainly do not exist. However, the work of Martin and Wali[16] has shown that the forces effective in these two representations do rapidly become different as f moves away from the R-symmetry value, f = 0; in fact, no $(\overline{10})$ resonance would be expected to survive, for f as large as 0.1.

(ii) With R-invariance, the branching ratio $\Gamma(\bar{p}p\to\pi^+\pi^-)/\Gamma(\bar{p}p\to K^0\bar{K}^0)$ is predicted[78], to have the value 1, apart from the phase-space ratio, whereas the experimental ratio[79] for stopping antiprotons is 7.0 ± 1.0.

(iii) As pointed out by Coleman and Glashow[10], R-invariance predicts zero magnetic moment μ_n for the neutron. Since $\mu_n \approx -\mu_p$, and R-invariance places no such restriction on μ_p, it would appear rather unreasonable to attempt to attribute μ_n to small deviations from R-symmetry.

On the other hand, for the weak interactions themselves, the main motivation for considering the hypothesis of R-invariance is the possibility that the currents $(J^i_j)_\alpha$ may transform simply with respect to R. For the leptonic transitions of the baryons, the vector currents $(J^i_j)^V_\alpha$ do transform with $\epsilon = -1$,

$$\mathcal{R}\left((J^i_j)^V_\alpha\right)\mathcal{R}^{-1} = -(J^i_j)^V_\alpha, \tag{4.42}$$

since the relationship of these currents with the isospin current requires F-type coupling. R-invariance for the weak current $\mathcal{J}_\alpha$ would then require the same ϵ for $(J^i_j)^A_\alpha$, whereas we know that the axial-vector currents are dominantly D-type; the ratio $F_A/(D_A+F_A) \approx 1/3$ was obtained from our discussion of the Cabibbo currents in Sec. 3.6. Hence, despite the agreement between the data and the relations (4.39) and (4.40), the hypothesis of R-invariance for the weak currents appears to be directly contradicted by our knowledge of the baryon leptonic decay processes.

However, B. W. Lee[76] has considered the hypothesis of combined

RP-invariance for the weak currents. For the vector currents, the parity P is -1, so that RP-invariance requires

$$\mathcal{R}\left\{(J^i_j)^V_\alpha\right\}\mathcal{R}^{-1} = -(J^i_j)^V_\alpha, \tag{4.43}$$

corresponding to F-type coupling. However, for the axial-vector currents, the parity P is +, which means that RP-invariance requires

$$\mathcal{R}\left\{(J^i_j)^A_\alpha\right\}\mathcal{R}^{-1} = +(J^i_j)^A_\alpha, \tag{4.44}$$

so that D-type coupling is required. The observed axial-vector coupling does contain more D-type than F-type coupling (although the ratio is only 2:1), so there is less objection to the RP-invariance hypothesis on this ground than there was to the R-invariance hypothesis.

For the B-amplitudes, RP-invariance has the same consequences as R-invariance, since P = +1. Hence the relation

$$2\Xi^-_- - \Lambda^0_- = -\sqrt{3}\,\Sigma^+_0 \tag{4.45}$$

again holds for both parity-conserving and parity-reversing parts of these decay amplitudes. For the A-amplitudes, there are now some additional constraints. Here P = -1, and so RP invariance requires expression (4.19) to reverse sign under R. Taking into account the relationships (4.28) following from CP-invariance, we obtain the equalities

$$A_1 = A_3 = -A_5 = -A_6, \tag{4.45a}$$

$$A_2 = A_4 = A_7 = A_8 = A_9 = 0, \tag{4.45b}$$

leading to the following relations for the physical amplitudes,

$$A(\Lambda^o_-) = -A(\Xi^-_-) = -\sqrt{\tfrac{1}{6}}A(\Sigma^-_-) = -\sqrt{\tfrac{1}{6}}A_1, \qquad (4.46)$$

$$A(\Sigma^+_+) = 0. \qquad (4.47)$$

The relation (4.47) may be in accord with the experimental data; at present, we know only that either $A(\Sigma^+_+) \approx 0$, or $B(\Sigma^+_+) \approx 0$. However the relations (4.46) are in strong disagreement with the data, as displayed in Table III. This is most striking in the comparison between Λ^o_- and Ξ^-_- decay. The relations $A(\Lambda^o_-) = -A(\Xi^-_-)$ and $B(\Lambda^o_-) = -B(\Xi^-_-)$ require the equality $\alpha(\Lambda^o_-) = \alpha(\Xi^-_-)$, whereas the experimental situation is that $\alpha(\Lambda^o_-)$ and $\alpha(\Xi^-_-)$ are both large and well determined, but have opposite sign.

We conclude that there are strong disagreements with the experimental data for either of these hypotheses concerning R-symmetry, whether for R-invariance or for RP-invariance of the weak interactions, and that these hypotheses must be rejected.

However, it is of interest to look again at the experimental data concerning the relation (4.45), presented on an (s,p), or (A,B) plot in Fig. 7. The vector $\sqrt{3}\ \Sigma^+_o$ does not close the triangle formed by $-\Lambda^o_-$ and $2\Xi^-_-$, for either of the amplitudes given in Table III. Nevertheless it is quite remarkable that if $\sqrt{3}\ \Sigma^+_o$ were equal to the vector which closes this triangle, which would require $\alpha(\Sigma^+_o) \approx -1.0$, this value for Σ^+_o would also satisfy the triangle relation (4.24) required by the $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule. Clearly, a remeasurement of the asymmetry parameter $\alpha(\Sigma^+_o)$ would be of the greatest interest at this point.

References.

1. R. P. Feynman and M. Gell-Mann, Phys. Rev. 109, 193 (1958).
2. S. S. Gerstein and Ya B. Zeldovitch, Soviet Physics (J.E.T.P.) 2, 576(1957).
3. M. Gell-Mann, Phys. Rev. 111, 362 (1958).
4. C. S. Wu, Classical Beta-decay Experiments, Lectures at the International School of Physics "Enrico Fermi" on Weak Interactions and High-Energy Neutrino Physics (Italian Physical Society, Bologna, 1964), to be published.
5. E. Feenberg and H. Primakoff, Phil. Mag. 3, 328 (1958)
6. A. F. Dunaitsev, V. I. Petrukhin, Y. D. Prokoshkin, and V. I. Rykalin, Proc. Intl. Conf. on Fundamental Aspects of Weak Interactions (Brookhaven National Laboratory, New York, September, 1963) p.344; P. Depommier, J. Heintze, A. Mukhin, C. Rubbia, V. Soergel, and K. Winter, Phys. Letters 2, 23 (1962); R. Bacastov, T. Elioff, R. Larsen, C. Wiegand, and T. Ypsilantis, Phys. Rev. Letters 9, 400 (1962); A. Strelzoff, Electron Decay Branching Ratio of the Pion, Nevis Laboratory Rept.121 (Columbia University, New York, March, 1964).
7. M. L. Goldberger and S. B. Treiman, Phys. Rev. 111, 358 (1958).
8. N. Cabibbo and R. Gatto, Nuovo Cimento 15, 159(1960).
9. N. Cabibbo and P. Franzini, Phys. Letters 3, 217 (1963).
10. S. Coleman and S. L. Glashow, Phys. Rev. Letters 6, 423 (1961).
11. S. Drell and F. Zachariasen, Electromagnetic Structure of Nucleons (Oxford University Press, 1961).

12. R. H. Dalitz, Phys. Letters 5, 53 (1963).

13. R. H. Dalitz and G. Rajasekaran, Nucl. Phys. 50, 450 (1964).

14. J. de Swart, Phys. Letters 5, 58 (1963).

15. J. de Swart and C. K. Iddings, Phys. Rev. 128, 2810 (1962).

16. A. W. Martin and K. C. Wali, Phys. Rev. 130, 2455 (1963).

17. P. Bastien, M. Ferro-Luzzi and A. H. Rosenfeld, Phys. Rev. Letters 6, 702 (1961).

18. R. A. Burnstein, T. B. Day, A. J. Herz, B. Kehoe, B. Sechi-Zorn, N. Seeman, G. A. Snow, H. Courant, H. Filthuth, P. Franzini, R. G. Glasser, A. Minguzzi-Ranzi, A. Segar, and W. Willis, Proc. Intl. Conf. on Fundamental Aspects of Weak Interactions (Brookhaven National Laboratory, Upton, New York, September, 1963) p.427. The branching ratios quoted here are the final estimates, obtained from Dr. G. Snow (private communication, 1964).

19. U. Nauenberg, P. Schmidt, J. Steinberger, S. Maratek, R. J. Plano, H. Blumenfeld, and L. Seidlitz, Phys. Rev. Letters 12, 679 (1964).

20. W. H. Barkas, Phys. Rev. Letters 9, 26 (1962).

21. R. W. Birge, R. P. Ely, G. Gidal, G. E. Kalmus, A. Kerman, W. M. Powell, U. Camerini, W. F. Fry, J. Gaidos, D. Murphree, and C. T. Murphy, An Analysis of K_{e4}^{+} Decays, Lawrence Radiation Laboratory Rept. UCRL - 11549 (June, 1964).

22. B. Aubert, A. Behr, M. Bloch, J. P. Lowys, P. Mittner and A. Ortin-Lecourtois, Proc. Sienna Intl. Conf. on Elementary Particles (Italian Physical Society, Bologna, 1963) p.39.

23. L. Kirsch, R. J. Plano, J. Steinberger and P. Franzini, Phys. Rev. Letters 13, 35 (1964).

24. N. Cabibbo, Phys. Rev. Letters 10, 531 (1963).

25. D. Luers, I. S. Mittra, W. J. Willis, and S. S. Yamamoto, Phys. Rev. 133, B1276 (1964).

26. J. L. Brown, J. A. Kadyk, G. H. Trilling, R. T. Van der Walle, B. P. Roe, and D. Sinclair, Phys. Rev. Letters 8, 450 (1962).

27. B. P. Roe, D. Sinclair, J. L. Brown, D. A. Glaser, J. A. Kadyk, and G. H. Trilling, Phys. Rev. Letters 1, 346 (1961); the branching ratios given here are those reported by these authors at the Washington APS Meeting of this year from a re-analysis of this data.

28. S. Taylor, G. Harris, J. Orear, J. Lee, and P. Baumel, Phys. Rev. 114, 359 (1959).

29. R. N. Birge, D. H. Perkins, J. E. Peterson, D. H. Stork, and M. W. Whitehead, Nuovo Cimento 4, 834 (1959).

30. G. Alexander, R. H. W. Johnston, and C. O. O'Ceallaigh, Nuovo Cimento 6, 478 (1957).

31. J. V. Jovanovic, J. Fisher, T. Fujii, F. Turkot, R. W. Burris, D. S. Loebbaka, and G. T. Zorn, Proc. Intl. Conf. on Fundamental Aspects of Weak Interactions (Brookhaven National Laboratory, Upton, September, 1963) p.42.

32. M. Anikina, M. Zhuravleva, D. Kotlyarevsky, Z. Mandzhavidze, A. Mestvirishvili, D. Neagu, E. Okonov, N. Petrov, V. Ruskov, G. Takhtamyshev, L. Chkhaidze, and U-tren-fang, An Estimation of the Relative Probability of the

$K_2^0 \rightarrow 3\pi^0$ Decay, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, 1963.

33. A. Astier, L. Blaskovic, M. de Courreges, B. Equer, A. Lloret, P. Rivet, and J. Siaud, Proc. Aix-en-Provence Intl. Conf. on Weak Interactions (C.E.N., Saclay, 1961) p.227.

34. G. Alexander, S. P. Almeida, and F. S. Crawford, Phys. Rev. Letters 9, 69 (1962).

35. M. Gell-Mann, Phys. Letters 8, 214 (1964).

36. N. Brene, B. Hellesen, and M. Roos, Comparison of Cabibbo Weak Currents with Experiment, Phys. Letters, to be published (1964).

37. J. Sakurai, Phys. Rev. Letters 12, 79 (1964).

38. B. P. Roe, D. Sinclair, J. L. Brown, D. A. Glaser, J. A. Kadyk, and G. H. Trilling, Phys. Rev. Letters 7, 346 (1961).

39. V. Bisi, G. Borreani, R. Cester, A. Debenedetti, M. I. Ferrero, C. M. Garelli, A. Marzari-Chiesa, B. Quassiati, G. Rinando, M. Vigone, and A. E. Werbrouck, Phys. Rev. Letters 12, 490 and 656 (1964).

40. N. Cabibbo and A. Maksymowicz, Phys. Letters 9, 352 (1964).

41. V. A. Smirnitski and A. O. Weissenberg, Phys. Rev. Letters 12, 233 (1964).

42. G. Gidal, W. M. Powell, R. March and S. Natali, Phys. Rev. Letters 13, (1964).

43. S. MacDowell, Phys. Rev. 116, 1047 (1959).

44. V. Mathur, Nuovo Cimento 14, 1322 (1959).

45. E. P. Shabalin, Soviet Physics J.E.T.P. 12, 245 (1961).

46. G. Takeda, Phys. Rev. 101, 1547 (1956).

47. N. Cabibbo and A. Maksymowicz, K_{e4} Decays and the Determination of Low-energy Pion-pion phase shifts, Lawrence Radiation Laboratory Rept. UCRL-11437 (June, 1964).

48. K. M. Watson, Phys. Rev. 88, 1163 (1952).

49. G. F. Chew and S. Mandelstam, Phys. Rev. 119, 467 (1960).

50. A. Abashian, N. Booth, and K. M. Crowe, Phys. Rev. Letters 5, 258 (1960); ibid. 7, 35 (1961).

51. J. Hamilton and W. S. Woolcock, Rev. Modern Phys. 35, 737 (1963).

52. V. Anisovitch and L. Dahnko, Phys. Letters 10, 221 (1964).

53. J. J. de Swart, Revs. Modern Phys. 35, 916 (1963).

54. H. H. Bingham, Leptonic Decays of Strange Particles, Proc. Roy. Soc. A, to be published (1964).

55. C. Rubbia, report at the Varenna School on Weak Interactions, June, 1964.

56. A. W. Martin and K. C. Wali, Nuovo Cimento 31, 1324 (1964).

57. R. E. Cutkosky, Ann. Phys. 23, 415 (1963).

58. M. Gell-Mann, Phys. Rev. Letters 12, 155 (1964).

59. N. Cabibbo, Phys. Rev. Letters 12, 62 (1964).

60. S. Coleman and S. L. Glashow, Phys. Rev. 134, B671 (1964).

61. A. Salam and J. C. Ward, Phys. Rev. Letters 5, 390 (1960).

63. M. Gell-Mann and A. Pais, Proc. Intl. Conf. on High Energy Physics at Glasgow (Pergamon Press, London, 1955) p.324. See also Proc. Fifth Annual Rochester Conference on High Energy Physics, Interscience, New York, 1955) p.136.

62. A recent detailed review of the data and their interpretation has been given by R. H. Dalitz, Proc. Intl. Conf. on Fundamental Aspects

of Weak Interactions (Brookhaven National Laboratory, New York, September, 1963) p.378.

64. M. Chretien, V. Fischer, H. Crouch, R. Lanou, J. Massimo, A. Shapiro, J. Averall, A. Brenner, D. Firth, L. Hyman, M. Law, R. Milburn, E. Ronat, K. Strauch, J. Street, J. Szymanski, L. Guerriero, I. Pless, L. Rosenson, and G. Salandin, Phys. Rev. 131, 2208 (1963).

65. A review of Ξ particle properties has recently been given by H. Ticho, Proc. Intl. Conf. on Fundamental Aspects of Weak Interactions (Brookhaven National Laboratory, New York, September, 1963).

66. M. Gell-Mann and A. H. Rosenfeld, Ann. Revs. Nuclear Sci. I, 407 (1959).

67. E. F. Beall, B. Cork, D. Keefe, P. Murphy, and W. A. Wenzel, Phys. Rev. Letters 8, 75 (1962).

68. R. D. Tripp, M. B. Watson, and M. Ferro-Luzzi, Phys. Rev. Letters 9, 66 (1962).

69. M. M. Nussbaum, R. W. Kraemer, A. Prosner, M. M. Block, and / A. Kovacs, to be published (1963).

70. See, for example, R.H. Dalitz, Strong Interactions and Strange Particles (Oxford University Press, Bombay, 1962) p.13.

71. T. D. Lee and C. N. Yang, Phys. Rev. 119, 1410 (1960).

72. S. Okubo, Phys. Letters 8, 362 (1964).

73. M. Gell-Mann, Phys. Rev. 125, 1067 (1962).

75. M. L. Stevenson, J. P. Birge, J. R. Hubbard, G. R. Kalbfleisch, J. B. Shafer, F. T. Solmitz, S. G. Wojcicki and P. G. Wholmut, Phys. Letters 9, 349 (1964).

74. H. Sugawara, Progr. Theor. Phys. 31, 213 (1964).

76. B. W. Lee, Phys. Rev. Letters 12, 83 (1964).

77. Y. Hara, Discussion of the Suggested RP Invariance of the Nonleptonic Weak Interactions (California Institute of Technology, April, 1964), to be published.

78. C. A. Levinson, H. J. Lipkin, and S. Meshkov, Phys. Letters 1, 307 (1962).

79. See G. A. Snow, Proc. 1962 Intl Conf. on High-Energy Physics at CERN (CERN, Geneva, 1962) p.795.

80. B. Aubert, L. Behr, J. P. Lowys, P. Mittner, and C. Pascaud, Phys. Letters 11, 267 (1964).

Table I. The Matrix-elements for Leptonic Decay Modes of Hyperons, according to the Octet Hypothesis of Cabibbo.

Transition	Vector	Axial Vector	Branching Ratios (i) U.F.I.*	(ii) Experimental[54]
$n \to p$	$\cos\theta$	$(D_A+F_A)\cos\theta$	-	-
$\Sigma^- \to \Lambda$	0	$-\sqrt{\frac{2}{3}}\,D_A\cos\theta$	2.4×10^{-4}	$(0.75 \pm 0.28) \times 10^{-4}$
$\Lambda \to p$	$\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta$	$\sqrt{\frac{1}{6}}(D_A + 3F_A)\sin\theta$	1.5%	$(8.1 \pm 1.0) \times 10^{-4}$
$\Sigma^- \to n$	$\sin\theta$	$(-D_A + F_A)\sin\theta$	5.8%	$(13 \pm 2) \times 10^{-4}$
$\Xi^- \to \Lambda$	$\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta$	$\sqrt{\frac{1}{6}}(D_A - 3F_A)\sin\theta$	2.0%	$(24 \pm 14) \times 10^{-4}$

* The branching ratios listed in this column correspond to the hypothesis (U.F.I. = Universal Fermi Interaction) that these decay interactions all have the (V–A) form with the same vector coupling strength as the nucleon beta-decay interaction.

	$\Lambda \to p$	$\Sigma^- \to n$	$\Xi^- \to \Lambda$
Section I	$V - (0.64 \pm 0.05)A$	$V + (0.37 \pm 0.10)A$	$V - (0.14 \pm 0.07)A$
Section II	$V - (1.0 \pm 0.05)A$	$V - (0.23 \pm 0.10)A$	$V - (0.84 \pm 0.05)A$

Table II. The (V,A) forms predicted for the strangeness-changing beta-decay interactions using the Cabbibbo currents and the two solutions for (D_A, F_A, θ) given in the text. The only form known empirically is that determined by Rubbia et al.[55] for the $\Lambda \to p$ transition, $V-(0.8 \pm 0.3)A$.

