ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Н.Н. Боголюбов

R- 1451

КВАЗИСРЕДНИЕ В ЗАДАЧАХ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

/Издание 2-е, стереотипное/

Дубна 1963

Н.Н. Боголюбов

R- 1451

КВАЗИСРЕДНИЕ В ЗАДАЧАХ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

/Издание 2-е, стереотипное/

Дубна 1963

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I. КВАЗИСРЕДНИЕ СТР

Глава I. КВАЗИСРЕДНИЕ

§ I. Функции Грина, построенные из обычных средних. Аддитивные законы сохранения и правила отбора.

В современной статистической механике все возрастающее значение приобретают понятия и методы квантовой теории поля.

Так, весьма плодотворным оказалось введение функций Грина, с помощью которых удается, например, обобщить для задач статистической механики диаграммное представление теории возмущений и проводить парциальное суммирование разложений. Здесь мы хотим, прежде всего, обсудить само определение функций Грина. Как известно, эти функции выражаются линейными формами из средних значений

$$\langle \ldots \overset{+}{\psi}(t_j, x_j) \ldots \psi(t_s, x_s) \ldots \rangle \qquad (I.I)$$

с коэффициентами, составленными из произведений функций $\theta(t_i - t_k)$. Мы используем тут следующие обозначения: $x = (\vec{r}, \sigma)$ - совокупность пространственных координат $(\vec{r})$ и ряда дискретных индексов (σ), характеризующих спин частиц, их сорт и т.п.; $\psi(t,x)$, $\overset{+}{\psi}(t,x)$ - полевые операторные функции в Гайзенберговском представлении. Эти полевые функции выражаются "квазидискретными" суммами

$$\psi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{(k)} a_{k\sigma}(t) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r})}; \qquad (2.I)$$

$$\overset{+}{\psi}(t,x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{(k)}\overset{+}{a}_{k\sigma}(t)\,e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r})}$$

через операторы рождения $\overset{+}{a}_{k\sigma}$ и уничтожения $a_{k\sigma}$, удовлетворяющие обычным перестановочным соотношениям Бозе или Ферми. В этих суммах: $k^{\alpha}=\frac{2\pi n_{\alpha}}{L}$, α = I,2,3; n_{α} - целые числа, $V=L^3$ - объем системы.

Так как функции Грина представляются универсальными (не зависящими от специфики системы) линейными формами из средних значений типа (I.I), то вопрос об определении функций Грина сводится к вопросу об определении выражения (I.I). Обычно они определяются как средние по Гиббсовскому (большому) каноническому ансамблю, причем всегда производится общепринятый предельный переход статистической механики: $V\to\infty$. Таким образом

$$\langle\ldots\overset{+}{\psi}(t_j,x_j)\ldots\psi(t_s,x_s)\ldots\rangle=\lim_{V\to\infty}\frac{Sp\left(\{\ldots\overset{+}{\psi}(t_j,x_j)\ldots\psi(t_s,x_s)\}e^{-\frac{H}{\theta}}\right)}{Sp\,e^{-\frac{H}{\theta}}}\qquad(3.I)$$

где $\mathcal{H}$ - полный гамильтониан системы; при наличии закона сохранения числа частиц в $\mathcal{H}$ включаются известные члены с химическим потенциалом.

Условимся называть средние значения (I.I), определяемые соотношениями (3.I), обычными средними, а соответствующие функции Грина - функциями Грина, построенными из обычных средних.

Обратим теперь внимание на тот хорошо известный факт,

что аддитивные законы сохранения приводят к правилам отбора для обычных средних, а тем самым и для построенных из них функций Грина.

Пусть, например, мы имеем закон сохранения полного числа частиц

$$N=\sum_{(k,\sigma)}\overset{+}{a}_{k\sigma}a_{k\sigma}=\sum_{(\sigma)}\int\overset{+}{\psi}\,\psi\,d\vec{r}$$

так что:

$$[H;N]=0$$

где H - полный гамильтониан системы (включающий член λN с химическим потенциалом λ).

Так как тогда

$$H=\overset{+}{U}HU$$

где

$$U=e^{i\varphi N}$$

и где φ - произвольное вещественное число, мы видим, что гамильтониан является инвариантным по отношению к градиентному преобразованию I-го рода:

$$a_{k\sigma}\longrightarrow\overset{+}{U}a_{k\sigma}U=e^{i\varphi}a_{k\sigma}$$

Следовательно, имеем:

$$Sp\left(\{\ldots \overset{+}{a}_{k\sigma}(t)\ldots a_{k'\sigma'}(t')\ldots\} e^{-\frac{H}{\theta}}\right) =$$
$$= Sp\left(\{\ldots \overset{+}{a}_{k\sigma}(t)\ldots a_{k'\sigma'}(t')\ldots\} \overset{+}{U} e^{-\frac{H}{\theta}} U\right) =$$
$$= Sp\left(U\{\ldots \overset{+}{a}_{k\sigma}(t)\ldots a_{k'\sigma'}(t')\ldots\} \overset{+}{U} e^{-\frac{H}{\theta}}\right) =$$
$$= e^{-i\varphi n} Sp\left(\{\ldots \overset{+}{a}_{k\sigma}(t)\ldots a_{k'\sigma'}(t')\ldots\} e^{-\frac{H}{\theta}}\right)$$

где n - разность между числом операторов a и числом операторов $\overset{+}{a}$ в рассматриваемом произведении $\ldots \overset{+}{a}_{k\sigma}(t)\ldots a_{k'\sigma'}(t')$ Отсюда, на основании самого определения (3.I) находим:

$$\left(1-e^{-i\varphi n}\right)\langle \ldots \overset{+}{a}_{k\sigma}(t)\ldots a_{k'\sigma'}(t')\ldots\rangle = 0$$

и тем самым убеждаемся, что:

$$\langle \ldots \overset{+}{a}_{k\sigma}(t)\ldots a_{k'\sigma'}(t')\ldots\rangle = 0$$

если в данном произведении число операторов рождения не равно числу операторов уничтожения.

Так как функции Грина выражаются универсальными линейными формами из обычных средних, то эти же правила отбора справедливы и для функций Грина, например:

$$\langle T(\ldots \overset{+}{a}_{k\sigma}(t)\ldots a_{k'\sigma'}(t')\ldots)\rangle = 0 \quad , \text{ если } n \neq 0$$

Рассмотрим еще правила отбора, обусловленные законом сохранения полного импульса:

$$\vec{\mathcal{P}} = \sum_{(k,\sigma)} \vec{k}\, \overset{+}{a}_{k\sigma} a_{k\sigma}$$

Имеем при наличии этого закона сохранения:

$$Sp\left\{[\vec{\mathcal{P}}; \mathcal{U}] e^{-\frac{H}{\theta}}\right\} = Sp\left\{\mathcal{U}[e^{-\frac{H}{\theta}}; \vec{\mathcal{P}}]\right\} = 0$$

Положим здесь

$$\mathcal{U} = \ldots \overset{+}{\psi}(t_j, \vec{r}_j + \vec{\xi}_j, \sigma_j)\ldots \psi(t_s, \vec{r}_s + \vec{\xi}, \sigma_s)\ldots$$

и заметим, что:

$$i\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\langle \mathcal{U}\rangle = \langle [\mathcal{P}_\alpha; \mathcal{U}]\rangle = \frac{Sp\{[\mathcal{P}_\alpha, \mathcal{U}] e^{-\frac{H}{\theta}}\}}{Sp\, e^{-\frac{H}{\theta}}} = 0$$

Таким образом средние (I.I) не изменяются при пространственной трансляции

$$\vec{r}_j \longrightarrow \vec{r}_j + \vec{\xi}$$

с произвольным вектором $\vec{\xi}$. Иначе говоря, обычные средние (I.I) должны быть пространственно однородны. Воспользуемся теперь импульсным представлением (2.I). Получим

$$\langle \ldots \overset{+}{\psi}(t_j, \vec{r}_j, \sigma_j)\ldots \psi(t_s, \vec{r}_s, \sigma_s)\ldots\rangle =$$
$$= \frac{1}{V^{n/2}} \sum_{(\ldots k_\nu, \sigma_\nu \ldots)} \langle \ldots \overset{+}{a}_{-k_j, \sigma_j}(t_j)\ldots a_{k_s \sigma_s}(t_s)\ldots\rangle e^{i(\vec{k}_1\vec{r}_1 + \ldots + \vec{k}_n\vec{r}_n)}$$
$$= 0$$

Отсюда, принимая во внимание трансляционную инвариантность, мы и находим правила отбора:

$$<\dots \overset{+}{a}_{-k_j,\sigma_j}(t_j)\dots a_{k_s,\sigma_s}(t_s)\dots> = 0, \text{ если } \vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_n \neq 0$$

Такие же соотношения выполняются и для функций Грина. Имеем например:

$$<T(\dots \overset{+}{a}_{-k_j,\sigma_j}(t_j)\dots a_{k_s,\sigma_s}(t_s)\dots)> = 0, \text{ если } \vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_n \neq 0$$

Аналогичная ситуация возникает при учете законов сохранения суммарного спина и других аддитивных динамических величин. Правила отбора приобретают особую наглядность при переходе к диаграммному представлению теории возмущений. Для формулировки теории возмущений полный гамильтониан разбивается на две части: H_0 и H_1 :

$$\mathcal{H} = H_0 + H_1$$

причем, разложения проводятся "по степеням H_1 ".

Как правило, за H_0 выбирают гамильтониан, соответствующий "идеальному газу" без взаимодействия; все взаимодействие включается в H_1 . Мы хотим здесь подчеркнуть то, что, выделяя H_0 , обеспечивают выполнение упоминавшихся выше аддитивных законов сохранения также и для "динамической системы нулевого приближения", характеризуемой гамильтонианом H_0 . Благодаря такому выделению H_0 для совокупности точных функций Грина и для совокупности функций Грина нулевого приближения получаются те же самые правила отбора. Возьмем диаграммное представление.

Мы можем иметь здесь в виду или обычные диаграммы Фейнмана для случая нулевой температуры, или обобщающие их диаграммы Мацубара-К.Блоха для $\theta > 0$. В обоих случаях диаграммы характеризуются линиями и узлами; в каждом из узлов выполняются аддитивные законы сохранения, все допустимые линии также удовлетворяют этим законам.

Пусть, например, мы имеем систему частиц со спином $\sigma = \pm 1/2$, полное число которых сохраняется. Пусть также имеют место законы сохранения суммарного импульса и z - компоненты суммарного спина. Тогда все "спаривания", т.е. все функции Грина нулевого приближения типа:

$$\overset{+}{a}_{p_1\sigma_1}\overset{+}{a}_{p_2\sigma_2}; \quad a_{p_1\sigma_1}a_{p_2\sigma_2}, \quad \overset{+}{a}_{p\sigma}a_{p'\sigma'}, \quad a_{p\sigma}a_{p'\sigma'}$$

при $\vec{p} \neq \vec{p}'$ или $\sigma \neq \sigma'$, равны тождественно нулю.

Единственными допустимыми линиями распространения рассматриваемых частиц будут линии, соответствующие спариваниям:

$$\overset{+}{a}_{p\sigma}a_{p\sigma}, \quad a_{p\sigma}\overset{+}{a}_{p\sigma}$$

сохраняющим $\vec{p}$ и σ .

Такая же ситуация возникает и для "жирных", "просуммированных" линий, соответствующих точным функциям Грина. Точные функции Грина типа

$$\langle\langle \overset{+}{a}_{p_1\sigma_1}, \overset{+}{a}_{p_2\sigma_2} \rangle\rangle, \quad \langle\langle a_{p_1\sigma_1}, a_{p_2\sigma_2} \rangle\rangle, \quad \langle\langle \overset{+}{a}_{p\sigma}, a_{p'\sigma'} \rangle\rangle,$$
$$\langle\langle a_{p\sigma}, \overset{+}{a}_{p'\sigma'} \rangle\rangle$$

при $\vec{p} \neq \vec{p}'$ или $\sigma \neq \sigma'$ все равны нулю; единственно допустимыми будут жирные линии, характеризуемые функциями Грина

$$\langle\langle \overset{+}{a}_{p\sigma}, a_{p\sigma} \rangle\rangle \qquad \text{или} \qquad \langle\langle a_{p\sigma}, \overset{+}{a}_{p\sigma} \rangle\rangle$$

сохраняющими $\vec{p}$ и σ .

Как видно, правила отбора существенно упрощают и топологическую структуру диаграмм и фактически проводящиеся вычисления.

§ 2. Вырождение состояний статистического равновесия. Введение квазисредних.

Применяя диаграммную технику, нельзя упускать из виду, что она является лишь удобным представлением обычной теории возмущений и естественно сталкивается с теми же трудностями, в частности, с весьма сложным вопросом о сходимости получающихся разложений.

В настоящее время сходимость удается доказать лишь для ряда простейших модельных примеров. Для более реалистических задач можно лишь предполагать наличие некоторого соответствия между истинными решениями и получающимися формальными разложениями. Такие формальные разложения используются, в частности, для построения приближенных решений. Весьма эффективным приемом оказывается здесь парциальное суммирование в каком-то смысле "главных" членов,

что особенно удобно проводить с помощью диаграммной техники.

Если возмущение является "достаточно слабым" и характеризуется малым параметром, приближенные решения строятся как асимптотические формулы. Парциальные суммирования играют тут роль средства учета особенности при нулевом значении параметра малости возмущения. Несмотря на то, что с математической стороны законность всех этих приемов не выяснена, тем не менее во многих важных задачах таким путем удается получать физически корректные результаты и притом не только асимптотические формулы, но и результаты, относящиеся к качественным свойствам точных решений. Однако, в ряде случаев, например в теории сверхпроводимости и теории кристаллического состояния обычная диаграммная техника не приводит к физически корректным результатам.

По нашему мнению было бы недостаточно ограничиваться здесь лишь ссылками на такие формальные причины, как отсутствие сходимости, сложность аналитической структуры по отношению к малому параметру и т.п. Следует поискать физически обоснованных, конструктивных разрешений возникающих трудностей.

Здесь мы хотим обратить внимание на такое, хорошо известное в квантовой механике понятие, как понятие вырождения. При рассмотрении задач о нахождении собственных волновых функций в квантовой механике разъясняется, что теорию возмущений в обычной форме, разработанной для невырожденных случаев, нельзя прямо применять к задачам, где имеется вырождение. Необходимо ее предварительно видоизменить.

В задачах статистической механики благодаря наличию аддитивных законов сохранения мы всегда имеем случай вырождения.

Однако на первый взгляд может показаться, что в этих задачах вырождение не эффективно и его практически можно не учитывать. В самом деле, в упоминавшихся задачах квантовой механики одному собственному значению энергии может соответствовать линейное многообразие из различных собственных функций; собственная функция в таком случае содержит неопределенные постоянные.

В статистической же механике среднее значение любой динамической величины $\mathfrak{U}$ всегда однозначно определено:

$$\langle \mathfrak{U} \rangle = \frac{Sp\left(\mathfrak{U} e^{-\frac{H}{\theta}}\right)}{Sp\, e^{-\frac{H}{\theta}}}$$

Следовательно, и построенные из обычных средних функции Грина также должны определяться однозначно. Отсюда и может показаться, что при изучении статистического равновесия, скажем, с помощью диаграммной техники, не надо принимать во внимание наличие вырождения.

Однако в действительности положение не так просто. Чтобы составить себе интуитивное представление о характере возникающих здесь трудностей, рассмотрим случай идеально изотропного ферромагнетика.

Для определенности возьмем динамическую систему, характеризуемую гамильтонианом (модель Гейзенберга):

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{(f_1, f_2)} J(f_1 - f_2)\left(\vec{S}_{f_1} \cdot \vec{S}_{f_2}\right) \tag{2.I}$$

где (f) - пространственные точки, соответствующие узлам кристаллической решетки (лежащие в объеме V), $\vec{S}_f$ - векторы спина с обычными перестановочными соотношениями, $J(f_1 - f_2)$ - неотрицательные числа; предполагается, что $J(f_1 - f_2)$ положительны, например, когда узлы f_1 , f_2 будут "ближайшими соседями".

Для рассматриваемой динамической системы каждая из компонент вектора суммарного спина

$$\vec{S} = \sum_{(f)} \vec{S}_f$$

является интегралом движения.

Имеем также

$$S_x S_y - S_y S_x = i S_z$$

$$S_y S_z - S_z S_y = i S_x$$

$$S_z S_x - S_x S_z = i S_y$$

Отсюда следует, что:

$$i\, Sp\left(S_z e^{-\frac{H}{\theta}}\right) = Sp\left\{\left(S_x S_y - S_y S_x\right) e^{-\frac{H}{\theta}}\right\}$$

Но, поскольку S_x коммутирует с H , получим:

$$Sp\left(S_y S_x e^{-\frac{H}{\theta}}\right) = Sp\left(S_y e^{-\frac{H}{\theta}} S_x\right) = Sp\left(S_x S_y e^{-\frac{H}{\theta}}\right)$$

и потому:

$$Sp\left(S_z e^{-\frac{H}{\theta}}\right) = 0$$

Совершенно аналогично найдем:

$$Sp\left(S_x e^{-\frac{H}{\theta}}\right) = 0, \quad Sp\left(S_y e^{-\frac{H}{\theta}}\right) = 0$$

Введем вектор намагничения, отнесенный к единице объема:

$$\vec{\mathfrak{M}} = \mu \frac{1}{V} \sum_{(f)} \vec{S}_f = \mu \frac{1}{V} \vec{S}$$

Имеем:

$$Sp\left(\vec{\mathfrak{M}} e^{-\frac{H}{\theta}}\right) = 0$$

и, следовательно:

$$\langle \vec{\mathfrak{M}} \rangle = \lim_{V \to \infty} \frac{Sp\left(\vec{\mathfrak{M}} e^{-\frac{H}{\theta}}\right)}{Sp\, e^{-\frac{H}{\theta}}} = 0 \qquad (2.2)$$

Итак, обычное среднее от вектора $\vec{\mathfrak{M}}$ равно нулю, что, очевидно, соответствует изотропии рассматриваемой динамической системы по отношению к группе вращения спина.

Подчеркнем, что соотношение (2.2) справедливо для всех температур θ, <u>в частности, и для температур ниже точки Кюри</u>.

Рассмотрим сейчас специально именно этот последний случай. Тогда, как известно, величина вектора намагничения отлична от нуля, направление же его может быть взято произвольно. В этом смысле <u>состояние статистического равновесия в рассматриваемом случае является вырожденным</u>.

Включим теперь внешнее магнитное поле $\nu \vec{e}\ (\nu > 0, \vec{e}^{\,2} = 1)$ заменив гамильтониан (2.I) на гамильтониан:

$$H_{\nu\vec{e}} = H + \nu (\vec{e} \cdot \vec{\mathfrak{M}}) V \qquad (2.3)$$

Тогда, принимая во внимание характерное свойство изотропных ферромагнетиков при температурах ниже точки Кюри, видим, что:

$$\langle \vec{\mathfrak{M}} \rangle = \vec{e} M_\nu$$

где M_ν будет стремиться к конечному, отличному от нуля, пределу, когда интенсивность ν внешнего магнитного поля стремится к нулю. С формальной точки зрения мы имеем здесь "нестабильность" обычных средних – при добавлении к гамильтониану (2.I) члена $\nu(\vec{e} \cdot \vec{\mathfrak{M}})V$ с бесконечно малым[x)] ν среднее $\langle \vec{\mathfrak{M}} \rangle$ претерпевает конечное, отличное от нуля, приращение:

$$\vec{e} m; \qquad m = \lim_{\nu \to 0} M_\nu$$

Введем теперь для динамической системы с гамильтонианом

---

x) Когда мы говорим о бесконечно малом ν, мы всегда подразумеваем, что <u>сначала</u> проводится предельный переход статистической механики $V \to \infty$, <u>а затем</u> ν устремляется к нулю.

(2.I) понятие "квазисредней".

Возьмем какую-либо динамическую величину A, являющуюся линейной комбинацией из произведений:

$$S_{f_1}^{\alpha_1}(t_1)\ldots S_{f_2}^{\alpha_2}(t_2)$$

и определим квазисреднее $\prec A \succ$ от этой величины, положив:

$$\prec A \succ = \lim_{\nu\to 0} \langle A \rangle$$

где $\langle A \rangle_{\nu\vec{e}}$ - обычное среднее от A при гамильтониане $H_{\nu\vec{e}}$

Таким образом, наличие вырождения непосредственно отражается на квазисредних их зависимостью от произвольного орта $\vec{e}$.

Нетрудно заметить также, что:

$$\langle A \rangle = \int \prec A \succ d\vec{e} \tag{2.4}$$

Понятно теперь, что для описания рассматриваемого случая вырожденного состояния статистического равновесия квазисредние более удобны, более "физичны", чем обычные средние. Эти последние представляют собой те же квазисредние, только усредненные по всем направлениям $\vec{e}$.

Заметим еще, что обычные средние:

$$\langle S_{f_1}^{\alpha_1}(t_1)\ldots S_{f_2}^{\alpha_2}(t_2)\rangle$$

должны быть инвариантны по отношению к группе вращения спина.

Соответствующие квазисредние:

$$\prec S_{f_1}^{\alpha_1}(t_1)\ldots S_{f_2}^{\alpha_2}(t_2)\succ \tag{2.5}$$

будут обладать лишь свойством ковариантности - при вращении спинов надо подвергнуть такому же вращению и вектор $\vec{e}$, чтобы выражение (2.5) не изменилось.

У квазисредних таким образом не будет тех правил отбора, которые для обычных средних обуславливались их инвариантностью по отношению к группе вращения спина. Как видно, орт $\vec{e}$ - направление вектора намагничения - характеризует вырождение рассматриваемого состояния статистического равновесия. Чтобы снять вырождение, надо зафиксировать направление $\vec{e}$. Примем за это направление ось z. Тогда все квазисредние станут определенными числами. Как раз с такого рода средними обычно и имеют дело в теории ферромагнетизма.

Иначе говоря, мы можем снять вырождение состояния статистического равновесия по отношению к группе вращения спина, включив в гамильтониан H дополнительный неинвариантный член $\nu \mathfrak{M}_z V$ с бесконечно малым ν.

Перейдем теперь к рассмотрению другого примера вырождения, обратившись для этого к теории кристаллического состояния. Возьмем динамическую систему бесспиновых частиц с бинарным взаимодействием, характеризуемую гамильтонианом обычного типа:

$$H=\sum_{(p)}\left(\frac{p^2}{2m}-\lambda\right)\overset{+}{a}_p a_p+\frac{1}{2V}\sum_{(p_1,p_2,p_1',p_2')}\overset{+}{a}_{p_1}\overset{+}{a}_{p_2}a_{p_2'}a_{p_1'}\times$$
$$\times\,\delta\left(\vec{p}_1+\vec{p}_2-\vec{p}_1{}'-\vec{p}_2{}'\right)\nu\left(p_1-p_1'\right) \tag{2.6}$$

в котором $\delta(\vec{p})$ - дискретная δ-функция, $\nu(p)$ - Фурье-образ потенциальной энергии взаимодействия $\phi(r)$ пары частиц. Предположим, что это взаимодействие такого типа, что наша динамическая система должна находиться в кристаллическом состоянии при достаточно низких температурах: $\theta < \theta_{cr}$.

Рассмотрим наблюдаемую плотность числа частиц $\rho(\vec{r})$, которая, очевидно, должна быть периодической функцией $\vec{r}$ с периодом решетки кристалла. Естественно казалось бы считать, что $\rho(\vec{r})$ равна обычному среднему значению операторной плотности $\overset{+}{\psi}(\vec{r})\psi(\vec{r})$:

$$\rho(\vec{r}) = \langle \overset{+}{\psi}(\vec{r})\psi(\vec{r})\rangle = \frac{1}{V}\sum_{(q)}\left\{\sum_{(k)}\langle \overset{+}{a}_k a_{k+q}\rangle\right\} e^{i(\vec{q}\cdot\vec{r})}$$

Это, однако, неправильно.

В самом деле, в рассматриваемом случае имеется закон сохранения полного импульса:

$$\vec{P} = \sum_{(k)} \vec{k}\, \overset{+}{a}_k a_k$$

и потому, на основании сказанного в § I, мы имеем правила отбора:

$$\langle \overset{+}{a}_k a_{k+q}\rangle = 0 \quad , \text{ если } \quad q \neq 0$$

откуда:

$$\langle \overset{+}{\psi}(\vec{r})\psi(\vec{r})\rangle = \frac{1}{V}\sum_{(k)}\langle \overset{+}{a}_k a_k\rangle = \frac{N}{V} = Const$$

Таким образом, обычное среднее значение операторной плотности не может быть равно периодической функции $\rho(\vec{r})$ Ясно, что такое положение вызвано вырождением рассматриваемого состояния статистического равновесия. Действительно, кристаллическая решетка, как целое, может быть произвольно расположена в пространстве. В частности, наш гамильтониан обладает трансляционной инвариантностью и потому всегда можно дать решетке произвольную трансляцию.