Decay Mode	Λ^o_-	Ξ^-_-	Σ^+_o	Σ^+_+	Σ^-_-
$A(\times 10^{-5})\,sec.^{-1}\,m_\pi^{-1}$	$+0.31 \pm 0.01$	$+0.41 \pm 0.02$	(i) -0.17 ± 0.02	(a) -0.012 ± 0.03	(a) $+0.39 \pm 0.015$
			(ii) -0.36 ± 0.035	(b) -0.40 ± 0.013	(b) 0.04 ± 0.06
$B(\times 10^{5})\,sec.^{-1}\,m_\pi^{-1}$	$+2.0 \pm 0.25$	-1.4 ± 0.12	(i) $+3.6 \pm 0.35$	(a) $+4.09 \pm 0.14$	(a) -0.39 ± 0.60
			(ii) $+1.7 \pm 0.2$	(b) $+0.12 \pm 0.32$	(b) -3.89 ± 0.15

Table III. The amplitudes A and B corresponding to the matrix-element form (4.25) are given for the non-leptonic decay modes of the hyperons. The magnitudes of A and B and the relative signs B/A are obtained from the partial lifetimes and asymmetry parameters known for each of these decay processes. The absolute signs (taking $A(\Lambda^o_-)$ to be positive, as a convention) are determined to give an approximate fit to the triangle relation $2A(\Xi^-_-) - A(\Lambda^o_-) = -\sqrt{3}A(\Sigma^+_o)$. Since only the α asymmetry parameters are known for the Σ-decays, there are multiple solutions. For either solution (i) or (ii) for the Σ^+_o amplitude, there are two solutions (a) and (b) possible for the Σ^+_+ and Σ^-_- amplitudes which give a rough fit to the $\Delta I = 1/2$ triangle relation $\sqrt{2}\Sigma^+_o = \Sigma^+_+ - \Sigma^-_-$.

Figure Captions

Fig. 1. The axial-vector vertex (a) for the leptonic transition $C \to B$ is expressed in terms of the one-pion exchange graph (b) and multi-pion exchange graphs (c) involving 3π, 5π, etc. exchange between CB and the lepton vertex (a,g).

Fig. 2. The p_Λ^2 distribution observed by Burnstein et al.[18] in $\Sigma^- \to \Lambda + e^- + \bar{\nu}_e$ decay is compared with the distributions expected for a pure axial-vector (A) interaction and for a pure allowed vector (V) interaction.

Fig. 3. The muon kinetic energy spectrum in $K^+_{\mu 3}$ decay, obtained by Bisi et al.[39] from their study of K^+ decay events in a hydrogen chamber (based on 670 events in the range 5 - 35 Mev) and a propane-freon chamber (based on 550 events in the ranges 5 - 95 MeV and 105 - 135 MeV; the range 95 - 105 MeV is omitted because of confusion with the pions from $K^+_{\pi 2}$ decay). Theoretical curves are given for the values $f_-/f_+ = -2$ and -9.

Fig. 4. Graph illustrating the contribution of K^* exchange to the $K \to \pi$ weak vertex.

Fig. 5. The $m_{\pi\pi}$ spectrum observed by Birge et al.[21] in K^+_{e4} decay, $K^+ \to \pi^+ + \pi^- + e^+ + \nu_e$. The theoretical curves are:

(a) the $m_{\pi\pi}$ spectrum obtained with the matrix-element (3.47) with A = constant, and B = C = D = 0,

(b) the $m_{\pi\pi}$ spectrum obtained with matrix-element (3.47) with $A = H(\sin\delta_{\pi\pi}/k_{\pi\pi})$, H being constant and $B = C = D = 0$. The $I = 0$, s-wave π-π scattering phase $\delta_{\pi\pi}$ used corresponds to the Chew-Mandelstam expression (3.60) with zero-energy scattering length $a_0 = 1.3/m_\pi$.

(c) the $M_{\pi\pi}$ spectrum obtained for the B term of 3.47) alone, with B taken to have the same contant value as taken for A in spectrum (a). This spectrum corresponds to 2π-emission with $I = 1$, p-wave relative motion.

Fig. 6. The amplitudes $(\Sigma^-_- + \sqrt{2}\Sigma^+_0)$ and Σ^+_+ are compared on an (A,B) plot, in order to test the triangle relation $\Sigma^-_- + \sqrt{2}\Sigma^+_0 = \Sigma^+_+$ predicted by the $\Delta I = 1/2$ selection rule. The comparison is made for the two configurations (i) and (ii) for the Σ^+_0 amplitude, for each of the possibilities (a) and (b) for the Σ^+_+ and Σ^-_- amplitudes, which come closest to satisfying this triangle relation. The amplitudes used are those given in Table III.

Fig. 7. The amplitudes $(2\Xi^-_- - \Lambda^0_-)$ and $(-\sqrt{3}\Sigma^+_0)$ are compared on an (A,B) plot, in order to test the SU_3 relationship, $2\Xi^-_- - \Lambda^0_- = -\sqrt{3}\Sigma^+_0$ predicted on the basis of octet dominance and other assumptions. This comparison is made for the two possibilities (i) and (ii) for the Σ^+_0 amplitude, as given in Table III. The relation is satisfied by the A-components for the case (i). We note that the partial decay rate $\Gamma(\Sigma^+_0)$ constrains $(-\sqrt{3}\Sigma^+_0)$ to lie on an ellipse with axes along the A and B axes; with $\alpha(\Sigma^+_0) \approx -1$, the vector $(-\sqrt{3}\,\Sigma^+_0)$ would lie

roughly midway between the two positions shown and would then agree well with the vector equality.

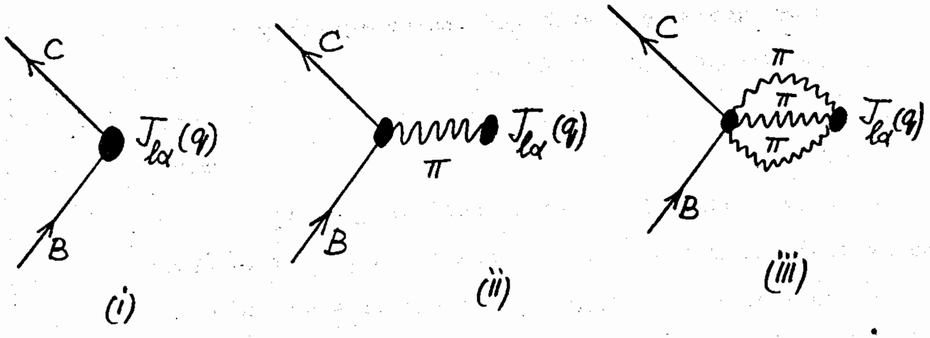


Fig. 1 The Axial-vector Vertex $B \to C$.

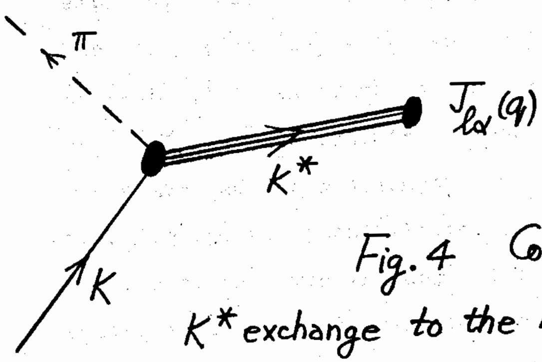
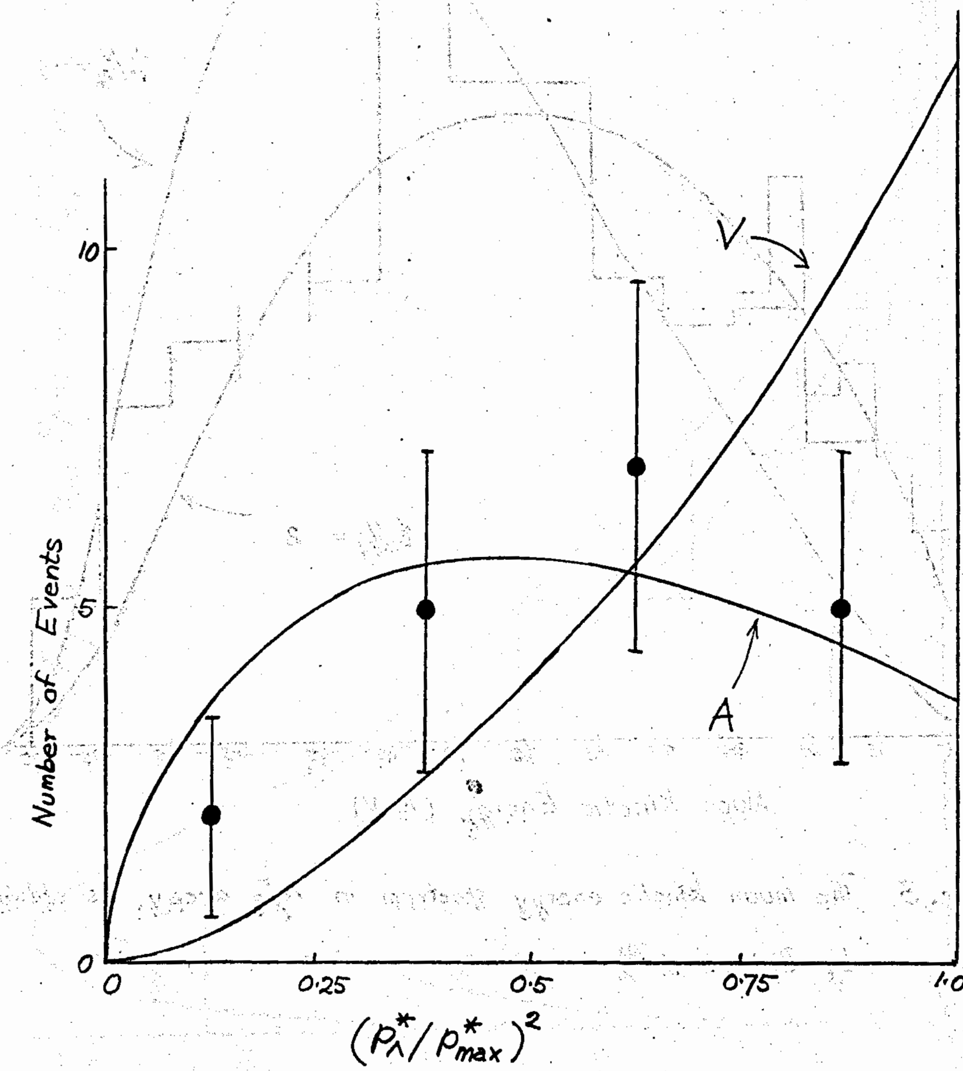


Fig. 4 Contribution of K^* exchange to the $K \to \pi$ weak vertex.

Fig. 2 Recoil Spectrum in $\Sigma^+ \to \Lambda + e^+ + \nu_e$ Decay



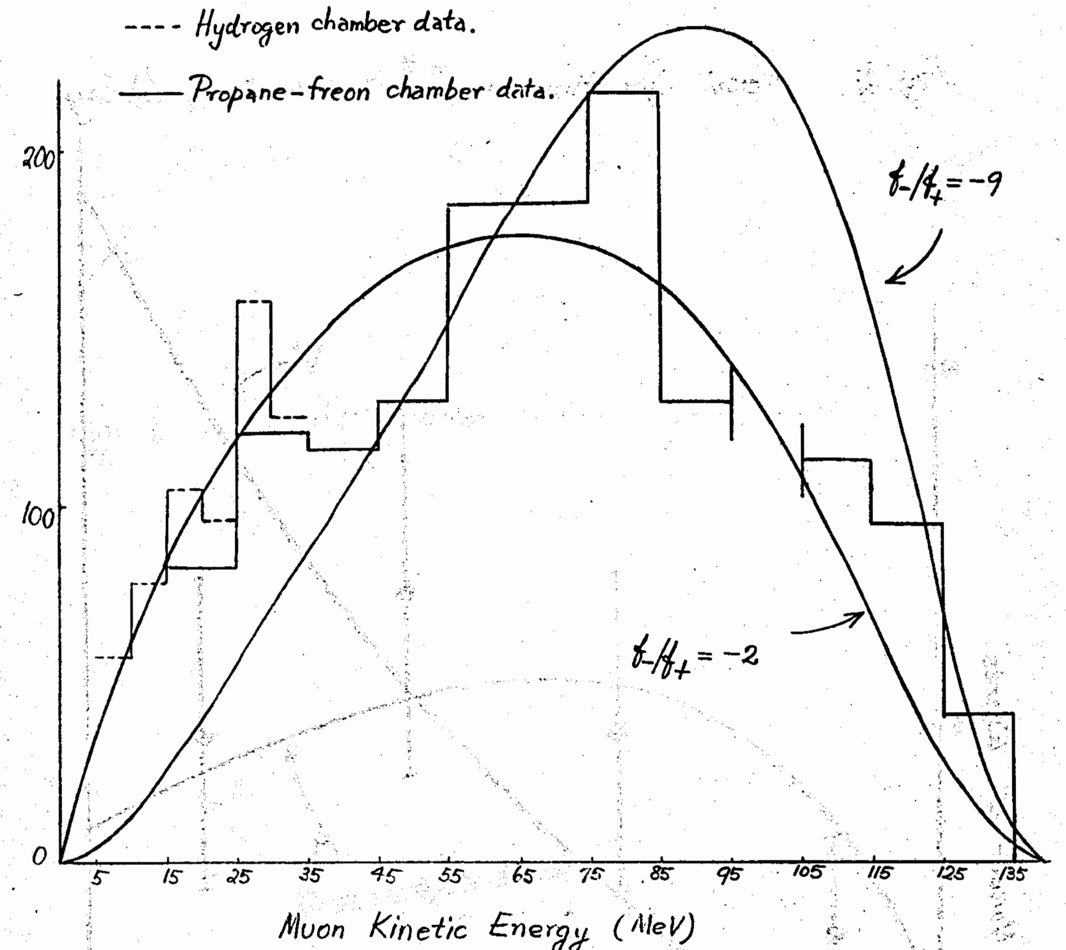


Fig. 3 The muon kinetic energy spectrum in $K^+_{\mu 3}$ decay, as obtained by Bisi et al.[39]

Fig. 5 $m_{\pi\pi}$ Spectrum in K^+_{e4} Decay.

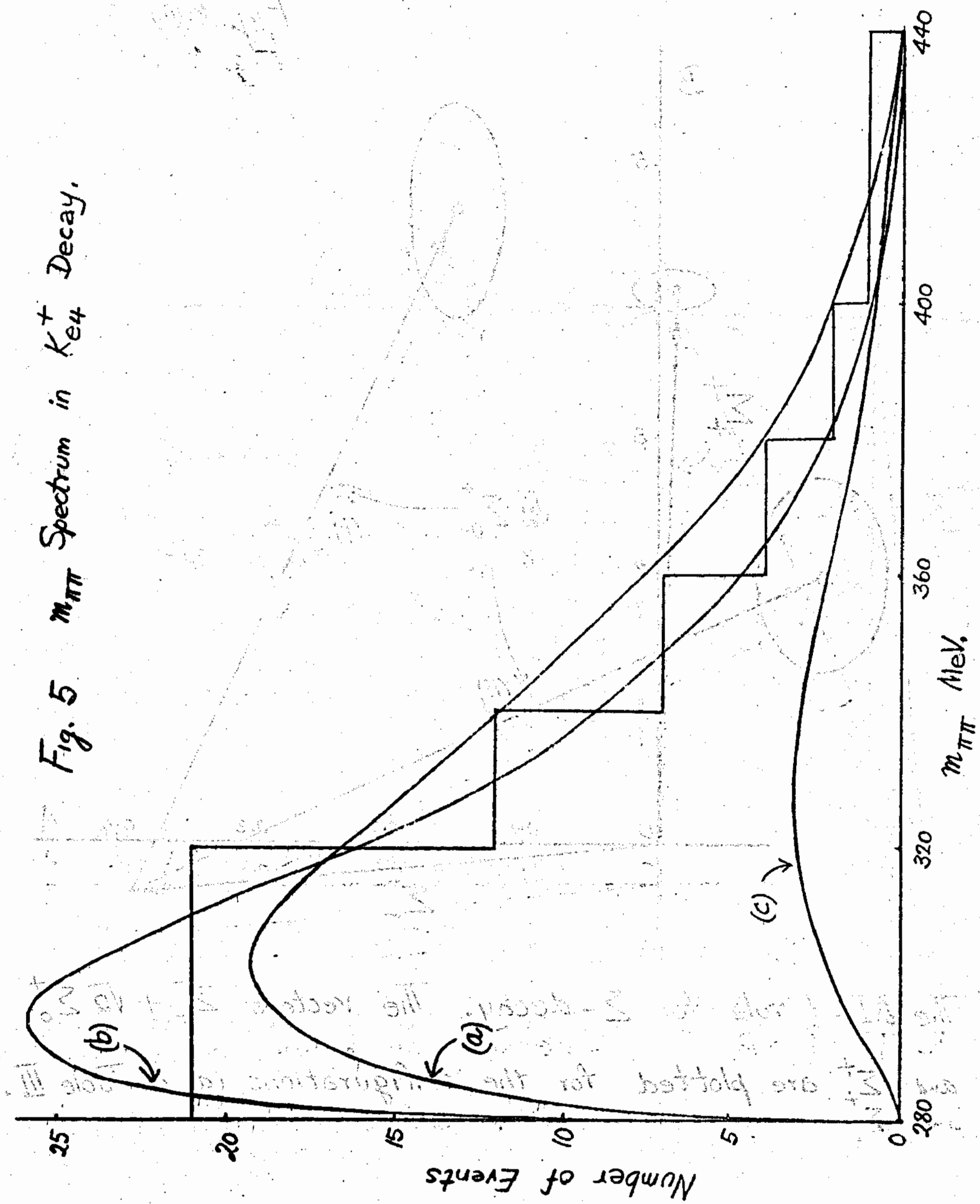
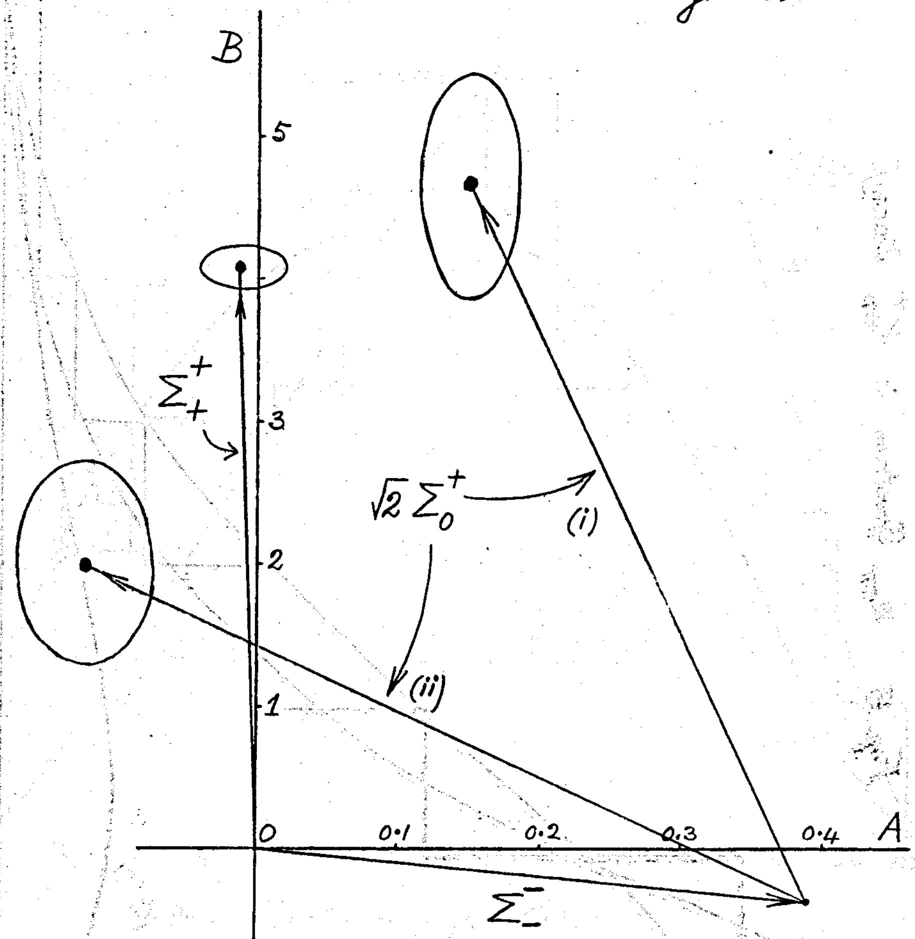
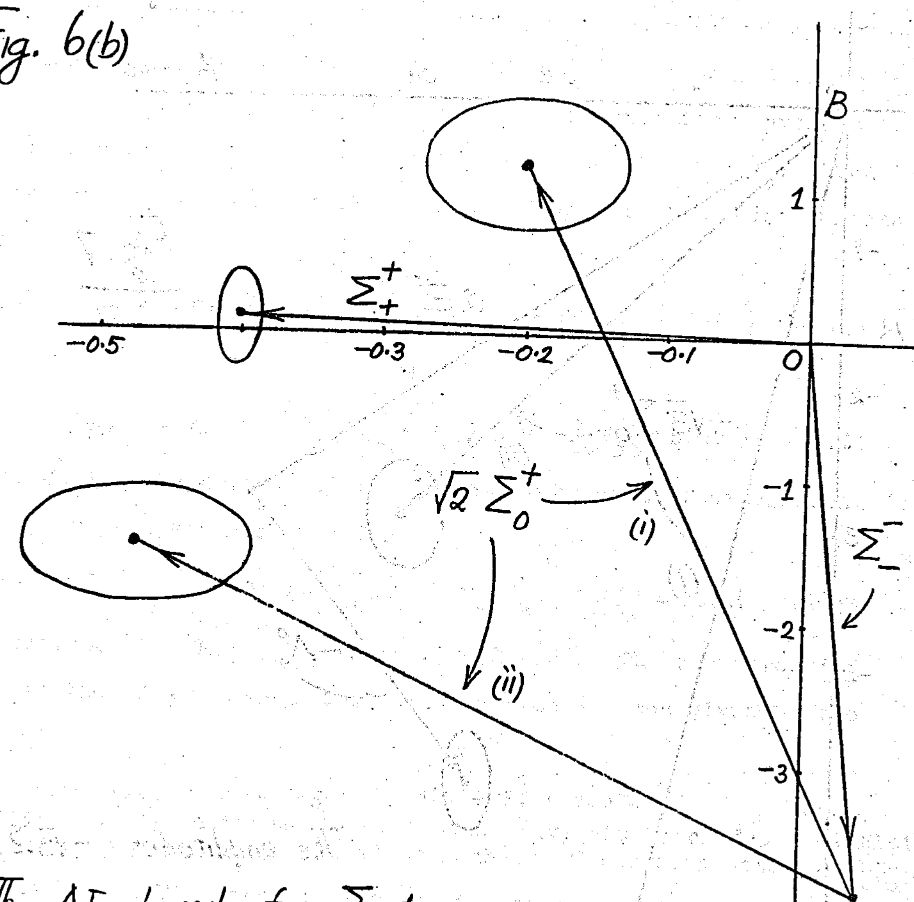