Какое-либо специальное положение кристаллической решетки в пространстве ничем не выделено и когда мы берем обычную среднюю, мы тем самым усредняем по всем возможным расположениям этой решетки. Чтобы снять такое вырождение и ввести квазисредние, включим в выражение гамильтониана член:

$$\nu\int U(\vec{r})\overset{+}{\psi}(\vec{r})\psi(\vec{r})d\vec{r}; \quad \nu > 0, \quad \nu \to 0 \qquad (2.7)$$

соответствующий бесконечно-малому внешнему полю $\nu U(\vec{r})$ Полученный гамильтониан обозначим через H_ν . В качестве $U(\vec{r})$ мы возьмем периодическую функцию $\vec{r}$ с соответствующей периодичностью (периодичностью решетки) так, чтобы внешнее поле νU снимало вырождение, фиксируя положение нашего кристалла в пространстве.

Так как, с другой стороны, мы естественно рассматриваем только физически стабильные случаи, ясно, что включение бесконечно малого внешнего поля может лишь бесконечно мало изменить физические свойства изучаемой динамической системы.

Поэтому, взяв обычную среднюю от операторной плотности $\overset{+}{\psi}(\vec{r})\,\psi(\vec{r})$ для гамильтониана H_ν с бесконечно малым ν, мы фактически получим среднюю для системы с первоначальным гамильтонианом H, но без дополнительного усреднения по расположениям (как целого) кристаллической решетки в пространстве, поскольку ее положение теперь закреплено.

Таким образом, мы получим наблюдаемую пространственную плотность распределения частиц $\rho(\vec{r})$. Определим формально квазисредние, положив:

$$\langle \ldots \overset{+}{\psi}(t_j,\vec{r}_j)\ldots\psi(t_s,\vec{r}_s)\ldots\rangle = \lim_{(\nu\to 0)} \langle \ldots \overset{+}{\psi}(t_j,\vec{r}_j)\ldots\psi(t_s,\vec{r}_s)\ldots\rangle_{H_\nu}$$

Тогда, как уже отмечалось:

$$\langle \overset{+}{\psi}(\vec{r})\,\psi(\vec{r})\rangle = \rho(\vec{r})$$

Приняв во внимание, что:

$$\langle \overset{+}{\psi}(\vec{r})\psi(\vec{r})\rangle = \frac{1}{V}\sum_{(q)}\Big\{\sum_{(k)}\langle \overset{+}{a}_k\, a_{k+q}\rangle\Big\}\, e^{i(\vec{q}\cdot\vec{r})}$$

мы видим, что квазисредние

$$\langle \overset{+}{a}_k\, a_{k'}\rangle;\quad k'\neq k \tag{2.8}$$

не могут все равняться нулю.

Таким образом, правила отбора, обусловленные законом сохранения суммарного импульса, не выполняются для введенных квазисредних.

Заметим теперь, что квазисредние зависят вообще от ряда произвольных параметров, например, от произвольного вектора $\vec{\xi}$. В самом деле, если мы заменим функцию $U(\vec{r})$ на столь же допустимую функцию $U(\vec{r}+\vec{\xi})$, то нетрудно убедиться, что квазисредние (2.8) заменятся на

$$\langle \overset{+}{a}_k\, a_{k'}\rangle\, e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{\xi}}$$

Квазисредние становятся однозначно определенными, когда мы фиксируем функцию $U(\vec{r})$. Мы рассматривали до сих пор случаи вырождения состояния статистического равновесия, связанные с законом сохранения суммарного вектора спина или суммарного вектора импульса. В обоих случаях вырождение могло быть снято и введены физически адекватные квазисредние путем включения подходящего бесконечно малого внешнего поля.

Перейдем теперь к рассмотрению тех случаев, когда вырождение связано с законом сохранения полного числа частиц. Начнем с элементарного примера конденсации Бозе-Эйнштейновского идеального газа. Чтобы было удобнее выделить конденсат, возьмем гамильтониан идеального газа в форме:

$$H = -\lambda\,\overset{+}{a}_0 a_0 + \sum_{|k|>\varepsilon}\Big(\frac{k^2}{2m}-\lambda\Big)\overset{+}{a}_k a_k,\quad \varepsilon>0 \tag{2.9}$$

Здесь величину ε будем стремить к нулю после совершения предельного перехода: $V\to\infty$. Для средних чисел заполнения импульсов найдем:

$$N_0 = \frac{1}{e^{-\frac{\lambda}{\theta}} - 1}$$

$$N_k = \frac{1}{e^{\frac{\frac{k^2}{2m} - \lambda}{\theta}} - 1}; \quad |k| > \varepsilon$$

Сразу же видно отсюда, что

$$\lambda < 0$$

Обозначая полное число частиц через N, получим:

$$\frac{N}{V} = \frac{N^0}{V} + \frac{1}{V} \sum_{|k|>\varepsilon} \frac{1}{e^{\frac{\frac{k^2}{2m} - \lambda}{\theta}} - 1} \tag{2.10}$$

$$\lambda = -\theta \ln \left(1 + \frac{1}{N_0}\right)$$

Рассмотрим случай Бозе-Эйнштейновской конденсации, когда

$$n_0 = \lim \frac{N_0}{V}$$

является конечной, отличной от нуля величиной.

В этом случае, переходя к пределу в соотношении (2.10), найдем:

$$n = \lim \frac{N}{V} = n_0 + \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{|k|>\varepsilon} \frac{d\vec{k}}{\exp\left\{\frac{k^2}{2m\theta}\right\} - 1}$$

Устремив здесь "импульс обрезания" ε к нулю, получим окончательно

$$n = n_0 + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{k}}{\exp\left\{\frac{k^2}{2m\theta}\right\} - 1} \tag{2.11}$$

Таким образом, приходим к условию конденсации в обычной форме:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{k}}{\exp\left(\frac{k^2}{2m\theta}\right) - 1} < n$$

Нетрудно заметить, что оператор $\frac{\overset{+}{a}_0 a_0}{V}$ асимптотически равен C -числу:

$$\frac{\overset{+}{a}_0 a_0}{V} \sim n_0 \tag{2.12}$$

Рассмотрим амплитуды

$$\frac{a_0}{\sqrt{V}}, \quad \frac{\overset{+}{a}_0}{\sqrt{V}};$$

коммутирующие со всеми амплитудами

$$a_k, \quad \overset{+}{a}_k, \quad k \neq 0$$

Так как коммутатор

$$\left[\frac{a_0}{\sqrt{V}}, \frac{\overset{+}{a}_0}{\sqrt{V}}\right] = \frac{1}{V}$$

является бесконечно малым $(V \to \infty)$, то можем считать также и рассматриваемые амплитуды C -числами, причем, ввиду (2.12)

$$\frac{a_0}{\sqrt{V}} \sim \sqrt{n_0}\, e^{i\alpha}, \quad \frac{\overset{+}{a}_0}{\sqrt{V}} \sim \sqrt{n_0}\, e^{-i\alpha} \tag{2.13}$$

Вещественный фазовый угол α здесь произволен. Этот факт находится в связи с градиентной инвариантностью I-го рода, обусловленной законом сохранения числа частиц и указывает на появление вырождения.

Возьмем обычные средние:

$$\left\langle \frac{a_0}{\sqrt{V}} \right\rangle, \quad \left\langle \frac{\overset{+}{a}_0}{\sqrt{V}} \right\rangle$$

и заметим, что благодаря правилам отбора, они точно равны нулю. Тем самым находим, что обычные средние включают еще дополнительное усреднение по углу α. Чтобы ввести квазисредние и снять вырождение, включим в гамильтониан H члены:

$$-\nu \left(\overset{+}{a}_0 e^{i\varphi} + a_0 e^{-i\varphi} \right) \sqrt{V}, \quad \nu > 0$$

Положим:

$$H_{\nu,\varphi} = H - \nu \left(\overset{+}{a}_0 e^{i\varphi} + a_0 e^{-i\varphi} \right) \sqrt{V} \qquad (2.I4)$$

где φ - некоторый фиксированный угол.

Для приведения (2.I4) к диагональной форме совершим каноническое преобразование над амплитудами a_0, $\overset{+}{a}_0$, не меняя остальных амплитуд a_k, $\overset{+}{a}_k$:

$$a_0 = \frac{\nu}{\lambda} e^{i\varphi} \sqrt{V} + a_0' \qquad (2.I5)$$
$$\overset{+}{a}_0 = -\frac{\nu}{\lambda} e^{-i\varphi} \sqrt{V} + \overset{+}{a}{}_0'$$

Получим:

$$H = -\lambda \overset{+}{a}{}_0' a_0' + \sum \left(\frac{k^2}{2m} - \lambda \right) \overset{+}{a}_k a_k + \frac{\nu^2}{\lambda} V \qquad (2.I6)$$

Положим здесь

$$\lambda = -\frac{\nu}{\sqrt{n_0}} \qquad (2.I7)$$

Тогда:

$$\langle a_0' \rangle_{\nu,\varphi} = 0, \quad \langle \overset{+}{a}{}_0' \rangle_{\nu,\varphi} = 0$$

$$\langle \overset{+}{a}{}_0' a_0' \rangle_{\nu,\varphi} = \left\{ \exp \frac{\nu}{\theta \sqrt{n_0}} - 1 \right\}^{-1}$$

$$\langle \overset{+}{a}_k a_k \rangle_{\nu,\varphi} = \left\{ \exp \left(\frac{\frac{\nu}{\sqrt{n_0}} + \frac{k^2}{2m}}{\theta} \right) - 1 \right\}^{-1}$$

где $\langle \ldots \rangle_{\nu,\varphi}$ обозначает среднее для гамильтониана $H_{\nu,\varphi}$

Поэтому, на основании (2.I5), (2.I7):

$$N_k = \left\{ \exp \left(\frac{\frac{\nu}{\sqrt{n_0}} + \frac{k^2}{2m}}{\theta} \right) - 1 \right\}^{-1}$$

$$N_0 = n_0 V + \frac{1}{e^{\frac{\nu}{\theta\sqrt{n_0}}} - 1} \qquad (2.I8)$$

и

$$\frac{N}{V} = \frac{N_0}{V} + \frac{1}{V} \sum \left\{ \exp \left(\frac{\frac{\nu}{\sqrt{n_0}} + \frac{k^2}{2m}}{\theta} \right) - 1 \right\}^{-1} \qquad (2.I9)$$

Благодаря наличию в экспоненте "предохранительного" слагаемого $\frac{\nu}{\sqrt{n_0}}$, нам сейчас можно и не вводить "импульс обрезания ε ". Непосредственным переходом к пределу в соотношении (2.I9) найдем:

$$n = n_0 + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left\{ \exp \left(\frac{\frac{\nu}{\sqrt{n_0}} + \frac{k^2}{2m}}{\theta} \right) - 1 \right\}^{-1} d\vec{k} \qquad (2.20)$$

Заметим далее, что:

$$\left\langle \left(\frac{\overset{+}{a}_0}{\sqrt{V}} - \sqrt{n_0}\, e^{-i\varphi} \right) \left(\frac{a_0}{\sqrt{V}} - \sqrt{n_0}\, e^{i\varphi} \right) \right\rangle_{\nu\varphi} = \left\langle \frac{\overset{+}{a}{}'_0 a'_0}{V} \right\rangle =$$

$$= \lim_{V \to \infty} \frac{1}{V} \frac{1}{e^{\nu/\theta\sqrt{n_0}} - 1} = 0$$

Следовательно, асимптотически:

$$\frac{a_0}{\sqrt{V}} \sim \sqrt{n_0}\, e^{i\varphi}, \quad \frac{\overset{+}{a}_0}{\sqrt{V}} \sim \sqrt{n_0}\, e^{-i\varphi}$$

т.е. для системы с гамильтонианом $H_{\nu,\varphi}$ амплитуды конденсата асимптотически являются фиксированными c - числами. Полученные выше формулы (2.I8), (2.I9), (2.20) показывают, что, совершив предельный переход $\nu \to 0$ (после предельного перехода $V \to \infty$), мы приходим к обычным результатам теории конденсации идеального Бозе-газа.

Введем квазисредние:

$$\langle \ldots \rangle = \lim_{\nu \to 0} \langle \ldots \rangle_{\nu,\varphi}$$

Тогда

$$\left\langle \frac{a_0}{\sqrt{V}} \right\rangle = \sqrt{n_0}\, e^{i\varphi}, \quad \left\langle \frac{\overset{+}{a}_0}{\sqrt{V}} \right\rangle = \sqrt{n_0}\, e^{-i\varphi}$$

Как видно, правила отбора, обусловленные законом сохранения частиц не выполняются для квазисредних. Видим также, что квазисредние зависят от фазового угла φ, который

можем фиксировать произвольно. Возьмем $\varphi = 0$. Тогда квазисредние становятся определенными величинами. Иначе говоря, вырождение снимается добавлением к гамильтониану H бесконечно малого члена

$$-\nu \left(a_0 + \overset{+}{a}_0 \right) \sqrt{V}$$

В рассматриваемом случае квазисредние отличаются от обычных средних только для амплитуд конденсата благодаря тому, что мы имеем сейчас идеальный газ без взаимодействия. При наличии взаимодействия это отличие распространяется и на остальные амплитуды. Появятся, например, отличные от нуля квазисредние типа

$$\langle a_k a_{-k} \rangle$$

Перейдем теперь к рассмотрению более сложного примера. Возьмем модельную динамическую систему с гамильтонианом:

$$H = \sum_{(f)} T(f) \overset{+}{a}_f a_f - \frac{1}{2V} \sum_{(f,f')} \lambda(f) \lambda(f') \overset{+}{a}_f \overset{+}{a}_{-f} a_{f'} a_{f'} \tag{2.21}$$

изучавшуюся в связи с теорией сверхпроводимости [1,2]. Мы приняли здесь следующие обозначения:

$$f = (\vec{p}, s); \; -f = (-\vec{p}, -s); \; s = \pm 1, \; T(f) = \frac{p^2}{2m} - \mu,$$

$\mu > 0$

$$\lambda(f) = \begin{cases} J\epsilon(s), & \text{если } \left| \frac{p^2}{2m} - \mu \right| < \Delta \\ 0, & \text{если } \left| \frac{p^2}{2m} - \mu \right| > \Delta \end{cases}$$

$a_f, \overset{+}{a}_f$ - обычные Ферми-амплитуды.

Данный пример является интересным в том отношении, что он нетривиален- уравнения движения для гамильтониана (2.21) точно не интегрируются. Вместе с тем, асимптотически точные формулы (при $V \to \infty$) могут быть получены для функций Грина всех порядков.

Приведем здесь, вкратце, относящиеся сюда результаты, опубликованные в работах /3,4/ . Возьмем "аппроксимирующий гамильтониан"

$$H_0 = \sum_{(f)} T(f)\, \overset{+}{a}_f a_f - \frac{1}{2}\sum_{(f)} \lambda(f) \left\{ C^* a_f a_f + C \overset{+}{a}_f \overset{+}{a}_f \right\} + \frac{|C|^2}{2} V \qquad (2.22)$$

в котором величина C является c - числом (вообще говоря, комплексным), определяемым как нетривиальное ($C \neq 0$) решение уравнения:

$$C = \frac{1}{V} \sum_{(f)} \lambda(f) \langle a_f a_f \rangle_{H_0}^{(V)} \qquad (2.23)$$

Здесь:

$$\langle \dots \rangle_{H_0}^{(V)} = \frac{Sp(\dots)\, e^{-\frac{H_0}{\theta}}}{Sp\, e^{-\frac{H_0}{\theta}}}$$

В связи с принятым обозначением напомним, что обычное среднее

$$\langle \dots \rangle_H$$

определяется как предел:

$$\lim_{V\to\infty} \langle \dots \rangle_H^{(V)}$$

Так как H_0 с точностью до постоянного члена представляется квадратичной формой по отношению к операторам a, $\overset{+}{a}$, мы можем привести H_0 к "диагональному виду" посредством линейного канонического преобразования. Введем, действительно, новые Ферми-амплитуды α и $\overset{+}{\alpha}$, положив:

$$\alpha_f = a_f u_f + \overset{+}{a}_{-f} v_f$$
$$\overset{+}{\alpha}_f = \overset{+}{a}_f u_f + a_{-f} v_f^*$$

где

$$u_f = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{T(f)}{E(f)}}, \quad v_f = \frac{-\epsilon(s)}{\sqrt{2}} \frac{C}{|C|} \sqrt{1 - \frac{T(f)}{E(f)}}$$

$$E(f) = \sqrt{\lambda^2(f)|C|^2 + T^2(f)}$$

Тогда:

$$H_0 = \sum_{(f)} E(f)\, \overset{+}{\alpha}_f \alpha_f + \mathcal{K} \qquad (2.24)$$

где $\mathcal{K}$ - постоянная:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} V \left\{ |C|^2 - \frac{1}{V} \sum_{(f)} \left[E(f) - T(f) \right] \right\}$$

Отсюда найдем:

$$\langle \overset{+}{\alpha}_f \alpha_f \rangle_{H_0}^{(V)} = \frac{1}{e^{\frac{E(f)}{\theta}} + 1}$$

и

$$\langle a_{-f} a_f \rangle_{H_0}^{(V)} = u_f v_f \frac{1-e^{\frac{E(f)}{\theta}}}{1+e^{\frac{E(f)}{\theta}}} = -u_f v_f \, th \frac{E(f)}{2\theta} = \frac{\lambda(f)}{2E(f)} \, cth \frac{E(f)}{2\theta}$$

Мы можем теперь раскрыть соотношение (2.23), получив:

$$\left\{ 1 - \frac{1}{2V} \sum_{(f)} \frac{\lambda^2(f)}{E(f)} \, th \frac{E(f)}{2\theta} \right\} C = 0$$

Таким образом, искомое нетривиальное решение C определяется уравнением:

$$1 = \frac{1}{2V} \sum_{(f)} \frac{\lambda^2(f)}{\sqrt{\lambda^2(f)|C|^2 + T^2(f)}} \times th \left\{ \frac{\sqrt{\lambda^2(f)|C|^2 + T^2(f)}}{2\theta} \right\} \tag{2.25}$$

или после предельного перехода $V \to \infty$:

$$1 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\lambda^2(p)\, d\vec{p}}{\sqrt{\lambda^2(p)|C|^2 + T^2(p)}} \, th \left\{ \frac{\sqrt{\lambda^2(p)|C|^2 + T^2(p)}}{2\theta} \right\} \tag{2.26}$$

Как известно, это уравнение имеет решение для θ, меньших некоторого критического θ_{cr}. Только такой случай: $\theta < \theta_{cr}$ мы будем рассматривать. Заметим также, что уравнение (2.25) (или (2.26)) определяет только модуль $|C|$, фаза же C остается произвольной.

Рассмотрим среднее

$$\langle \ldots \overset{+}{a}_{f_j}(t_j) \ldots a_{f_s}(t_s) \ldots \rangle_{H_0}^{(V)} \tag{2.27}$$

от произведения любого числа операторов a и $\overset{+}{a}$ (в любом порядке следования).

Так как Ферми-амплитуды a, $\overset{+}{a}$ линейно выражаются через Ферми-амплитуды α, $\overset{+}{\alpha}$:

$$a_f = u_f \alpha_f - v_f \overset{+}{\alpha}_{-f}$$

$$\overset{+}{a}_f = u_f \overset{+}{\alpha}_f - v_f^* \alpha_{-f}$$

в которых H_0 имеет диагональную форму (2.24), мы видим, что для вычисления выражений (2.27) применимы правила Вика-Блоха. С их помощью эти выражения представятся в виде суммы произведений "простейших спариваний":

$$\langle \overset{+}{a}_f(t) a_f(\tau) \rangle_{H_0}^{(V)} = u_f^2 \frac{1}{1+e^{\frac{E(f)}{\theta}}} e^{iE(f)(t-\tau)} + |v_f|^2 \frac{1}{1+e^{-\frac{E(f)}{\theta}}} e^{-iE(f)(t-\tau)}$$

$$\langle a_f(t) \overset{+}{a}_f(\tau) \rangle_{H_0}^{(V)} = u_f^2 \frac{1}{1+e^{-\frac{E(f)}{\theta}}} e^{-iE(f)(t-\tau)} + |v_f|^2 \frac{1}{1+e^{\frac{E(f)}{\theta}}} e^{iE(f)(t-\tau)}$$

$$\langle a_{-f}(t) a_f(\tau) \rangle_{H_0}^{(V)} = u_f v_f \left\{ \frac{e^{iE(f)(t-\tau)}}{1+e^{\frac{E(f)}{\theta}}} - \frac{e^{-iE(f)(t-\tau)}}{1+e^{-\frac{E(f)}{\theta}}} \right\} \tag{2.28}$$

$$\langle \overset{+}{a}_f(t) \overset{+}{a}_{-f}(\tau) \rangle_{H_0}^{(V)} = u_f v_f^* \left\{ \frac{e^{iE(f)(t-\tau)}}{1+e^{\frac{E(f)}{\theta}}} - \frac{e^{-iE(f)(t-\tau)}}{1+e^{-\frac{E(f)}{\theta}}} \right\}$$

Два последних из них зависят не только от модуля C ; но и от ее фазы. Следовательно, вообще, выражение (2.27) может зависеть от фазы C . Нетрудно заметить, что зависимость эта весьма проста. Действительно, гамильтониан H_0 инвариантен по отношению к замене:

$$a_f \to e^{i\varphi} a_f, \quad \overset{+}{a}_f \to e^{-i\varphi} \overset{+}{a}_f, \quad C \to e^{2i\varphi} C$$

в которой φ - произвольный (вещественный) угол. Поэтому имеем:

$$\langle \ldots \overset{+}{a}_{f_j}(t_j) \ldots a_{f_s}(t_s) \ldots \rangle^{(V)}_{H_0 \, C = e^{i\alpha}|C|} =$$

$$= \langle \ldots \overset{+}{a}_{f_j}(t_j) \ldots a_{f_s}(t_s) \ldots \rangle^{(V)}_{H_0 \, C=|C|} e^{-i\frac{n\alpha}{2}} \qquad (2.2$$

где n - разность между числами операторов рождения и операторов уничтожения в рассматриваемом произведении. Ясно, что n здесь может считаться четным, так как при нечетном n имеем тождественно:

$$\langle \ldots \overset{+}{a}_{f_j}(t_j) \ldots a_{f_s}(t_s) \ldots \rangle^{(V)}_{H_0} = 0$$

Заметим также, что в случае $n = 0$ из (2.29) следует, что средние (2.27) не зависят от фазы C . Как видно, исследование системы с "аппроксимирующим гамильтонианом" H_0 совершенно элементарно. Соответствующие уравнения движения точно интегрируются. Мы рассматривали сейчас вспомогательную сис-

тему с гамильтонианом H_0 ввиду того, что удается доказать /3,4/ следующий важный результат.

Если для произведения

$$\ldots \overset{+}{a}_{f_j}(t_j) \ldots a_{f_s}(t_s) \ldots \qquad (2.30)$$

число $n = 0$, то[x)]

$$\langle \ldots \overset{+}{a}_{f_j}(t_j) \ldots a_{f_s}(t_s) \ldots \rangle^{(V)}_{H} -$$

$$- \langle \ldots \overset{+}{a}_{f_j}(t_j) \ldots a_{f_s}(t_s) \ldots \rangle^{(V)}_{H_0} \underset{V \to \infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (2.31)$$

---

x) Чтобы несколько разъяснить причины, приводящие к такому результату, приведем следующие простые соображения. Заметим, что гамильтониан H может быть представлен в виде:

$$H = \sum_{(f)} T(f) \overset{+}{a}_f a_f - \frac{1}{2} \sum_{(f)} \lambda(f) \left\{ \overset{+}{\beta} a_{-f} a_f + \overset{+}{a}_f \overset{+}{a}_{-f} \beta \right\} + \frac{\overset{+}{\beta}\beta}{2} V \qquad (a)$$

где

$$\beta = \frac{1}{V} \sum_{(f)} \lambda(f) a_{-f} a_f$$

и что уравнения движения будут:

$$i \frac{da_f}{dt} = T(f) a_f - \lambda(f) \overset{+}{a}_{-f} \beta$$
$$i \frac{d\overset{+}{a}_f}{dt} = -T(f) \overset{+}{a} + \lambda(f) \overset{+}{\beta} a_f \qquad (б)$$

Заметим далее, что:

$$|\beta \overset{+}{a}_g - \overset{+}{a}_g \beta| = \left|\frac{2}{V} \lambda(g) a_{-g}\right| < \frac{2}{V} |\lambda(g)|$$

С другой стороны, совершенно элементарно устанавливается существование предела

$$\lim_{V\to\infty} \langle \ldots \overset{+}{a}_{f_j}(t_j) \ldots a_{f_s}(t_s) \ldots \rangle_{H_0}$$

для любого произведения (2.30). Кроме того, если соответствующее $n \neq 0$, то в силу правил отбора для системы с гамильтонианом H , обусловленных законом сохранения числа частиц:

$$\langle \ldots \overset{+}{a}_{f_j}(t_j) \ldots a_{f_s}(t_s) \ldots \rangle_H^{(V)} = 0$$

продолжение сноски

$$|\beta a_g - a_g \beta| = 0$$

$$|\overset{+}{\beta}\beta - \beta\overset{+}{\beta}| \leq \frac{2}{V} \left| \sum_{(f)} \frac{1}{V} \lambda^2(f) \right|$$

Таким образом, все коммутаторы $\beta\overset{+}{\beta}$ между собой и с операторами a_{f_1} , $\overset{+}{a}_f$ являются бесконечно малыми величинами порядка $\frac{1}{V}$. Поэтому естественно ожидать, что квантовый, операторный характер величин β , $\overset{+}{\beta}$ становится пределе $V\to\infty$ несущественным. Заменив в (а), (б) эти величины их средними значениями, мы и приходим к задаче с гамильтонианом $H_0(\beta = C)$. Нетрудно заметить, что операторы $\beta, \overset{+}{\beta}$ по своему характеру весьма похожи на операторы $\frac{a_0}{\sqrt{V}}$, $\frac{\overset{+}{a}_0}{\sqrt{V}}$ из теории конденсации Бозе-газа. Как и эти последние, они содержат произвольную фазу.

В связи с такой ситуацией соотношения (2.31) и доказываются только для тех произведений (2.30), которые не зависят от этой фазы, т.е. у которых n = 0. Математическая техника доказательств значительно упрощается, если мы избавимся от произвольности фазы, например, включив в гамильтониан H член

$$-\nu V(\beta + \overset{+}{\beta}), \quad \nu > 0$$

Таким образом:

$$\langle \ldots \overset{+}{a}_{f_j}(t_j) \ldots a_{f_s}(t_s) \ldots \rangle_H = \begin{cases} \langle \ldots \overset{+}{a}_{f_j}(t_j) \ldots a_s(t_s) \ldots \rangle_{H_0}, \text{ если } n = 0 \\ 0, \text{ если } n \neq 0 \end{cases}$$

(2.32)

Тем самым мы можем вычислить обычные средние (2.32) любого порядка, а, следовательно, и функции Грина для рассматриваемой модельной системы с гамильтонианом H . Больше того, доказывается, что при любом значении числа n :

$$\prec \ldots \overset{+}{a}_{f_j}(t_j) \ldots a_{f_s}(t_s) \ldots \succ_H = \langle \ldots \overset{+}{a}_{f_j}(t_j) \ldots a_{f_s}(t_s) \ldots \rangle_{H_0} \quad (2.33)$$

Здесь как и раньше, символ $\prec \ldots \succ$ обозначает квазисредние. Как уже отмечалось, вторая часть равенства (2.33) содержит фактор $e^{-\frac{in\alpha}{2}}$. Поэтому:

$$\langle \ldots \overset{+}{a}_{f_j}(t_j) \ldots a_{f_s}(t_s) \ldots \rangle_H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \prec \ldots \overset{+}{a}_{f_j}(t_j) \ldots a_{f_s}(t_s) \ldots \succ_H$$

т.е. обычная средняя получается из квазисредней после дополнительного усреднения по произвольному углу α .

Как и в ранее рассматривавшихся случаях квазисредние можно ввести, дополняя гамильтониан бесконечно малыми членами, снимающими вырождение. Возьмем гамильтониан

$$H_\nu = H - \nu/2 \sum_{(f)} \lambda(f) \left\{ a_{-f} a_f + \overset{+}{a}_f \overset{+}{a}_{-f} \right\}, \quad \nu > 0$$

(2.34)

содержащий члены, снимающие вырождение по отношению к градиентной инвариантности I-го рода или, что то же самое, снимающие закон сохранения полного числа частиц.

Аппроксимирующий гамильтониан возьмем в виде:

$$H_\nu^\circ = H_0 - \nu/2 \sum_{(f)} \lambda(f) \{ a_{-f} a_f + \overset{+}{a}_f \overset{+}{a}_{-f} \}$$

Входящая здесь величина C определяется уравнением:

$$C = \frac{1}{V} \sum_{(f)} \lambda(f) \langle a_{-f} a_f \rangle_{H_0^\nu}^{(V)}$$

т.е.

$$C = \frac{C+\nu}{2V} \sum_{(f)} \lambda^2(f) \frac{th\left\{ \frac{\sqrt{\lambda^2(f)(C+\nu)^2 + T^2(f)}}{2\theta} \right\}}{\sqrt{\lambda^2(f)(C+\nu)^2 + T^2(f)}}$$

или после предельного перехода

$$C = \frac{(C+\nu)}{(2\pi)^3} \int \lambda^2(p) \frac{th\left\{ \frac{\sqrt{\lambda^2(p)(C+\nu)^2 + T^2(p)}}{2\theta} \right\}}{\sqrt{\lambda^2(p)(C+\nu)^2 + T^2(p)}} d\vec{p}$$

Мы возьмем за C тот корень этого уравнения, который при $\nu \to 0$ приближается к положительному корню уравнения (2.26) Тогда можно доказать, что:

$$\langle \ldots \overset{+}{a}_{f_j}(t_j) \ldots a_{f_s}(t_s) \ldots \rangle_{H_\nu} = \langle \ldots \overset{+}{a}_{f_j}(t_j) \ldots a_{f_s}(t_s) \ldots \rangle_{H_\nu^\circ}$$

С другой стороны, легко убедиться, что:

$$\langle \ldots \overset{+}{a}_{f_j}(t_j) \ldots a_{f_s}(t_s) \ldots \rangle_{H_\nu^\circ} \to \langle \ldots \overset{+}{a}_{f_j}(t_j) \ldots a_{f_s}(t_s) \ldots \rangle_{H_0} \quad C - |C|$$

Следовательно,

$$\langle \ldots \overset{+}{a}_{f_j}(t_j) \ldots a_{f_s}(t_s) \ldots \rangle = \lim_{\substack{\nu \to 0 \\ \nu > 0}} \langle \ldots \overset{+}{a}_{f_j}(t_j) \ldots a_{f_s}(t_s) \ldots \rangle_{H_\nu} =$$

$$= \langle \ldots \overset{+}{a}_{f_j}(t_j) \ldots a_{f_s}(t_s) \ldots \rangle_{H_0}, \quad C = |C|$$

Если бы мы вместо H_ν взяли гамильтониан $H_{\nu,\varphi}$:

$$H_{\nu,\varphi} = H - \nu \sum_{(f)} \lambda(f) \{ e^{i\varphi} \overset{+}{a}_f \overset{+}{a}_{-f} + e^{-i\varphi} a_{-f} a_f \}, \quad \nu > 0$$

то получили бы x) :

$$\langle \ldots \overset{+}{a}_{f_j}(t_j) \ldots a_{f_s}(t_s) \ldots \rangle = \lim_{\substack{\nu \to 0 \\ \nu > 0}} \langle \ldots \overset{+}{a}_{f_j}(t_j) \ldots a_{f_s}(t_s) \ldots \rangle_{H_\nu} =$$

$$= \langle \ldots \overset{+}{a}_{f_j}(t_j) \ldots a_{f_s}(t_s) \ldots \rangle_{H_0}, \quad C = e^{i\varphi} |C|$$

Таким образом, как и следовало ожидать, в рассматриваемом случае, квазисредние зависят от произвольного фазового угла

---

x) Как видно, обычная средняя

$$\langle \ldots \overset{+}{a}_{f_j}(t_j) \ldots a_{f_s}(t_s) \ldots \rangle_H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \ldots \overset{+}{a}_{f_j}(t_j) \ldots a_{f_s}(t_s) \ldots \rangle_H \, d\varphi$$

терпит разрыв, когда в гамильтониан H мы добавляем бесконечно малые члены с источниками пар:

$$-\nu/2 \sum_{(f)} \lambda(f) \{ e^{i\varphi} \overset{+}{a}_f \overset{+}{a}_{-f} + e^{-i\varphi} a_{-f} a_f \}$$

φ. Существенно также, что для квазисредних здесь не выполняются правила отбора, обусловленные законом сохранения числа частиц. Чтобы иметь вполне определенные значения для квазисредних, мы должны как-то фиксировать этот угол. Положим $\varphi = 0$, т.е. условимся снимать вырождение включением в гамильтониан H бесконечно малых членов типа:

$$-\frac{\nu}{2}\sum_{(f)} \lambda(f)\left\{a_{-f}a_f+\overset{+}{a}_f\overset{+}{a}_{-f}\right\} \qquad (2.3$$

Такой выбор фазового угла удобен в том отношении, что делает вещественными значения всех "одновременных" квазисредних типа:

$$\left\{\ldots\ \overset{+}{a}_{f_j}(t)\ldots\ a_s(t)\ldots\right\}$$

Заметим также, что результат не изменится, если эти дополнительные члены (2.35) написать в более общей форме:

$$-\nu\sum_{(f)} w(f)\left\{a_{-f}a_f+\overset{+}{a}_f\overset{+}{a}_{-f}\right\},\ \nu>0 \qquad (2.3$$

где $w(f)$ – вещественная, нетривиальная, достаточно регулярная функция.

Мы имели сейчас дело с произведениями полевых функций в импульсном представлении. Такая же ситуация возникает и для произведений из полевых функций:

$$\psi(t,\vec{r},s)=\sum_{(p)} a_{p,s}(t)\,e^{i(\vec{p}\cdot\vec{r})}$$

$$\overset{+}{\psi}(t,\vec{r},s)=\sum_{(p)} \overset{+}{a}_{p,s}(t)\,e^{-i(\vec{p}\vec{r})}$$

в координатном представлении.

Имеем, например,

$$\langle \overset{+}{\psi}(t_1,\vec{r}_1,s_1)\overset{+}{\psi}(t_2,\vec{r}_2,s_2)\psi(t_2',\vec{r}_2',s_2')\psi(t_1',\vec{r}_1',s_1')\rangle=$$

$$=\langle \overset{+}{\psi}(t_1,\vec{r}_1,s_1)\overset{+}{\psi}(t_2,\vec{r}_2,s_2)\psi(t_2',\vec{r}_2',s_2')\psi(t_1',\vec{r}_1',s_1')\rangle_{H_0}=$$

$$=F(t_1-t_1',\vec{r}_1-\vec{r}_1')F(t_2-t_2',\vec{r}_2-\vec{r}_2')\delta(s_1-s_1')\delta(s_2-s_2')-$$

$$-F(t_2-t_1',\vec{r}_2-\vec{r}_1')F(t_1-t_2',\vec{r}_1-\vec{r}_2')\times \qquad (2.37)$$

$$\times\delta(s_2-s_1')\delta(s_1-s_2')+\Phi(t_1-t_2,\vec{r}_1-\vec{r}_2)\times$$

$$\times\Phi(t_1'-t_2',\vec{r}_1'-\vec{r}_2')\epsilon(s_1)\times$$

$$\times\epsilon(s_1')\delta(s_1+s_2)\delta(s_1'+s_2')$$

где

$$F(t,\vec{r})=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r})}\left\{\frac{u_p^2}{1+e^{\frac{E(p)}{\theta}}}e^{iE(p)t}+\frac{v_p^2e^{-iE(p)t}}{1+e^{-\frac{E(p)}{\theta}}}\right\}d\vec{p}$$

$$\Phi(t,\vec{r})=\frac{1}{2(2\pi)^3}\int e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{r})}\sqrt{1-\frac{T^2(p)}{E^2(p)}}\times$$

$$\times\left\{\frac{e^{-iE(p)t}}{1+e^{-\frac{E(p)}{\theta}}}-\frac{e^{iE(p)t}}{1+e^{\frac{E(p)}{\theta}}}\right\}d\vec{p} \qquad (2.33)$$

Заметим также, что:

$$F(t_1-t_1',\vec{r}_1-\vec{r}_1')\,\delta(s_1-s_1') = \langle \overset{+}{\psi}(t_1,\vec{r}_1,s_1)\,\psi(t_1',\vec{r}_1',s_1')\rangle =$$

$$= \langle \overset{+}{\psi}(t_1,\vec{r}_1,s_1)\,\psi(t_1',\vec{r}_1',s_1')\rangle \qquad (2.39)$$

$$\Phi(t_1-t_2,\vec{r}_1-\vec{r}_2)\,\epsilon(s_1)\,\delta(s_1+s_2) =$$

$$= \langle \overset{+}{\psi}(t_1,\vec{r}_1,s_1)\,\overset{+}{\psi}(t_2,\vec{r}_2,s_2)\rangle = \langle \psi(t_2,\vec{r}_2,s_2)\,\psi(t_1,\vec{r}_1,s_1)\rangle$$

Мы рассмотрели выше ряд примеров вырождения состояния статистического равновесия. Во всех этих случаях такие особые состояния статистического равновесия осуществлялись при температурах ниже некоторых критических: $\theta<\theta_c$ При переходе через θ_c происходит фазовый переход к "нормальному" невырожденному состоянию.

В упомянутых примерах вырождение было связано с наличием аддитивных законов сохранения или, что то же самое, с наличием инвариантности по отношению к соответствующим группам преобразований. Подчеркнем, что не все имеющиеся в данной системе законы сохранения вызывают вырождение. Так, в третьем и четвертом примерах вырождение состояний статистического равновесия было связано только с законом сохранения числа частиц. В соответствующих квазисредних нарушались только те правила отбора, которые обуславливались именно этим законом; правила отбора, обусловленные другими аддитивными законами сохранения, например, законом сохранения импульса и спина (в 4-ом примере), оставались в силе.

Во втором же примере вырождение было связано только с законом сохранения импульса. Правила отбора, обусловленные, например, законом сохранения числа частиц, здесь не нарушались.

Мы могли бы умножить число подобных примеров, рассматривая случаи вырождения, связанные с другими группами или одновременно с несколькими группами преобразований. На этом мы здесь останавливаться не будем и перейдем к общему рассмотрению, введя соответствующие общие определения.

Возьмем некоторую макроскопическую систему с гамильтонианом H . Добавим к H бесконечно малые члены, соответствующие внешним полям или источникам, нарушающие аддитивные законы сохранения, и получим таким образом некоторый гамильтониан $H_\nu,\ \nu\to 0$. Тогда, если все средние значения

$$\langle A\rangle,\quad A=\ldots\overset{+}{\psi}(t_j,x_j)\ldots\psi(t_s,x_s)\ldots \qquad (2.40)$$

получают лишь бесконечно малые приращения, будем говорить, что рассматриваемое состояние статистического равновесия не вырождено. Наоборот, если некоторые из средних (2.40) получают конечные приращения при переходе от H к бесконечно близкому гамильтониану H_ν , будем говорить о вырождении состояния статистического равновесия. Заметим, что мы, естественно, ограничиваемся рассмотрением лишь стабильных систем, поскольку только они имеют физический смысл.

Поэтому бесконечно малая вариация $\delta H = H_\nu - H$ гамильтониана может вызывать лишь бесконечно малое изменение тех величин, которые действительно характеризуют реальные физические свойства системы.

Для случаев вырождения целесообразно вводить вместо обычных средних квазисредние, положив:

$$\langle A \rangle = \lim_{\nu \to 0} \langle A \rangle_{H_\nu}$$

Как мы уже убедились на ряде примеров, для квазисредних не обязательно выполнение всех правил отбора, обусловленных аддитивными законами сохранения. Подчеркнем, что, определяя квазисредние, мы должны сперва выполнить предельный переход: $V \to \infty$, а затем уже устремить ν к нулю.

Как уже отмечалось, бесконечно малые члены, образующие разность $H_\nu - H$, выбираются так, чтобы нарушать аддитивные законы сохранения.

Вообще говоря, однако нет необходимости нарушения всех таких законов, чтобы получить гамильтониан H_ν, снимающий вырождение.

Пусть, например, бесконечно малые члены, вызывающие нарушение некоторых из них, дают лишь бесконечно малый вклад в $\langle A \rangle_{H_\nu}$. Ясно тогда, что эти законы сохранения нет надобности нарушать и что H_ν, содержащий только члены, нарушающие остальные законы сохранения, уже будет снимать вырождение.

В таком случае, для квазисредних будут не выполняться как раз те правила отбора, которые обусловлены этими последними.

Возьмем, в частности, обычную динамическую модель для теории сверхпроводимости, в которой мы имеем дело с континуумом и не учитываем непосредственно наличия кристаллической решетки. У этой модели при отсутствии внешних полей естественно ожидать полной пространственной однородности и считать, что все средние

$$\langle \ldots \overset{+}{\psi}(t_\alpha, x_\alpha) \ldots \psi(t_\beta, x_\beta) \ldots \rangle$$

являются трансляционно инвариантными.

В такой ситуации закон сохранения импульса будет выполняться и для квазисредних и его нет надобности нарушать, чтобы снять вырождение.

Предположим также наличие полной спиновой однородности, когда законы сохранения суммарного спина выполняются для квазисредних. Тогда у нас "останется для нарушения" только закон сохранения числа частиц.

В таком случае можем положить:

$$H_\nu = H + \nu \sum w(f) (\overset{+}{a}_f \overset{+}{a}_{-f} + a_{-f} a_f) \qquad (2.41)$$
$$w(f) = \epsilon(\sigma) v(p)$$

где $v(p)$ – вещественная функция импульса.

Если мы желаем рассмотреть случай, когда спиновая однородность может и не иметь места, целесообразно исходить из более общей формы:

$$H_\nu = H + \nu \sum \{ w(p,\sigma,\sigma') \overset{+}{a}_{p\sigma} \overset{+}{a}_{-p\sigma'} + w^*(p,\sigma,\sigma') a_{p\sigma'} a_{p\sigma} + \\ + \lambda(p,\sigma,\sigma') \overset{+}{a}_{p\sigma} a_{p\sigma'} \}$$

и т.п.

Перейдем теперь к вопросу о приложении различных форм теории возмущений и, в частности, диаграммой техники к изучению вырожденных состояний статистического равновесия .

Чтобы устранить трудности, возникающие при использовании обычного формализма, о которых мы говорили в начале этого параграфа, будем исходить из следующего общего правила:

Для того, чтобы воспользоваться какой-то формой теории возмущений для изучения вырожденных состояний статистического равновесия, мы должны прежде всего снять вырождение или, что то же самое, мы должны иметь дело не с функциями Грина, построенными из обычных средних, удовлетворяющих всем правилам отбора, а с функциями Грина, построенными из квазисредних, которые не удовлетворяют некоторым из этих правил.

Таким образом, соответствующие диаграммы могут включать также "аномальные" линии, запрещенные обычными правилами отбора. Например, диаграммы в теории кристаллического состояния кроме "нормальных" линий $\overset{\frown}{\overset{+}{a}_p a_p}$, "сохраняющих" импульс, будут содержать также "аномальные" линии $\overset{\frown}{\overset{+}{a}_p a_{p'}}$, $(\vec{p} \neq \vec{p}\,')$, "не сохраняющие" импульс.

В диаграммах из теории сверхпроводимости появляются аномальные линии $\overset{\frown}{a_f a_{-f}}$, $\overset{\frown}{\overset{+}{a}_f \overset{+}{a}_{-f}}$ и т.п.

Следует иметь в виду, что эти аномальные линии соответствуют "опасным" диаграммам в том смысле, что сумма их дает конечный вклад, хотя само их наличие формально обусловлено бесконечно малыми добавочными членами в гамильтониане H_ν .

Поэтому такие линии надо вводить в расчет всегда в просуммированной (хотя бы частично) форме. Можно вводить, например, лишь полностью просуммированные аномальные линии и для определения соответствующих им аномальных функций Грина получать уравнения типа Дайсона. В фактически проводящихся расчетах можно вообще опускать бесконечно малые дополнительные члены, роль которых сводится лишь к представлению возможности иметь дело с квазисредними вместо обычных средних. В тех случаях, когда упоминавшиеся уравнения типа Дайсона имеют лишь тривиальное решение (аномальные функции Грина тождественно равны нулю), то, очевидно, вырождения нет.

Если же истинное[x)] решение нетривиально, имеем реальный случай вырождения.

Как уже упоминалось в конце § I, теория возмущений обычно строится, исходя из разбиения полного гамильтониана системы на две части:

$$H = H_0 + H_1 \quad .$$

причем, в качестве H_0 выбирается гамильтониан, соответствующий "идеальному газу" без взаимодействия и обладающий всеми теми аддитивными законами сохранения, что и полный гамильтониан H .

Такого типа подход к построению теории возмущений мож-

---

x) Мы говорим об истинном решении, имея в виду, что рассматриваемые уравнения могут всегда иметь тривиальное решение, которое, однако, в случаях вырождения не удовлетворяет необходимым физическим требованиям (например, имеет неправильную спектральную структуру).

но обобщить и для изучения вырожденных состояний. Для того, чтобы сразу, уже с нулевого приближения появились аномальные (частично просуммированные") функции Грина, мы можем добавить к H_0 конечные члены Δ того же рода, что и бесконечно малые дополнительные члены в H_ν ; тем самым мы устраняем для $H_0+\Delta$ ряд аддитивных законов сохранения, справедливых для полного H , которые "ответственны за вырождение".

Напишем

$$H_0' = H_0 + \Delta\,; \quad H_1' = H_1 - \Delta\,.$$

Тогда, исходя из модифицированного разбиения

$$H = H_0' + H_1'$$

можно строить уже обычным путем теорию возмущений для случаев вырождения, используя разложения "по степеням H_1' ". По самому выбору H_0' уже в нулевом приближении у нас появятся конечные аномальные функции Грина. Возьмем, например, динамическую систему, рассматриваемую в теории сверхпроводимости в случае, когда вырождение снимается бесконечно малыми членами типа (2.4I).

В обычных формах теории возмущений, не учитывающих возможности вырождения, в H_0 включают член:

$$\sum_{(f)} T_e(k)\,\overset{+}{a}_f a_f \tag{2.42}$$

соответствующий "ренормировке" кинетического члена

$$\sum_{(f)} \left(\frac{k^2}{2m} - \lambda\right)\overset{+}{a}_f a_f \tag{2.43}$$

Для учета вырождения введем в H_0' вместо (2.42) более общую квадратичную форму из Ферми-амплитуд:

$$\Omega = \sum_{(f)} T_e(k)\,\overset{+}{a}_f a_f - \tfrac{1}{2}\sum_{(f)} w(f)\left(\overset{+}{a}_f \overset{+}{a}_{-f} + a_{-f} a_f\right); \qquad w^*(f) = w(f) \tag{2.43'}$$

Мы должны тогда включить в H_1' кроме членов взаимодействия еще компенсирующее выражение:

$$\sum_{(f)} \left(\frac{k^2}{2m} - \lambda\right)\overset{+}{a}_f a_f - \Omega$$

Произвольную функцию $w(f)$ целесообразно подбирать так, чтобы возможно улучшить степень приближения. Например, для получения первого приближения можно подобрать $w(f)$, исходя из того условия, чтобы поправки этого приближения, скажем, к

$$\langle a_{-f}\, a_f \rangle$$

равнялись нулю – чтобы эта аномальная средняя в нулевом приближении уже была бы "просуммирована" с точки зрения принятого первого приближения. В связи с этим заметим, что в частном случае вышерассматривавшейся модельной системы с гамильтонианом (2.2I) мы таким образом можем получить асимптотически точное решение. Для этого стоит лишь взять за $T_e(k)$ ее неренормированное значение из (2.43) и положить:

$$w(f) = \lambda(f) \sum_{(f')} \lambda(f') \langle a_{-f'}\, a_{f'} \rangle$$

Тогда, действительно, "нулевое приближение", определяемое гамильтонианом H_0' , будет давать асимптотически точное решение, и поправки любого порядка асимптотически будут равны нулю.

Обратим теперь внимание на тот факт, что форма Ω приводится к диагональному виду:

$$\sum_{(f)} E(f)\overset{+}{\alpha}_f \alpha_f + Const$$

$$E(f) = \sqrt{T_e^2(k) + w^2(f)}$$

посредством канонического $u-v$ преобразования:

$$\alpha_f = a_f u_f + \overset{+}{a}_{-f} v_f$$
$$\overset{+}{\alpha}_f = \overset{+}{a}_f u_f + a_{-f} v_f$$

Таким образом, для построения теории возмущения вырожденных состояний совершенно эквивалентно или модифицировать выражение H_0, заменив $H_0 \to H_0'$, или принять в качестве гамильтониана нулевого приближения гамильтониан идеального газа:

$$\sum_{(\nu)} E(\nu)\overset{+}{\alpha}_\nu \alpha_\nu$$

в котором "новые Ферми-амплитуды" α связаны со "старыми" с помощью $u-v$ преобразования.

В наших первых работах /5,2/ по теории сверхпроводимости мы использовали именно $u-v$ преобразование для получения надлежащей модификации теории возмущений.

Сделанное замечание имеет общий характер и не относится только к вышерассмотренному случаю (2.43) квадратичной формы Ω.

Действительно, если мы возьмем произвольную квадратичную форму

$$\Omega = \sum A(f,f')\overset{+}{a}_f a_{f'} + \sum C(f,f') a_f a_{f'} + \sum C^*(f,f)\overset{+}{a}_{f'}\overset{+}{a}_f \quad (2.24)$$
$$A^*(f,f') = A(f',f)$$

подчиненную лишь условию положительности, то ее посредством обобщенного $u-v$ преобразования /6/ :

$$a_f = \sum_{(\nu)} u_{f\nu}\alpha_\nu + \sum_{(\nu)} v_{f\nu}\overset{+}{\alpha}_\nu$$

также можно привести к диагональному виду:

$$\sum_{(\nu)} E(\nu)\overset{+}{\alpha}_\nu \alpha_\nu + const$$

В заключение заметим, что если работать с полностью просуммированными функциями Грина (с "жирными линиями" диаграмм типа Фейнмана), то окончательные уравнения инвариантны по отношению к специальной форме H_0' ; необходимо лишь введение в диаграммы соответствующих аномальных линий. Методика функций Грина особенно удобна, если нам необходимо оценить роль затухания или вообще иметь дело с высшими приближениями.