Fig. 6(a)



The $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule for Σ-decay. The vectors $\Sigma_-^- + \sqrt{2}\,\Sigma_0^+$ and Σ_+^+ are plotted for the configurations (a) of Table III.

Fig. 6(b)



The $\Delta I = \frac{1}{2}$ rule for Σ-decay.

The vectors $\Sigma_-^- + \sqrt{2}\,\Sigma_0^+$ and Σ_+^+ are plotted for the configurations (b) of Table III.

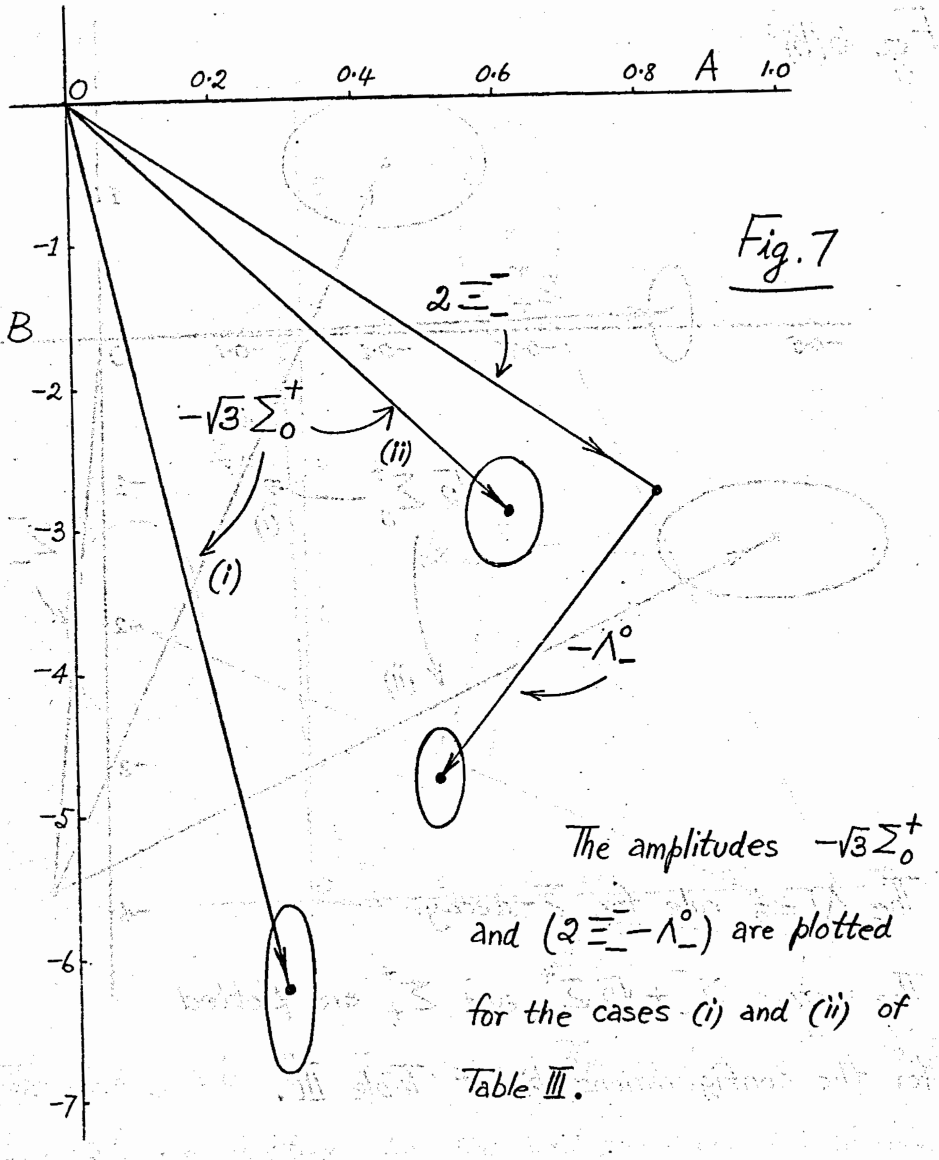


Fig. 7

The amplitudes $-\sqrt{3}\,\Sigma^+_0$ and $(2\Xi^-_- - \Lambda^0_-)$ are plotted for the cases (i) and (ii) of Table III.

---

*Note added September, 1964. The simplest W-meson scheme which leads to non-leptonic decay interactions of octet form involves the introduction of three vector meson fields (W_1, W_2, W_3) which transform as a unitary triplet. The appropriate interaction forms are then

$$L_{WS} = f \sin\theta \left\{ J^1_{3\alpha} W_{1\alpha} + J^2_{3\alpha} W_{2\alpha} + J^3_{3\alpha} W_{3\alpha} + \text{h.c.} \right\}, \qquad \text{(i)}$$

and

$$L_{WJ} = f \cos\theta \left\{ J^1_{2\alpha} W_{1\alpha} + J^2_{2\alpha} W_{2\alpha} + J^3_{2\alpha} W_{3\alpha} + \text{h.c.} \right\} \qquad \text{(ii)}$$

where J^i_j is a traceless octet. The curly bracket of expression (4.11) is then given by the form

$$\langle L_{WS} L_{WJ} \rangle \sim \sin\theta\cos\theta \left\{ J^2_{1\alpha} J^1_{3\alpha} + J^2_{2\alpha} J^2_{3\alpha} + J^2_{3\alpha} J^3_{3\alpha} + \text{h.c.} \right\} \qquad \text{(iii)}$$

proportional to $(T^2_3 + J^3_2)$, where $T^i_j = \Sigma_k J^i_k J^k_j$. The corresponding term in the $\Delta Y = 0$ non-leptonic interaction is then given by the form

$$\langle L_{WJ} L_{WJ} \rangle + \langle L_{WS} L_{WS} \rangle \sim \sin^2\theta\, T^3_3 + \cos^2\theta\, T^2_2 \qquad \text{(iv)}$$

(Note that T^i_j is not traceless, so that (iv) also includes a singlet whose elements are proportional to members of the same octet./contribution d'Espagnat and Villachon (Intermediate Bosons and Unitary Symmetry, to be published (1964)) have pointed out that the couplings (i) and (ii) actually involve interactions for only five independent vector particles. If the following transformation is made from (W_1, W_2, W_3) to the fields (w_1, w_2, w_3):

$$w_1 = W_1 \qquad \text{(v)}$$

$$w_2 = -W_2 \sin\theta + W_3 \cos\theta, \qquad \text{(vi)}$$

$$w_3 = W_2 \cos\theta + W_3 \sin\theta, \qquad \text{(vii)}$$

the W-interaction takes the form

$$L_{WS} + L_{WJ} = f\Big\{(J^1_{2\alpha}\cos\theta + J^1_{3\alpha}\sin\theta)w_{1\alpha} + (J^3_{2\alpha}\cos^2\theta + (J^3_{3\alpha} - J^2_{2\alpha})\sin\theta\cos\theta + J^2_{3\alpha}\sin^2\theta)w_{2\alpha} + (J^2_{2\alpha}\cos^2\theta + (J^3_{3\alpha} + J^2_{3\alpha})\sin\theta\cos\theta + J^3_{3\alpha}\sin^2\theta)w_{3\alpha} + h.c.\Big\} \quad \text{(viii)}$$

We note that the coefficient of w_3 is hermitian, so that only the field $Re(w_3) = (w_3 + w_3^+)$ is coupled. In this scheme, the field $Im(w_{2\alpha})$ has no couplings, and therefore no physical consequences, so that there are effectively only five vector mesons required. If J^i_j is not assumed traceless, then additional interaction terms $\sigma f \sin\theta W_{3\alpha} Tr(J)_\alpha$ and $\sigma f \cos\theta W_{2\alpha} Tr(J)_\alpha$ may be added to (i) and (ii) respectively: these terms also lead to coupling with Rew_3, but not with Imw_3.

1964 г. Сентябрь *Т. LXXXIV, вып. 1*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.12

УНИТАРНАЯ СИММЕТРИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Я. А. Смородинский

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Современный физик, исследуя явления в мире элементарных частиц, считает свою работу завершенной, если он может сформулировать закономерности экспериментального материала в краткой форме законов сохранения. Доквантовая физика знала лишь несколько фундаментальных законов сохранения классической механики; в физике квантовой, и особенно в физике элементарных частиц, накопилась уже большая серия таких законов.

Может быть, обилие законов сохранения связано с тем, что мы еще не знаем более глубокого механизма, который регулирует многообразие процессов, происходящих с частицами. В будущем, вероятно, окажется, что многие законы сохранения связаны общей причиной и являются следствием некоторой общей симметрии пространства и времени. Однако сейчас они выступают как независимые и их изучение является основным направлением современных исследований.

Законы сохранения в физике элементарных частиц и связанная с ней симметрия характерны тем, что они во многих случаях оказываются не точными, а лишь приближенными. В связи с этим в физике появилась новая возможность изучения явлений, обусловленная тем, что нарушение симметрии оказывается во многих случаях относительно малым по своей величине и достаточно простым по своим свойствам.

Примером такой симметрии является изотопическая симметрия; нарушающие ее электромагнитные и слабые взаимодействия хорошо изучены. Не будет большим преувеличением сказать, что наиболее интересные результаты достигались в физике именно тогда, когда выяснялись законы нарушения симметрии. Эту линию можно проследить даже в астрономических наблюдениях. Галилей считал, что планеты совершают свой путь по естественным круговым орбитам. Нарушение аксиальной симметрии путей планет, открытое Кеплером, привело к созданию классической механики. Триумфом общей теории относительности было открытие движения перигелия Меркурия, знаменующее собой еще одно нарушение симметрии — замкнутости орбит классической механики.

В квантовой физике вопрос о новых законах сохранения возникает тогда, когда пытаются понять строение связанных состояний системы. Открытие уровней атома водорода привело к модели Бора. Систематика уровней оказалась связанной с новыми свойствами симметрии, которые

1*

только много лет спустя были сформулированы Фоком в форме симметрии вращения в четырехмерном мире *). Возможность чисто группового описания атома водорода представляет собой очень важное явление в атомной физике, которое незаслуженно обходят в большинстве курсов квантовой механики.

Симметрия относительно перестановок и связанный с ними принцип Паули дают возможность понять структуру уровней атомов с многими электронами.

В ядерной физике изучение уровней атомных ядер привело к открытию зарядовой инвариантности и связанного с ней изотопического пространства. Изотопический спин частиц и ядер является сейчас не менее привычной характеристикой, чем обычный спин или заряд ядра. Открытый Вигнером в 1937 г. закон сохранения изотопического спина обнаружил свою полную силу в физике элементарных частиц.

До тех пор пока были известны только две тяжелые частицы, протон и нейтрон, вопрос о новых квантовых числах не возникал; когда же были открыты гипероны, возник вопрос о том, в чем состоит причина их большой стабильности, так как время жизни 10^{-10} *сек* по ядерным масштабам — очень большое время. Первым шагом построения теории, как и в истории теории атома, было введение «главного квантового числа» для системы уровней барионов (так можно назвать семейство нуклонов и гиперонов). Таким главным квантовым числом оказалась открытая Гелл-Манном и Нишиджимой «странность» S (или гиперзаряд Y, равный сумме S и барионного числа B).

Сейчас мы не имеем ни малейшего представления о том, с какими свойствами сильно взаимодействующих частиц связано это квантовое число. Мы не знаем, является ли оно независимым от обычных свойств, которые описываются квантовой механикой и теорией относительности, и его происхождение может быть выявлено более глубокой теорией; но, может быть, и это кажется более естественным, странность есть просто компактное описание взаимодействия частиц и того не очень понятого фона, который принято называть «физическим вакуумом». Но, как бы то ни было, открытие странности, несомненно, является одним из самых существенных этапов развития физики элементарных частиц.

Для того чтобы включить «странность» в аппарат теории, необходимо было расширить схему изотопического спина. Первая попытка такого рода была сделана Сакатой [A1, A2], рассмотревшим схему U (3) унитарного вектора (протон — нейтрон — Λ-гиперон), а также Марковым [A4] и Окунем [A3]. Однако выделение из всех гиперонов в основной вектор только трех оказалось недостаточно радикальным, и реальный успех теории принесла схема SU (3), предложенная Гелл-Манном и Нейманом. Эта схема, которая была принята сначала очень сдержанно, оказалась сейчас наиболее эффективной. Триумфом ее было открытие предсказанного ею Ω-мезона [G1].

Схема Гелл-Манна [C2, 3] и Неймана [C1] была названа первым автором «восьмеричным путем» — «eightfold way» **). Интересно отметить, что группа SU (3) определяет симметрию уровней трехмерного гармонического осциллятора.

*) Тот факт, что уровни атома водорода отражают симметрию не в физическом трехмерном пространстве, очень поучителен, так как он делает менее неожиданным появление в свое время изотопического и унитарного пространств.

**) Название группы связано с легендой о Будде и о восьми путях к уничтожению страдания: правильные взгляды, правильные намерения, правильные слова, правильные действия, правильная жизнь, правильные усилия, правильное мышление и правильная концентрация.

Несмотря на то, что разности масс гиперонов, равные нулю в $SU(3)$, велики, выяснилось, что весьма простые предположения о симметрии взаимодействия, нарушающего симметрию $SU(3)$, позволяют описать фактическое расщепление масс. Более того, расщепление изотопических мультиплетов также уложилось в простую схему. Успех теории все время нарастает. Полученные данные позволяют ожидать значительного продвижения в теории слабых взаимодействий и в изучении реакций между элементарными частицами.

Уже сейчас большое количество частиц и резонансов, два года назад казавшихся бессистемными, уложились в стройную схему трех октетов и одного декаплета (не считая антибарионов, образующих еще один октет и один декаплет), так что «пасьянс» из элементарных частиц имеет сейчас все основания «выйти».

Успех сравнительно простого описания порождает надежду, что описание взаимодействия частицы с вакуумом не является безнадежной задачей, а может быть реализовано в сравнительно простой форме; начало такого описания дает описание расщепления масс в терминах мультипольного взаимодействия с эффективным полем.

Как бы то ни было, теория унитарной симметрии становится сейчас необходимым аппаратом, который должен быть широко известен. С точки зрения унитарной модели, однако, остается непонятным, почему в природе нет частиц, отвечающих представлению минимальной размерности — трехкомпонентному спинору, который в теории Сакаты был фундаментальным. Положение здесь такое же, какое было бы в квантовой механике, если бы не существовало частиц со спином $^1/_2$. Попытка введения таких частиц была сделана Гелл-Манном (кварки — quarks [E1]), однако такие частицы не были обнаружены на опыте [E2].

Теория, включающая ненаблюдаемые «прачастицы», развивалась Швингером [F2]. Пока, однако, еще рано говорить о каком-либо удовлетворительном решении этого фундаментального для теории вопроса.

Настоящая статья должна представлять собой элементарное введение в теорию унитарной симметрии. В ней изложена тензорная алгебра, связанная с группой SU (3).

Изложение ведется так, чтобы подчеркнуть аналогию с обычной тензорной алгеброй, связанной с группой вращения или, что то же, с унитарной группой на плоскости — группой $SU(2)$. Поэтому изложение начинается кратким обзором свойств $SU(2)$. В следующих, § 3 и 4 рассказывается о тензорах SU (3).