§ 3. Принцип ослабления корреляции

В этом параграфе мы постараемся сформулировать интуитивные представления, общепринятые в статистической механике, о том, что корреляция между пространственно отдаленными частями макроскопической системы практически исчезает.

Рассмотрим средние:

$$F(t_1,x_1;\dots t_n,x_n)=\langle\dots\overset{+}{\psi}(t_j,x_j)\dots\ \psi(t_s,x_s)\dots\rangle$$

$$x=(\vec{r},\sigma) \qquad (3.1)$$

и разобьем совокупность аргументов $\{t_1,x_1;\dots t_n,x_n\}$ произвольным образом на ряд групп:

$$\{\dots t_\alpha,x_\alpha\dots\},\ \{\dots t_\beta,x_\beta\dots\},\dots$$

Нас будет интересовать асимптотическая форма F, когда все моменты времени $t_1,\dots t_n$ фиксированы, а расстояния между точками $\vec{r}_j$ из различных групп стремятся к бесконечности. Постулируем прежде всего, что под знаком рассматриваемой средней, полевые функции:

$$\varphi(t_1,\vec{r}_1,\sigma_1),\ \varphi(t_2,\vec{r}_2,\sigma_2)$$

($\varphi=\overset{+}{\psi}$ или ψ), при t_1 , t_2 фиксированных и $|\vec{r}_1-\vec{r}_2|\to\infty$, будут в пределе точно коммутировать или антикоммутировать между собой.

Тогда, для нахождения асимптотической формы F мы можем переставлять в выражении (3.1) полевые функции $\varphi(t_i,x_i)$ с аргументами из различных групп и тем добиться такого положения, чтобы полевые функции для каждой данной группы аргументов оказались вместе в одном комплексе.

Получим, таким образом,

$$F(t_1,x_1,\dots t_n,x_n)-\eta\langle\mathfrak{U}_1(\dots t_\alpha,x_\alpha\dots)\mathfrak{U}_2(\dots t_\beta,x_\beta\dots)\dots\rangle\to 0$$
$$\eta=\pm 1 \qquad (3.2)$$

где $\mathfrak{U}_1(\dots t_\alpha,x_\alpha\dots)$ представляет произведение полевых функций с аргументами только из I-ой группы, $\mathfrak{U}_2(\dots t_\beta,x_\beta\dots)$ соответствующее произведение с аргументами только из 2-ой группы и т.д. Сделанное допущение об асимптотической коммутации выражает по нашему мнению совершенно универсальную закономерность для реальных динамических систем статистической механики.

Как известно, в квантовой теории поля все полевые функции $\varphi(t_1,x_1)$, $\varphi(t_2,x_2)$ должны даже <u>точно</u> коммутировать или антикоммутировать, если четырехмерный вектор

$$t_1-t_2,\ \vec{r}_1-\vec{r}_2$$

пространственно подобен.

В задачах статистической механики, где мы имеем дело с формально нелокальными взаимодействиями, свойства коммутации должны удовлетворяться лишь приближенно, тем более точно, чем больше $|\vec{r}_1-\vec{r}_2|$ при данных t_1, t_2.

Перейдем теперь к рассмотрению асимптотической структуры выражения:

$$\langle\mathfrak{U}_1(\dots t_\alpha,x_\alpha\dots)\mathfrak{U}_2(\dots t_\beta,x_\beta\dots)\dots\rangle \qquad (3.3)$$

при неограниченном увеличении пространственных расстояний между точками $\vec{r}_j$ из различных групп (временные аргументы $t_1,\dots t_n$ фиксированы).

Так как корреляция между динамическими величинами $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, ... должна ослабевать и, практически, исчезать для достаточно больших расстояний, мы должны считать, что соответствующая асимптотическая форма для (3.3) распадается на произведение вида:

$$\langle \mathfrak{A}_1(\ldots t_\alpha, x_\alpha \ldots)\rangle \langle \mathfrak{A}_2(\ldots t_\beta, x_\beta \ldots)\rangle \ldots \tag{3.4}$$

Здесь необходимо уточнить, с какого рода "средними" мы имеем дело в нашей формулировке принципа ослабления корреляции. В случаях отсутствия вырождения выражения $\langle \ldots \rangle$, очевидно, являются обычными средними.

Можно заметить, однако, что в случаях вырождения рассматриваемого состояния статистического равновесия выражения $\langle \ldots \rangle$, входящие в нашу формулировку, должны пониматься как квазисредние: приведенная выше формулировка принципа ослабления корреляции становится прямо неверной, если продолжать считать $\langle \ldots \rangle$ обычными средними.

Действительно, представим себе, что мы рассматриваем кристаллическое состояние. Тогда, когда мы ссылаемся на ослабление корреляции между динамическими величинами $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, ... мы интуитивно подразумеваем, что кристаллическая решетка, как целое, фиксирована в пространстве; хотя и произвольно фиксирована, но она одна и та же и при вычислении средней и $\mathfrak{A}_1$, и $\mathfrak{A}_2$, и т.д.

Иначе говоря, мы сейчас считаем, что все рассматриваемые здесь выражения средних относятся к одному и тому же фиксированному расположению кристаллической решетки; тем самым мы имеем дело с квазисредними, а не с обычными средними, которые получаются из квазисредних в результате дополнительного усреднения по всем возможным положениям и ориентациям кристаллической решетки.

Та же ситуация возникает и в других случаях вырождения состояния статистического равновесия – в качестве параметров, остающихся фиксированными одинаковым образом для всех частей системы, здесь могут выступать или магнитный момент (случай ферромагнетизма), или фазовый угол (сверхтекучесть или сверхпроводимость) и т.п.

Таким образом, в нашей формулировке принципа ослабления корреляции выражения $\langle \ldots \rangle$ действительно следует считать квазисредними[x]. Подчеркнем, что мы не можем строго доказать принцип ослабления корреляции для макроскопических динамических систем, рассматриваемых в статистической механике. Строгое доказательство мы можем провести лишь на ряде простых моделей, например, для модели, упоминавшейся в предыдущем параграфе. Для общего же случая мы можем сослаться либо на интуитивные соображения, либо на аргументы, заимствованные из теории возмущений.

Заметим, что в этом отношении принцип ослабления корреляции не стоит особняком в ряде других общепринятых важнейших положений статистической механики.

Так, например, вопрос о доказательстве значительно более простого положения, а именно, положения о существовании предела:

---

x) Так как для случаев вырождения мы всегда будем иметь дело с квазисредними, а в случаях отсутствия вырождения квазисредние и обычные средние совпадают, мы не будем более применять особый символ $\prec \ldots \succ$ для обозначения квазисредних и будем использовать везде один символ $\langle \ldots \rangle$, поскольку теперь это уже не приведет к недоразумениям.

$$-\lim_{V\to\infty} \frac{\theta \ln Sp\, e^{-\frac{H}{\theta}}}{V}$$

выражающего свободную энергию на единицу объема, находится примерно в таком же положении. Мы не будем здесь поэтому исследовать труднейшую математическую проблему обоснования принципа ослабления корреляции и ограничимся выводом ряда его физических следствий.

Прежде всего обратим внимание на применение этого принципа для построения несколько иного чем раньше, вообще более "физического" определения понятия квазисредней.

Возьмем в качестве примера случай, рассматриваемый в теории сверхпроводимости, когда мы имеем состояние статистического равновесия, вырождение которого связано только с законом сохранения числа частиц. Рассмотрим выражение:

$$< \overset{+}{\psi}(t_1,x_1)\overset{+}{\psi}(t_2,x_2)\psi(t_2',x_2')\psi(t_1',x_1')> \qquad (3.5)$$

Так как оператор

$$\overset{+}{\psi}(t_1,x_1)\overset{+}{\psi}(t_2,x_2)\psi(t_2',x_2')\psi(t_1',x_1')$$

сохраняет число частиц, выражение (3.5) будет обычной средней.

Будем неограниченно увеличивать расстояние между двумя группами пространственных точек $(\vec{r}_1,\vec{r}_2),(\vec{r}_1',\vec{r}_2')$ при фиксированных моментах времени. Тогда на основании принципа ослабления корреляции выражение (3.5) будет приближаться к произведению:

$$<\overset{+}{\psi}(t_1,x_1)\overset{+}{\psi}(t_2,x_2)><\psi(t_2',x_2')\psi(t_1',x_1')>$$

Исходя из такого асимптотического распределения обычной средней (3.5), мы и можем теперь определить квазисредние:

$$<\overset{+}{\psi}(t_1,x_1)\overset{+}{\psi}(t_2,x_2)>;<\psi(t_2',x_2')\psi(t_1',x_1')>$$

Аналогичным приемом можно воспользоваться и для введения квазисредних от произведений высшего порядка из полевых функций. Если ранее мы вводили квазисредние с помощью бесконечно малых добавок к гамильтониану, не всегда обладавших ясным физическим смыслом, то теперь с помощью принципа ослабления корреляции мы получаем возможность вводить квазисредние, рассматривая асимптотические формы обычных средних, относящихся только к исследуемой динамической системе, с данным неизменным гамильтонианом.

Правда, надо сказать, что для целей формального вывода обобщенной диаграммной техники, оперирующей с аномальными линиями, метод бесконечно малых добавок к гамильтониану удобнее, поскольку он автоматически сводит эту задачу к уже решенной.

Рассмотрим еще систему бесспиновых Бозе-частиц, находящуюся в пространственно однородном состоянии статистического равновесия, и построим выражение:

$$F(\vec{r}_1-\vec{r}_2)=<\overset{+}{\psi}(t,\vec{r}_1)\psi(t,\vec{r}_2)>= \\ =<\overset{+}{\psi}(\vec{r}_1)\psi(\vec{r}_2)> \qquad (3.6) \\ \psi(\vec{r})=\psi(0,\vec{r})$$

Переходя здесь к импульсному представлению, найдем:

$$F(\vec{r}_1-\vec{r}_2)=\frac{1}{V}\sum_{(k)}<\overset{+}{a}_k a_k>e^{-i\vec{k}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)} \qquad (3,7)$$

Поэтому в интеграле Фурье:

$$F(\vec{r})=\int w(k)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r})}d\vec{k} \qquad (3.7')$$

произведение $w(k)d\vec{k}$ выражает плотность числа частиц с импульсами из бесконечно малого импульсного объема $d\vec{k}$. Отсюда следует, что

$$w(k)\geqq 0, \quad \int w(k)d\vec{k}=\rho$$

где $\rho=\frac{N}{V}$ представляет плотность числа частиц.

Рассмотрим случай, когда в нашей системе имеется покоящийся конденсат. Тогда:

$$w(k)=\rho_0\,\delta(\vec{k})+w_1(k)$$

где $w_1(k)$ - обычная функция, характеризующая непрерывное распределение, по импульсам частиц, не находящихся в конденсате, а ρ_0 - плотность числа частиц конденсата. Но, поскольку $w_1(k)$ является обычной интегрируемой функцией, имеем:

$$\int w_1(k)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r})}d\vec{k}\to 0 \qquad |\vec{r}|\to\infty$$

и потому

$$<\overset{+}{\psi}(r_1)\psi(r_2)>=F(\vec{r}_1-\vec{r}_2)=$$

$$=\rho_0+\int w_1(k)e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}d\vec{k}\to\rho_0\neq 0$$

$$|\vec{r}_1-\vec{r}_2|\to\infty$$

С другой стороны, на основании принципа ослабления корреляции

$$<\overset{+}{\psi}(r_1)\psi(r_2)>-<\overset{+}{\psi}(r_1)><\psi(r_2)>\to 0$$

$$|\vec{r}_1-\vec{r}_2|\to\infty$$

Потому

$$<\psi(r)>\neq 0$$

Если бы рассматриваемое состояние статистического равновесия не было вырождено по отношению к закону сохранения числа частиц, то в силу соответствующих этому закону правил отбора мы имели бы тождественно:

$$<\psi(\vec{r})>=0$$

Таким образом, в случае, когда имеется конденсат правила отбора, обусловленные законом сохранения N, не выполняются, и данное состояние статистического равновесия будет вырождено.

Можно показать, что аналогичная ситуация возникает и для Ферми-систем, когда там появляется конденсат из связанных пар. Для этого, прежде всего, необходимо определить само понятие "связанной пары", чем мы и займемся в следующем параграфе.

§ 4. Состояния пар частиц

Мы будем рассматривать здесь пространственно однородные состояния статистического равновесия для макроскопических систем, состоящих из одинаковых Ферми-частиц.

Попытаемся распространить на них такие понятия, как "волновая функция пары частиц"[7], "состояние пары частиц" и, в частности, "связанное состояние пары" и т.п. Понятия эти имеют очевидный смысл в случае, когда динамическая система состоит из двух частиц. Мы же хотим обобщить их для систем из макроскопически большого числа частиц, взаимодействующих друг с другом. С этой целью рассмотрим парную корреляционную функцию (относящуюся к одному моменту времени):

$$F(x_1,x_2;x_1',x_2') = \langle \overset{+}{\psi}(x_1)\,\overset{+}{\psi}(x_2)\,\psi(x_2')\,\psi(x_1')\rangle \qquad (4.I)$$

Учитывая свойство эрмитовости:

$$F^*(x_1',x_2';x_1,x_2) = F(x_1,x_2;x_1',x_2') \qquad (4.2)$$

напишем разложение F по ортонормированной системе собственных функций Ψ_ν :

$$F(x_1,x_2;x_1',x_2') = \sum_{(\nu)} N_\nu\, \Psi_\nu^*(x_1,x_2)\,\Psi_\nu(x_1',x_2') \qquad (4.3)$$

с нормировкой

$$\iint\limits_V |\Psi_\nu(x_1,x_2)|^2\, dx_1\, dx_2 = 1 \qquad (4.4)$$

где, вообще,

$$\int\limits_V \dots dx = \sum_\sigma \int \dots d\vec{r}\ .$$

В случае, если мы имеем дело с газом малой плотности, то в первом приближении $\Psi_\nu(x_1,x_2)$ здесь будут обычными волновыми функциями для задачи двух тел (что вполне естественно, поскольку в первом приближении влиянием остальных частиц на данную пару частиц можно пренебречь).

Основываясь на такой аналогии, мы будем называть собственные функции $\Psi_\nu(x_1,x_2)$ – волновыми функциями пар частиц. Коэффициенты N_ν будем интерпретировать как среднее число пар, находящихся в состоянии с волновой функцией Ψ_ν. Из (4.I), (4.3) и (4.4) следует, что[x)]

$$\langle N^2 - N\rangle = \sum_\nu N_\nu$$

т.е. сумма всех N_ν представляет полное число пар.

---

x) Имеем, в самом деле, из (4.I), (4.3), (4.4):

$$\sum_\nu N_\nu = \iint\limits_V \langle \overset{+}{\psi}(x_1)\,\overset{+}{\psi}(x_2)\,\psi(x_2)\,\psi(x_1)\rangle\, dx_1 dx_2 =$$

$$= \iint\limits_V \langle \overset{+}{\psi}(x_1)\,\psi(x_1)\,\overset{+}{\psi}(x_2)\,\psi(x_2)\rangle\, dx_1 dx_2 - \int\limits_V \langle \overset{+}{\psi}(x)\,\psi(x)\rangle\, dx$$

причем

$$\int\limits_V \overset{+}{\psi}(x)\,\psi(x)\, dx = N$$

Заметим еще, что благодаря (4.I):

$$F(x_2, x_1; x_1', x_2') = -F(x_1, x_2; x_1', x_2')$$

$$F(x_1, x_2; x_2', x_1') = -F(x_1, x_2; x_1', x_2')$$

и потому

$$\Psi_\nu(x_2, x_1) + \Psi_\nu(x_1, x_2) = 0$$

Как видно, функции Ψ_ν, как и обычные волновые функции двух Ферми-частиц, должны обладать свойством антисимметрии. Запишем теперь разложение (4.3) в более развернутой форме. Воспользуемся законом сохранения импульса и выделим в волновой функции $\Psi_\nu(x_1, x_2)$ фактор, соответствующий движению центра тяжести с некоторым импульсом $\vec{q}$.

Положим:

$$\Psi_\nu(x_1, x_2) = \Psi_{\omega,q}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2; \sigma_1, \sigma_2) \exp i\vec{q}\,\frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$$

индекс $\nu = (\omega, \vec{q})$ включает импульс $\vec{q}$ и, возможно, некоторые другие индексы (ω). Тогда соотношение (4.3) приведется к виду:

$$F(x_1, x_2; x_1', x_2') = \\ = 2\sum_{(\omega,q)} N_{\omega,q} \Psi^*_{\omega,q}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2; \sigma_1, \sigma_2) \Psi_{\omega,q}(\vec{r}_1{}' - \vec{r}_2{}'; \sigma_1', \sigma_2') \times \\ \times \exp i\vec{q}\left(\frac{\vec{r}_1{}' + \vec{r}_2{}' - \vec{r}_1 - \vec{r}_2}{2}\right) \qquad (4.5)$$

Здесь $N_{\omega,q}$ представляет среднее число пар частиц, находящихся в состоянии $\Psi_{\omega,q}$, причем каждая пара считается один раз (а не два, как раньше).

Благодаря (4.4), в (4.5) принята следующая нормировка:

$$\sum_{\sigma_1,\sigma_2} \int |\Psi_{\omega,q}(\vec{r}; \sigma_1, \sigma_2)|^2 d\vec{r} = \frac{1}{V} \qquad (4.6)$$

Запишем теперь разложение (4.5) в интегральной форме, для чего перейдем к более удобной нормировке. Рассмотрим волновую функцию пары частиц:

$$\Psi_{\omega,q}(\vec{r}; \sigma_1, \sigma_2)$$

для данного фиксированного импульса $\vec{q}$.

Так как корреляция между обеими частицами пары должна практически исчезать для достаточно больших расстояний r, то асимптотическая форма (при $r \to \infty$) рассматриваемой функции или вообще равна нулю, или будет представлять плоскую волну, соответствующую относительному свободному движению с некоторым импульсом $\vec{p}$.

Рассмотрим сперва первую возможность и положим в этом случае:

$$\Psi_{\omega,q}(\vec{r}; \sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{\sqrt{V}} \varphi_{\omega,q}(\vec{r}; \sigma_1, \sigma_2)$$

так что:

$$\sum_{\sigma_1,\sigma_2} \int |\varphi_{\omega,q}(\vec{r}; \sigma_1, \sigma_2)|^2 d\vec{r} = 1 \qquad (4.7)$$

Будем говорить тогда, что $\varphi_{\omega,q}$ представляет связанное состояние пары частиц, с суммарным импульсом $\vec{q}$. Дискретный индекс ω указывает, так сказать, номер связанного состояния.

Пусть теперь асимптотическая форма $\psi_{\omega,q}$ будет плоской волной, соответствующей инерциальному относительному движению частиц пары, с импульсом $\vec{p}$. Положим:

$$\omega=(\vec{p},j); \quad \psi_{\omega,q}(\vec{r};\sigma_1,\sigma_2)=\frac{1}{V}\varphi_{p,q,j}(\vec{r};\sigma_1,\sigma_2)$$

В этом случае будем говорить, что $\varphi_{p,q,j}$ представляет волновую функцию несвязанного или "диссоциированного" состояния пары частиц. Для $\varphi_{p,q,j}$ мы имеем обычную в таком положении нормировку:

$$\sum_{\sigma_1,\sigma_2}\frac{1}{V}\int|\varphi_{p,q,j}(\vec{r};\sigma_1,\sigma_2)|^2 d\vec{r}=1 \tag{4.8}$$

Мы можем теперь записать разложение (4.5) в следующей форме:

$$F(x_1,x_2;x_1',x_2')=$$

$$=2\sum_{(\omega,q)}\frac{N_{\omega,q}}{V}\overset{*}{\varphi}_{\omega,q}(\vec{r}_1-\vec{r}_2;\sigma_1,\sigma_2)\varphi_{\omega,q}(\vec{r}_1'-\vec{r}_2';\sigma_1',\sigma_2')\times$$

$$\times\exp i\vec{q}\left(\frac{\vec{r}_1'+\vec{r}_2'-\vec{r}_1-\vec{r}_2}{2}\right)+$$

$$+2\sum_{(p,q,j)}\frac{N_{p,q,j}}{V^2}\overset{*}{\varphi}_{p,q,j}(\vec{r}_1-\vec{r}_2;\sigma_1,\sigma_2)\varphi_{p,q,j}(\vec{r}_1'-\vec{r}_2';\sigma_1',\sigma_2')\times$$

$$\times\exp i\vec{q}\left(\frac{\vec{r}_1'+\vec{r}_2'-\vec{r}_1-\vec{r}_2}{2}\right)$$

Учитывая здесь предельный переход $V\to\infty$, заменим суммы по импульсам соответствующими интегралами:

Получим:

$$F(x_1,x_2;x_1',x_2')=$$

$$=\sum_{(\omega)}2\int d\vec{q}\, w(\omega,q)\overset{*}{\varphi}_{\omega,q}(\vec{r}_1-\vec{r}_2;\sigma_1,\sigma_2)\varphi_{\omega,q}(\vec{r}_1'-\vec{r}_2';\sigma_1',\sigma_2')\exp i\vec{q}\left(\frac{\vec{r}_1'+\vec{r}_2'-\vec{r}_1-\vec{r}_2}{2}\right)+ \tag{4.9}$$

$$+\sum_{(j)}2\int d\vec{p}\,d\vec{q}\, w_j(p,q)\overset{*}{\varphi}_{p,q,j}(\vec{r}_1-\vec{r}_2,\sigma_1,\sigma_2)\varphi_{p,q,j}(\vec{r}_1'-\vec{r}_2';\sigma_1',\sigma_2')\exp i\vec{q}\left(\frac{\vec{r}_1'+\vec{r}_2'-\vec{r}_1-\vec{r}_2}{2}\right)$$

Как видно,

$$w(\omega,q)\,d\vec{q}$$

представляет в этой формуле плотность числа связанных пар, импульс $\vec{q}$ которых лежит в бесконечно малом импульсном объеме $d\vec{q}$;

$$w_j(p,q)\,d\vec{p}\,d\vec{q}$$

обозначает плотность числа несвязанных пар с импульсами $\vec{p}$, $\vec{q}$ из бесконечно малых объемов $d\vec{p}$, $d\vec{q}$. Возьмем какую-либо волновую функцию связанного состояния:

$$\varphi_{\omega,q}(\vec{r},\sigma_1,\sigma_2)$$

Если линейные размеры l той пространственной области, в которой практически локализована $\varphi_{\omega,q}$, существенно меньше среднего расстояния $r_{ср.}$ между частицами (из различных пар) в нашей макроскопической системе, то естественно говорить о том, что данная $\varphi_{\omega,q}$ соответствует обычной молекуле из двух частиц, находящейся в состоянии ω и движущейся с импульсом $\vec{q}$. В случае, если ℓ того же порядка или больше r_{cp}, можем сопровождать слово "молекула" приставками "квази" или "псевдо".

Сравним интегральное представление (4.9) с представлением простейшей средней:

$$F(x,x') = \langle \overset{+}{\psi}(x)\,\psi(x')\rangle = \Delta(\sigma-\sigma')\int d\vec{q}\, w(q)\, e^{i\vec{q}(\vec{r}\,'-\vec{r})} \tag{4.10}$$

Мы видим, что как (4.10) описывает распределение частиц по "одночастичным состояниям", т.е. по плоским волнам, так и формула (4.9) характеризует распределение частиц по "парным состояниям".

С помощью высших корреляционных функций мы могли бы таким же образом ввести понятия волновых функций для комплекса из трех и больше частиц./7/

Напомним теперь, что в своих первоначальных исследованиях Шафрот выдвинул положение, впоследствии полностью подтвердившееся, о том, что явление сверхпроводимости обусловлено возникновением в системе электронов проводимости конденсата из квазимолекул, образованных из пар электронов. В связи с этим представим себе вообще случай, когда в системе фермионов (с обычным спином I/2) имеется конденсат из парных квазимолекул, скажем, находящихся в S -состоянии. Иными словами, мы будем рассматривать случай, когда в форму-

ле[x)] (4.9):

$$\begin{aligned} &w(\omega,q) = \rho_0\,\Delta(\omega-\omega_0)\,\delta(\vec{q}) + w_1(\omega,q) \\ &\varphi_{\omega_0,0}(\vec{r},\sigma_1,\sigma_2) = \epsilon(\sigma_1)\,\Delta(\sigma_1+\sigma_2)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,\varphi(r) \end{aligned} \tag{4.II}$$

причем:

I) $w_1(\omega,q)$ и $w_j(p,q)$ соответствуют обычному непрерывному распределению частиц по импульсам парных состояний;

2) $\varphi(r)$ - вещественная, радиально симметричная функция, ввиду (4.7) ее нормировка будет:

$$\int \varphi^2(r)\, d\vec{r} = 1$$

В изучаемой ситуации представим формулу (4.9) в следующем виде:

$$\begin{aligned} F(x_1,x_2,x_1',x_2') = {}&\rho_0\,\epsilon(\sigma_1)\,\epsilon(\sigma_1')\,\Delta(\sigma_1+\sigma_2)\,\Delta(\sigma_1'+\sigma_2')\,\varphi(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\,\varphi(\vec{r}_1\,'-\vec{r}_2\,') + \\ &+ 2\sum_{(\omega)} \int d\vec{q}\, w_1(\omega,q)\,\varphi^*_{\omega,q}(\vec{r}_1-\vec{r}_2,\sigma_1,\sigma_2)\,\varphi_{\omega,q}(\vec{r}_1\,'-\vec{r}_2\,';\sigma_1',\sigma_2')\times \\ &\times \exp i\vec{q}\left(\frac{\vec{r}_1\,'+\vec{r}_2\,'-\vec{r}_1-\vec{r}_2}{2}\right) + \\ &+ 2\sum_{(j)} \int d\vec{p}\,d\vec{q}\, w_j(p,q)\,\varphi^*_{p,q,j}(\vec{r}_1-\vec{r}_2,\sigma_1,\sigma_2)\times \\ &\times \varphi_{p,q,j}(\vec{r}_1\,'-\vec{r}_2\,';\sigma_1',\sigma_2')\exp i\vec{q}\left(\frac{\vec{r}_1\,'+\vec{r}_2\,'-\vec{r}_2-\vec{r}_2}{2}\right) \end{aligned} \tag{4.I2}$$

---

x) Здесь $\Delta(S)$ обозначает дискретную δ -функцию:

$$\Delta(S) = \begin{cases} 1, & S=0 \\ 0, & S\neq 0 \end{cases}$$

Здесь ρ_0 представляет плотность числа связанных пар, находящихся в конденсате. Заметим, что мы совершенно не касаемся вопроса о том, будут ли в действительности существовать связанные состояния, не находящиеся в конденсате. Если таких состояний нет, мы должны считать в (4.12), что тождественно:

$$w_1(\omega,q)=0$$

Возьмем, например, случай модельной динамической системы, рассматривавшийся в § 2, и воспользуемся формулой (2.37). Получим для такой системы в принятых сейчас обозначениях:

$$F(x_1,x_2;x_1',x_2')=$$

$$=\phi(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\,\phi(\vec{r}_1{}'-\vec{r}_2{}')\,\epsilon(\sigma_1)\,\epsilon(\sigma_1')\,\Delta(\sigma_1+\sigma_2)\,\Delta(\sigma_1'+\sigma_2')+ \qquad (4.13)$$

$$+F(\vec{r}_1-\vec{r}_1{}')\,F(\vec{r}_2-\vec{r}_2{}')\,\Delta(\sigma_1-\sigma_1')\,\Delta(\sigma_2-\sigma_2')-$$

$$-F(\vec{r}_2-\vec{r}_1{}')\,F(\vec{r}_1-\vec{r}_2{}')\,\Delta(\sigma_2-\sigma_1')\,\Delta(\sigma_1-\sigma_2')$$

где

$$\phi(\vec{r})=\phi(0,\vec{r})\,;\quad F(\vec{r})=F(0,\vec{r})$$

Подставив сюда интегральное представление:

$$F(\vec{r})=\int w(k)\,e^{-i(\vec{k}\vec{r})}\,d\vec{k}$$

мы приведем (4.13) к форме (4.12).

Заметим, что в данном случае $w_1(\omega,q)=0$, а парные состояния $\varphi_{p,q,j}$ будут обычными плоскими волнами.

Здесь мы имеем, следовательно, лишь одно связанное состояние с суммарным импульсом равным нулю, а остальные парные состояния с суммарным импульсом $q\neq 0$ будут такими же, как у невзаимодействующих частиц. Такой результат совершенно естественен, поскольку в нашей модельной системе взаимодействия имеются лишь между теми парами частиц, суммарный импульс которых равен нулю.

Возвратимся теперь к "общему случаю Шафрота" и применим принцип ослабления корреляции. Разобьем аргументы функции (4.1) на две группы

$$(x_1,x_2)\,;\ (x_1',x_2')$$

и будем неограниченно увеличивать расстояния между точками $\vec{r}$ из различных групп. Тогда, в силу принципа ослабления корреляции соответствующая асимптотическая форма для F будет:

$$\langle\overset{+}{\psi}(x_1)\,\overset{+}{\psi}(x_2)\rangle\langle\psi(x_2')\,\psi(x_1')\rangle$$

С другой стороны, на основании (4.12) получим для этой же асимптотической формы произведение вида:

$$\rho_0\,\epsilon(\sigma_1)\,\epsilon(\sigma_1')\,\Delta(\sigma_1+\sigma_2)\,\Delta(\sigma_1'+\sigma_2')\,\varphi(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\,\varphi(\vec{r}_1{}'-\vec{r}_2{}')$$

Можем написать поэтому:

$$\langle\overset{+}{\psi}(x_1)\,\overset{+}{\psi}(x_2)\rangle=\sqrt{\rho_0}\,\epsilon(\sigma_1)\,\Delta(\sigma_1+\sigma_2)\,\varphi(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$$

$$\langle\psi(x_2')\,\psi(x_1')\rangle=\sqrt{\rho_0}\,\epsilon(\sigma_1')\,\Delta(\sigma_1'+\sigma_2')\,\varphi(\vec{r}_1{}'-\vec{r}_2{}') \qquad (4.14)$$

Видим отсюда, что эти квазисредние отличны от нуля и что тем самым для них не выполняются правила отбора, обусловленные законом сохранения числа частиц.

Итак, если для рассматриваемого состояния статистического равновесия имеется конденсат из парных квазимолекул, то это состояние статистического равновесия будет вырождено, причем вырождение здесь связано с законом сохранения числа частиц.

В заключение отметим, что формулы (4.I4) дают простую интерпретацию "аномальных квазисредних"

$$\langle \overset{+}{\psi} \overset{+}{\psi} \rangle, \quad \langle \psi \psi \rangle$$

а именно, эти квазисредние пропорциональны волновой функции квазимолекул, находящихся в конденсате.

Их нормировка:

$$\sum_{(\sigma_2)} \int |\langle \psi(x_1)\, \psi(x_2) \rangle|^2 \, d\vec{r}_2 = \rho_0 \qquad (4.I5)$$

дает плотность числа таких квазимолекул.

§ 5. Некоторые неравенства

Мы будем рассматривать сейчас средние от произведения двух операторов:

$$\langle A B \rangle$$

как билинейные формы из A и B (линейные по отношению к каждому из этих операторов). Если символ $\langle \dots \rangle$ представляет обычную среднюю, то нетрудно заметить, что:

$$\langle A B \rangle^* = \langle B^+ A^+ \rangle$$
$$\langle A \overset{+}{A} \rangle \geq 0 \qquad (5.I)$$

Но, поскольку квазисредние можно рассматривать как обычные средние, только взятые для системы с бесконечно мало проварьированным гамильтонианом, то те же соотношения (5.I) имеют место и для квазисредних. Напомним далее, что если $A(t)$, $B(t)$ являются операторами в Гейзенберговском представлении, то в случае обычных средних доказываются следующие спектральные формулы:

$$\langle B(\tau) A(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} J_{A,B}(\omega)\, e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega$$

$$\langle A(t) B(\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} J_{A,B}(\omega)\, e^{\frac{\omega}{\theta}} e^{-\omega(t-\tau)} d\omega \qquad (5.2)$$

в которых спектральная интенсивность $J_{A,B}(\omega)$ является билинейной формой по отношению к операторам A, B. В силу только что приведенного аргумента эти же формулы остаются справедливыми и для квазисредних.

Основываясь на свойствах (5.I), (5.2), установим сейчас некоторые неравенства, которые нам понадобятся в следующей главе. Символ $\langle \dots \rangle$ здесь может представлять как обычную среднюю, так и квазисреднюю.

Докажем прежде всего, что:

$$J_{A,\overset{+}{A}}(\omega) \geq 0 \qquad (5.3)$$

Возьмем для этого произвольную функцию $f(\omega)$ достаточно регулярную и достаточно быстро убывающую на бесконечности. Если мы сумеем доказать, что для всякой такой функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} J_{A,\overset{+}{A}}(\omega)\,|f(\omega)|^2\,d\omega \geq 0 \tag{5.4}$$

то справедливость (5.3) будет тем самым установлена, поскольку мы всегда можем локализовать $|f(\omega)|^2$ в сколь угодно узкой окрестности любой точки ω_0 .

Чтобы доказать неравенство (5.4), построим функцию

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega$$

и заметим, что:

$$f(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,e^{-i\omega t}\,dt$$

Имеем поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} J_{A,\overset{+}{A}}(\omega)\,|f(\omega)|^2\,d\omega=\int_{-\infty}^{\infty} dt\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, J_{A,\overset{+}{A}}(\omega)\,h(t)\,h^*(\tau)\,e^{-i\omega(t-\tau)}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} dt\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\,\langle \overset{+}{A}(\tau)\,A(t)\rangle\,h(t)\,h^*(\tau)=\langle \mathcal{U}\,\overset{+}{\mathcal{U}}\rangle$$

где

$$\mathcal{U}=\int_{-\infty}^{\infty}\overset{+}{A}(\tau)\,h^*(\tau)\,d\tau;\quad \overset{+}{\mathcal{U}}=\int_{-\infty}^{\infty} A(t)\,h(t)\,dt$$

Отсюда, на основании (5.I) и вытекает неравенство (5.4).
Докажем теперь, что:

$$J^{*}_{A,B}(\omega)=J_{\overset{+}{B},A^{+}}(\omega) \tag{5.5}$$

Имеем, действительно:

$$\langle \overset{+}{A}(\tau)\,\overset{+}{B}(t)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} J_{\overset{+}{B},\overset{+}{A}}(\omega)\,e^{-i\omega(t-\tau)}\,d\omega$$

и потому

$$\langle \overset{+}{A}(t)\,\overset{+}{B}(\tau)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} J_{\overset{+}{B},\overset{+}{A}}(\omega)\,e^{i\omega(t-\tau)}\,d\omega \tag{5.6}$$

С другой стороны,

$$\langle \overset{+}{A}(t)\,\overset{+}{B}(\tau)\rangle=\langle B(\tau)\,A(t)\rangle^{*}=$$
$$=\left\{\int_{-\infty}^{\infty} J_{A,B}(\omega)\,e^{-i\omega(t-\tau)}\,d\omega\right\}^{*}=\int_{-\infty}^{\infty} J^{*}_{A,B}(\omega)\,e^{i\omega(t-\tau)}\,d\omega \tag{5.7}$$

Сравнив (5.6) с (5.7), мы убедимся в справедливости (5.5).
Пусть теперь

$$Z\;(A,B)$$

будет произвольная билинейная форма из A , B , обладающая свойствами:

$$Z\,(A,\overset{+}{A})\geq 0$$
$$\{Z\,(A,B)\}^{*}=Z\,(\overset{+}{B},\overset{+}{A}) \tag{5.8}$$

Покажем, что всегда имеет место неравенство:

$$|Z(A,B)|^2 \leqq Z(A,\overset{+}{A})\,Z(\overset{+}{B},B) \tag{5.9}$$

Для доказательства заметим, что на основании (5.8)

$$Z(xA+y^*\overset{+}{B},\ x^*\overset{+}{A}+yB) \geqq 0$$

где x, y - произвольные c - числа. Отсюда, раскрывая, получим

$$xx^*Z(A,\overset{+}{A})+xy\,Z(A,B)+y^*x^*Z(\overset{+}{B},\overset{+}{A})+ \\ +y^*y\,Z(\overset{+}{B},B) \geqq 0 \tag{5.10}$$

Возьмем здесь

$$x^*=-Z(A,B);\quad x=-\{Z(A,B)\}^*=-Z(\overset{+}{B},\overset{+}{A})$$

$$y=y^*=Z(A,\overset{+}{A})$$

Тогда

$$-|Z(A,B)|^2Z(A,\overset{+}{A})+\{Z(A,\overset{+}{A})\}^2Z(\overset{+}{B},B)\geqq 0$$

Отсюда, если $Z(A,\overset{+}{A}) \neq 0$, мы и получим неравенство (5.9). Нам остается показать, что если

$$Z(A,\overset{+}{A})=0 \tag{5.11}$$

то и

$$Z(A,B)=0 \tag{5.12}$$

Для этого в (5.10) в случае (5.11) положим:

$$x^*=-Z(A,B)R;\quad x=-Z(\overset{+}{B},\overset{+}{A})R;\quad y=y^*=1$$

где R - произвольное положительное число. Найдем:

$$-2R\,|Z(A,B)|^2+Z(\overset{+}{B},B)\geqq 0 \tag{5.13}$$

Пусть $R\to\infty$. Тогда, если (5.12) не верно, мы видим, что левая часть (5.13) должна стремиться к $-\infty$, что невозможно. Итак, наше доказательство неравенства (5.9) полностью закончено.

Заметим теперь, что

$$Z(A,B)=J_{A,B}(\omega)$$

удовлетворяет условиям (5.8), так как для $J_{A,B}$ справедливы соотношения (5.3), (5.5). Мы можем поэтому воспользоваться в данном случае неравенством (5.9) и написать:

$$|J_{A,B}(\omega)|^2\leqq J_{A,\overset{+}{A}}(\omega)\,J_{\overset{+}{B},B}(\omega) \tag{5.14}$$

Можем положить также:

$$Z(A,B)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty} J_{A,B}(\omega)\frac{e^{\frac{\omega}{\theta}}-1}{\omega}\,d\omega \tag{5.15}$$

поскольку условия (5.8) опять выполняются ввиду (5.3), (5.5) и положительности функции

$$\frac{e^{\frac{\omega}{\theta}}-1}{\omega}$$

Свяжем функцию (5.15) с функцией Грина. Рассмотрим, следуя [8] запаздывающую и опережающую функции Грина

$$\ll A(t), B(\tau) \gg_r = -i\theta(t-\tau) \langle A(t)B(\tau) - B(\tau)A(t) \rangle \quad (5.16)$$

$$\ll A(t), B(\tau) \gg_a = i\theta(\tau-t) \langle A(t)B(\tau) - B(\tau)A(t) \rangle$$

На основании спектральных представлений (5.2) не трудно заметить, что Фурье-образы их, как функций $t-\tau$, будут соответственно:

$$\ll A, B \gg_{E+i\varepsilon}, \quad \ll A, B \gg_{E-i\varepsilon}$$

Здесь

$$\ll A, B \gg_E$$

как функция комплексного переменного E задается формулой:

$$\ll A, B \gg_E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J_{A,B}(\omega) \frac{e^{\frac{\omega}{\theta}} - 1}{E-\omega} d\omega \quad (5.17)$$

Видим отсюда, что выражение (5.15)

$$-\ll A, B \gg_{E=0} \quad (5.18)$$

Поэтому, неравенство (5.9) в данном случае принимает форму:

$$\left| \ll A, B \gg_{E=0} \right|^2 \leq \ll A, \overset{+}{A} \gg_{E=0} \cdot \ll \overset{+}{B}, B \gg_{E=0} \quad (5.19)$$

которая в дальнейшем будет использована.

В заключение обратим внимание на одно важное приложение формы (5.18). Дадим гамильтониану H бесконечно малое приращение δH (также независящее явно от времени). Тогда соответствующая вариация средней от некоторого оператора $A(t)$ будет равна /8/:

$$\delta\langle A \rangle = \langle A \rangle_{H+\delta H} - \langle A \rangle_H = 2\pi \ll A, \delta H \gg_{E=0} \quad (5.20)$$

Глава II. ТЕОРЕМЫ ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ТИПА $1/q^2$ В ТЕОРИИ СВЕРХТЕКУЧЕСТИ БОЗЕ И ФЕРМИ СИСТЕМ

§ 6. Свойства симметрии основных функций Грина для Бозе-систем при наличии конденсата

Рассмотрим динамическую систему из одинаковых бесспиновых Бозе-частиц с гамильтонианом вида:

$$H = -\frac{1}{2m}\int\limits_V \overset{+}{\psi}\Delta\psi\, d\vec{\tau} - \lambda\int\limits_V \overset{+}{\psi}\psi\, d\vec{\tau} + U(\overset{+}{\psi},\psi) = \tag{6.1}$$

$$= \sum\left(\frac{k^2}{2m}-\lambda\right)\overset{+}{a}_k a_k + U(\overset{+}{\psi},\psi)$$

$$U(\overset{+}{\psi},\psi) = \frac{1}{2}\iint\limits_V \Phi(\vec{\tau}_1-\vec{\tau}_2)\overset{+}{\psi}(\vec{\tau}_1)\overset{+}{\psi}(\vec{\tau}_2)\psi(\vec{\tau}_2)\times$$

$$\times\psi(\vec{\tau}_1)\,d\vec{\tau}_1 d\vec{\tau}_2 \tag{6.2}$$

Здесь $\Phi(\tau)$ -вещественная функция расстояния, представляющая энергию взаимодействия пары частиц. При этом мы ограничиваемся изучением того случая, когда в нашей системе при данной температуре θ имеется Бозе-конденсат.

Как уже отмечалось в § 3, в таком случае соответствующее состояние статистического равновесия должно быть вырождено, причем вырождение здесь обязательно связано с законом сохранения числа частиц.

Для того чтобы снять вырождение, возьмем гамильтониан

$$H_\nu = H - \nu\sqrt{V}\,(a_0+\overset{+}{a}_0), \tag{6.3}$$

содержащей дополнительные бесконечно малые члены вида

$$-\nu\sqrt{V}\,(a_0+\overset{+}{a}_0),\ \nu>0 \tag{6.4}$$

Мы предполагаем, что других типов вырождения нет [x)], так что введение членов (6.4) достаточно для снятия вырождения.

Таким образом для квазисредних

$$\langle A(t)B(\tau)\rangle$$

где $A,B = a_{\pm k},\ \overset{+}{a}_{\pm k}\ (\vec{k}\neq 0)$, правила отбора, вытекающие из закона сохранения импульса, должны выполняться, а правила отбора, обусловленные законом сохранения числа частиц, могут не выполняться.

Введем простейшие функции Грина, положив:

$$\langle\langle A(t),B(\tau)\rangle\rangle^{ret} = -i\theta(t-\tau)\langle A(t)B(\tau)-B(\tau)A(t)\rangle$$

$$\langle\langle A(t),B(\tau)\rangle\rangle^{adv} = i\theta(t-\tau)\langle A(t)B(\tau)-B(\tau)A(t)\rangle$$

$$\langle\langle A(t),B(\tau)\rangle\rangle^{c} = -i\langle T(A(t)B(\tau))\rangle = \tag{6.5}$$

$$= -i\left\{\theta(t-\tau)\langle A(t)B(\tau)\rangle + \theta(\tau-t)\langle B(\tau)A(t)\rangle\right\}$$

x) По-существу, мы предполагаем здесь, что наша система находится в пространственно однородной фазе и что в ней нет молекул, состоящих из двух и более частиц.

Их "энергетическое представление" определяем с помощью интегралов Фурье:

$$\langle\langle A(t), B(\tau)\rangle\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle\langle A, B\rangle\rangle_E \, e^{-iE(t-\tau)} \, dE \qquad (6.6)$$

Основываясь на спектральных формулах:

$$\langle B(\tau) A(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} J_{A,B}(\omega)\, e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega$$

$$\langle A(t) B(\tau)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} J_{A,B}(\omega)\, e^{\frac{\omega}{\theta}} e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega$$

получаем:

$$\langle\langle A, B\rangle\rangle_E^{ret} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{\frac{\omega}{\theta}} - 1\right) J_{A,B}(\omega) \frac{d\omega}{E - \omega + i\varepsilon}$$

$$\langle\langle A, B\rangle\rangle_E^{adv} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{\frac{\omega}{\theta}} - 1\right) J_{A,B}(\omega) \frac{d\omega}{E - \omega - i\varepsilon}$$

$$\langle\langle A, B\rangle\rangle_E^{c} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J_{A,B}(\omega) \left\{ \frac{e^{\frac{\omega}{\theta}}}{E - \omega + i\varepsilon} - \frac{1}{E - \omega - i\varepsilon} \right\} d\omega$$

Для особого случая нулевой температуры спектральные формулы для рассматриваемых средних представляются в виде:

$$\langle A(t) B(\tau)\rangle = \int_{0}^{\infty} I_{A,B}(\omega)\, e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega$$

$$\langle B(\tau) A(t)\rangle = \int_{-\infty}^{0} I_{A,B}(\omega)\, e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega$$

и тогда для энергетического представления функций Грина будем иметь:

$$\langle\langle A, B\rangle\rangle_E^{ret} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon(\omega) I_{A,B}(\omega)\, d\omega}{E - \omega + i\varepsilon}$$

$$\langle\langle A, B\rangle\rangle_E^{adv} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon(\omega) I_{A,B}(\omega)\, d\omega}{E - \omega - i\varepsilon}$$

$$\langle\langle A, B\rangle\rangle_E^{c} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon(\omega) I_{A,B}(\omega)\, d\omega}{E - \omega + i\varepsilon\,\epsilon(\omega)}$$

где

$$\epsilon(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega > 0 \\ -1, & \omega < 0 \end{cases}$$

Как видно, запаздывающая и опережающая функции Грина:

$$\langle\langle A, B\rangle\rangle_E^{ret}, \quad \langle\langle A, B\rangle\rangle_E^{adv}$$

всегда являются граничными значениями функции комплексного переменного E :

$$\langle\langle A, B\rangle\rangle_E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J_{A,B}(\omega) \frac{e^{\frac{\omega}{\theta}} - 1}{E - \omega} d\omega \qquad (6.7)$$

Причинная же функция Грина

$$\langle\langle A, B\rangle\rangle_E^{c}$$

обладает этим свойством, вообще, только в случае нулевой температуры. Заметим теперь, что из определений (6.5) вытекает:

$$\langle\langle A(t), B(\tau)\rangle\rangle^{c} = \langle\langle B(\tau), A(t)\rangle\rangle^{c}$$

$$\langle\langle A(t), B(\tau)\rangle\rangle^{ret} = \langle\langle B(\tau), A(t)\rangle\rangle^{adv}$$

Откуда, на основании (6.6) получим:

$$\langle\langle A, B\rangle\rangle_{E}^{c} = \langle\langle B, A\rangle\rangle_{-E}^{c} \tag{6.8}$$

а также:

$$\langle\langle A, B\rangle\rangle_{E}^{ret} = \langle\langle B, A\rangle\rangle_{-E}^{adv} \tag{6.9}$$

Расширяя соотношение (6.9) на комплексную плоскость, убеждаемся, что для функции комплексного переменного (6.7) также справедливо равенство типа (6.8):

$$\langle\langle A, B\rangle\rangle_{E} = \langle\langle B, A\rangle\rangle_{-E} \tag{6.10}$$

Рассмотрим матричную функцию Грина:

$$\underset{\vec{k}\neq 0}{G(E,k)} = \begin{vmatrix} G_{11}(E,k); & G_{21}(E,k) \\ G_{12}(E,k); & G_{22}(E,k) \end{vmatrix} \tag{6.11}$$

где

$$G_{11}(E,k) = \langle\langle a_k, \overset{+}{a}_k\rangle\rangle_E, \quad G_{21}(E,k) = \langle\langle \overset{+}{a}_{-k}, \overset{+}{a}_k\rangle\rangle_E$$

$$G_{12}(E,k) = \langle\langle a_k, a_{-k}\rangle\rangle_E, \quad G_{22}(E,k) = \langle\langle \overset{+}{a}_{-k}, a_k\rangle\rangle_E \tag{6.12}$$

В качестве $\langle\langle A, B\rangle\rangle_E$ мы будем подразумевать здесь или функцию комплексного переменного (6.7), или причинную функцию Грина для вещественных E. В обоих случаях, благодаря (6.8), (6.10), имеем:

$$G_{22}(E,k) = G_{11}(-E,-k);$$

$$G_{\alpha\beta}(E,k) = G_{\alpha\beta}(-E,-k); \text{ если } \alpha\neq\beta \tag{6.13}$$

Заметим теперь, что гамильтониан H_ν инвариантен по отношению к каноническому преобразованию:

$$a_k \to a_{-k}, \quad \overset{+}{a}_k \to \overset{+}{a}_{-k}$$

Поэтому средние

$$\langle \overset{+}{a}_k(t)\, a_k(\tau)\rangle, \quad \langle a_k(t)\, \overset{+}{a}_k(\tau)\rangle$$

$$\langle a_k(t)\, a_k(\tau)\rangle, \quad \langle \overset{+}{a}_{-k}(t)\, \overset{+}{a}_k(t)\rangle$$

не должны меняться при замене $\vec{k} \to -\vec{k}$. Следовательно, и для наших функций Грина будем иметь:

$$G_{\alpha\beta}(E,k) = G_{\alpha\beta}(E,-k) \tag{6.14}$$

Заметим далее, что так как коэффициенты в выражении гамильтониана H_ν все вещественны, соответствующие уравнения движения должны быть инвариантны по отношению к инверсии времени: $t \to -t$, сопровождающейся заменой i на $-i$.