Теория унитарной симметрии элементарных частиц начинается с § 5, где описаны свойства мультиплетов. В этом параграфе описаны два класса мультиплетов: 1) фермионные мультиплеты, описываемые комплексными матрицами — их известно четыре: октет, декаплет и их антимультиплеты, 2) бозонные мультиплеты, описываемые эрмитовскими матрицами — их известно 2; к ним надо добавить еще и унитарный скаляр ω-мезон.

Формулы для расщепления масс выведены в § 6 и 7. Правила интервалов удивительно напоминают формулы элементарного эффекта Зеемана. Аналогия с атомной спектроскопией настолько очевидна, что возникает желание описать расщепление с помощью введения некоторого квазимагнитного поля, которое эффективно описывает взаимодействие мультиплета с вакуумом. Такое поле может быть трактовано как поле мезонов [F3, F4].

Фактически все сказанное о формулах расщепления масс можно ограничить выводом формул (7,16), которые и содержат в себе практически все результаты.

Эти результаты сводятся к трем формулам интервалов для октета барионов (6,7), (7,7), (7,8), по одной для мезонов (6,19), (6,28) и одной для декаплета (7,14).

Кроме правил интервалов, существует еще большое количество других результатов, связанных с магнитными моментами, форм-факторами, реакциями.

Особенно интересна развивающаяся теория слабых взаимодействий. Эти темы требуют отдельной статьи.

Последнее замечание относится к литературе. Так как количество статей, опубликованных по унитарной симметрии, очень велико, была сделана попытка отобрать сравнительно немного статей, в которых содержится бо́льшая часть идей и результатов, опубликованных к 1 июня 1964 г. В этих статьях читатель найдет и дальнейшие литературные указания.

§ 2. ИЗОТОПИЧЕСКИЙ СПИН

Зарядовая инвариантность ядерных сил приводит к тому, что состояние систем нуклонов и других фундаментальных частиц удобно классифицировать с помощью изотопического спина. Если пренебречь электромагнитным полем и слабым взаимодействием, то свойства системы определяются только величиной изотопического спина T и не зависят от его проекции T_3.

Электромагнитное поле и слабое взаимодействие приводят к «расщеплению» уровней, так что свойства системы зависят и от проекции изотопического спина T_3.

Волновая функция протона и нейтрона описывается двухкомпонентной функцией-спинором *)

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \Psi_{-1/2} \\ \Psi_{1/2} \end{pmatrix}. \tag{2,1}$$

Проекции изотопического спина $T_3 = +\frac{1}{2}$ соответствует заряженное состояние p (протон), проекции $T_3 = -\frac{1}{2}$ — нейтральное состояние n (нейтрон):

$$\Psi = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}. \tag{2,2}$$

Сопряженную функцию мы будем обозначать строкой

$$\overline{\Psi} \equiv (\overline{\Psi}_{-1/2}, \overline{\Psi}_{+1/2}) \tag{2,3}$$

или

$$\overline{\Psi} = (\bar{n}, \bar{p}). \tag{2,4}$$

Функцию (2,1) можно подвергнуть линейному преобразованию с помощью матрицы U:

$$\Psi' = U\Psi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{-1/2} \\ \Psi_{+1/2} \end{pmatrix}. \tag{2,5}$$

Если существует изотопическая инвариантность, то компоненты новой

*) Каждая из компонент в свою очередь зависит еще и от координат и спинов, которые мы здесь не будем вводить явно.

функции Ψ' можно с таким же успехом считать за функции, описывающие два зарядовых состояния, как и компоненты исходной функции Ψ. Однако для этого новые функции должны быть ортогональны и нормированы. Это требование будет выполнено, если матрица U унитарна, т. е. если обратная матрица равна эрмитовски сопряженной:

$$U^{-1} = U^{+}, \quad UU^{+} = 1. \tag{2,6}$$

Эти соотношения будут выполнены, если матрица U имеет вид

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}, \tag{2,7}$$

причем

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \tag{2,8}$$

Условие (2,8) одновременно означает, что детерминант матрицы равен 1.

Матрица остается унитарной, если ее умножить на $\exp(i\varphi)$; детерминат останется равным единице, если $\varphi = 0$ или η.

Если Ψ преобразуется матрицей U, то $\overline{\Psi}$ преобразуется матрицей U^+, причем умножение на матрицу происходит слева:

$$\Psi' = U\Psi, \tag{2,9}$$

$$\overline{\Psi}' = \overline{\Psi}U^{+}. \tag{2,10}$$

Если выписывать индексы явно, то для спиноров, преобразующихся по закону (2,9), индекс ставят вверху и спиноры называют **контравариантными**:

$$\Psi'^{\alpha} = U^{\alpha}_{\beta}\Psi^{\beta} \tag{2,11}$$

(по одинаковым значкам суммировать!).

Спиноры, преобразующиеся по закону (2,10), отмечают индексами снизу и называют **ковариантными**:

$$\overline{\Psi}'_{\beta} = (U^{+})^{\alpha}_{\beta}\,\overline{\Psi}_{\alpha}. \tag{2,12}$$

Поскольку индексы выписаны явно, порядок множителей в правой части формулы несуществен.

Из написанных формул следует, что преобразование (2,9) и (2,10) не изменяет скалярного произведения:

$$(\overline{\Psi}', \Psi') = (\overline{\Psi}U^{+}, U\Psi) = \overline{\Psi}\Psi. \tag{2,13}$$

Формула (2,13) служит определением унитарного преобразования.

Введем антисимметричную матрицу

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2,14}$$

и ей обратную

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2,15}$$

Тогда каждому контравариантному спинору можно сопоставить ковариантный, опустив индекс:

$$\Psi_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta}\Psi^{\beta}. \tag{2,16}$$

Наоборот, можно, подняв индекс, превратить ковариантный спинор в контравариантный:

$$\Psi^{\alpha}=\varepsilon^{\alpha\beta}\Psi_{\beta}. \tag{2,17}$$

Отсюда следует, что различие между контравариантными и ковариантными компонентами чисто формальное и

$$\Psi_1=-\Psi^2, \tag{2,18}$$

$$\Psi_2=\Psi^1. \tag{2,19}$$

Матрица $\varepsilon^{\alpha\beta}$ не меняется при унитарных преобразованиях:

$$\varepsilon=U\varepsilon U^{\mathrm{T}}. \tag{2,20}$$

Это равенство легко проверить; оно есть просто следствие равенства единице определителя U.

Таким образом, если

$$\Psi^{\alpha}=\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}, \tag{2,21}$$

то

$$\Psi_{\alpha}=\begin{pmatrix} -p \\ n \end{pmatrix}. \tag{2,22}$$

Заметим, кроме того, что

$$\Psi^{\alpha}\Psi_{\alpha}=0 \tag{2,23}$$

и что матрица $\varepsilon^{\alpha\beta}$ играет роль метрического тензора.

Так же, как и в обычной тензорной алгебре, вводятся тензоры, зависящие от нескольких индексов. Смешанный тензор второго ранга

$$A_b^a=\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix} \tag{2,24}$$

преобразуется как произведение двух спиноров, одного контравариантного и одного ковариантного. След этого тензора

$$\mathrm{Sp}\,A=A_1^1+A_2^2, \tag{2,25}$$

очевидно, не меняется при преобразованиях и является скаляром.

Тензор

$$A_b^a=\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & -A_1^1 \end{pmatrix} \tag{2,26}$$

уже неприводим. Этот тензор эквивалентен вектору в трехмерном пространстве. Связь между компонентами 3-вектора и тензора (2,26) реализуется с помощью матриц Паули. Умножая скалярно 3-вектор **A** на вектор Паули $\boldsymbol{\sigma}$ (σ_1, σ_2, σ_3), получим

$$A_b^a=\begin{pmatrix} A_3 & A_1-iA_2 \\ A_1+iA_2 & -A_3 \end{pmatrix}. \tag{2,27}$$

Мы не будем доказывать, что унитарные преобразования тензора A_b^a эквивалентны вращению вектора **A** в трехмерном пространстве.

Дальнейшие сведения о тензорах более высокого ранга нам здесь не нужны.

Учтем теперь электромагнитное поле. В этом случае в изотопическом пространстве ось 3 оказывается выделенной, так как проекция

на эту ось определяет заряд состояния. В этом случае взаимодействие уже не будет изотопически инвариантным. Матрицы преобразования становятся диагональными и могут быть записаны в виде

$$U=\begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{i\varphi}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\frac{i\varphi}{2} \end{pmatrix}.$$

Они описывают вращение в плоскости вокруг оси z. Мы получаем однопараметрическую подгруппу двухмерных вращений R (2). В соответствующей этой группе тензорной алгебре исчезает разница между верхним и нижним индексами и единственным преобразованием остается умножение на фазовый множитель. Может быть, имеет смысл напомнить, что все сказанное о свойствах матриц можно проиллюстрировать на модели частиц со спином, когда сферическая симметрия нарушается магнитным полем, направленным по оси z.

Важным случаем спин-тензора является оператор (вектор) изотопического спина T. В согласии с (2,27) напишем

$$T=\begin{pmatrix} T_3 & T_- \\ T_+ & -T_3 \end{pmatrix}. \tag{2,28}$$

Элементами этой матрицы являются компоненты изотопического спина, которые сами по себе тоже являются матрицами. Вид этих матриц (число строк и столбцов) зависит от представления группы, т. е. от величины спина частицы, на волновую функцию которой действуют эти матрицы.

Для нуклона $T=\frac{1}{2}$ компоненты T суть матрицы

$$T_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad T_+=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad T_-=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

С помощью этих матриц можно, например, записать ток, входящий в слабое взаимодействие (векторный и псевдовекторный). Так, векторный ток, отвечающий β-распаду нейтрона, представляет собой J_+-компоненту изотопического тока

$$J_{\alpha+}=\langle p\,|\,\gamma_\alpha(1+\lambda\gamma_5)\,T_+\,|\,n\rangle.$$

Здесь записано, что матричный элемент берется между начальным состоянием n и конечным p от оператора слабого взаимодействия $\gamma_\alpha(1+\lambda\gamma_5)$ ($\lambda\approx1{,}25$, γ_α и γ_5 — матрицы Дирака), действующего на обычные спиновые индексы, и от изотопического оператора T_+, превращающего нейтрон в протон.

Компонента тока J_-, связанная с оператором T_-, описывает позитронный распад, а нейтральная компонента J_3 входит, согласно теории универсального взаимодействия, в электродинамический ток. Таким образом, например, векторный ток можно записать в матричной форме

$$V=\begin{pmatrix} V_3 & V_- \\ V_+ & -V_3 \end{pmatrix}.$$

При этом у всех элементов подразумевается невыписанный индекс компоненты в обычном 4-пространстве Минковского. Возвращаясь к формуле (2,28), заметим, что $\mathrm{Sp}\,T=0$, а определитель этой матрицы

$$\mathrm{Det}\,D=\frac{1}{2}(T_+T_-+T_-T_+)+T_z=T^2$$

(при вычислении определителя он был симметризован по элементам T_- и T_+, так как эти матрицы не коммутируют). Последняя формула показывает, что определитель дает матрицу инварианта преобразования — квадрата изотопического спина. Ясно, что эта формула не зависит от представления, т. е. верна для любой величины спина.

Для полноты опишем кратко еще и расширение группы. Если отказаться от условия унитарности, сохранив только условие унимодулярности $\operatorname{Det} U = 1$, то матрицы описывают преобразование Лоренца $L_6(4)$ *). Так как в этом случае $U^+ \neq U^{-1}$, то вместо двух типов спиноров в тензорной алгебре группы Лоренца существуют четыре типа спиноров, преобразуемых матрицами U, U^{-1}, U^+ и U^{+-1}. Для описания этих типов вводится еще значок с точкой, так что преобразования записываются так:

$$\left.\begin{aligned} \Psi'^{\alpha} &= U^{\alpha}_{\beta}\Psi^{\beta}, \\ \Psi'_{\alpha} &= (U^{-1})^{\beta}_{\alpha}\Psi_{\beta}, \\ \Psi^{\dot\alpha\prime} &= (U^{+})^{\dot\alpha}_{\dot\beta}\Psi^{\dot\beta}, \\ \Psi'_{\dot\alpha} &= (U^{+-1})^{\dot\beta}_{\dot\alpha}\Psi_{\dot\beta}. \end{aligned}\right\} \qquad (2,29)$$

Однако в тензорной алгебре L (4) существует операция поднимания и опускания значков, так же как и в алгебре SU (2). Поэтому в лоренцевой группе представление характеризуется двумя числами — числом пунктирных и числом непунктирных значков. Тензор в этой алгебре записывается с помощью четырех матриц Паули σ_0, σ_1, σ_2, σ_3, где σ_0 — единичная матрица. Тензор

$$A^{\dot\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} t-z, & x-iy \\ x+iy & t+z \end{pmatrix}$$

отвечает 4-вектору; его преобразования эквивалентны преобразованиям Лоренца. Так как суммировать по пунктирному и непунктирному значкам нельзя (т. е. при таком суммировании не возникает инварианта), след тензора (2,30) нельзя сделать равным нулю во всех системах координат.

Для перехода от группы Лоренца L_6 (4) к группе трехмерных вращений R (3) достаточно не различать значки с точкой и без точки. Тогда из тензора выделяется скаляр — его след. Оставляя в матрицах представлений только диагональные компоненты, мы переходим к группе R (2). Таким образом, редукция группы

$$L\,(4) \supset R\,(3) \supset R\,(2)$$

сопровождается соответственным упрощением тензорной алгебры.

В заключение покажем, как сопоставляются компоненты тензора значениям проекции изотопического спина.

Тензор с p верхними значками отвечает изотопическому спину $\frac{p}{2} = T$, так как тензор имеет $p+1$ компоненту. Если все индексы равны 1, то условимся приписывать такой компоненте тензора значение $T_3 = -T = -\frac{p}{2}$. Тогда, если у компоненты тензора p (1) индексов равны 1, а $p\,(2) = p - p\,(1)$ индексов равны 2, то для такой компоненты

$$T_3 = -T + p\,(2) = -\frac{p\,(1)+p\,(2)}{2} + p\,(2) = \frac{p\,(2)-p\,(1)}{2}. \qquad (2,30)$$

*) Преобразование 4-мерного пространства, зависящее от шести параметров.

Аналогично получаем для тензора с q(1) нижними значками, равными 1, и q(2) нижними значками, равными 2,

$$T_3 = -\frac{q\,(2)-q\,(1)}{2}. \qquad (2,31)$$

Для смешанного тензора с p верхними и q нижними индексами и со следом, равным нулю, получаем (ср. с (4,14))

$$T_3 = \frac{1}{2}(m_2 - m_1) \equiv m_1 - \frac{m}{2}, \qquad (2,32)$$

где

$$\left.\begin{aligned} m_2 &= p\,(2) - q\,(2), \\ m_1 &= p\,(1) - q\,(1), \\ m &= m_1 + m_2. \end{aligned}\right\} \qquad (2,33)$$

Можно сказать, что число $\frac{1}{2}(p+q) = T$ характеризует представление, а число $m_2 - m_1$ характеризует подгруппу вращений вокруг оси 3, т. е. значение проекции T на эту ось.

§ 3. УНИТАРНАЯ ГРУППА

Алгебра унитарной группы комплексных матриц третьего порядка строится тем же путем, что и SU (2). Будем обозначать матрицы третьего порядка также через U или U^a_b (a, $b = 1, 2, 3$), если надо указать явно компоненты. Матрицы U выбираются так, чтобы

$$UU^+ = 1, \qquad (3,1)$$

$$\operatorname{Det} U = 1. \qquad (3,2)$$

Спинор в этом пространстве имеет три комплексные компоненты:

$$\Psi^{\alpha} = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \end{pmatrix}. \qquad (3,3)$$

Этот контравариантный спинор, спинор с верхним индексом, преобразуется с помощью матрицы U. Существует еще и ковариантный спинор, спинор с нижними индексами

$$\Phi = (\Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3). \qquad (3,4)$$

Спинор Φ преобразуется с помощью матрицы U^+. Очевидно, что спинор, сопряженный с (3,3), преобразуется как Φ.

Скалярное произведение, которое сохраняется при унитарных преобразованиях, определяется так:

$$(\Phi,\ \Psi) = \Phi_{\alpha}\Psi^{\alpha}. \qquad (3,5)$$

В SU (3) операция опускания индекса выглядит иначе, чем в SU (2). Введем два антисимметричных тензора, которые имеют в трехмерном пространстве три индекса:

$$\varepsilon^{abc} = \varepsilon_{abc} = \begin{cases} 1 & \text{(четные перестановки } a,\ b,\ c), \\ -1 & \text{(нечетные } \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \ ), \\ 0 & \text{(два индекса равны).} \end{cases} \qquad (3,6)$$

Так как Det $U=1$, величина компонент этого тензора остается неизменной при преобразованиях группы.

Действие тензора ε_{abc} можно продемонстрировать на примере тензора второго ранга в $SU(3)$.

Тензоры второго ранга могут быть разных типов.

1) Ψ^a_b — тензор с одним верхним и с одним нижним значком. След такого тензора является скаляром группы, а потому неприводимый тензор (аналогичный тензору квадрупольного момента в электростатике) должен иметь след, равный нулю:

$$\mathrm{Sp}\,\Psi=\Psi^\alpha_\alpha=0. \tag{3,7}$$

2) Ψ^{ab} — тензор с двумя верхними значками. Разобьем этот тензор на два тензора: симметричный (по a и b) и антисимметричный:

$$\Psi^{ab}=\Psi^{[ab]}+\Psi^{\{ab\}}, \tag{3,8}$$

$$\Psi^{[ab]}=\frac{1}{2}(\Psi^{ab}-\Psi^{ba}), \tag{3,9}$$

$$\Psi^{\{a,\,b\}}=\frac{1}{2}(\Psi^{ab}+\Psi^{ba}). \tag{3,10}$$

Такое разбиение тензора ковариантно относительно унитарных преобразований. Теперь мы можем использовать тензор ε_{abc}. Умножив его на тензор (3,10), мы получим спинор с одним нижним значком

$$\Psi_a=\varepsilon_{abc}\Psi^{[bc]}. \tag{3,11}$$

Таким образом, антисимметричный тензор второго ранга эквивалентен в этой алгебре спинору. Наоборот, симметричный тензор (3,9) упростить нельзя. Произведение его на ε дает нуль. Поэтому мы можем обозначать через Ψ^{ab} симметричный тензор; антисимметричными тензорами мы вовсе пользоваться не будем.

3) Аналогичные рассуждения можно повторить для тензоров с двумя нижними значками Ψ_{ab}, используя для этого случая тензор ε^{abc}. В результате и этот тензор мы можем считать симметричным.

Все сказанное можно повторить для любой пары верхних или пары нижних значков. Поэтому общий случай неприводимого тензора характеризуется двумя числами — числом нижних и числом верхних значков. При этом все следы (суммы по любой паре значков одного нижнего и одного верхнего) должны обращаться в нуль. Неприводимые тензоры (и соответствующие им представления) обозначают символом $D(p,\ q)$, где p — число верхних индексов, а q — число нижних индексов. Таким образом, мы приходим к следующей классификации тензоров в $SU(3)$:

$D(0,\ 0)$ — скаляр (одна компонента),
$D(1,\ 0)$ — контравариантный спинор (три компоненты),
$D(0,\ 1)$ — ковариантный спинор (три компоненты),
$D(1,\ 1)$ — смешанный тензор Ψ^a_b (восемь компонент),
$D(2,\ 0)$ — контравариантный тензор Ψ^{ab} (шесть компонент),
$D(0,\ 2)$ — ковариантный тензор Ψ_{ab} (шесть компонент) и т. д.

Приведем несколько формул для подсчета числа компонент. Симметричный тензор с k индексами (только верхними или только нижними) имеет число компонент, равное

$$N(k,\ 0)=N(0,\ k)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}. \tag{3,12}$$

Тензор с одинаковым числом нижних и верхних индексов имеет число компонент, равное

$$N(k,\ k)=(k+1)^3. \tag{3,13}$$

Первая формула есть просто число способов, которым можно составить k из трех целых чисел (число единиц, двоек и троек в индексах). Вторая получается из известной формулы для суммы кубов чисел натурального ряда

$$\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2=\sum_{s=1}^{k+1}s^3.$$

Заметим, что слева стоит квадрат правой части (3,12), т. е. полное число компонент тензора, у которого число верхних и нижних индексов одинаково, а следы отличны от нуля. Поэтому можно интерпретировать последнюю формулу как формулу разложения такого тензора на неприводимые с меньшим числом индексов (доказательство легко провести по индукции).

Для случая тензора с p верхними и q нижними значками число компонент равно

$$N(p,\ q)=\frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2). \tag{3,14}$$

Формула получается сразу, если заметить, что до обращения следов в нуль число компонент определяется по формуле (3,12) и равно $\frac{1}{4}(p+1)(q+1)\times\times(p+2)(q+2)$. Условие обращения следа в нуль эквивалентно равенству нулю тензора $D(p-1,\ q-1)$ с числом компонент $\frac{1}{4}pq(p+1)(q+1)$. Разность этих двух чисел и дает формулу (3,14).

Теперь мы можем сформулировать правило сложения векторов. В группе вращения это правило сводилось к тому, что из двух тензоров с $2j_1+1$ и $2j_2+1$ компонентами возникают тензоры с числом компонент $2J+1$, где J пробегает все целые значения (или полуцелые) от $|j_1-j_2|$ до j_1+j_2. В $SU(3)$ в общем случае правило выглядит сложнее и проще всего действовать прямым путем.

Так, из двух спиноров Ψ^a и Ψ_b можно составить скаляр Ψ и тензор Ψ^a_b с 8 компонентами. Символически мы будем это записывать так:

$$D(1,\ 0)\times D(0,\ 1)=D(0,\ 0)+D(1,\ 1) \tag{3,15}$$

или просто по числу компонент

$$3\times3=1+8. \tag{3,16}$$

Рассмотрим произведение двух тензоров $\Psi^a_b\Phi^c_d$. Для того чтобы найти неприводимые части, поступим так. Возьмем двойную сумму, получив скаляр

$$X=\Psi^a_b\Phi^b_a\quad\text{(одна компонента)}. \tag{3,17}$$

Просуммировав только один раз двумя способами и обратив след в нуль, получим два тензора:

$$X^a_d=\Psi^a_b\Phi^b_d,\quad X^c_b=\Psi^a_b\Phi^c_a\ \text{(по восемь компонент)}. \tag{3,18}$$

Если с помощью тензора ε поднять нижние значки, а затем симметризовать по всем верхним значкам, мы придем к тензору третьего ранга с верхними значками

$$X^{abc}. \tag{3,19}$$

Аналогично построим тензор с тремя значками внизу

$$X_{abc}. \tag{3,20}$$

Остается еще тензор четвертого ранга с двумя значками вверху и двумя значками внизу и со следами, равными нулю. Этот тензор имеет $(2+1)^3=27$ компонент

$$X^{ab}_{cd}=\Psi^{\{a}_{\{c}\Phi^{b\}}_{d\}}. \tag{3,21}$$

Формальная запись этого результата такова:

$$D(1,\ 1)\times D(1,\ 1)=D(0,\ 0)+D(1,\ 1)+D(1,\ 1)+\\ +D(3,\ 0)+D(0,\ 3)+D(2,\ 2) \tag{3,22}$$

или

$$8\times 8=1+8+8+10+\overline{10}+27. \tag{3,23}$$

В обозначениях отмечен тот факт, что оба октета (тензоры второго ранга) эквивалентны, т. е. преобразуются одним и тем же образом, а декаплеты (тензоры третьего ранга) преобразуются сопряженными матрицами.

Приведем еще формулу для произведения двух декаплетов: по формуле (3,13) можем сразу написать $(k=2)$

$$10\times\overline{10}=1+8+27+64 \tag{3,24}$$

или

$$D(3,\ 0)+D(0,\ 3)=D(0,\ 0)+D(1,\ 1)+D(2,\ 2)+D(3,\ 3). \tag{3,25}$$

Приведем без вывода еще несколько формул:

$$3\times\bar 3=1+8,$$
$$D(1,\ 0)\times D(0,\ 1)=D(0,\ 0)+D(1,\ 1),$$
$$3\times 3=\bar 3\times 6,$$
$$D(1,\ 0)\times D(1,\ 0)=D(0,\ 1)+D(2,\ 0),$$
$$\bar 3\times\bar 3=3+\bar 6,$$
$$D(0,\ 1)\times D(0,\ 1)=D(1,\ 0)+D(0,\ 2),$$
$$6\times 3=8+10,$$
$$D(2,\ 0)\times D(1,\ 0)=D(1,\ 1)+D(3,\ 0),$$
$$\bar 6\times 3=\bar 3+15,$$
$$D(0,\ 2)\times D(1,\ 0)=D(0,\ 1)+D(1,\ 2),$$
$$6\times\bar 3=3+\overline{15},$$
$$D(2,\ 0)\times D(0,\ 1)=D(1,\ 0)+D(2,\ 1),$$
$$\bar 6\times 6=1+8+27,$$
$$D(0,\ 2)\times D(2,\ 0)=D(0,\ 0)+D(1,\ 1)+D(2,\ 2),$$
$$6\times 6=6+\overline{15}+15',$$
$$D(2,\ 0)\times D(2,\ 0)=D(0,\ 2)+D(2,\ 1)+D(4,\ 0),$$
$$\bar 6\times\bar 6=6+15+\overline{15}',$$
$$D(0,\ 2)\times D(0,\ 2)=D(2,\ 0)+D(1,\ 2)+D(0,\ 4)\ \text{и т. д}$$

Мы видим, что только простейшие представления можно описывать одним числом. Два тензора D (2, 1) и D (4, 0) оба имеют по 15 компонент, и, чтобы различить их, мы писали 15 и 15′.

Более длинным является вычисление коэффициентов в формулах сложения (коэффициентов Клебша — Гордана). Так как они нам не понадобятся, мы о них здесь говорить не будем (они даны в [B2]).

§ 4. УНИТАРНЫЙ СПИН

Подобно тому как в SU (2) представление характеризовалось величиной изотопического спина, так и в алгебре SU (3) можно ввести аналогичную характеристику — унитарный спин, который мы будем обозначать через U. Компоненты изотопического спина, которые записывались в виде матрицы 2×2:

$$T=\begin{pmatrix} T_3 & T_- \\ T_+ & -T_3\end{pmatrix}, \tag{4,1}$$

представляют собой генераторы группы вращений. Это значит, что матрица поворота на угол $\delta\varphi$ вокруг оси 3 имеет вид

$$M=1+\frac{i}{2}\delta\varphi T_3. \tag{4,2}$$

Для поворотов вокруг осей 2 и 1 справедливы аналогичные формулы, в которые будут входить соответственно матрицы

$$T_1=T_++T_-,\quad T_2=\frac{1}{i}(T_+-T_-). \tag{4,3}$$

Унитарный спин вводится матрицей 3×3:

$$U=\left(\begin{array}{cc|c} Q & T_- & L_- \\ T_+ & Y-Q & K_- \\ \hline L_+ & K_+ & -Y\end{array}\right). \tag{4,4}$$

Четыре элемента, стоящие в левом верхнем углу, образуют матрицу типа матрицы (4,1), в которой, однако, след не равен нулю (т. е. эта матрица приводима в SU (2)). Эту матрицу можно записать в виде суммы матриц, одна из которых имеет след, равный нулю:

$$\begin{pmatrix} Q & T_- \\ T_+ & Y-Q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Q-\frac{1}{2}Y & T_- \\ T_+ & \frac{1}{2}Y-Q\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y\end{pmatrix}. \tag{4,5}$$

Сравнивая с (4,1), мы видим, что

$$Q-\frac{1}{2}Y=T_3 \tag{4,6}$$

или

$$Q=T_3+\frac{1}{2}Y. \tag{4,7}$$

Если под собственным значением Q понимать заряд, то Y есть матрица, отвечающая гиперзаряду $S+B$ (S — странность, B — барионное число). Остальные элементы (элементы L_+, L_-, K_+, K_-) представляют собой матрицы, имеющие ту же форму, что и матрицы изотопического спина T_1, T_2 и T_3, только определяемые в подпространствах (2,3) и (1,3). Так как группа SU (3) состоит из преобразований, сохраняющих квадратичную форму $|X|^2+|Y|^2+|Z|^2$, в каждом из двухмерных подпространств существует подгруппа, содержащая сумму двух квадратов модулей, т. е. подгруппа, эквивалентная $SU(2)$. Из структуры матрицы (4,4) видно, что можно разным образом выбирать системы коммутирующих матриц. Выбирая в качестве подгруппы матрицы (4,5), мы получим систему матриц Y, T^2 и T_3. Если в качестве подгрупп выбрать матрицу 2×2, стоящую в нижнем правом углу (4,4), то получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} Y-Q & K_- \\ K_+ & -Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y-\frac{1}{2}Q & K_- \\ K_+ & -Y+\frac{1}{2}Q \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}. \qquad (4,8)$$

В этом случае коммутирующими матрицами будут матрицы Q, K^2 и K_3, где

$$K_3 = Y - \frac{1}{2}Q. \qquad (4,9)$$

При таком выборе коммутирующих операторов одним из квантовых чисел будет определяться заряд частицы. Такое представление удобно при рассмотрении задач слабого и электромагнитного взаимодействий.

Вернемся к выбору системы коммутирующих матриц Y, T^2, T_3. Рассмотрим произвольный тензор с p верхними и q нижними индексами. Обозначим его, как и связанное с ним представление, через $D(p, q)$. Каждый из $p+q$ индексов может принимать значение 1, 2, 3. Введем следующие обозначения:

$$\left.\begin{array}{llllll} p(1) - \text{число} & \text{верхних} & \text{индексов,} & \text{равных} & 1, \\ p(2) & » & » & » & 2, \\ p(3) & » & » & » & 3, \\ q(1) - \text{число} & \text{нижних} & \text{индексов,} & \text{равных} & 1, \\ q(2) & » & » & » & 2, \\ q(3) & » & » & » & 3. \end{array}\right\} \qquad (4,10)$$

Связь собственных значений Y, T^2 и T_3 с компонентами тензора $D(p, q)$ устанавливается, если мы зададим Y для компонент какого-нибудь одного тензора. Именно в этом пункте и происходит выбор представления для описания реальных частиц. В модели Гелл-Манна и Неймана в основу принимается октет $D(1, 1)$.

Зададим гиперзаряды для компонент этого октета:

$$\left.\begin{array}{ll} \Psi^a_b(a,\ b=1,\ 2,\ 3): & Y=0, \\ \Psi^3_b(b=1,\ 2,\ 3): & Y=1, \\ \Psi^a_3(a=1,\ 2): & Y=-1, \\ \Psi^3_3: & Y_a=0. \end{array}\right\} \qquad (4,11)$$

Напомним, что компоненты Ψ^a_b являются смесью изотопического вектора и изотопического скаляра (a, $b=1, 2$):

$$\left.\begin{array}{ll} \Psi^a_b - \frac{1}{2}\delta^a_b \operatorname{Sp}\Psi, & T - \text{вектор}, \\ \operatorname{Sp}\Psi, & T - \text{скаляр}, \\ \Psi^a_3,\ \Psi^3_b, & T - \text{спинор}, \\ T^3_3, & T - \text{скаляр}. \end{array}\right\} \qquad (4,12)$$

Будем составлять из октетов тензоры высших порядков. При перемножении октетов мы будем получать тензоры, у которых числа верхних и нижних индексов одинаковы, но следы не равны нулю. Обозначим такой тензор через $D'(k, k)$, отмечая штрихом тот факт, что $\operatorname{Sp} D' \neq 0$. Гиперзаряд,

отвечающий компоненте тензора, будет определяться числом индексов, равных 3, т. е. числами $p(3)$ и $q(3)$. Так как согласно (4,11) каждый верхний индекс вносит вклад в Y, равный 1, а каждый нижний индекс вносит вклад, равный -1, для компонент тензора $D'(k, k)$ гиперзаряд равен $p(3) - q(3)$. Отсюда видно, что в компонентах этого тензора Y изменяется в пределах $-k \leqslant Y \leqslant k$.

Теперь выделим из тензора неприводимые составляющие. Для этого прежде всего симметризуем тензор по p верхним и отдельно по q нижним значкам. Получим неприводимый тензор $D(k, k)$, для которого Y меняется в тех же пределах $-k \leqslant Y \leqslant k$.

Если p или $q \geqslant 2$, то с помощью ε_{abc} можно опустить у $D'(k, k)$ два индекса, превратив два верхних индекса в один нижний. Точно так же с помощью тензора ε^{abc} можно поднять два нижних индекса, превратив их в один верхний. Таким образом мы можем превратить тензор $D'(k, k)$ в тензор $D'(k-2, k+1)$ или в тензор $D'(k+1, k-2)$. После этого надо симметризовать полученные тензоры до тензоров $D(k-2, k+1)$ или $D(k+1, k-2)$ соответственно.

Тензоры ε антисимметричны, поэтому если у тензора $D(p, q)$ все p индексов равны 3, то умножение его на ε_{abc} дает нуль. Точно так же, если у тензора $D(p, q)$ все нижние индексы равны 3, то умножение его на ε^{abc} также дает нуль. Отсюда можно заключить, что тензор $D(k-2, k+1)$ имеет на одно значение Y меньше, чем исходный тензор $D(k, k)$: он не имеет компонент с $Y = k$. Таким образом, тензор $D(k-2, k+1)$ имеет компоненты с Y в пределах $-k \leqslant Y \leqslant k-1$. Также можно прийти к заключению, что тензор $D'(k+1, k-2)$ имеет компоненты с Y в пределах $-k+1 \leqslant Y \leqslant k$. Если мы опустим $2s$ верхних индексов, превратив их в s нижних, то, рассуждая аналогично, найдем, что у нового тензора $D(k-2s, k+s)$ гиперзаряд изменяется в пределах $-k \leqslant Y \leqslant k-s$. Точно так же для тензора $D(k+s, k-2s)$: $-k+s \leqslant Y \leqslant k$.

Отсюда для произвольного тензора $D(p, q)$ находим, полагая $k = \frac{p+2q}{3}$ и $s = -\frac{p-q}{3}$ $(p = k-2s,\ q = k+s)$, что гиперзаряд изменяется в пределах

$$-\frac{p+2q}{3} \leqslant Y \leqslant \frac{2p+q}{3}. \qquad (4,13)$$

Гиперзаряд компоненты тензора $D(p, q)$ определяется числом индексов, равным 3. Положим

$$Y = p(3) - q(3) + a, \qquad (4,14)$$

где a — постоянная. Эту постоянную найдем, заметив, что при $p(3) = p$ и $q(3)$, равном нулю, Y равен своему максимальному значению $\frac{1}{3}(2p+q)$. Отсюда $a = -\frac{1}{3}(p-q)$.

Обозначая $p(3) - q(3) = m_3$, $p - q = m$, получаем

$$Y = m_3 - \frac{1}{3}m. \qquad (4,14')$$

Аналогично можно получить формулу и для заряда:

$$Q = -m_1 + \frac{1}{3}m, \qquad (4,15)$$

где $m_1 = p(1) - q(1)$. Ее вид определяется симметрией определителя (4,4) относительно замены ($Y \rightleftarrows -Q$ и $1 \rightleftarrows 2$). Если добавить еще, что $Y - Q = -m_2 + \frac{1}{3}m$, то можно заметить, что три числа m_1, m_2, m_3 играют

2 УФН, т. LXXXIV, вып. 1

роль «магнитных» квантовых чисел. Для того чтобы сделать сумму собственных значений трех операторов, стоящих на диагонали (4,4), равной нулю, вводится член $\frac{1}{3}m=\frac{1}{3}(m_1+m_2+m_3)$. Это и есть алгебраическая причина появления коэффициента $\frac{1}{3}$ в формулах (ср. (2,31)).

Из формулы (4,13) можно получить выражение для «ширины» унитарного мультиплета:

$$Y_{\max}-Y_{\min}=p+q. \tag{4,16}$$

По аналогии с изотопическим спином, половину полного числа индексов можно назвать величиной унитарного спина U,

$$U=\frac{p+q}{2}, \tag{4,17}$$

так что число разных значений Y равно $2U+1$. Для «центра тяжести» мультиплета получаем

$$Y_{\max}+Y_{\min}=\frac{p-q}{3}. \tag{4,18}$$

Формулы (4,14)—(4,17) полностью описывают гиперзарядовую структуру мультиплета.

Эти формулы дают для Y целые значения, но только для таких тензоров, для которых разность $|p-q|=3n$, где n — целое положительное число. В принятой нами схеме построения тензоров из тензора $D(k, k)$ возникают тензоры $D(k+s, k-2s)$ и $D(k-2s, k+s)$, которые удовлетворяют этому условию. Тензоры с $|p-q|\neq 3n$ не могут быть получены таким путем. Это напоминает положение в группе вращений, где с помощью векторов можно построить тензоры лишь с целыми значениями изотопического спина; спиноры с полуцелым изотопическим спином должны быть введены независимо. В группе $SU(3)$ также возникают спиноры с нецелыми значениями гиперзаряда, кратными 1/3. Сохраняя полученные правила и для тензоров с $|p-q|\neq 3n$, мы получим, например, что для спинора с одним верхним значком $D(1, 0)$ сопоставление Y с компонентами выглядит так:

$$\begin{aligned} &\Psi^1:\quad p=0, && Y=-\frac{1}{3},\\ &\Psi^2:\quad p=0,\quad \frac{1}{3}(p-q)=\frac{1}{3}, && Y=-\frac{1}{3},\\ &\Psi^3:\quad p=1, && Y=\frac{2}{3}. \end{aligned} \tag{4,19}$$

Аналогично тензор Ψ_a имеет компоненты с $Y=\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$. Таким образом, в $SU(3)$ появляются дробные значения гиперзаряда. Попытки обнаружить частицы, отвечающие таким представлениям (кварки, по терминологии Гелл-Манна), потерпели пока неудачу (см. Введение).