Поэтому средняя

$$\langle a_{-k}(\tau)\, a_k(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} J_k(\omega)\, e^{-i\omega(t-\tau)}\, d\omega \tag{6.15}$$

не изменяется для преобразования:

$$t \to -t,\ \tau \to -\tau,\ i \to -i$$

ввиду чего

$$\int_{-\infty}^{\infty} J_k(\omega) e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} J_k^*(\omega) e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega$$

Отсюда следует, что спектральная интенсивность $J_k(\omega)$ является вещественной функцией:

$$J_k^*(\omega) = J_k(\omega) \qquad (6.16)$$

и потому на основании (6.15):

$$\langle \overset{+}{a}_k(t) \overset{+}{a}_{-k}(\tau) \rangle = \langle a_{-k}(\tau) a_k(t) \rangle^* = \int_{-\infty}^{\infty} J_k(\omega) e^{i\omega(t-\tau)} d\omega$$

и

$$\langle \overset{+}{a}_k(\tau) \overset{+}{a}_k(t) \rangle = \langle a_k(\tau) a_k(t) \rangle$$

Соответствующее соотношение для функций Грина будет

$$\langle\langle \overset{+}{a}_k, \overset{+}{a}_{-k} \rangle\rangle_E = \langle\langle a_{-k}, a_k \rangle\rangle_E$$

т.е. в наших обозначениях:

$$G_{21}(E,k) = G_{12}(E,k) \qquad (6.17)$$

Введем теперь матрицу $\Sigma(E,k)$:

$$\Sigma(E,k) = \frac{1}{2\pi} G^{-1}(E,k) \qquad (6.18)$$

или:

$$2\pi \Sigma(E,k) G(E,k) = 1 \qquad (6.19)$$

где I - единичная матрица. Эту матрицу $\Sigma(E,k)$ мы можем интерпретировать как полный "массовый оператор". В частном случае нулевой температуры, когда применима фейнмановская диаграммная техника, $\Sigma(E,k)$ представляет обычную "собственно-энергетическую" часть.

Из определения (6.18) ясно также, что ее элементы $\Sigma_{\alpha\beta}(E,k)$ всегда удовлетворяют тем же соотношениям симметрии (6.13), (6.14), (6.17), что и $G_{\alpha\beta}(E,k)$.

Раскрывая матричное равенство (6.19), получим:

$$\Sigma_{11}(E,k) G_{11}(E,k) + \Sigma_{12}(E,k) G_{21}(E,k) = \frac{1}{2\pi}$$

$$\Sigma_{21}(E,k) G_{11}(E,k) + \Sigma_{22}(E,k) G_{21}(E,k) = 0$$

Но, в силу только что сказанного

$$\Sigma_{21}(E,k) = \Sigma_{12}(E,k)$$

$$\Sigma_{22}(E,k) = \Sigma_{11}(-E,k)$$

и мы можем написать:

$$\Sigma_{11}(E,k) \langle\langle a_k, \overset{+}{a}_k \rangle\rangle_E + \Sigma_{12}(E,k) \langle\langle \overset{+}{a}_{-k}, \overset{+}{a}_k \rangle\rangle_E = \frac{1}{2\pi} \qquad (6.20)$$

$$\Sigma_{12}(E,k) \langle\langle a_k, \overset{+}{a}_k \rangle\rangle_E + \Sigma_{11}(-E,k) \langle\langle \overset{+}{a}_{-k}, \overset{+}{a}_k \rangle\rangle_E = 0$$

Входящие сюда функции $\Sigma_{\alpha,\beta}$ обладают свойствами симметрии:

$$\Sigma_{11}(E,-k) = \Sigma_{11}(E,k); \quad \Sigma_{12}(E,k) = \Sigma_{12}(E,-k)$$

$$\Sigma_{12}(E,k) = \Sigma_{12}(-E,k) \qquad (6.21)$$

Поэтому из (6.20) можем получить следующие формулы, выражающие рассматриваемые функции Грина через Σ_{11} , Σ_{12} :

$$\langle\langle a_k, \overset{+}{a}_k \rangle\rangle_E = \frac{1}{2\pi} \frac{\Sigma_{11}(-E,k)}{\Sigma_{11}(E,k)\Sigma_{11}(-E,k) - \Sigma_{12}^2(E,k)} \tag{6.22}$$

$$\underset{k\neq 0}{\langle\langle \overset{+}{a}_{-k}, \overset{+}{a}_k \rangle\rangle_E} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\Sigma_{12}(E,k)}{\Sigma_{11}(E,k)\Sigma_{11}(-E,k) - \Sigma_{12}^2(E,k)}$$

§ 7. Модель с выделенным конденсатом

Обратим теперь внимание на то, что ввиду вещественности коэффициентов в гамильтониане H_ν выражение

$$\langle a_0 \rangle$$

является вещественным и потому:

$$\left\langle \frac{a_0}{\sqrt{V}} \right\rangle = \left\langle \frac{\overset{+}{a}_0}{\sqrt{V}} \right\rangle \tag{7.1}$$

Возьмем среднюю

$$\left\langle \frac{\overset{+}{a}_0 a_0}{V} \right\rangle = \rho_0$$

и заметим, что

$$\rho_0 = \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \langle \overset{+}{\psi}(\vec{r}_1)\psi(\vec{r}_2)\rangle d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \tag{7.2}$$

Так как здесь $V \to \infty$, то ясно, что все значение интеграла в (7.2) происходит от области бесконечно удаленных между

собой точек $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Поэтому, применяя принцип ослабления корреляции, найдем с асимптотической точностью:

$$\rho_0 = \frac{1}{V}\int_V \langle \overset{+}{\psi}(\vec{r}_1)\rangle d\vec{r}_1 \frac{1}{V}\int_V \langle \psi(\vec{r}_2)\rangle d\vec{r}_2 = \left\langle \frac{\overset{+}{a}_0}{\sqrt{V}} \right\rangle \left\langle \frac{a_0}{\sqrt{V}} \right\rangle$$

ввиду чего, на основании (7.I) будем иметь:

$$\left\langle \frac{a_0}{\sqrt{V}} \right\rangle = \left\langle \frac{\overset{+}{a}_0}{\sqrt{V}} \right\rangle = \sqrt{\rho_0} \tag{7.3}$$

Рассмотрим сейчас выражение типа

$$\langle \dots A(t_\alpha) \dots \varphi(t_\beta, \vec{r}_\beta) \dots \rangle$$

в котором:

$$A = \frac{a_0}{\sqrt{V}}, \frac{\overset{+}{a}_0}{\sqrt{V}}; \quad \varphi = \psi, \overset{+}{\psi}$$

и применим к нему, так же как в случае (7.2), принцип ослабления корреляции.

Получим равенство x) :

$$\langle \dots A(t_\alpha) \dots \varphi(t_\beta, \vec{r}_\beta) \dots \rangle = (\sqrt{\rho_0})^{\ell} \langle \dots \varphi(t_\beta, \vec{r}_\beta) \dots \rangle$$

---

x) Разумеется, равенства такого типа имеют асимптотический характер и переходят в точные равенства лишь после совершения предельного перехода $V \to \infty$; так как, однако, мы всегда имеем здесь дело с предельными соотношениями, мы не будем каждый раз оговаривать это обстоятельство.

Введем обозначения:

$$\tilde{\varphi} = \gamma \frac{a_0}{\sqrt{V}} + \psi_1 , \; \gamma \frac{\overset{+}{a}_0}{\sqrt{V}} + \overset{+}{\psi}_1$$

$$\gamma = 0,1 ; \quad \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k \neq 0} a_k e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})}$$

Тогда, на основании только что полученного результата убедимся, что при вычислении средних вида:

$$< \dots \tilde{\varphi} \, (t_\alpha \vec{r}_\alpha) \dots >$$

мы можем заменять операторы a_0, $\overset{+}{a}_0$, входящие в $\tilde{\varphi}$ на C - число $\sqrt{N_0}$, где

$$N_0 = \rho_0 V$$

Учитывая это свойство, покажем, что задача с гамильтонианом H_ν может быть приведена к задаче с гамильтонианом $H_\nu(N_0)$, который получается из выражения (6.3) для H_ν заменой:

$$\psi(\vec{r}) \longrightarrow \sqrt{\rho_0} + \psi_1(\vec{r}); \; \overset{+}{\psi}(\vec{r}) \longrightarrow \sqrt{\rho_0} + \overset{+}{\psi}_1(\vec{r})$$

т.е. заменой операторов a_0, $\overset{+}{a}_0$, входящих в H_ν, C -числом $\sqrt{N_0}$. Для этой цели рассмотрим систему "двухвременных" /8/ функций Грина типа :

$$\ll \varphi_1(t,\vec{r}_1) \dots \varphi_1(t,\vec{r}_s); \varphi_1(\tau,\vec{x}_1) \dots \varphi_1(\tau,\vec{x}_m) \gg^{ret}_{adv} =$$

$$= \begin{matrix} -i\theta(t-\tau) \\ i\theta(\tau-t) \end{matrix} \Big\langle \big[\varphi_1(t,\vec{r}_1) \dots \varphi_1(t,\vec{r}_s); \varphi_1(\tau,\vec{x}_1) \dots \varphi_1(\tau,\vec{x}_m) \big] \Big\rangle \qquad (7.4)$$

где

$$\varphi_1 = \psi_1, \overset{+}{\psi}_1$$

Чтобы получить цепочку уравнений, связывающих эти функции, выразим производную

$$i \frac{\partial}{\partial t} \ll \varphi_1(t,\vec{r}_1) \dots \varphi_1(t,\vec{r}_s); \varphi_1(\tau,\vec{x}_1) \dots \varphi_1(\tau,\vec{x}_m) \gg \qquad (7.5)$$

с помощью уравнений движения.

Имеем для гамильтониана H_ν :

$$i \frac{\partial \psi(t,\vec{r})}{\partial t} = D(t,\vec{r}; \psi, \overset{+}{\psi}) \equiv$$

$$\equiv \left(-\frac{1}{2\mu}\Delta - \lambda\right)\psi(t,\vec{r}) - \nu + \int \Phi(\vec{r}-\vec{r}')\overset{+}{\psi}(t,\vec{r}')\psi(t,\vec{r}')d\vec{r}'\psi(t,\vec{r})$$

и потому:

$$i \frac{\partial \psi_1(t,\vec{r})}{\partial t} = D(t,\vec{r}; \psi, \overset{+}{\psi}) - \frac{1}{V}\int_V D(t,\vec{r}; \psi, \overset{+}{\psi}) d\vec{r}$$

$$-i \frac{\partial \overset{+}{\psi}_1(t,\vec{r})}{\partial t} = \overset{+}{D}(t,\vec{r}; \psi, \overset{+}{\psi}) - \frac{1}{V}\int_V \overset{+}{D}(t,\vec{r}; \psi, \overset{+}{\psi}) d\vec{r}$$

Так как D и $\overset{+}{D}$ войдут в выражение производной (7.5) лишь через посредство средних вида:

$$< \dots \varphi_1 \dots D \dots \varphi_1 \dots >, \; < \dots \varphi_1 \dots \overset{+}{D} \dots \varphi_1 >$$

мы можем произвести в формах:

$$D(t,\vec{r}; \psi, \overset{+}{\psi}), \; \overset{+}{D}(t,\vec{r}; \psi, \overset{+}{\psi})$$

замену:

$$\psi \longrightarrow \sqrt{\rho_0} + \psi_1 , \; \overset{+}{\psi} \longrightarrow \sqrt{\rho_0} + \overset{+}{\psi}_1$$

Тем самым при раскрытии членов:

$$\ll \varphi_1(t,\vec{r}_1)\dots \frac{\partial \varphi_1(t,\vec{r}_i)}{\partial t}\dots,\dots\varphi_1(\tau,\vec{x}_m)\gg \tag{7.6}$$

мы фактически будем пользоваться уравнениями вида:

$$i\,\frac{\partial \psi_1(t,\vec{r})}{\partial t} = D(t,\vec{r};\sqrt{\rho_0}+\psi_1,\sqrt{\rho_0}+\overset{+}{\psi}_1) - \frac{1}{V}\int\limits_V D(t,\vec{r};\sqrt{\rho_0}+\psi_1,\sqrt{\rho_0}+\overset{+}{\psi}_1)\,d\vec{r}$$

$$i\,\frac{\partial \overset{+}{\psi}_1(t,\vec{r})}{\partial t} = \overset{+}{D}(t,\vec{r};\sqrt{\rho_0}+\psi_1,\sqrt{\rho_0}+\overset{+}{\psi}_1) - \frac{1}{V}\int\limits_V \overset{+}{D}(t,\vec{r};\sqrt{\rho_0}+\psi_1,\sqrt{\rho_0}+\overset{+}{\psi}_1)\,d\vec{r} \tag{7.7}$$

С их помощью члены (7.6) представятся через функции Грина рассматриваемого нами класса. В исследуемом выражении (7.5) кроме суммы членов типа (7.6) будет присутствовать еще "неоднородный член":

$$\delta(t-\tau)\langle[\varphi_1(t,\vec{r}_1)\dots;\dots\varphi_1(t,\vec{x}_m)]\rangle$$

Для раскрытия его пользуемся перестановочными соотношениями. Получим средние от произведений не больше чем из $s+m-2$ одновременных полевых функций φ_1, которые можно опять выразить через функции Грина (низшего порядка) с помощью спектральных представлений.

Для фактического пользования ими удобно иметь дело с энергетически импульсным представлением. Обозначим наши функции Грина в этом представлении через

$$\mathcal{G}_{H_\nu}(E;p_1,\dots p_s;q_1,\dots q_m)$$

Тогда полученную цепочку уравнений мы можем записать в виде:

$$E\,\mathcal{G}_{H_\nu}(E;p_1,\dots p_s;q_1,\dots q_m) = \mathcal{L}(E,p_1,\dots p_s,q_1,\dots q_m;\mathcal{G}_{H_\nu})$$

где выражения $\mathcal{L}$ являются формами, зависящими от функций $\mathcal{G}_{H_\nu}$ различных порядков. Поскольку спектральные представления "универсальны" из сказанного ясно, что от конкретной формы гамильтониана будут зависеть только те члены в выражении $\mathcal{L}$, которые происходят от членов типа (7.6). Но при их раскрытии мы воспользовались уравнениями (7.7). Нетрудно заметить, однако, что <u>эти уравнения являются точными уравнениями движения для гамильтониана $H_\nu(N_0)$</u>.

Таким образом $\mathcal{G}_{H_\nu}$ <u>удовлетворяют той же цепочке уравнений, что и соответствующие функции Грина $\mathcal{G}_{H_\nu(N_0)}$ для гамильтониана $H_\nu(N_0)$</u>.

С другой стороны, "граничные условия" для функций комплексного переменного E:

$$\mathcal{G}_{H_\nu},\ \mathcal{G}_{H_\nu(N_0)}$$

на вещественной оси E (типа дисперсионных соотношений), обусловленные спектральными представлениями, также идентичны.

Отсюда мы делаем заключение, что x)

---

x) К такому же заключению мы могли бы придти, и притом тем же путем, если вместо "двувременных" функций Грина (7.4) мы рассмотрели бы совокупность Швингеровских "многовременных" функций Грина типа:

$$\mathcal{G}_{H_\nu} = \mathcal{G}_{H_\nu(N_0)} \tag{7.8}$$

или

$$\langle\langle \varphi_1(t,\vec r_1)\dots\varphi_1(t,\vec r_s);\ \varphi_1(\tau,\vec x_1)\dots\varphi_1(\tau,\vec x_m)\rangle\rangle_{H_\nu} =$$

$$= \langle\langle \varphi_1(t,\vec r_1)\dots\varphi_1(t,\vec r_s);\ \varphi_1(\tau,\vec x_1)\dots\varphi_1(\tau,\vec x_m)\rangle\rangle_{H_\nu(N_0)} \tag{7.9}$$

Далее, так как средние вида:

$$\langle \varphi_1(t,\vec r_1)\dots\varphi_1(t,\vec r_n)\rangle = \langle \varphi_1(\vec r_1)\dots\varphi_1(\vec r_n)\rangle$$

выражаются через наши функции Грина, то будем иметь также:

$$\langle \dots\overset{+}{\psi}(\vec r_\alpha)\dots\psi(\vec r_\beta)\dots\rangle_{H_\nu} = \langle\dots(\sqrt{\rho_0}+\overset{+}{\psi}_1(\vec r_\alpha))\dots(\sqrt{\rho_0}+\psi_1(\vec r_\beta))\rangle_{H_\nu}$$

$$= \langle\dots(\sqrt{\rho_0}+\overset{+}{\psi}_1(\vec r_\alpha))\dots(\sqrt{\rho_0}+\psi_1(\vec r_\beta))\dots\rangle_{H_\nu(N_0)} \tag{7.10}$$

---

x) продолжение сноски

$$\langle T(\varphi_1(t_1,\vec r_1)\dots\varphi_1(t_n,\vec r_n))\rangle$$

и составили бы соответственно Швингеровскую цепочку уравнений. Мы заметили бы опять, что

$$\langle T(\dots\varphi_1(t_\alpha,\vec r_\alpha)\dots)\rangle_{H_\nu}$$

удовлетворяют той же цепочке уравнений, что и

$$\langle T(\dots\varphi_1(t_\alpha,\vec r_\alpha)\dots)\rangle_{H_\nu(N_0)}$$

а соответствующие спектральные свойства, обуславливаемые структурой средних от T -произведений, идентичны.

Отсюда следует равенство соответствующих средних энергий, а потому и свободных энергий для обеих динамических систем.

Таким образом, мы убеждаемся, что изучение динамической системы с гамильтонианом H_ν можно привести к изучению "модельной системы с выделенным конденсатом", характеризуемой гамильтонианом $H_\nu(N_0)$. Здесь следует однако заметить, что в модели с выделенным конденсатом величина N_0 формально может рассматриваться как "произвольный" внешний параметр.

Чтобы получить уравнение для определения N_0, обратимся опять к первоначальной системе с гамильтонианом H_ν и раскроем соотношение:

$$0 = i\,\frac{d\left\langle \frac{a_0}{\sqrt{V}}\right\rangle}{dt} = \left\langle i\,V^{-1/2}\frac{da_0}{dt}\right\rangle \tag{7.11}$$

воспользовавшись уравнением движения (которого "не хватает" в модельной системе):

$$i\,\frac{da_0}{dt} =$$

$$= \frac{1}{2V}\sum_{(k_1',k_2',k_2)}\left\{\tilde\Phi(k_1')+\tilde\Phi(k_2')\right\}\Delta(\vec k_2-\vec k_1'-\vec k_2')\,\overset{+}{a}_{k_2}a_{k_2'}a_{k_1'} - \nu\sqrt{V} - \lambda a_0$$

где

$$\tilde\Phi(k) = \int \Phi(r)\,e^{i(\vec k\cdot\vec r)}\,d\vec r$$

Отсюда, выделяя амплитуды с нулевым импульсом, найдем:

$$i\,\frac{da_0}{dt} = -\lambda a_0 + \frac{\overset{+}{a}_0 a_0 a_0}{V}\,\tilde\Phi(0) - \nu\sqrt{V} +$$

$$+\frac{1}{V}\sum_{(p\neq 0)}\left\{\tilde{\Phi}(p)+\tilde{\Phi}(0)\right\}\overset{+}{a}_p a_p a_0+\frac{1}{V}\sum_{(p\neq 0)}\tilde{\Phi}(p)\overset{+}{a}_0 a_p a_{-p}+$$

$$+\frac{1}{2V}\sum_{(p\neq 0,\,p_1\neq 0,\,p_2\neq 0)}\left\{\tilde{\Phi}(p_1)+\tilde{\Phi}(p_2)\right\}\overset{+}{a}_p a_{p_1} a_{p_2}\Delta(p-p_1-p_2)$$

Подставив это уравнение в правую часть равенства (7.II), приведем его к виду:

$$S=0 \tag{7.I2}$$

где

$$S=\left\langle\frac{\overset{+}{a}_0 a_0 a_0}{V^{3/2}}\right\rangle_{H_\nu}-\nu-\lambda\left\langle\frac{a_0}{\sqrt{V}}\right\rangle_{H_\nu}+$$

$$+\frac{1}{V^{3/2}}\sum_{(p\neq 0)}\left\{\tilde{\Phi}(p)+\tilde{\Phi}(0)\right\}\langle\overset{+}{a}_p a_p a_0\rangle_{H_\nu}+$$

$$+\frac{1}{V^{3/2}}\sum_{(p\neq 0)}\tilde{\Phi}(p)\langle\overset{+}{a}_0 a_p a_p\rangle_{H_\nu}+$$

$$+\frac{1}{2V^{3/2}}\sum_{(p\neq 0,\,p_1\neq 0,\,p_2\neq 0)}\left\{\tilde{\Phi}(p_1)+\tilde{\Phi}(p_2)\right\}\Delta(p-p_1-p_2)\langle\overset{+}{a}_p a_{p_1} a_{p_2}\rangle_{H_\nu}$$

Но, в соответствии с ранее сказанным, мы можем заменить здесь a_0 и $\overset{+}{a}_0$ на $\sqrt{N_0}$, а остающиеся средние:

$$\langle\overset{+}{a}_p a_p\rangle_{H_\nu},\ \langle a_p a_{-p}\rangle_{H_\nu},\ \langle\overset{+}{a}_p a_{p_1} a_{p_2}\rangle_{H_\nu}$$

заменить на

$$\langle\overset{+}{a}_p a_p\rangle_{H_\nu(N_0)},\ \langle a_p a_{-p}\rangle_{H_\nu(N_0)},\ \langle\overset{+}{a}_p a_{p_1} a_{p_2}\rangle_{H_\nu(N_0)}$$

Получим тогда:

$$S=\rho_0^{3/2}\tilde{\Phi}(0)-\nu-\lambda\rho_0^{1/2}+\frac{\rho_0^{1/2}}{V}\sum_{(p\neq 0)}\left\{\tilde{\Phi}(p)+\tilde{\Phi}(0)\right\}\langle\overset{+}{a}_p a_p\rangle_{H_\nu(N_0)}+$$

$$+\frac{\rho_0^{1/2}}{V}\sum_{(p\neq 0)}\tilde{\Phi}(p)\langle a_p a_{-p}\rangle_{H_\nu(N_0)}+$$

$$+\frac{1}{2V^{3/2}}\sum_{(p\neq 0,\,p_1\neq 0,\,p_2\neq 0)}\left\{\tilde{\Phi}(p_1)+\tilde{\Phi}(p_2)\right\}\Delta(p-p_1-p_2)\langle\overset{+}{a}_p a_{p_1} a_{p_2}\rangle_{H_\nu(N_0)} \tag{7.I3}$$

Имеем, с другой стороны:

$$H_\nu(N_0)=H(N_0)-2\nu\sqrt{N_0}\,V^{1/2} \tag{7.I4}$$

где $H(N_0)$ получается из выражения H заменой операторов a_0 и $\overset{+}{a}_0$ на $\sqrt{N_0}$, т.е.

$$H(N_0)=-\lambda N_0+\frac{N_0^2}{2V}\tilde{\Phi}(0)+\sum_{(k\neq 0)}\left(\frac{k^2}{2\mu}-\lambda\right)\overset{+}{a}_k a_k+$$

$$+\frac{N_0}{V}\sum_{(k\neq 0)}\left\{\tilde{\Phi}(k)+\tilde{\Phi}(0)\right\}\overset{+}{a}_k a_k+\frac{N_0}{2V}\sum_{(k\neq 0)}\tilde{\Phi}(k)(a_k a_{-k}+$$

$$+\overset{+}{a}_{-k}\overset{+}{a}_k)+$$

$$+\frac{\sqrt{N_0}}{2V}\sum_{(k\neq 0,\,k_1\neq 0,\,k_2\neq 0)}\left\{\tilde{\Phi}(k_1)+\tilde{\Phi}(k_2)\right\}\overset{+}{a}_{k_1}\overset{+}{a}_{k_2}a_k\,\Delta(k-k_1-k_2)+$$

$$+\frac{\sqrt{N_0}}{2V}\sum_{(k\neq 0,\,k_1\neq 0,\,k_2\neq 0)}\left\{\tilde{\Phi}(k_1)+\tilde{\Phi}(k_2)\right\}\Delta(k-k_1-k_2)\overset{+}{a}_k a_{k_1}a_{k_2}+$$

$$+\frac{1}{2V}\sum_{(k_1\neq 0,\,k_2\neq 0,\,k_1'\neq 0,\,k_2'\neq 0)}\tilde{\Phi}(k_1-k_1')\Delta(k_1+k_2-k_1'-k_2')\overset{+}{a}_{k_1}\overset{+}{a}_{k_2}a_{k_2'}a_{k_1'} \qquad (7.15)$$

Поэтому, учитывая (7.12), можем написать:

$$\left\langle \frac{\partial H_\nu(N_0)}{\partial N_0}\right\rangle_{H_\nu(N_0)}=\frac{S+S^*}{2\sqrt{\rho_0}}=\frac{S}{\sqrt{\rho_0}}=0 \qquad (7.16)$$

Построим выражение свободной энергии с гамильтонианом $H_\nu(N_0)$

$$F_\nu(N_0,\lambda,\theta)=-\theta\ln Sp\, e^{-\frac{H_\nu(N_0)}{\theta}}$$

В этом выражении N_0 рассматривается как некоторый произвольный макроскопический параметр. Имеем:

$$\left\langle \frac{\partial H_\nu(N_0)}{\partial N_0}\right\rangle_{H_\nu(N_0)}=\frac{\partial F_\nu(N_0,\lambda,\theta)}{\partial N_0}$$

и потому уравнение (7.16) для определения N_0 будет:

$$\frac{\partial F_\nu(N_0,\lambda,\theta)}{\partial N_0}=0 \qquad (7.17)$$

Такое уравнение естественно согласуется с термодинамическими соображениями. Действительно, поскольку в рассматриваемой модельной системе N_0 является внешним параметром, его значение при данных λ и θ должно соответствовать минимуму

свободной энергии. Уравнение (7.17) в этой интерпретации и выражает необходимое условие минимума. Посмотрим теперь, как в расчет нашей модельной системы входит вспомогательный параметр ν, который мы должны устремить к нулю после предельного перехода $V\to\infty$.