Теперь мы можем продолжить классификацию компонент тензора и перейти к значениям изотопического спина и его проекций. Если в тензоре $D(p, q)$ мы положим некоторое число индексов равными 3, то остальные индексы, принимая значения 1 и 2, образуют тензор в изотопическом пространстве с $p(1)+p(2)=p(1, 2)$ верхними индексами и $q(1)+q(2)=q(1, 2)$ нижними индексами. Разложение такого тензора $SU(2)$ на неприводимые тензоры происходит по обычной схеме суммирования — по одному нижнему и одному верхнему индексу по значениям 1, 2. Так как тензор с $p(1, 2)$ индексами, принимающими значения 1, 2, имеет

$p(1, 2)+1$ компоненту, изотопический спин такого тензора равен

$$T_p=\frac{1}{2}p(1, 2). \tag{4,20}$$

Аналогично для тензора с $q(1, 2)$ нижними индексами

$$T_q=\frac{1}{2}q(1, 2). \tag{4,21}$$

Тензор с $p(1, 2)$ верхними и $q(1, 2)$ нижними индексами разлагается на неприводимые тензоры, спины которых равны

$$T_p+T_q,\quad T_p+T_q-1,\ \ldots,\ |T_p-T_q|. \tag{4,22}$$

Наконец, величину компоненты изотопического спина определяем по формуле (2,32):

$$T_3=\frac{1}{2}(m_2-m_1)=\frac{1}{2}[p(2)-q(2)-p(1)+q(1)], \tag{4,23}$$

что согласуется с определением $T_3=Q-\frac{1}{2}Y$ и формулами (4,14) и (4,15).

Таким образом, мы приходим к следующей классификации компонент унитарных тензоров. Компоненты неприводимого унитарного тензора характеризуются пятью квантовыми числами:

1) числом верхних значков p,
2) числом нижних значков q,
3) изотопическим спином T,
4) гиперзарядом Y (формула (4,14)),
5) проекцией изотопического спина T_3 (формула (4,23)).

Вместо p и q можно ввести:

1′) унитарный спин $U=\frac{1}{2}(p+q)$ (формула (4,17)),
2′) «центр тяжести» мультиплета $C=\frac{1}{3}(p-q)$ (формула (4,18)).

Вместо C, Y и T_3 можно вводить квантовые числа

$$m_s=p(s)-q(s),\quad s=1, 2, 3. \tag{4,24}$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} C&=\frac{1}{3}(m_1+m_2+m_3),\\ T_3&=\frac{1}{2}(m_2-m_1),\\ Y&=\frac{1}{3}[2m_3-m_1-m_2]. \end{aligned}\right\} \tag{4,25}$$

Числа m_1, m_2, m_3 вместе с U и T представляют собой другой набор из пяти квантовых чисел, описывающих унитарный мультиплет.

Отметим еще полезную формулу для тензоров, у которых есть значки только одного сорта, — тензоров типа $D(p, 0)$ и $D(0, q)$. Гиперзаряд компоненты тензора $D(p, 0)$ равен согласно (4,14) $Y=p(3)-\frac{p}{3}$. Изотопический спин компонент с заданным Y равен, очевидно, $\frac{1}{2}[p-p(3)]$, так как $p-p(3)$ есть число индексов, равных 1 или 2. Отсюда мы видим, что для тензоров типа $D(p, 0)$ существует соотношение

$$Y+2T=\frac{2}{3}p \tag{4,26}$$

и аналогично для тензоров $D(0, q)$

$$-Y+2T=\frac{2}{3}q. \tag{4,27}$$

2*

Таким образом, у таких тензоров T определяется заданием Y. Рассмотрим теперь несколько мультиплетов.

Таблица I

Мультиплеты SU (3)

I. Октет D (1,1), $U=1$

	Y	T
Ψ^a_b $(a, b=1, 2)$	0	1 и 0
Ψ^3_b $(b=1,2)$	1	1/2
Ψ^a_3 $(a=1,2)$	—1	1/2

II. Декаплет ковариантный D (0, 3), $U=\frac{3}{2}$

	Y	T
Ψ_{abc} $(a, b, c=1, 2, 3)$	1	3/2
Ψ_{ab3} $(a, b=1, 2, 3)$	0	1
Ψ_{a33} $(a=1, 2, 3)$	—1	1/2
Ψ_{333}	—2	0

$\Psi^3_3=-\Psi^1_1-\Psi^2_2$ и не включен поэтому в таблицу.

III. Декаплет контравариантный D (3, 0), $U=\frac{3}{2}$

	Y	T
Ψ^{abc} $(a, b\ c=1, 2, 3)$	—1	3/2
Ψ^{ab3} $(a, b=1, 2, 3)$	0	1
Ψ^{a33} $(a=1, 2, 3)$	1	1/2
Ψ^{333}	2	0

IV. 27-плет D (2, 2), $U=2$

	Y	T
Ψ^{33}_{cd} $(c, d=1, 2, 3)$	2	1
Ψ^{3b}_{cd} $(b, cd=1, 2, 3)$	1	3/2 и 1/2
Ψ^{ab}_{cd} $(a, b, c, d=1, 2, 3)$	0	2,1 и 0
Ψ^{ab}_{3d} $(a, b, d=1, 2, 3)$	—1	3/2 и 1/2
Ψ^{ab}_{33} $(a, b=1, 2, 3)$	—2	1

§ 5. МЕЗОНЫ И БАРИОНЫ

Сопоставим теперь унитарным тензорам реальные частицы. Октет барионов состоит из нуклона и гиперонов Λ, Σ и Ξ. В согласии с правилами предыдущего параграфа, его можно записать в виде матрицы (верхний индекс—строка, нижний — столбец):

$$(B^a_b)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0+\frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & \Sigma^- & \Xi^- \\ \Sigma^+ & -\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0+\frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & \Xi^0 \\ -p & n & -\sqrt{\frac{2}{3}}\Lambda \end{pmatrix}. \quad (5,1)$$

Коэффициенты в матрице выбраны так, чтобы в выражении

$$\mathrm{Sp}\overline{B}B=\overline{p}p+\overline{n}n+\overline{\Sigma}^+\Sigma^++\overline{\Sigma}^0\Sigma^0+\overline{\Sigma}^-\Sigma^-+\overline{\Xi}^0\Xi^0+\overline{\Xi}^-\Xi^-+\overline{\Lambda}\Lambda \quad (5,2)$$

все коэффициенты были бы равны 1 и чтобы Sp $\Psi=0$.

В матрице (5,1) протон входит со знаком минус. Это согласуется с определением ковариантных компонент спинора формулой (2,22). В литературе используется определение октета, отличающееся от (5,1) перестановкой строк и столбцов со знаком минус у Ξ^0.

Мезоны (и резонансы) образуют два известных октета. Октет псевдоскалярных мезонов состоит из π-, η- и K-мезонов. Матрица этих мезонов составляется аналогично матрице (5,1) и имеет вид

$$(P^a_b)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0+\frac{1}{\sqrt{6}}\eta & \pi^- & K^- \\ \pi^+ & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0+\frac{1}{\sqrt{6}}\eta & \overline{K}^0 \\ -K^+ & K^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}\eta \end{pmatrix}. \quad (5,3)$$

Октет векторных мезонов ϱ, K^* (резонанс $K\pi$) и φ образует матрицу

$$(V^a_b)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\varrho^0+\frac{1}{\sqrt{6}}\varphi & \varrho^- & K^{*-} \\ \varrho^+ & -\frac{1}{\sqrt{2}}\varrho^0+\frac{1}{\sqrt{6}}\varphi & \overline{K}^{*0} \\ -K^{*+} & K^{*0} & -\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi \end{pmatrix}.$$

Мезонные октеты отличаются от барионного октета тем, что частицы в них входят одновременно со своими античастицами. Эти октеты описываются эрмитовыми матрицами

$$P^+=P, \quad V^+=V. \quad (5,4)$$

Кроме октета (5,1), известен еще барионный декаплет, возглавляемый знаменитым Ω^--гипероном. Этот декаплет описывается тензором с тремя нижними значками Ψ_{abc}, который состоит из 10 разных компонент. Эти компоненты можно свести в таблицу. После номера компоненты (нижние индексы!) мы отмечаем число одинаковых компонент тензора Ψ_{abc}, полученных перестановкой индексов. Это число определяет коэффициенты в последнем столбце.

Таблица II

Компоненты барионного декаплета

№№ п.п.	Компонента	Y	T	T_3	Резонанс	№№ п.п.	Компонента	Y	T	T_3	Резонанс
1	333 (1)	—2	0	0	Ω^-	6	322 (3)			1	$\frac{1}{\sqrt{3}}\Sigma^{*+}$
2	331 (3)	—1	1/2	—1/2	$\frac{1}{\sqrt{3}}\Xi^{*-}$	7	111 (1)	1	3/2	—3/2	Δ^-
3	332 (3)			1/2	$\frac{1}{\sqrt{3}}\Xi^{*0}$	8	112 (3)			—1/2	$\frac{1}{\sqrt{3}}\Delta^0$
4	311 (3)	0	1	—1	$\frac{1}{\sqrt{3}}\Sigma^{*-}$	9	122 (3)			1/2	$\frac{1}{\sqrt{3}}\Delta^+$
5	312 (6)			0	$\frac{1}{\sqrt{6}}\Sigma^{*0}$	10	222 (1)			3/2	Δ^{++}

Нормировки выбраны так, чтобы в квадратичное выражение $\overline{\Psi}\Psi$ все частицы входили с одинаковым коэффициентом, равным единице.

§ 6. РАСЩЕПЛЕНИЕ МАСС МУЛЬТИПЛЕТОВ

Мультиплеты частиц полностью вырождены, т. е. все их компоненты имели бы строго одинаковые массы, если бы частицы ни с кем не взаимодействовали. Наличие сильного взаимодействия с виртуальными частицами (будем говорить для краткости—с «вакуумом») приводит к расщеплению мультиплетов. Это расщепление можно описать способом, весьма близким к тому, которым в квантовой механике описывают зеемановское расщепление атомных уровней.

Будем считать, что взаимодействие мультиплета с вакуумом описывается некоторым эффективным постоянным полем, которое по своим свойствам есть вещественный тензор $D\,(1,1)$ *). Обозначим поле через $H \equiv H^a_b$ (см. стр. 30). Для более точного описания расщепления можно ввести «поля» и более высокого ранга, H^{ab}_{cd}, H^{abc}_{def} и т. д.; однако, как будет рассказано ниже, сравнение с опытом показывает, что соответствующие члены взаимодействия оказываются малыми. В свободный (невозмущенный) лагранжиан системы входит масса частицы в комбинации

$$\left.\begin{aligned} &m\,\mathrm{Sp}\,\overline{\Psi}\Psi \text{ для барионов,}\\ &m^2\,\mathrm{Sp}\,\overline{\Psi}\Psi \text{ для мезонов.}\end{aligned}\right\} \tag{6,1}$$

Возмущение (взаимодействие с «полем») будет добавлять слагаемое к массе для барионов и к квадрату массы для мезонов **). Чтобы вычислить эту добавку, найдем аналог мультиполей системы. Из функции Ψ и ее сопряженной $\overline{\Psi}$ можно составить ***)

$$\left.\begin{aligned} &\text{0-поль: } \mathrm{Sp}\,\overline{\Psi}\Psi,\\ &\text{8-поли: } \overline{\Psi}{}^a_c\Psi^c_b \pm \overline{\Psi}{}^c_b\Psi^a_c.\end{aligned}\right\} \tag{6,2}$$

Остальные компоненты образуют 27-поль.

Среднее значение 0-поля (скаляра) определяет невозмущенную массу, 8-поль приведет к возмущению, пропорциональному H^a_b, 27-поль—к возмущению, пропорциональному H^{ab}_{cd}.

Если Ψ — эрмитово (бозоны), то оба 8-поля равны, так как для эрмитовых матриц $\overline{\Psi}\Psi = \overline{\Psi}\Psi$; поэтому из компонент барионного октета можно составить два 8-поля, а из компонент мезонного октета только один 8-поль.

Аналогично из компонент декаплета можно составить:

$$\left.\begin{aligned} &\text{0-поль: } (\overline{\Psi},\,\Psi),\\ &\text{8-поль: } \overline{\Psi}{}^{abc}\Psi_{abf},\\ &\text{27-поль: } \overline{\Psi}{}^{abc}\Psi_{aef},\\ &\text{64-поль: } \overline{\Psi}{}^{abc}\Psi_{def}\end{aligned}\right\} \tag{6,3}$$

(все следы обращены в нуль). При выводе формул согласно сказанному выше мы будем учитывать только взаимодействие с 8-полем.

*) Если рассматривать в этой схеме реакции и распады, то необходимо будет учитывать зависимость компонент тензора от энергии.

**) Так как расщепление у барионов сравнительно мало́, можно считать, что и для них получаются соотношения для к в а д р а т о в масс.

***) Для краткости мультиполь с k компонентами мы называем k-полем.

Начнем с барионного октета. Взаимодействие с полем H описывается двумя членами вида (C_1 и C_2 — постоянные)

$$C_1\,\mathrm{Sp}\,H\overline{\Psi}\Psi \text{ и } C_2\,\mathrm{Sp}\,H\Psi\overline{\Psi}. \tag{6,4}$$

Выберем теперь H. Естественно в первом приближении пренебречь разностью масс внутри изотопического мультиплета, считая, что T продолжает оставаться хорошим квантовым числом. В конце статьи мы рассмотрим также и расщепление изотопического мультиплета.

Выберем H так, чтобы отличной от нуля была бы компонента H^3_3. Тогда взаимодействие с полем (6,4) переписывается в виде

$$\Delta M = a\Psi^3_r\Psi^r_3 + b\overline{\Psi}{}^r_3\Psi^3_r. \tag{6,5}$$

Постоянные a и b определяют силу взаимодействия поля с обоими 8-полями. Если теперь обратиться к (5,1), то для масс барионов получим следующие значения (где m_0 — масса невозмущенного октета):

$$\left.\begin{aligned} m\,(\Xi) &= m_0 + a,\\ m\,(N) &= m_0 + b,\\ m\,(\Sigma) &= m_0,\\ m\,(\Lambda) &= m_0 + \frac{2}{3}\,(a+b).\end{aligned}\right\} \tag{6,6}$$

Отсюда следует формула Гелл-Манна — Окубо

$$\frac{1}{2}\,[m\,(\Xi) + m\,(N)] = \frac{1}{4}\,[m\,(\Sigma) + 3m\,(\Lambda)]. \tag{6,7}$$

Если принять массу Σ за начало отсчета *), то из известных масс барионов можно составить табл. III (для Ξ и N берем полусумму масс обеих компонент).

Таблица III

Интервалы в барионном октете

	$m - m\,(\Sigma^0)$, *Мэв*
Ξ	125
N	—253
Σ^0	0
Λ	—77
$\frac{\Xi + N}{2}$	—64
$\frac{3}{4}\Lambda$	—58

Формулам (6,6) можно придать другой вид. Из формулы (4,5) можно получить, что после понижения симметрии до $SU(2)$ инвариантами группы остаются след матрицы 2×2 и ее определитель. Определитель равен

$$QY - Q^2 + \frac{1}{2}\,(T_+T_- + T_-T_+).$$

Но из формулы (4,6) следует, что

$$Q^2 - QY = T_3^2 - \frac{1}{4}\,Y^2.$$

Отсюда следует, что квантовыми числами, характеризующими расщепленный мультиплет, будут

$$Y \text{ и } T\,(T+1) - \frac{1}{4}\,Y^2. \tag{6,8}$$

Поэтому масса бариона с точностью до членов первого порядка равна

$$M = M_0 + M_1 Y + M_2\left[T\,(T+1) - \frac{1}{4}\,Y^2\right], \tag{6,9}$$

где M_0, M_1 и M_2 — новые постоянные. В таком виде формулу можно применять к любому барионному мультиплету. Связь между a, b и M_0, M_1 и M_2 устанавливается легко.

*) Если обозначить символом бариона разность массы бариона и массы Σ^0, то формула (6,7) примет вид $\Xi + N = \frac{3}{2}\,\Lambda$.

Возникает естественный вопрос о законности использования формул теории возмущений первого порядка. Ясно, что мерой малости возмущения здесь не может служить отношение расщепления масс к массе невозмущенного мультиплета, надо искать другое объяснение; строго говоря, такового сейчас не существует.

Можно представить себе, что в барионном мультиплете нет вовсе примеси более высокой мультипольности, подобно тому как у дейтрона нет электрических моментов выше квадрупольного. Это означает, что не существует другого барионного мультиплета с близкой массой, который мог бы внести возмущение более низкой симметрии. Во всяком случае, резкое выделение взаимодействия низшей мультипольности является важным фактором, обусловливающим успех всей схемы нарушения унитарной симметрии.

Если же учесть в массовой формуле поле H^{ab}_{cd} (компонента H^{33}_{33}), то к (6,5) добавится слагаемое *)

$$c\overline{\Psi}^{3}_{3}\Psi^{3}_{3}, \tag{6,10}$$

которое сдвинет массу Λ в формулах (6,6) на величину $2c/3$. Ясно, что эта постоянная будет определять отклонение от формулы (6,7), так что

$$c = -\frac{3}{2}[2m(\Xi)+2m(N)-m(\Sigma)-3m(\Lambda)]. \tag{6,11}$$

Отсюда следует, что $c \approx 36$ *Мэв*, что и определяет величину связи 27-поля с H^{33}_{33}.

Перейдем теперь к декаплету. В этом случае поправка к массе определится следующим образом:

$$\Delta M = d\overline{\Psi}^{ab3}\Psi_{ab3}. \tag{6,12}$$

С помощью табл. II получим следующие значения масс:

$$\left.\begin{aligned} m(\Omega) &= m_0 + d,\\ m(\Xi^*) &= m_0 + \frac{2}{3}d,\\ m(\Sigma^*) &= m_0 + \frac{1}{3}d,\\ m(\Delta) &= m_0. \end{aligned}\right\} \tag{6,13}$$

Таким образом, в декаплете уровни расположены эквидистантно, с расстоянием $\frac{1}{3}d$. Из опыта это расстояние равно 145 *Мэв*, так что

$$d = 435 \text{ Мэв}. \tag{6,14}$$

Эквидистантность можно получить из формулы (6,9), если учесть, что для декаплета по формуле (4,20)

$$T = \frac{1}{2}Y + 1, \tag{6,15}$$

откуда

$$M = (M_0 + 2M_2) + \left(M_1 + \frac{3}{2}M_2\right)Y, \tag{6,16}$$

где, вообще говоря, постоянные не равны постоянным октета.

*) 27-поль имеет компоненты: $\Psi^{ab}_{cd} = \overline{\Psi}\{^a_c\Psi^b_d\} - \frac{1}{3}\overline{\Psi}^e_c\Psi^b_e\delta^a_d - \frac{1}{3}\overline{\Psi}^a_e\Psi^e_d\delta^b_c + \overline{\Psi}^e_x\Psi^x_e\delta^a_d\delta^b_c$. Умножение 27-поля на H^{33}_{33} приведет к смещению остальных масс. Однако это смещение сведется к переобозначению постоянных, так что можно явно рассматривать лишь первый член в написанной формуле.

Для мезонных октетов формула получается из формул для октета барионного, если положить в ней $a = b = e$ (или в формуле (6,9) положить $M_1 = 0$) и считать, что эти формулы написаны не для масс, а для их квадратов. Для октета псевдоскалярных мезонов получим, по аналогии с (6,6):

$$\Delta m^2 = e\,\mathrm{Sp}(H\overline{P}P), \tag{6,17}$$

$$\left.\begin{aligned} m^2(K) &= m_0^2 + e,\\ m^2(\pi) &= m_0^2,\\ m^2(\eta) &= m_0^2 + \frac{4}{3}e. \end{aligned}\right\} \tag{6,18}$$

m_0 в этой формуле, конечно, не равно постоянной m_0 в формуле для барионов.