Заметим прежде всего, что так как $H_\nu(N_0)$ отличается от $H(N_0)$ лишь на постоянный член $-2\nu\sqrt{N_0V}$, то все функции Грина и средние от произведений полевых операторов не будут при данном N_0 зависеть явно от ν. Они будут теми же, что и для системы с гамильтонианом $H(N_0)$. Имеем далее:

$$F_\nu=F-2\nu\sqrt{N_0}\,V^{1/2} \qquad (7.18)$$

где

$$F=F(N_0,\lambda,\theta)$$

представляет свободную энергию системы с гамильтонианом $H(N_0)$. Поэтому уравнение (7.17) может быть написано в форме:

$$\frac{\partial F(N_0,\lambda,\theta)}{\partial N_0}=\frac{\nu}{\sqrt{\rho_0}} \qquad (7.19)$$

и мы видим, что параметр ν войдет в расчет лишь через посредство N_0. Поскольку мы должны совершить предельный переход $\nu\to 0$, получим окончательно:

$$\frac{\partial F(N_0,\lambda,\theta)}{\partial N_0}=0 \qquad (7.20)$$

Модель с выделенным конденсатом впервые была предложена в нашей работе /9/ . Рассматривавшийся там приближенный гамильтониан был диагонализован с помощью $u-v$ преобразования. Функции Грина типа (6.II) и диаграммная техника были применены к ней в работе /I0/ . Недавно эта модель была подвергнута подробному обсуждению в работе /II/ .

§ 8. Теорема о $1/q^2$ и ее приложения

Возвратимся сейчас к исследованию функций Грина, рассматривавшихся в § 6 и покажем, что:

$$\left|\langle\langle a_q, \overset{+}{a}_q\rangle\rangle_{E=0}\right| \geq \frac{Const}{q^2} \qquad (8.I)$$

$$\left|\Sigma_{11}(0,q) - \Sigma_{12}(0,q)\right| \leq Const\, q^2$$

В этом доказательстве весьма существенную роль будут играть градиентные преобразования. Так как наши квазисредние были введены не градиентно-инвариантным образом, то из предосторожности мы будем иметь дело с гамильтонианом H_ν и получим сперва ряд неравенств для соответствующих выражений, основанных на обычных средних для H_ν . Затем, переходом к пределу $\nu \to 0$ получим формулы вида (8.I) . Рассмотрим градиентное преобразование:

$$\psi(\vec r) \to \psi'(\vec r) = e^{-i\chi(\vec r)}\psi(\vec r) \qquad (8.2)$$

$$\overset{+}{\psi}(\vec r) \to \overset{+}{\psi}{}'(\vec r) = e^{i\chi(\vec r)}\overset{+}{\psi}(\vec r)$$

и построим "преобразованный" гамильтониан:

$$H'_\nu(\overset{+}{\psi},\psi) = H_\nu(\overset{+}{\psi}{}',\psi') \qquad (8.3)$$

Заметим, что:

$$\langle\ldots\overset{+}{\psi}(\vec r_\alpha)\ldots\psi(\vec r_\beta)\ldots\rangle_{H_\nu} = \frac{Sp\left\{(\ldots\overset{+}{\psi}(\vec r_\alpha)\ldots\psi(\vec r_\beta)\ldots)\, e^{-\frac{H_\nu(\overset{+}{\psi},\psi)}{\theta}}\right\}}{Sp\, e^{-\frac{H_\nu(\overset{+}{\psi},\psi)}{\theta}}} =$$

$$= \frac{Sp\left\{(\ldots\overset{+}{\psi}{}'(\vec r_\alpha)\ldots\psi'(\vec r_\beta)\ldots)\, e^{-\frac{H_\nu(\overset{+}{\psi}{}',\psi')}{\theta}}\right\}}{Sp\, e^{-\frac{H_\nu(\overset{+}{\psi}{}',\psi')}{\theta}}}$$

откуда на основании (8.3):

$$\langle\ldots\overset{+}{\psi}(\vec r_\alpha)\ldots\psi(\vec r_\beta)\ldots\rangle_{H_\nu} = \langle\ldots\overset{+}{\psi}{}'(\vec r_\alpha)\ldots\psi'(\vec r_\beta)\ldots\rangle_{H'_\nu}$$

Но, с другой стороны, ввиду (8.2), имеем непосредственно:

$$\langle\ldots\overset{+}{\psi}{}'(\vec r_\alpha)\ldots\psi'(\vec r_\beta)\ldots\rangle_{H'_\nu} =$$

$$= \langle\ldots\overset{+}{\psi}(\vec r_\alpha)\ldots\psi(\vec r_\beta)\ldots\rangle_{H'_\nu}\exp i\left(\sum_\alpha\chi(\vec r_\alpha)-\sum_\beta\chi(\vec r_\beta)\right)$$

Поэтому:

$$\langle\ldots\overset{+}{\psi}(\vec r_\alpha)\ldots\psi(\vec r_\beta)\ldots\rangle_{H'_\nu} =$$

$$= \langle\ldots\overset{+}{\psi}(\vec r_\alpha)\ldots\psi(\vec r_\beta)\ldots\rangle_{H_\nu}\exp i\left(\sum_\beta\chi(\vec r_\beta)-\sum_\alpha\chi(\vec r_\alpha)\right) \qquad (8.4)$$

Таким образом, получаем следующее правило: чтобы вычислить средние от произведений полевых функций для гамильтониана H'_ν, надо взять эти средние для неизмененного гамильтониана H_ν и произвести в них обратное к (8.2) градиентное преобразование:

$$\psi(\vec{r}) \to e^{i\chi(\vec{r})}\psi(\vec{r})$$
$$\overset{+}{\psi}(\vec{r}) \to e^{-i\chi(\vec{r})}\overset{+}{\psi}(\vec{r}) \qquad (8.5)$$

Для наших целей будет достаточно ограничиться рассмотрением лишь бесконечно малых градиентных преобразований, у которых:

$$\chi(\vec{r}) = \delta\chi(\vec{r}) = \left(e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} + e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\right)\delta\xi$$

где $\delta\xi$ – вещественная, бесконечно малая величина. В этом случае, преобразования (8.2) будут:

$$\psi'(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) - i\,\psi(\vec{r})\,\delta\chi(\vec{r})$$
$$\overset{+}{\psi}{}'(\vec{r}) = \overset{+}{\psi}(\vec{r}) + i\,\overset{+}{\psi}(\vec{r})\,\delta\chi(\vec{r})$$

или, в импульсном представлении:

$$a'_k = a_k - i\,(a_{k+q} + a_{k-q})\,\delta\xi$$
$$\overset{+}{a}{}'_k = \overset{+}{a}_k + i\,(\overset{+}{a}_{k+q} + \overset{+}{a}_{k-q})\,\delta\xi \qquad (8.6)$$

Найдем соответствующее выражение для:

$$\delta H_\nu = H_\nu(\overset{+}{\psi}{}', \psi') - H_\nu(\overset{+}{\psi}, \psi)$$

Так как, благодаря (6.2):

$$U(\overset{+}{\psi}{}', \psi') = U(\overset{+}{\psi}, \psi) \qquad (8.7)$$

то получим:

$$\delta H_\nu = -\frac{1}{2\mu}\int_V \overset{+}{\psi}(\vec{r})\left(\vec{P}\frac{\partial\delta\chi}{\partial\vec{r}} + \frac{\partial\delta\chi}{\partial\vec{r}}\vec{P}\right)\psi(\vec{r})\,d\vec{r} - \nu V^{1/2}(\delta a_0 + \delta\overset{+}{a}_0)$$

откуда:

$$\delta H_\nu = \mathcal{U}_q\,\delta\xi \qquad (8.8)$$

где

$$\mathcal{U}_q = \frac{q^2}{2\mu}S_q + i\nu\,(a_q + a_{-q} - \overset{+}{a}_q - \overset{+}{a}_{-q})$$
$$(8.9)$$
$$S_q = -i\sum_{(k)}\frac{(2\vec{k}+\vec{q})\cdot\vec{q}}{q^2}\left(\overset{+}{a}_{k+q}a_k - \overset{+}{a}_k a_{k+q}\right)$$

Найдем теперь приращение:

$$\langle \mathcal{U}_q \rangle_{H_\nu+\delta H_\nu} - \langle \mathcal{U}_q \rangle_{H_\nu}$$

для чего подсчитаем величины:

$$\langle a_k \rangle_{H_\nu+\delta H_\nu}, \quad \langle \overset{+}{a}_k \rangle_{H_\nu+\delta H_\nu}, \quad \langle \overset{+}{a}_{k_1} a_{k_2} \rangle_{H_\nu+\delta H_\nu}$$

В соответствии с вышеустановленным правилом мы можем вычислить эти величины, если заменим $\langle\ldots\rangle_{H_\nu+\delta H_\nu}$ на $\langle\ldots\rangle_{H_\nu}$ и одновременно подвергнем амплитуды a, $\overset{+}{a}$ градиентному преобразованию, обратному по отношению к (8.6):

$$a_k \longrightarrow a_k + i\,(a_{k+q}+a_{k-q})\,\delta\xi$$

$$\overset{+}{a}_k \longrightarrow \overset{+}{a}_k - i\,(\overset{+}{a}_{k+q}+\overset{+}{a}_{k-q})\,\delta\xi$$

Таким образом получим:

$$\langle a_k\rangle_{H_\nu+\delta H_\nu} - \langle a_k\rangle_{H_\nu} = i\left\{\langle a_{k+q}+a_{k-q}\rangle_{H_\nu}\right\}\delta\xi$$

Но

$$\langle a_k\rangle_{H_\nu} = \begin{cases}\sqrt{N_0}, & k=0\\ 0, & k\neq 0\end{cases}$$

Поэтому

$$\langle a_k\rangle_{H_\nu+\delta H_\nu} - \langle a_k\rangle_{H_\nu} = i\sqrt{N_0}\left\{\Delta(k+q)+\Delta(k-q)\right\}\delta\xi \qquad (8.10)$$

Аналогично

$$\langle \overset{+}{a}_k\rangle_{H_\nu+\delta H_\nu} - \langle \overset{+}{a}_k\rangle_{H_\nu} = -i\sqrt{N_0}\left\{\Delta(k-q)+\Delta(k+q)\right\}\delta\xi \qquad (8.11)$$

Имеем далее

$$\langle \overset{+}{a}_{k_1} a_{k_2}\rangle_{H_\nu+\delta H_\nu} - \langle \overset{+}{a}_{k_1} a_{k_2}\rangle_{H_\nu} = -i\left\langle(\overset{+}{a}_{k_1+q}+\overset{+}{a}_{k_1-q})a_{k_2}\right\rangle_{H_\nu}\delta\xi +$$

$$+\, i\left\langle \overset{+}{a}_{k_1}(a_{k_2+q}+a_{k_2-q})\right\rangle_{H_\nu}\delta\xi$$

Заметим теперь, что

$$\langle \overset{+}{a}_{p_1} a_{p_2}\rangle = \Delta(p_1-p_2)\,N_{p_1}$$

где

$$N_{p_1} = \langle \overset{+}{a}_{p_1} a_{p_1}\rangle_{H_\nu}$$

Получим, следовательно:

$$\langle \overset{+}{a}_{k_1} a_{k_2}\rangle_{H_\nu+\delta H_\nu} - \langle \overset{+}{a}_{k_1} a_{k_2}\rangle_{H_\nu} = i\left\{\Delta(k_1-k_2+q)+\Delta(k_1-k_2-q)\right\}\times$$

$$\times\,(N_{k_1}-N_{k_2})\,\delta\xi$$

Воспользовавшись этим равенством, найдем из (8.9):

$$\langle S_q\rangle_{H_\nu+\delta H_\nu} - \langle S_q\rangle_{H_\nu} = -4N\delta\xi$$

где

$$N = \sum_{(k)} N_k = \sum_{(k)}\langle \overset{+}{a}_k a_k\rangle_{H_\nu}$$

представляет полное число частиц в нашей системе. Приняв во внимание (8.10), (8.11), получим:

$$\langle \mathcal{U}_q\rangle_{H_\nu+\delta H_\nu} - \langle \mathcal{U}_q\rangle_{H_\nu} = -4\left(N\frac{q^2}{2m}+\nu\sqrt{N_0}\cdot V^{1/2}\right)\delta\xi$$

$$\langle a_q\rangle_{H_\nu+\delta H_\nu} - \langle a_q\rangle_{H_\nu} = i\sqrt{N_0}\,\delta\xi \qquad (8.12)$$

$$\langle a_q-\overset{+}{a}_{-q}\rangle_{H_\nu+\delta H_\nu} - \langle a_q-\overset{+}{a}_{-q}\rangle_{H_\nu} = 2i\sqrt{N_0}\,\delta\xi$$

С другой стороны, приращение:

$$\langle A\rangle_{H_\nu+\delta H_\nu} - \langle A\rangle_{H_\nu}$$

где

$$A = \mathcal{U}_q,\quad a_q,\quad a_q-\overset{+}{a}_q$$

мы можем подсчитать по формуле (5.20).

Таким образом, с учетом (8.8) получим:

$$\langle \mathcal{U}_q\rangle_{H_\nu+\delta H_\nu} - \langle \mathcal{U}_q\rangle_{H_\nu} = 2\pi\langle\langle \mathcal{U}_q,\mathcal{U}_q\rangle\rangle_{E=0}\,\delta\xi$$

$$\langle a_q \rangle_{H_\nu+\delta H_\nu} - \langle a_q \rangle_{H_\nu} = 2\pi \langle\langle a_q, \mathfrak{A}_q \rangle\rangle_{E=0}\, \delta\zeta \tag{8.13}$$

$$\langle a_q - \overset{+}{a}_{-q} \rangle_{H_\nu+\delta H_\nu} - \langle a_q - \overset{+}{a}_{-q} \rangle_{H_\nu} = 2\pi \langle\langle (a_q - \overset{+}{a}_{-q}), \mathfrak{A}_q \rangle\rangle_{E=0}\, \delta\zeta$$

Сравнив эти формулы с (8.12), убеждаемся, что:

$$\langle\langle \mathfrak{A}_q, \mathfrak{A}_q \rangle\rangle_{E=0} = -\frac{2}{\pi}\left(N\frac{q^2}{2\mu} + \nu\sqrt{N_0 V}\right) \tag{8.14}$$

и

$$\left| \langle\langle a_q, \mathfrak{A}_q \rangle\rangle_{E=0} \right|^2 = \frac{N_0}{4\pi^2} \tag{8.15}$$

$$\left| \langle\langle (a_q - \overset{+}{a}_{-q}), \mathfrak{A}_q \rangle\rangle_{E=0} \right|^2 = \frac{N_0}{\pi^2}$$

Воспользуемся теперь неравенством (5.19) , в котором положим:

$$A = a_q,\ a_q - \overset{+}{a}_{-q};\quad B = \mathfrak{A}_q$$

и заметим на основании (8.9), что

$$\mathfrak{A}_q = \overset{+}{\mathfrak{A}}_q$$

Получим тогда из (8.15):

$$\frac{N_0}{4\pi^2} \leqq \left| \langle\langle a_q, \overset{+}{a}_q \rangle\rangle_{E=0} \langle\langle \mathfrak{A}_q, \mathfrak{A}_q \rangle\rangle_{E=0} \right|$$

$$\frac{N_0}{\pi^2} \leqq \left| \langle\langle (a_q - \overset{+}{a}_{-q}), (\overset{+}{a}_q - a_{-q}) \rangle\rangle_{E=0} \langle\langle \mathfrak{A}_q, \mathfrak{A}_q \rangle\rangle_{E=0} \right|$$

Откуда, принимая во внимание (8.14), будем иметь:

$$\left| \langle\langle a_q, \overset{+}{a}_q \rangle\rangle_{E=0} \right| \geqq \frac{\rho_0 \mu}{4\pi (q^2\rho + 2\nu\mu\sqrt{\rho_0})}$$

$$\left| \langle\langle (a_q - \overset{+}{a}_{-q}), (\overset{+}{a}_q - a_{-q}) \rangle\rangle_{E=0} \right| \geqq \frac{\rho_0 \mu}{(q^2\rho + 2\nu\mu\sqrt{\rho_0})\pi} \tag{8.16}$$

Перейдем теперь здесь к пределу $\nu \to 0$. Как видно, при этом у рассматриваемых выражений в окрестности $q \sim 0$ появляются особенности типа $const/q^2$:

$$\left| \langle\langle a_q, \overset{+}{a}_q \rangle\rangle_{E=0} \right| \geqq \left(\frac{\rho_0\mu}{4\pi\rho} \right) \frac{1}{q^2} \tag{8.17}$$

$$\left| \langle\langle (a_q - \overset{+}{a}_{-q}), (\overset{+}{a}_q - a_{-q}) \rangle\rangle_{E=0} \right| \geqq \left(\frac{\rho_0\mu}{\pi\rho} \right) \frac{1}{q^2} \tag{8.18}$$

Заметим теперь, что

$$\langle\langle (a_q - \overset{+}{a}_{-q}), (\overset{+}{a}_q - a_{-q}) \rangle\rangle_{E=0} = \langle\langle a_q, \overset{+}{a}_q \rangle\rangle_{E=0} - \langle\langle \overset{+}{a}_{-q}, \overset{+}{a}_q \rangle\rangle_{E=0} - \langle\langle a_q, a_{-q} \rangle\rangle_{E=0} + \langle\langle \overset{+}{a}_{-q}, a_{-q} \rangle\rangle_{E=0}$$

Но, благодаря свойствам симметрии (6.13), (6.17):

$$\langle\langle a_q, a_{-q} \rangle\rangle_{E=0} = \langle\langle \overset{+}{a}_{-q}, \overset{+}{a}_q \rangle\rangle_{E=0};\quad \langle\langle \overset{+}{a}_{-q}, a_{-q} \rangle\rangle_{E=0} = \langle\langle a_q, \overset{+}{a}_q \rangle\rangle_{E=0}$$

и потому

$$\langle\langle (a_q - \overset{+}{a}_{-q}), (\overset{+}{a}_q - a_{-q}) \rangle\rangle_{E=0} = 2\langle\langle a_q, \overset{+}{a}_q \rangle\rangle_{E=0} - 2\langle\langle \overset{+}{a}_{-q}, \overset{+}{a}_q \rangle\rangle_{E=0} \tag{8.19}$$

С другой стороны, благодаря (6.22) можем написать

$$\langle\langle a_q, \overset{+}{a}_q \rangle\rangle_{E=0} - \langle\langle \overset{+}{a}_{-q}, \overset{+}{a}_q \rangle\rangle_{E=0} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{\Sigma_{11}(0,q)+\Sigma_{12}(0,q)}{\Sigma_{11}^2(0,q)-\Sigma_{12}^2(0,q)} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{\Sigma_{11}(0,q)-\Sigma_{12}(0,q)}$$

Поэтому, принимая во внимание (8.I8), (8.I9), получим:

$$\left|\frac{1}{\Sigma_{11}(0,q)-\Sigma_{12}(0,q)}\right| \geq \left(\frac{\rho_0 \mu}{\rho}\right)\frac{1}{q^2}$$

или

$$|\Sigma_{11}(0,q)-\Sigma_{12}(0,q)| \leq \frac{\rho}{\rho_0 \mu}\, q^2 \qquad (8.20)$$

Неравенства (8.I7), (8.20) как раз и являются теми неравенствами (8.I), которые мы хотели доказать.

Перейдем теперь к рассмотрению ряда их приложений. Напишем спектральные формулы:

$$\langle a_q(\tau)\overset{+}{a}_q(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} J_q(\omega)\, e^{-i\omega(t-\tau)}\, d\omega$$

$$\langle \overset{+}{a}_q(t)\, a_q(\tau)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} J_q(\omega)\, e^{\frac{\omega}{\theta}} e^{-i\omega(t-\tau)}\, d\omega \qquad (8.2I)$$

$$\langle\langle a_q, \overset{+}{a}_q\rangle\rangle_{E=0} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} J_q(\omega)\,\frac{e^{\frac{\omega}{\theta}}-1}{\omega}\, d\omega;$$

$$J_q(\omega) \geq 0$$

и заметим, что:

$$\frac{e^{\frac{\omega}{\theta}}-1}{\omega} = \left(1+e^{\frac{\omega}{\theta}}\right)\frac{th\,\frac{\omega}{2\theta}}{\omega} \leq \frac{1}{2\theta}\left(1+e^{\frac{\omega}{\theta}}\right)$$

Поэтому:

$$|\langle\langle a_q, \overset{+}{a}_q\rangle\rangle_{E=0}| \leq \frac{1}{4\pi\theta}\int_{-\infty}^{\infty} J_q(\omega)\left(1+e^{\frac{\omega}{\theta}}\right) d\omega = \frac{1+2\langle \overset{+}{a}_q a_q\rangle}{4\pi\theta}$$

откуда на основании (8.I7) будем иметь:

$$1+2\langle \overset{+}{a}_q a_q\rangle \geq \frac{\mu\theta}{q^2}\,\frac{\rho_0}{\rho} \qquad (8.22)$$

Поскольку (см.например, (3.7), (3.7'))

$$\langle \overset{+}{a}_q a_q\rangle = (2\pi)^3 W(q) = (2\pi)^3 W_1(q)\,;\quad q \neq 0$$

мы можем написать также:

$$W_1(q) \geq \frac{1}{2(2\pi)^3}\left\{\frac{\mu\theta}{q^2}\,\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right\} \qquad (8.23)$$

Таким образом, плотность непрерывного распределения частиц по импульсам при $q \to 0$ стремится к бесконечности как $1/q^2$.[x)] Это утверждение относится только к случаю, когда $\theta > 0$. Чтобы получить некоторую информацию о положении при $\theta = 0$, воспользуемся спектральными формулами для этого особого

x) Если бы мы рассматривали вспомогательную систему с фиксированным $\nu > 0$ и не перешли к пределу $\nu = 0$, то этой особенности вообще не было бы.

случая (см. § 6):

$$-\langle\langle a_q, \overset{+}{a}_q \rangle\rangle_{E=0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} I_q(\omega)\frac{\epsilon(\omega)}{\omega}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} I_q(\omega)\frac{d\omega}{|\omega|}$$

$$2\langle \overset{+}{a}_q a_q \rangle + 1 = \langle \overset{+}{a}_q a_q + a_q \overset{+}{a}_q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} I_q(\omega)\,d\omega$$

$$I_q(\omega) \geq 0$$

Для достаточно малых $|q|$, когда можно говорить об "элементарных возбуждениях", обладающих определенной энергией, естественно предположить, что спектральная интенсивность $I_q(\omega)$ практически равна нулю для $|\omega| < E(q)$, где $E(q)$ – минимальная энергия элементарного возбуждения импульсом q . Тогда:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} I_q(\omega)\frac{d\omega}{|\omega|} \leq \frac{1}{2\pi E(q)}\int_{-\infty}^{\infty} I_q(\omega) = \frac{2\langle \overset{+}{a}_q a_q \rangle + 1}{2\pi E(q)}$$

и потому на основании (8.17):

$$\frac{2\langle \overset{+}{a}_q a_q \rangle + 1}{2\pi E(q)} \geq \frac{\mu}{4\pi q^2}\frac{\rho_0}{\rho}$$

или

$$2(2\pi)^3 W_1(q) \geq \frac{E(q)}{2q^2}\frac{\mu\rho_0}{\rho} - 1$$

Если спектр элементарных возбуждений имеет фононный характер: $E(q) = c|q|$ – то $W_1(q)$ стремится к бесконечности при $q \to 0$ не медленнее, чем $\frac{Const}{|q|}$.

Покажем теперь, что нашими неравенствами можно воспользоваться и для выяснения характера спектра возбуждений. Обратимся для этого к соотношению (8.20), из которого следует, в частности, что:

$$\Sigma_{11}(0,0) - \Sigma_{12}(0,0) = 0 \qquad (8.24)$$

Отметим, что это равенство для случая нулевой температуры впервые было выведено Гугенгольцем и Пайнсом на основе теории возмущений. В их работе /II/ рассматривалась модельная система с выделенным конденсатом и для ее исследования была применена диаграммная техника. Таким путем им удалось показать, что равенства (8.24) справедливы в любом порядке теории возмущений. Значение этого соотношения – в его связи со структурой энергетического спектра возмущений.

Возьмем, действительно, "секулярное" уравнение:

$$\Sigma_{11}(E,k)\,\Sigma_{11}(-E,k) - \Sigma_{12}^2(E,k) = 0 \qquad (8.25)$$

и предположим, что массовый оператор $\Sigma(E_0 k)$ регулярен в окрестности точки $E = 0$, $K = 0$. Представим уравнение (8.25) в форме:

$$\left[\frac{\Sigma_{11}(E,k) + \Sigma_{11}(-E,k)}{2}\right]^2 - \Sigma_{12}^2(E,k) = \qquad (8.26)$$

$$= \left[\frac{\Sigma_{11}(E,k) - \Sigma_{11}(-E,k)}{2}\right]^2$$

Заметим, что ввиду радиальной симметрии в нашей задаче функции $\sum_{\alpha\beta}(E,k^2)$ будут зависеть от K лишь через посредство скаляра k^2.