Из (6,18) получаем соотношение, подобное (6,7):

$$m^2(K) = \frac{1}{4}[m^2(\pi) + 3m^2(\eta)]. \tag{6,19}$$

Квадраты масс псевдоскалярных мезонов собраны в табл. IV.

Таблица IV.

Квадраты масс псевдоскалярных мезонов (интервалы)

	(Масса)^2 — $-m^2(\pi)$, $(Гэв)^2$
η	0,28
K	0,22
π	0

Таблица V

Квадраты масс векторных мезонов (интервалы)

	(Масса)^2 — $-m^2(\rho)$, $(Гэв)^2$
φ	0,46
K^*	0,21
ω	0,03
ϱ	0

Соотношение для разностей квадратов масс

$$m^2(K) = \frac{3}{4}m^2(\eta) \tag{6,20}$$

выполняется достаточно хорошо.

Для октета векторных мезонов согласие оказывается значительно хуже. Это, по-видимому, можно объяснить тем, что внутри октета лежит еще один векторный мезон ω ($Y = T = 0$). Этот мезон, естественно, должен возмущать октет (табл. V).

Описание возмущения, которое вносит ω-мезон в векторный октет, выходит, вообще говоря, как за рамки группы $SU(3)$, так и за схему нарушения симметрии, описанную выше. То, что в природе обнаружены два мезона (ω-мезон и φ-мезон) с близкими массами и с одинаковыми квантовыми числами, указывает, по-видимому, на существование более высокой симметрии, нарушение которой демонстрируется расщеплением ω- и φ-мезона, подобно тому как нарушение симметрии $SU(3)$ приводит к расщеплению масс φ- и ϱ^0-мезонов. Однако простое расширение группы, например до $SU(4)$, приводит к увеличению числа компонент мультиплета, так что решение этой загадки должно быть более хитрым *). Следует отметить и вторую загадку, которую преподносят нам мезонные октеты. Из приведенных данных видно, что в двух октетах равны первые расстояния:

$$m^2(K)-m^2(\pi)=m^2(K^*)-m^2(\varrho). \tag{6,21}$$

Ясно, что такое соотношение не может следовать из симметрии $SU(3)$. Здесь речь идет о том, что связь разных мезонных октетов с полем H одинакова (универсальное взаимодействие). Если такое совпадение не случайно, то его объяснение тоже должно быть связано с нарушением более высокой симметрии. Можно еще указать, что если заменить квадраты масс φ и ω их полусуммой, полученная схема практически совпадает со схемой псевдоскалярного октета. Обратимся к возможности описания расщепления, указанной Швингером **).

Предположим, действительно, что девятый мезон входит в октет, который в этом случае имеет след, отличный от нуля. Такой октет описывается матрицей

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\varrho^0+\frac{1}{\sqrt{6}}\varphi+\frac{1}{\sqrt{3}}\omega & \varrho^- & K^{-*} \\ \varrho^+ & -\frac{1}{\sqrt{2}}\varrho^0+\frac{1}{\sqrt{6}}\varphi+\frac{1}{\sqrt{3}}\omega & \overline{K}^0 \\ -K^+ & K^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi+\frac{1}{\sqrt{3}}\omega \end{pmatrix}. \tag{6,22}$$

В качестве взаимодействия, нарушающего симметрию, возьмем два слагаемых: одно обычного типа, $\mathrm{Sp}\,H\overline{V}V$, а другое — простейшее, которое расщепляет массу ω и φ. Это второе слагаемое мы запишем просто в виде $h\overline{\omega}\omega$. Взаимодействие, которое мы рассматриваем, теперь будет перемешивать φ- и ω-мезоны, так как оно содержит квадрат элемента, стоящего в нижнем правом углу (6,22). Итак, рассмотрим взаимодействие

$$\Delta M=g\overline{V}{}^3_\alpha V^\alpha_3+h\overline{\omega}\omega. \tag{6,23}$$

Взаимодействие (6,23) приводит к следующим массам мезонов (m_0^2 — новая постоянная, не связанная с постоянной в (6,18)):

$$\left.\begin{aligned} m^2(K)&=m_0^2+g,\\ m^2(\varrho)&=m_0^2,\\ m^2(\varphi)&=m_0^2+\frac{4}{3}g,\\ m^2(\omega)&=m_0^2+\frac{2}{3}g+h,\\ m^2(\overline{\omega}\varphi)&=\frac{2\sqrt{2}}{3}g; \end{aligned}\right\} \tag{6,24}$$

$m^2(\overline{\omega}\varphi)$ обозначает матричный элемент, перепутывающий исходные φ и ω. Как и в теории зееман-эффекта, реальные уровни, массы реальных φ и ω,

*) Как пример похожей ситуации, можно указать на расширение группы вращений до группы Лоренца. Как известно, при таком расширении происходит перемешивание состояний с заданным спином с состояниями с меньшими спинами.

**) Смешивание ω и φ рассматривалось в работе Сакурай [F4].

описываются корнями уравнения собственных значений:

$$\left.\begin{aligned} \left(m_0^2+\frac{4}{3}g\right)m^2(\varphi)+\frac{2\sqrt{2}}{3}gm^2(\omega)&=\lambda m^2(\varphi),\\ \frac{2\sqrt{2}}{3}gm^2(\varphi)+\left(m_0^2+\frac{2}{3}g+h\right)m^2(\omega)&=\lambda m^2(\omega). \end{aligned}\right\} \tag{6,25}$$

Определитель этого уравнения имеет вид

$$\begin{vmatrix} m_0^2+\frac{4}{3}g & \frac{2\sqrt{2}}{3}g \\ \frac{2\sqrt{2}}{3}g & m_0^2+\frac{2}{3}g+h \end{vmatrix} \tag{6,26}$$

Как известно, сумма корней уравнения собственных значений равна следу (6,26):

$$m^2(\varphi)+m^2(\omega)=2m_0^2+2g+h.$$

Сравнивая с (6,24), получим

$$h=m^2(\varphi)+m^2(\omega)-2m^2(K^*).$$

Произведение корней уравнения (6,25) равно величине определителя (6,26). Вместо формулы для масс мы получим формулу для интервалов (выбирая за начало отсчета массу ϱ). Это значит, что мы положим постоянную m_0^2 в формуле (6,24) равной нулю. Обозначая теперь квадраты масс в такой шкале символами самих частиц, найдем, что определитель (6,26) равен $\frac{4}{3}hg$. Так как g — это масса K^*, а h определено выше, то

$$\omega\varphi=\frac{4}{3}K^*(\omega+\varphi-2K^*) \tag{6,27}$$

или, в квадратах масс,

$$[m^2(\omega)-m^2(\varrho)][m^2(\varphi)-m^2(\varrho)]=$$
$$=\frac{4}{3}[m^2(K^*)-m^2(\varrho)][m^2(\varphi)+m^2(\omega)-2m^2(K^*)]. \tag{6,28}$$

В пределах ошибок эксперимента это соотношение удовлетворяется экспериментальными значениями масс. Ясно, что описанная процедура основана на малопонятных предположениях. Формально мы должны были рассмотреть взаимодействие общего типа $h'(\overline{\omega}\varphi+\overline{\varphi}\omega)$, вводя две новые постоянные, h и h'. Сравнение с опытом в этом случае привело бы к некоторому соотношению между h и h', однако никакого соотношения между массами, очевидно, не возникло. Решение Швингера отвечает выбору $h'=\frac{2\sqrt{2}}{3}g$. Имеет ли такой выбор какой-либо глубокий смысл, покажет дальнейшее развитие теории.

§ 7. РАСЩЕПЛЕНИЕ ИЗОТОПИЧЕСКИХ МУЛЬТИПЛЕТОВ

Схема описания расщепления унитарных мультиплетов может быть расширена так, чтобы включить в себя и описание расщеплений зарядовых мультиплетов, которые по условию задачи оставались вырожденными в полях H_8^8 и H_{33}^{33}.

Наиболее простой путь обобщения использует симметрию унитарного мультиплета относительно замены заряда на гиперзаряд. Выпишем еще раз матрицу барионного октета

$$\left(\begin{array}{c|cc} \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0+\frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda^0 & \Sigma^- & \Xi^- \\ \hline \Sigma^+ & -\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0+\frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda_0 & \Xi^0 \\ -p & n & -\sqrt{\frac{2}{3}}\Lambda \end{array}\right). \tag{7,1}$$

Рассмотрим подгруппу, отвечающую матрице, очерченной в правом нижнем углу. Ее структура, очевидно, аналогична структуре матрицы изотопического спина; ее квантовое число называют K-спином. Компоненты K-мультиплета определяются тем же путем, что и для T-мультиплета (изотопического мультиплета). След матрицы после умножения на $\sqrt{6}/2$ дает состояние с $K=0$ (сравните, как получается Λ из матрицы T мультиплета)

$$\Phi_0=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\,\Sigma^0+\Lambda^0). \tag{7,2}$$

Вычитая из диагональных элементов очерченной матрицы 2×2 половину ее следа, получим функцию с $K=1$:

$$\Phi_1=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}}\Sigma^0+\sqrt{\frac{3}{8}}\Lambda, & \Xi^0 \\ n & \frac{1}{2\sqrt{2}}\Sigma^0-\sqrt{\frac{3}{8}}\Lambda \end{pmatrix}. \tag{7,3}$$

Элементы матрицы (7,3) составлены из трех компонент Φ_1: n, $+\frac{1}{2}(-\Sigma^0+\sqrt{3}\Lambda)$, Σ^0, подобно тому как изотопическая матрица Σ составляется из компонент Σ^+, Σ^0, Σ^-.

Наконец, две функции имеют K-спин, равный $1/2$:

$$\Phi^{(1)}_{1/2}=(\Sigma^-,\ \Xi^-),\qquad \Phi^{(2)}_{1/2}=(\Sigma^+,-p). \tag{7,4}$$

Компоненты каждой из этих функций имеют одинаковый заряд, подобно тому как компоненты изотопических мультиплетов имеют одинаковый гиперзаряд.

Возмущения, сохраняющие заряд, вводятся компонентами поля H^1_1 и H^{11}_{11}. Здесь у нас нет оснований пренебречь полем H^{11}_{11}, так как один из процессов, приводящих к расщеплению изотопических мультиплетов, есть излучение или поглощение фотона; матричный элемент такого процесса преобразуется как квадрат H^1_1 или, что то же самое, как H^{11}_{11}.

Компоненты возмущающегося поля имеют те же квантовые числа, что и соответствующие компоненты барионного или мезонного мультиплета (два типа полей!), так как классификация, очевидно, не связана с конкретным выбором частиц. Поле H^{11}_{11} преобразуется как соответствующая компонента 27-плета. В теории слабых взаимодействий будут играть роль компоненты H^1_3 и H^3_1, имеющие заряд и странность (они преобразуются как K^+ и K^-). Так же можно рассматривать и поля, преобразующиеся как декаплет. Единственная компонента декаплета, которая не меняет ни заряда, ни гиперзаряда, — это компонента, преобразующаяся как Σ^{*0}. Мы рассмотрим ее отдельно.

Таким образом, примем для добавки к массе выражение вида

$$\Delta M=\alpha\overline{\Psi}{}^1_\alpha\,\Psi^\alpha_1+\beta\overline{\Psi}{}^\alpha_1\Psi^1_\alpha-2\gamma\overline{\Psi}{}^1_1\Psi^1_1. \tag{7,5}$$

Вместе со старым расщеплением получаем:

$$\left.\begin{aligned} m(\Xi^-)&=m_0+a+\alpha,\\ m(\Xi^0)&=m_0+a,\\ m(\Sigma^-)&=m_0+\alpha,\\ m(\Sigma^0)&=m_0+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\gamma,\\ m(\Sigma^+)&=m_0+\beta,\\ m(\Lambda)&=m_0+\frac{2}{3}(a+b)+\frac{1}{6}(\alpha+\beta)-\frac{1}{3}\gamma,\\ m(n)&=m_0+b,\\ m(p)&=m_0+b+\beta,\\ m(\Lambda\Sigma)&=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\alpha+\beta)-\frac{2}{\sqrt{3}}\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{7,6}$$

Коэффициент γ оценивается из соотношения

$$\gamma=m(\Sigma^0)-\frac{1}{2}[m(\Sigma^+)+m(\Sigma^-)]. \tag{7,7}$$

Из экспериментальных значений масс следует, что $\gamma=-0{,}95\pm 0{,}20$. Мы положим $\gamma=0$. После этого из (7,6) возникает еще одно соотношение, связывающее три разности масс:

$$[m(\Xi^-)-m(\Xi^0)]-[m(p)-m(n)]=m(\Sigma^-)-m(\Sigma^+), \tag{7,8}$$

которое сравнительно хорошо согласуется с опытом:

$$\left.\begin{aligned} m(\Xi^-)-m(\Xi^0)&=6{,}5\pm 1{,}0,\\ m(p)-m(n)&=-1{,}3,\\ m(\Sigma^-)-m(\Sigma^+)&=7{,}7\pm 0{,}3. \end{aligned}\right\} \tag{7,9}$$

Вернемся теперь к возмущению типа декаплета. Если по-прежнему требовать, чтобы гиперзаряд в системе не изменялся, то единственный член с $Q=Y=0$ декаплета — это H^{123}, преобразующийся как Σ^{0*}. Вклад в массу от декаплета имеет вид

$$(\Delta M)_g=\varepsilon_{abc}H^{ade}\overline{\Psi}{}^b_d\Psi^c_e+\varepsilon^{ade}H_{abc}\overline{\Psi}{}^b_d\Psi^c_e.$$

Оставляя только члены, пропорциональные H^{123} и H_{123}, и отбрасывая те, роль которых сводится к изменению постоянных в (7,5), получим

$$(\Delta M)_d=\delta_1(\overline{\Psi}{}^1_1\Psi^2_2-\overline{\Psi}{}^1_2\Psi^2_1)+\delta_2(\overline{\Psi}{}^2_2\Psi^1_1-\overline{\Psi}{}^2_1\Psi^1_2). \tag{7,10}$$

Отсюда возникает добавка к массе Σ^0, равная $-\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_2)=\frac{1}{2}-\delta$, к массе Λ, равная $\frac{1}{6}\delta$, к массе Σ^+, равная $-\delta_1$, и к массе Σ^-, равная $-\delta_2$. Не входя в противоречие с экспериментальными данными, можно положить $\delta_1=\delta_2=0$. Рассмотрим теперь смешивание Λ и Σ. Из-за электромагнитного взаимодействия Λ и Σ, которые были собственными состояниями изотопического спина, перемешиваются, оставаясь собственными значениями, проекции изотопического спина $T_3=0$. (Явление, аналогичное перемешиванию спинового синглета и спинового триплета в магнитном поле.) Полагая в (7,6) $\gamma = 0$, получим

$$m(\Lambda\Sigma) = \frac{1}{\sqrt{3}}[m(\Xi^-) - m(\Xi^0) - m(n) + m(p)]. \qquad (7,11)$$

Из экспериментальных значений масс найдем

$$m(\Lambda\Sigma) = 1{,}5 \pm 0{,}4 \ \text{Мэв}. \qquad (7,11')$$

Отсюда для физических (смешанных) состояний получим (Далиц [D7])

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_{\text{физ}} &= \Lambda\cos\alpha + \Sigma^0\sin\alpha, \\ \Sigma_{\text{физ}} &= -\Lambda\sin\alpha + \Sigma^0\cos\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (7,12)$$

где

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{m(\Lambda\Sigma)}{m(\Sigma) - m(\Lambda)} = -0{,}019 \pm 0{,}006. \qquad (7,13)$$

Угол α характеризует степень перемешивания состояний с $T = 0$ и $T = 1$. Так как нейтральные компоненты этих состояний обладают разной четностью относительно зарядовой симметрии (замена $p \rightleftarrows n$ и $\pi^+ \rightleftarrows \pi^-$), то (7,13) характеризует степень отклонения от зарядовой симметрии Λ-гиперона. Примером реакций, которые могут быть использованы для экспериментального измерения угла α, могут служить реакции $\pi^+ + d \to \Lambda + p + K^+$ и $\pi^- + d \to \Lambda + n + K^0$.

Аналогично барионному октету можно рассмотреть барионный декаплет. Если и здесь ограничиться низшим мультипольным взаимодействием, то по аналогии с расщеплением унитарным мы получим, что уровни расщепляются эквидистантно, так что

$$\begin{aligned} &m(\Delta^{++}) - m(\Delta^+) = m(\Delta^+) - m(\Delta^0) = m(\Delta^0) - m(\Delta^-) = \\ &\quad = m(\Sigma^{*+}) - m(\Sigma^{*0}) = m(\Sigma^{*0}) - m(\Sigma^{*-}) = m(\Xi^{*0}) - m(\Xi^{*-}). \end{aligned} \qquad (7,14)$$

Отклонение от линейной зависимости будет указывать на примесь взаимодействия с более высокой мультипольностью.

В случае мезонных октетов соотношение (7,10) обращается в тождество. В псевдоскалярном октете, однако, возникает вопрос о природе разности масс π^0 и $\pi^\pm$, которая должна быть равна нулю в 8-польном приближении. Ее следует отнести за счет электромагнитного взаимодействия типа H^{11}_{11}.

Формулы (7,16) можно написать в более простом виде, в котором масса Σ^0 остается несмещенной.

Поле H^a_b должно иметь квантовые числа $Q = Y = 0$; его можно записать в форме диагональной матрицы с элементами на диагонали $A, -A, +B, -B$, где A и B — произвольные вещественные числа.

Вычтем из такой матрицы единичную матрицу, умноженную на $1/2\,B$. Такая операция сводится просто к смещению начала отсчета масс, так как она не вызывает расщепления. Мы увидим, что таким образом мы закрепляем массу Σ^0 как начало отсчета.

Обозначая $A - 1/2\,B = \varkappa$ и $3/2\,B = -\lambda$, получим, что поле можно записать в форме матрицы

$$H^a_b = \begin{pmatrix} \varkappa & 0 & 0 \\ 0 & -\varkappa & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \qquad (7,15)$$

Произведения компонент поля на величину мультиполя в формуле (6,4) мы обозначим через

$$\alpha = \varkappa C_1, \quad \beta = \varkappa C_2, \quad a = \lambda C_1 \quad b = \lambda C_2.$$

Тогда с помощью матрицы (7,15) (сохраняя условие $\gamma = 0$) мы получим новый набор формул для масс барионов:

$$\left.\begin{aligned} m(\Xi^-) &= m_0 + a + \alpha, \\ m(\Xi^0) &= m_0 + a - \alpha, \\ m(\Sigma^-) &= m_0 + \alpha - \beta, \\ m(\Sigma^0) &= m_0, \\ m(\Sigma^+) &= m_0 - \alpha + \beta, \\ m(\Lambda) &= m_0 + \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b, \\ m(n) &= m_0 + b + \beta, \\ m(p) &= m_0 + b - \beta. \end{aligned}\right\} \qquad (7,16)$$

Формулы для расщепления масс, полученные до сих пор (их было три, так как массы 8 барионов описывались 5 параметрами), не зависели от модели. Если, однако, относиться к полю серьезно, то из приведенных соотношений следует, что $\alpha/\beta = a/b$ или (ср. Кольман и Глэшоу [D1])

$$\frac{m(\Xi^0) - m(\Xi^-)}{m(n) - m(p)} = \frac{m(\Xi^0) + m(\Xi^-) - 2m(\Sigma^0)}{m(n) + m(p) - 2m(\Sigma^0)}. \qquad (7,17)$$

Это соотношение выполняется плохо. Левая его часть равна —5, правая —0,5. Это значит, что в изотопическую разность масс велик вклад чисто электромагнитных поправок. Плохо выполняется и другое соотношение. Величина

$$\frac{m(\Xi^-) - m(\Xi^0) + m(p) - m(n)}{\frac{1}{2}[m(\Xi^-) + m(\Xi^0) + m(p) + m(n)] - 2\Sigma^0} = 2\frac{\alpha + \beta}{a - b} \qquad (7,18)$$

характеризует отношение компонент полей $\varkappa$ и λ. Из известных значений масс барионов находим для него величину 0,038.