Далее, левая часть уравнения является четной функцией E. Благодаря (8.24) она обращается в нуль при E = 0, k = 0. Поэтому для достаточно малых E и K можем написать:

$$\left\{\frac{\sum_{11}(E,k)+\sum_{11}(-E,k)}{2}\right\}^2-\sum_{12}^2(E,k)=\beta k^2+\gamma E^2$$

$$\beta,\gamma = Const$$

Заметим еще, что выражение

$$\frac{\sum_{11}(E,k)-\sum_{11}(-E,k)}{2}$$

будет нечетной функцией E. Учитывая лишь член первого порядка, получим для достаточно малых E, k :

$$\frac{\sum_{11}(E,k)-\sum_{11}(-E,k)}{2}=\alpha E$$

$\alpha = Const.$

Таким образом,уравнение (8.25), (8.26) дает:

$$\alpha^2E^2=\beta k^2+\gamma E^2$$

Исключим из рассмотрения особые случаи, когда $\alpha^2-\gamma$; β обращаются в нуль. Тогда

$$E^2=Sk^2\ ,\ S\neq 0\ ,\ S=\frac{\beta}{\alpha^2-\gamma}$$

Так как полюс функции Грина не может лежать в комплексной плоскости вне вещественной оси, видим, что величина S должна быть положительной.

Тем самым для энергии возбуждения получаем "акустическую" зависимость, без щели:

$$E=\sqrt{S}\,|k| \qquad (8.27)$$

Из приводившихся ранее рассуждений видно, что равенство (8.24) существенно связано с градиентной инвариантностью "потенциальной энергии" U . Неудивительно поэтому, что если мы нарушаем это свойство, например, рассматривая модельные системы, у которых в выражении U оставлены лишь взаимодействия пар с противоположными импульсами, и т.п., то мы нарушим и равенства (8.24) и получаем для $E(k)$ формулы, содержащие энергетическую щель. То же самое положение появляется и при включении в гамильтониан градиентно неинвариантного члена $-\nu\sqrt{V}(a_0+\overset{+}{a}_0)$, если взять фиксированное $\nu >$ 0.

Проиллюстрируем этот факт на простейшем примере первого приближения по степеням малости взаимодействия Φ для случая θ = 0. Для фактического построения такого приближения будем иметь дело с модельной системой, с гамильтонианом $H_\nu(N_0)$. Из формы (7.14), (7.15) этого гамильтониана нетрудно заметить, что с учетом лишь членов первого порядка малости:

$$\sum_{11}(E,k)=E-\frac{k^2}{2\mu}+\lambda-\rho_0\left\{\tilde{\Phi}(k)+\tilde{\Phi}(0)\right\}$$

$$\Sigma_{12}(E,k) = -\rho_0 \tilde{\Phi}(k)$$

$$F_\nu = -\lambda N_0 + \frac{N_0^2}{2V}\tilde{\Phi}(0) - 2\nu\sqrt{N_0 V} \qquad (8.28)$$

Поэтому уравнение (7.I7) дает

$$0 = \frac{\partial F_\nu}{\partial N_0} = -\lambda + \rho_0 \tilde{\Phi}(0) - \frac{\nu}{\sqrt{\rho_0}}$$

Поэтому

$$\Sigma_{11}(0,0) - \Sigma_{12}(0,0) = -\frac{\nu}{\sqrt{\rho_0}} < 0 \qquad (8.29)$$

Возьмем далее секулярное уравнение (8.25). В принятом приближении из (8.28) получим:

$$\left(\frac{k^2}{2\mu} + \rho_0\tilde{\Phi}(k) + \frac{\nu}{\sqrt{\rho_0}}\right)^2 - \left(\rho_0\tilde{\Phi}(k)\right)^2 = E^2$$

Отсюда, для энергии элементарного возбуждения будем иметь формулу:

$$E(k) = \sqrt{\frac{\nu^2}{\rho_0} + 2\frac{\nu}{\sqrt{\rho_0}}\left(\frac{k^2}{2\mu} + \rho_0\tilde{\Phi}(k)\right) + \rho_0\tilde{\Phi}(k)\frac{k^2}{\mu} + \left(\frac{k^2}{2\mu}\right)^2}$$

содержащую энергетическую щель.

Эта щель исчезает лишь после предельного перехода $\nu \to 0$, когда мы приходим к обычному выражению:

$$E(k) = \sqrt{\rho_0\tilde{\Phi}(k)\frac{k^2}{\mu} + \left(\frac{k^2}{2\mu}\right)^2}$$

с квазиакустическим характером при малых K. Заметим, наконец, что формулы "со щелью" для $E(k)$ могут получаться и при $\nu = 0$, если "рассогласовать" используемые приближения, если, например, использовать для $\Sigma_{\alpha\beta}(E,k)$ формулы первого приближения, а в уравнение

$$\frac{\partial F_\nu}{\partial N_0} = 0$$

подставить для F_ν формулы второго приближения.

§ 9. Теорема о $1/q^2$ для Ферми-систем

Приступим теперь к распространению "теоремы о $1/q^2$" на Ферми-системы, рассматривавшиеся в § 4, для того случая, когда в системе имеется конденсат из парных квазимолекул, находящихся в S - состоянии (4.II) и когда гамильтониан имеет обычную форму:

$$H = \sum_{(\sigma)} \int \overset{+}{\psi}(\vec{r},\sigma)\left(\frac{p^2}{2m} - \lambda\right)\psi(\vec{r},\sigma)\,d\vec{r} + U(\overset{+}{\psi},\psi) \qquad (9.I)$$

в которой выражение U является градиентно инвариантным.

Заметим, что модель Фрелиха, в которой электроны взаимодействуют с полем фононов, принадлежит к рассматриваемому типу. Действительно, для нее в U мы можем включить энергию фононов и энергию их взаимодействия с электронами. Подчеркнем, что нам нужна инвариантность формы U по отношению к градиентным преобразованиям, действующим <u>только</u> на фермионные функции ψ, $\overset{+}{\psi}$.

Обратимся к рассуждениям предыдущего параграфа и проведем их здесь почти дословно. Для краткости не будем теперь явно вводить в выражение гамильтониана бесконечно малых членов, снимающих вырождение, и условимся иметь дело непосредственно с соответствующими квазисредними.

Итак, рассмотрим бесконечно малые градиентные преобразования:

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \psi(x) - i\,\psi(x)\,\delta\chi$$

$$\overset{+}{\psi}(x) \to \overset{+}{\psi}{}'(x) = \overset{+}{\psi}(x) + i\,\overset{+}{\psi}(x)\,\delta\chi$$

$$\delta\chi = \left(e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} + e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\right)\delta\xi$$

и построим вариацию

$$\delta H = H(\overset{+}{\psi}{}', \psi') - H(\overset{+}{\psi}, \psi)$$

Имеем:

$$\delta H = -\frac{1}{2m}\int \sum_{\sigma} \overset{+}{\psi}(\vec{r},\sigma)\left(\vec{p}\,\frac{\partial\delta\chi}{\partial\vec{r}} + \frac{\partial\delta\chi}{\partial\vec{r}}\,\vec{p}\right)\psi(\vec{r},\sigma)\,d\vec{r}$$

Откуда

$$\delta H = \frac{q^2}{2m} S_q\,\delta\xi \qquad (9.2)$$

где q – фиксированный импульс $\neq 0$ и

$$S_q = -i\sum_{(k,\sigma)} \frac{(2\vec{k}+\vec{q})\cdot\vec{q}}{q^2}\left(\overset{+}{a}_{k+q,\sigma}\,a_{k,\sigma} - \overset{+}{a}_{k,\sigma}\,a_{k+q,\sigma}\right) \qquad (9.3)$$

Заметим теперь, что приращение:

$$\langle \mathcal{U} \rangle_{H+\delta H} - \langle \mathcal{U} \rangle_H$$

можно подсчитать двумя способами.

Прямое вычисление дает:

$$\langle \mathcal{U} \rangle_{H+\delta H} - \langle \mathcal{U} \rangle_H = \langle \mathcal{U}' - \mathcal{U} \rangle_H \qquad (9.4)$$

где $\mathcal{U}'$ получается из $\mathcal{U}$ с помощью обратного градиентного преобразования:

$$\psi \to \psi + i\,\psi\,\delta\chi, \quad \overset{+}{\psi} \to \overset{+}{\psi} - i\,\overset{+}{\psi}\,\delta\chi$$

или в импульсном представлении:

$$a_{k,\sigma} \to a_{k,\sigma} + i\left\{a_{k+q,\sigma} + a_{k-q,\sigma}\right\}\delta\xi$$

$$\overset{+}{a}_{k,\sigma} \to \overset{+}{a}_{k,\sigma} - i\left\{\overset{+}{a}_{k+q,\sigma} + \overset{+}{a}_{k-q,\sigma}\right\}\delta\xi \qquad (9.5)$$

С другой стороны, можем воспользоваться формулой (5.20) и написать:

$$\langle \mathcal{U} \rangle_{H+\delta H} - \langle \mathcal{U} \rangle_H = \frac{\pi q^2}{m}\langle\langle \mathcal{U}, S_q \rangle\rangle_{E=0}$$

Имеем, следовательно,

$$\langle \mathcal{U}' - \mathcal{U} \rangle_H = \frac{\pi q^2}{m}\langle\langle \mathcal{U}, S_q \rangle\rangle_{E=0}\,\delta\xi \qquad (9.6)$$

Положим здесь:

$$\mathcal{U} = V^{-1} S_q$$

Найдем тогда:

$$\langle\langle V^{-1/2} S_q, V^{-1/2} S_q \rangle\rangle_{E=0} = -\frac{4\rho m}{\pi q^2}; \quad \rho = \frac{N}{V} \qquad (9.7)$$

Введем операторы:

$$\beta_k = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{(q_1,q_2)} \epsilon(q_1)\Delta(q_1+q_2) \iint\limits_{V\,V} \psi(x_2)\psi(x_1)\vartheta(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\, e^{-i\vec{k}\frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2}{2}}\, d\vec{r}_1\, d\vec{r}_2 \qquad (9.8)$$

где $\vartheta(r)$ – некоторая радиально-симметричная, вещественная функция r, достаточно быстро убывающая при $r \to \infty$ и удовлетворяющая условию:

$$\gamma = \int \varphi(r)\vartheta(r)\, d\vec{r} \neq 0 \qquad (9.9)$$

Имеем:

$$\langle V^{-1/2}(\beta'_q - \beta_q)\rangle =$$

$$= i \sum_{(q_1,q_2)} \epsilon(q_1)\Delta(q_1+q_2) \frac{1}{V} \iint\limits_{V\,V} \left\{ e^{i\vec{q}\vec{r}_2} + e^{i\vec{q}\vec{r}_1} + e^{-i\vec{q}\vec{r}_2} + e^{-i\vec{q}\vec{r}_1} \right\} \times$$

$$\times \langle \psi(x_2)\psi(x_1)\rangle\, e^{-i\vec{q}\frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2}{2}}\, d\vec{r}_1\, d\vec{r}_2\, \delta\xi =$$

$$= i \sum_{(q_1,q_2)} \epsilon(q_1)\Delta(q_1+q_2) \frac{1}{V} \iint\limits_{V\,V} 2\cos\left(\frac{\vec{q}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{2}\right) \times$$

$$\left\{ 1 + e^{-i\vec{q}(\vec{r}_1+\vec{r}_2)} \right\} \langle \psi(x_2)\psi(x_1)\rangle\, d\vec{r}_1\, d\vec{r}_2\, \delta\xi$$

и потому на основании (4.14) получаем:

$$\langle V^{-1/2}(\beta'_q - \beta_q)\rangle = 4i \int \varphi(r)\vartheta(r) \cos\left(\frac{\vec{q}\vec{r}}{2}\right) \times \qquad (9.10)$$

$$\times\, d\vec{r}\, \sqrt{\rho_0}\, \delta\xi$$

Отсюда, ввиду вещественности функций φ, ϑ:

$$\langle V^{-1/2}(\overset{+}{\beta}{}'_{-q} - \overset{+}{\beta}_{-q})\rangle = -4i \int \varphi(r)\vartheta(r) \cos\left(\frac{\vec{q}\vec{r}}{2}\right) d\vec{r}\, \sqrt{\rho_0}\, \delta\xi$$

Следовательно,

$$\langle V^{-1/2}\{(\beta'_q - \overset{+}{\beta}{}'_{-q}) - (\beta_q - \overset{+}{\beta}_{-q})\}\rangle = 8i\sqrt{\rho_0} \int \varphi(r)\vartheta(r) \cos\left(\frac{\vec{q}\vec{r}}{2}\right) \times\, d\vec{r}\, \delta\xi \qquad (9.11)$$

Воспользуемся теперь соотношениями (9.6) для

$$\mathfrak{A} = V^{-1/2}\beta_q; \quad V^{-1/2}(\beta_q - \overset{+}{\beta}_{-q})$$

Тогда, благодаря (9.10), (9.11), будем иметь:

$$\left| \langle\langle \beta_q, V^{-1/2} S_q \rangle\rangle_{E=0} \right|^2 = \left(\frac{4m\gamma(q)}{\pi q^2} \right)^2 \rho_0$$

$$\left| \langle\langle (\beta_q - \overset{+}{\beta}_{-q}), V^{-1/2} S_q \rangle\rangle_{E=0} \right|^2 = \left(\frac{8m\gamma(q)}{\pi q^2} \right)^2 \rho_0 \qquad (9.12)$$

где

$$\gamma(q) = \int \varphi(r)\vartheta(r) \cos\left(\frac{\vec{q}\cdot\vec{r}}{2}\right) d\vec{r} \qquad (9.13)$$

Мажорируем левые части равенств (9.12) с помощью неравенств (5.19), в которых положим:

$$A = \beta_q,\ (\beta_q - \overset{+}{\beta}_{-q}); \quad B = V^{-1/2} S_q$$

Так как на основании (9.3):

$$S_q = \overset{+}{S}_q$$

то приходим к неравенствам вида:

$$\left(\frac{4m\gamma(q)}{\pi q^2}\right)^2 \rho_0 \leqq \left|\langle\langle \beta_q, \overset{+}{\beta}_q \rangle\rangle_{E=0} \langle\langle V^{-1/2} S_q, V^{-1/2} S_q \rangle\rangle_{E=0}\right|$$

$$\left(\frac{8m\gamma(q)}{\pi q^2}\right)^2 \rho_0 \leqq \left|\langle\langle (\beta_q - \overset{+}{\beta}_{-q}), (\overset{+}{\beta}_q - \beta_{-q}) \rangle\rangle_{E=0}\right| \left|\langle\langle V^{-1/2} S_q, V^{-1/2} S_q \rangle\rangle_{E=0}\right|$$

Отсюда, приняв во внимание (9.7), получаем:

$$\left|\langle\langle \beta_q, \overset{+}{\beta}_q \rangle\rangle_{E=0}\right| \geqq \frac{4m\gamma^2(q)}{\pi q^2} \frac{\rho_0}{\rho} \qquad (9.14)$$

$$\left|\langle\langle (\beta_q - \overset{+}{\beta}_{-q}), (\overset{+}{\beta}_q - \beta_{-q}) \rangle\rangle_{E=0}\right| \geqq \frac{16 m\gamma^2(q)}{\pi q^2} \frac{\rho_0}{\rho}$$

причем, благодаря (9.9), (9.13):

$$\gamma^2(0) = \gamma^2 > 0$$

Итак, "теорема о $1/q^2$" в рассматриваемом случае доказана. Она, по-видимому, связана со свойством энергетического спектра "коллективных возбуждений". Мы не будем здесь заниматься этим вопросом и ограничимся лишь применением доказанной теоремы для получения оценки числа пар с импульсом $q \neq 0$ в случае $\theta > 0$.

Примем во внимание спектральные формулы:

$$-\langle\langle \beta_q, \overset{+}{\beta}_q \rangle\rangle_{E=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{\omega}{\theta}} - 1}{\omega} J(\omega)\, d\omega, \quad J(\omega) \geqq 0$$

$$\langle \beta_q \overset{+}{\beta}_q + \overset{+}{\beta}_q \beta_q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + e^{\frac{\omega}{\theta}}\right) J(\omega)\, d\omega \qquad (9.15)$$

Учитывая, что:

$$\frac{e^{\frac{\omega}{\theta}} - 1}{\omega} < \frac{1 + e^{\frac{\omega}{\theta}}}{2\theta}$$

можем написать:

$$\langle \beta_q \overset{+}{\beta}_q + \overset{+}{\beta}_q \beta_q \rangle \geqq 4\pi\theta \left|\langle\langle \beta_q, \overset{+}{\beta}_q \rangle\rangle_{E=0}\right|$$

Поэтому, на основании (9.14):

$$\langle \beta_q \overset{+}{\beta}_q + \overset{+}{\beta}_q \beta_q \rangle \geqq \frac{16 m \theta \gamma^2(q)}{q^2} \frac{\rho_0}{\rho} \qquad (9.16)$$

Оценим теперь:

$$\langle \beta_q \overset{+}{\beta}_q - \overset{+}{\beta}_q \beta_q \rangle$$

Для этого представим определение (9.8) в несколько более абстрактной форме:

$$\beta_q = \int \mathcal{K}(x_1, x_2)\, \psi(x_2)\, \psi(x_1)\, dx_1 dx_2 \qquad (9.17)$$

где

$$\mathcal{K}(x_2, x_1) = -\mathcal{K}(x_1, x_2)$$

и воспользуемся перестановочными соотношениями в форме:

$$\psi(x) \overset{+}{\psi}(x') + \overset{+}{\psi}(x') \psi(x) = \delta(x - x')$$

Получим:

$$\beta_q \overset{+}{\beta}_q - \overset{+}{\beta}_q \beta_q =$$

$$= 2\int |\mathcal{K}(x_1,x_2)|^2 dx_1 dx_2 - 4\int\left\{\int \mathcal{K}(x_1,x_2)\mathcal{K}^*(x_1',x_2)dx_2\right\}\overset{+}{\psi}(x_1')\psi(x_1)\times$$
$$\times dx_1 dx_1'$$

Конкретизируя вид функции $\mathcal{K}$ в соответствии с (9.8), убеждаемся отсюда, что:

$$\langle \beta_q \overset{+}{\beta}_q - \overset{+}{\beta}_q \beta_q \rangle = 4\int \vartheta^2(r)d\vec{r} - \frac{4}{V}\sum_{(p,\sigma)} \langle \overset{+}{a}_{p\sigma} a_{p\sigma} \rangle \times$$
$$\times \int\left\{\int \vartheta(\vec{r}+\vec{r}')\vartheta(\vec{r}')d\vec{r}'\right\} e^{i(\vec{p}-\frac{\vec{q}}{2})\vec{r}} d\vec{r}$$

и потому:

$$|\langle \beta_q \overset{+}{\beta}_q - \overset{+}{\beta}_q \beta_q \rangle| \leqq C$$

где

$$C = 4\int \vartheta^2(r)d\vec{r} + 4\rho\left(\int|\vartheta(r)|d\vec{r}\right)^2$$

Имеем, следовательно, из (9.16):

$$\langle \overset{+}{\beta}_q \beta_q \rangle \geqq \frac{8m\theta\gamma^2(q)}{q^2}\frac{\rho^\circ}{\rho} - \frac{C}{2} \qquad (9.18)$$

Заметим теперь, что:

$$\langle \overset{+}{\beta}_q \beta_q \rangle = \sum_{(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_1',\sigma_2')} \epsilon(\sigma_1)\epsilon(\sigma_1')\Delta(\sigma_1+\sigma_2)\Delta(\sigma_1'+\sigma_2')\times$$
$$\times \frac{1}{V}\int \langle \overset{+}{\psi}(x_1)\overset{+}{\psi}(x_2)\psi(x_2')\psi(x_1')\rangle \exp i\vec{q}\left(\frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2-\vec{r}_1'-\vec{r}_2'}{2}\right)\times$$
$$d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 d\vec{r}_1' d\vec{r}_2'$$

Подставим сюда выражение (4.5). Найдем:

$$\langle \overset{+}{\beta}_q \beta_q \rangle = 2 \sum_{(\omega)} N_{\omega q} V \Big| \sum_{\sigma_1,\sigma_2} \epsilon(\sigma_1)\Delta(\sigma_1+\sigma_2) \int \Psi_{\omega,q}(\vec{r},\sigma_1,\sigma_2)\vartheta(r)d\vec{r}\Big|^2 \qquad (9.19)$$

Но функции $\Psi_{\omega,\vec{q}}$, входящие в формулу (4.5), обладают при данном $\vec{q}$ следующими свойствами ортонормировки:

$$\sum_{(\sigma_1,\sigma_2)} V \int \overset{+}{\Psi}_{\omega_1,q}(\vec{r},\sigma_1,\sigma_2)\Psi_{\omega_2,q}(\vec{r},\sigma_1,\sigma_2)d\vec{r} = \Delta(\omega_1-\omega_2)$$

Поэтому, применяя соответствующее неравенство Бесселя, получим:

$$\sum_{(\omega)} V \Big| \sum_{(\sigma_1,\sigma_2)} \epsilon(\sigma_1)\Delta(\sigma_1+\sigma_2)\int \Psi_{\omega,q}(\vec{r},\sigma_1,\sigma_2)\vartheta(r)d\vec{r}\Big|^2 \leqq$$

$$\leqq \sum_{(\sigma_1,\sigma_2)} \Delta(\sigma_1+\sigma_2)\int \vartheta^2(r)d\vec{r} = 2\int \vartheta^2(r)d\vec{r}$$

Отсюда, на основании (9.19):

$$\langle \overset{+}{\beta}_q \beta_q \rangle \leqq 4\left(\max_{(\omega)} N_{\omega,q}\right)\int \vartheta^2(r)d\vec{r}$$

и потому, благодаря (9.18):

$$\max_{(\omega)} N_{\omega,q} \geqq \left(\frac{2m\,\theta\,\gamma^2(q)}{\int \vartheta^2(r)d\vec{r}}\frac{\rho_0}{\rho}\right)\frac{1}{q^2} - \frac{C}{8\int \vartheta^2(r)d\vec{r}} \qquad (9.20)$$

Пусть $\theta >$ 0 и пусть ζ^2 будет некоторой положительной величиной, удовлетворяющей неравенству:

$$\zeta^2 < \frac{2m\theta\gamma^2(0)}{\int \vartheta^2(r)\,d\vec{r}}\;\frac{\rho_0}{\rho}$$

Тогда, для достаточно малых q получим:

$$\max_{(\omega)} N_{\omega,q} \geq \frac{\zeta^2}{q^2}$$

Итак, для любого достаточно малого импульса q имеется такое парное состояние $(\tilde{\omega}, \vec{q})$, что среднее число пар частиц, находящихся в этом состоянии

$$n_q = N_{\tilde{\omega},\vec{q}} \tag{9.21}$$

будет удовлетворять неравенству:

$$n_q \geq \frac{\zeta^2}{q^2} \tag{9.22}$$

Как видно, оно аналогично неравенству (8.22), установленному для Бозе-систем при наличии конденсата.

В заключение подчеркнем, что это неравенство (9.22) доказано лишь для того случая, когда форма $U(\overset{+}{\psi}, \psi)$, входящая в выражение (9.I) гамильтониана H, является градиентной инвариантной.

Для модельной системы, рассматривавшейся в § 2, форма U не градиентно инвариантна и потому неудивительно, что в этом случае неравенство (9.22) неверно.

Литература

1. J.Bardeen, L.Cooper and J.Sohrieffer, Phys.Rev., 106, 162 (1957); Phys.Rev., 108, 1175 (1957).
2. Н.Н.Боголюбов, Д.Н.Зубарев, Ю.А.Церковников, ДАН СССР II7, 788 (I957).
3. Н.Н.Боголюбов, Д.Н.Зубарев, Ю.А.Церковников, ЖЭТФ 39, I20 (I960).
4. Н.Н.Боголюбов " К вопросу о модельном гамильтониане в теории сверхпроводимости", препринт ОИЯИ (I960).
5. Н.Н.Боголюбов, ЖЭТФ 34, 58 (I958).
6. Н.Н.Боголюбов, ДАН СССР II9, 52 (I958); " О принципе компенсации и методе самосогласованного поля", препринт ОИЯИ (I958).
7. Н.Н.Боголюбов " Лекцii з квантовоi статистики", монография, изд."Радянська Школа", Киев (I949).
8. Д.Н.Зубарев, УФН 7I, 7I (I960);
   В.Л.Бонч-Бруевич и С.В.Тябликов "Метод функций Грина в статистической механике", монография.
9. Н.Н.Боголюбов, Изв. АН СССР, сер.физ. II, 77 (I947); Вестник МГУ 7, 43 (I947).
10. С.Т.Беляев, ЖЭТФ 34, 4I7 (I958).
11. H.Hugenholtz, D.Pines., Phys.Rev.116, 489 (1959).