Такую же величину можно вычислить из квадратов масс псевдоскалярных мезонов. Найдем

$$\frac{m^2(K^+) - m^2(K^0)}{\frac{1}{2}[m^2(K^+) + m^2(K^0)] - m^2(\pi^2)} = -0{,}017. \qquad (7,19)$$

Смысл формул (7,18) и (7,19) можно понять, если заметить, что, отсчитывая массы от середины мультиплета, т. е. от масс Σ^0 и π^0 соответственно, можно переписать обе формулы так:

$$\frac{\Delta m(\Xi) + \Delta m(N)}{2m_{\text{ср}}(\Xi, N)} = 2\frac{\Delta m(K)}{m_{\text{ср}}(K)}, \qquad (7,20)$$

где Δm — разности масс (не квадратов!) соответствующих дублетов, а $m_{\text{ср}}$ — их среднее расстояние от Σ^0 и π^0. Из (7,20) видно, что речь идет об универсальности изотопического расщепления, которое имеет меньшую точность, чем универсальность расщепления унитарного.

§ 8. «ГОЛОВАСТИКИ» И «БЕСЫ»

«Там на неведомых дорожках
Следы невиданных зверей...»
А. Пушкин

В нашу задачу не входило изложение всех идей и результатов унитарной теории, и мы оставили в стороне такое, например, важное, но еще не оформившееся направление, как теорию слабых взаимодействий; тем не менее имеет смысл отметить некоторые новые, пока еще спекулятивные идеи, так как они указывают на то, что фауна унитарного мира может быть весьма необычна. Расщепление масс показало, что взаимодействие частиц с вакуумом можно с успехом описывать некоторым полем H_b^a, нейтральные компоненты которого, H_3^3 и H_1^1, ответственны за унитарное и изотопическое расщепления соответственно. Возникает понятное желание придать этому полю смысл реального физического поля, сопоставив квадратам такого унитарного поля новый унитарный мезонный мультиплет. Такой мезонный октет был рассмотрен в работе Глэшоу и Кольмана [F3].

Идея головастика была высказана в работах Швингера (Annals of Phys. 2, 407 (1957)) и Салама и Уорда (Phys. Rev. Letts. 5, 390 (1960) и Revs. Mod. Phys. 33, 428 (1961)). Мезонный октет был введен Сакурай [F4].

Представим себе, что поле H_b^a есть поле скалярных мезонов. Если написать матрицу этого поля по аналогии с матрицей псевдоскалярных мезонов, то диагональными компонентами окажутся две нейтральные частицы, которые мы, чтобы подчеркнуть тождественность унитарных свойств, обозначим через π'^0 и η' (остальные компоненты октета $\pi'^\pm$, $K'^\pm$, K'^0, $\bar{K}'^0$ связаны с изменением заряда или гиперзаряда и не вносят вклада в расщепление, так же как и подобные компоненты поля H_b^a).

Так как квантовые числа π'^0 и η' те же, что и у вакуума, они могут аннигилировать бесследно, если только их массы равны нулю, превращаясь, например, в ненаблюдаемое связанное состояние протон — антипротон с полной массой, равной нулю!

Это значит, что формально существует процесс излучения нейтрального мезона, имеющего в виртуальном состоянии энергию, равную нулю, превращающегося в некоторое ненаблюдаемое состояние; так как на диаграмме такой процесс изображается линией с «кляксой» на конце, то такой мезон называют «головастиком» *).

Такая схема, очевидно, формально совпадает со схемой поля H_b^a. Если к сказанному добавить предположение о том, что взаимодействие головастика со всеми мультиполями описывается универсальной постоянной, мы получаем модель, в которой правила интервалов, связывающие р а з н ы е мультиплеты, получают естественную интерпретацию.

Скалярный мезон, из которого строится головастик в свободном состоянии, может иметь массу и не равную нулю. В этом случае авторы модели указывают на возможное отождествление его с резонансами $K' \to \varkappa$ (730 *Мэв*), $\pi' \to \zeta$ (570 *Мэв*) и η' с массой ~ 770 *Мэв*, близкой к ϱ^0; у таких трех компонент квадраты масс хорошо удовлетворяют правилу интервалов:

$$m^2(K') - m^2(\pi') = 0{,}22, \qquad m^2(\eta') - m^2(\pi') = 0{,}28. \qquad (8{,}1)$$

*) Читатель, конечно, заметил, что головастик принадлежит к семейству «шпурионов», вводимых разными авторами для описания процессов нарушения симметрии. Диаграмма головастика, очевидно, может существовать и для обычных π^0- и η-мезонов, но если их взаимодействие унитарно инвариантно, такие головастики не приведут к расщеплению.

Однако само существование резонансов и их квантовые числа установлены плохо, и к такому сопоставлению нельзя еще относиться серьезно *).

Можно попытаться описать «головастики» и иначе, используя идею Гелл-Манна об унитарных спинорах «кварках», которые по-русски, по-видимому, надо называть «бесами».

Поле H_b^a можно представить, как произведение двух унитарных спиноров $\bar{\psi}_b$ и φ^a:

$$H_b^a = \bar{\psi}_b \varphi^a. \qquad (8{,}2)$$

Унитарный спинор φ^a имеет компоненты с зарядами $-e/3$, $-e/3$ и $2e/3$, унитарный спинор $\bar{\psi}_b$ имеет компоненты с зарядами $e/3$, $e/3$, $-2e/3$. Такие же дробные значения имеет и гиперзаряд спиноров.

Появление дробного заряда связано с тем, что в группе $SU(3)$ матрицы заряда Q и гиперзаряда Y диагональны и имеют след, равный нулю. Если мы нормируем собственные значения Q и Y так, чтобы для компонент октета они принимали бы значения 0 и ± 1, и так как эти значения равны сумме зарядов компонент спиноров $\bar{\psi}_b$, φ^a, все эти требования удовлетворяются, если заряды кратны $1/3$. В этом случае $1/3 + 1/3 - 2/3 = 0$ и из зарядов $\bar{\psi}_b$ и φ^a можно составить только заряды 0 и ± 1. Как и раньше, только нейтральные компоненты произведения $\bar{\psi}_b$, φ^a участвуют во взаимодействии.

Если принять (8,2), то действие поля H_b^a можно описать, как излучение и поглощение «беса» в одной и той же точке диаграммы (или излучение пары $\bar{\psi}_b$ и φ^a с последующей аннигиляцией). Такая петля приводит к расщеплению масс и тождественна головастику. Если, однако, $\bar{\varphi}_b$ и φ^a могут рождаться в свободном состоянии, мы приходим к схеме Гелл-Манна, не подтвержденной, однако, опытом.

Поиски частиц, ответственных за нарушение унитарной симметрии, напоминает охоту за нейтрино, оставившего свой след в форме несохранения энергии. Чем кончится новая охота — покажет будущее.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Формулы для масс частиц, или, как их можно назвать, следуя спектроскопической терминологии, правила интервалов, отнюдь не исчерпывают применение схемы унитарной симметрии и ее нарушение. Однако эти формулы имеют особое значение.

Унитарная схема впервые позволила рассматривать массы частиц с единой, пусть еще очень несовершенной точки зрения. До сих пор различие в массах частиц рассматривалось лишь как досадное нарушение симметрии и казалось, что только в области больших энергий, в которой это различие может стать несущественным, можно пытаться строить теоретические схемы.

В схеме $SU(3)$ неожиданно обнаружилось, что нарушение симметрии обладает простыми свойствами и описывается очень естественно в схеме унитарных мультиплетов. Возникает вопрос, нельзя ли по характеру нарушения симметрии изучать свойства взаимодействия мультиплетов с вакуумом? Такой вопрос становится естественным, если вспомнить,

*) Глэшоу и Кольман ссылаются на следующие эксперименты: G. A l e x a n-
d e r et al., Phys. Rev. Letts. 8, 447 (1962); D. H. M i l l e r et al., Phys. Letts. 5, 279
(1963); S. G. W o j c i c k i et al., Phys. Letts. 5, 283 (1963); ζ: D. B. L i c h t e n-
b e r g, Stanford Linear Accel. Rep. No. 13 (1963) (не опубликовано), стр. 53, η′:
H. H a p o p i a n, W. S e l o r e, Phys. Rev. Letts. 10, 553 (1963); Z. G i o r a g o s-
s i a n, Phys. Rev. Letts. 11, 85 (1963).

что нарушение изотопической симметрии вызывается электромагнитным полем (взаимодействие частицы с электромагнитным полем вакуума); изучая отклонения от изотопической симметрии в разных реакциях, можно было бы в принципе получить довольно много сведений об этом взаимодействии (хотя расщепление в этом случае мало). Этого, конечно, не надо делать, так как у нас есть более совершенные методы изучения электромагнитного поля. Иначе обстоит дело в случае взаимодействия поля H^s_3, нарушающего симметрию SU (3).

Это взаимодействие, которое, к счастью, сравнительно велико, не сводится ни к какому известному полю. Поэтому изучение распадов и реакций с точки зрения группы SU (3) служит хорошим источником информации о взаимодействии частиц с вакуумом.

Простота возникающей схемы позволяет ожидать именно в этом направлении существенного продвижения в понимании законов сильного взаимодействия.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. ОКТЕТ КАК 8-ВЕКТОР

В алгебре SU (2) компоненты тензора второго ранга образуют трехмерный вектор. Связь между обоими представлениями осуществляется матрицами Паули — формула (2,22). Таким же образом компонентом унитарного октета можно сопоставить 8-вектор. В обозначениях Гелл-Манна[G2,3] октет A^a_b записывается в виде

$$A^a_b=\begin{pmatrix} A_3+\frac{1}{\sqrt{3}}A_8, & A_1-iA_2, & A_4-iA_5 \\ A_1+iA_2, & -A_3+\frac{1}{\sqrt{3}}A_8, & A_6-iA_7 \\ A_4+iA_5, & A_6+iA_7, & -\frac{2}{\sqrt{3}}A_8 \end{pmatrix}.$$

В такой форме можно записать, очевидно, любой октет. Заметим, что компоненты унитарного спина (4,4) принято обозначать через F_α ($\alpha=1, 2, \ldots, 8$).

Соотношения между A^a_b и A_α записываются проще всего, если ввести семь матриц λ_α, играющих здесь роль, аналогичную роли матриц Паули. Матрицы λ_α имеют вид

$$\lambda_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2=\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_6=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пары матриц (λ_1, λ_2), (λ_4, λ_5) и (λ_6, λ_7) суть матрицы Паули σ_1 и σ_2 в трех двухмерных подпространствах. Матриц типа σ_3 здесь две, так как существует дополнительное условие $\mathrm{Sp}\,\lambda_\alpha=0$.

Матрицы λ_α удовлетворяют следующим условиям:

$$\mathrm{Sp}\,\lambda_\alpha\lambda_\beta=2\delta_{\alpha\beta},$$

$$[\lambda_\alpha, \lambda_\beta]\equiv\lambda_\alpha\lambda_\beta-\lambda_\beta\lambda_\alpha=2if_{\alpha\beta\gamma}\lambda_\gamma,$$

$$\{\lambda_\alpha, \lambda_\beta\}\equiv\lambda_\alpha\lambda_\beta+\lambda_\beta\lambda_\alpha=2d_{\alpha\beta\gamma}\lambda_\gamma+\frac{4}{3}\delta_{\alpha\beta}.$$

Значение «структурных» величин — антисимметричной $f_{\alpha\beta\gamma}$ и симметричной $d_{\alpha\beta\gamma}$ — задаются формулами

$$f_{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{4i}\,\mathrm{Sp}\,[\lambda_\alpha\lambda_\beta]\,\lambda_\gamma\colon\ f_{123}=1,$$

$$f_{147}=f_{246}=f_{257}=f_{345}=f_{516}=f_{367}=\frac{1}{2},$$

$$f_{458}=f_{678}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$d_{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{4i}\,\mathrm{Sp}\,\{\lambda_\alpha, \lambda_\beta\}\,\lambda_\gamma\colon\ d_{118}=d_{228}=d_{338}=-d_{888}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$d_{146}=d_{157}=-d_{247}=d_{256}=d_{344}=$$

$$=d_{355}=-d_{366}=-d_{377}=\frac{1}{2},$$

$$d_{448}=d_{558}=d_{668}=d_{778}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Остальные отличные от нуля компоненты получаются перестановкой индексов с учетом знака в случае антисимметричной $f_{\alpha\beta\gamma}$.

Очевидно, что

$$A^a_b=\sum_{\alpha=1}^{7}A_\alpha(\lambda_\alpha)^a_b,$$

$$2A_\alpha=\mathrm{Sp}\,A\lambda_\alpha\equiv A^a_b(\lambda_\alpha)^b_a.$$

Коэффициенты f и d позволяют записывать произведение октетов. Формула умножения октетов

$$(X^\pm)^a_b=\frac{1}{2}(A^a_cB^c_b\pm A^c_bB^a_c)$$

переписывается так:

$$(X^\pm)_\alpha=i\begin{pmatrix} d_{\alpha\beta\gamma} \\ f_{\alpha\beta\gamma} \end{pmatrix}A_\alpha B_\beta.$$

Симметричное произведение называют иногда D-произведением, а антисимметричное F-произведением.

2. $\mathscr{C}$-ЧЕТНОСТЬ

Рассмотрим два преобразования октета: 1) R-преобразование — перестановка строк и столбцов октета, 2) зарядовое сопряжение C. Нетрудно видеть, что произведение обоих преобразований

$$\mathscr{C}=RC$$

оставляет все элементы мезонных (эрмитовских) октетов на своих местах и может их всех умножить на $+1$ либо на -1 (так как $\mathscr{C}^2=1$). Таким образом, появляется новое квантовое число: $\mathscr{C}$-четность, характеризующее эрмитовские октеты.

Очевидно, что $\mathscr{C}$-четность определяется зарядовой четностью частиц, стоящих на диагонали и остающихся при R-преобразовании на месте. Поэтому октет псевдоскалярных мезонов имеет $\mathscr{C}=+1$, а октет векторных мезонов $\mathscr{C}=-1$.

Из определения компонент 8-вектора ясно, что зарядовая четность компонент A_1, A_3, A_4, A_6, A_8 одинакова и противоположна зарядовой четности компонент A_2, A_5, A_7.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

А. СТАРАЯ ТЕОРИЯ U (3)

1. S. Sakata, Progr. Theor. Phys. 16, 686 (1962).
2. M. Ikeda, S. Ogawa and Y. Ohnuki, Progr. Theor. Phys. 22, 715 (1959).
3. L. Okun, Ann. Rev. Nucl. Sci. 9, 61 (1959).
4. М. А. Марков, Гипероны и K-мезоны, М.— Л., Физматгиз, 1958.

B. ОБЗОРЫ *SU* (3)

1. A. E. Edmonds, Proc. Roy. Soc. A268, 567 (1962).
2. R. E. Behrends, J. Dreitlein, C. Fronsdal and B. W. Lee, Revs. Mod. Phys. 34, 1 (1962).
3. J. J. Swart, Revs. Mod. Phys. 35, 916 (1963).
4. Y. Ne'eman, Rept. to the Intern. Conf. on Nuclear Structure, Standford, June 1963 (в печати).
5. G. F. Chew. M. Gell-Mann and A. H. Rosenfeld, Sci. Amer. 210, 74 (1964) (см. перевод: УФН 83 (4), 695 (1964)).
6. В. И. Огиевецкий, Лекции в зимней школе, Дубна, 1964.
7. Я. А. Смородинский, Об алгебре унитарной группы Гелл-Манна, Дубна, 1961 (препринт Д-738).
8. В. М. Шехтер, в сб. «Вопросы физики элементарных частиц», т. 3, Ереван, 1963, стр. 103.
9. B. L. Purcey, Proc. Roy. Soc. A275, 284 (1963).

C. ОСНОВНЫЕ РАБОТЫ

1. Y. Ne'eman, Nucl. Phys. 26, 222 (1961) (см. перевод в сб. «Элементарные частицы и компенсирующие поля», М., Изд-во «Мир», 1964 («Эчкп»)).
2. M. Gell-Mann, California Inst. of Technology Synchrotron Laboratory Report CTSL-20 (препринт), 1961 (см. перевод в сб. «Эчкп»).
3. M. Gell-Mann, Phys. Rev. 125, 1067 (1962).
4. S. Okubo, Progr. Theor. Phys. 27, 949 (1962).

D. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

1. S. Coleman and S. L. Glashow, Phys. Rev. Letts. 6, 423 (1961).
2. N. Cabibho and R. Gatto, Nuovo cimento 21, 872 (1961).
3. C. A. Levinson, H. J. Lipkin and S. Meshkov, Nuovo cimento 23, 236 (1962).
4. C. A. Levinson, H. J. Lipkin and S. Meshkov, Phys. Letts. (1964) (в печати).
5. S. P. Rosen, Phys. Rev. Letts. 11, 100 (1963).
6. A. J. Macfarlane and E. C. G. Sudarshan, Nuovo cimento 31, 1176 (1964).
7. R. Dalitz, Phys. Rev. Letts. (1964) (в печати).

E. СЛАБЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

1. M. Gell-Mann and M. Levy, Nuovo cimento 16, 705 (1958).
2. N. Cabihho, Phys. Rev. Letts. 10, 531 (1963).
3. N. Cabibbo, Phys. Rev. Letts. 12, 62 (1964).
4. S. P. Rosen, Phys. Rev. Letts. 12, 408 (1964).
5. M. Gell-Mann, Phys. Letts. 8, 214 (1964).
6. M. Gell-Mann, Phys. Rev. Letts. 12, 154 (1964).
7. G. Zweig (в печати).
8. R. Oehme, Phys. Rev. Letts. 12, 550 (1964).
9. M. M. Block, Phys. Rev. Letts. 12, 262 (1964).
10. M. Gell-Mann, Группа симметрии векторного и аксиально векторного токов (препринт), Physics (в печати).

F. НОВЫЕ ИДЕИ

1. M. Gell-Mann, Phys. Letts. 8, 214 (1964).
2. J. Schwinger, Phys. Rev. Letts. 12, 916 (1964); Phys. Rev. (в печати).
3. S. Coleman and S. L. Glashow, Phys. Rev. 134, B671 (1964).
4. J. J. Sakurai, Phys. Rev. 125, 434 (1963).
5. A. Salam and J. C. Ward, A. Gauge Theory of Elementary Interactions (препринт).

G. ДВА ЭКСПЕРИМЕНТА

1) Открытие Ω^-

1. V. E. Barnes et al. (33 автора!), Phys. Rev. Letts. 12, 204 (1964).

2) Отсутствие «кварков»

2. L. P. Leipuner, W. T. Chu, R. C. Larsen, R. K. Adair, Phys. Rev. Letts. 12, 423 (1964).
