ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р9 - 9886

А.Г.Бонч-Осмоловский, В.И.Данилов

ОБ ЭФФЕКТЕ СЖАТИЯ ОРБИТ
В МУЛЬТИПОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

1976

P9 - 9886

А.Г.Бонч-Осмоловский, В.И.Данилов

ОБ ЭФФЕКТЕ СЖАТИЯ ОРБИТ В МУЛЬТИПОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Направлено в ЖТФ

Мультипольное магнитное поле, создаваемое системой линейных проводников, расположенных вдоль образующей цилиндрической поверхности, использовалось М.С.Иоффе и др. /1/ для подавления магнитогидродинамической неустойчивости плазменного шнура и в той или иной модификации находит применение в магнитных ловушках для удержания плотной плазмы. В работе /2/ было предложено использовать мультипольное магнитное поле для усиления фокусировки и уменьшения потерь частиц при ускорении колец в коллективном методе ускорения.

Недавно на установке типа "Астрон" с помощью квадрупольного магнитного поля была экспериментально доказана возможность подавления прецессионной неустойчивости вращающегося плотного электронного сгустка /3/.

В данной работе аналитически показано в рамках одночастичного приближения, что азимутально-неоднородные $H_r + H_\phi$ поля, создаваемые вне вращающегося пучка системой аксиальных проводников с током, приводят к сжатию равновесной орбиты и существенному увеличению частот радиальных свободных колебаний. Тем самым открывается возможность стабилизации некоторых опасных неустойчивостей во вращающихся плотных пучках /прецессионной, двухпучковой типа "змейки" и неустойчивости отрицательной массы/.

1. *Постановка задачи и основные уравнения*

Пусть по окружности цилиндра радиуса R_0 расположены $2N$ проводников параллельно образующей цилиндра на равном угловом расстоянии друг от друга. Токи в соседних проводниках противоположны, и, таким образом, всего имеется N пар проводников с разным направлением тока I.

В принципе возможна конфигурация и с одинаково направленными токами, при этом период модуляции поля будет в два раза большим, чем в первом случае, а глубина модуляции - примерно в два раза меньшей.

В дальнейшем мы будем рассматривать конфигурацию с противоположными токами, образующими мультипольное магнитное поле. Размеры поперечного сечения проводников будем считать малыми по сравнению с расстоянием между проводниками по дуге окружности $\pi R_0/N$. Учет конечности размеров влияет только на амплитуду мультипольного поля и легко может быть произведен [4].

Будем считать, что, помимо магнитного поля, созданного системой прямолинейных проводников, вдоль оси системы создано продольное однородное магнитное поле H_z, обеспечивающее вращение пучка.

Выражения для компонентов мультипольного магнитного поля системы прямолинейных проводников в виде рядов Фурье по азимутальным гармоникам известны /см. [4] /; в цилиндрической системе координат r, ϕ, z они имеют вид при $r \leq R_0$:

$$\left.\begin{aligned} H_r &= -\frac{4NI}{cR_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R_0}\right)^{N(2k+1)-1}\sin N(2k+1)\phi\,, \\ H_\phi &= -\frac{4NI}{cR_0}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R_0}\right)^{N(2k+1)-1}\cos N(2k+1)\phi\,. \end{aligned}\right\} \quad /1/$$

Если $N \gg 1$ - основное условие, которое мы принимаем в дальнейшем, то вклад высших гармоник по сравнению с основной $-N\phi-$ в рядах /1/ быстро уменьшается с ростом k, если $r < R$. Например, при $r/R_0 = 0{,}8$ и $N = 5$ максимальный вклад гармоники $3N\phi$ составляет 2%, а гармоники $5N\phi$ - 0,2%.

Для упрощения дальнейших выкладок будем считать, что присутствует лишь основная гармоника * и поле, соответственно, записывается в виде:

$$\left.\begin{aligned} H_r &= -br^{N-1}\sin N\phi\,, \quad H_\phi = -br^{N-1}\cos N\phi\,, \\ b &= \frac{4NI}{cR_0^N}\,. \end{aligned}\right\} \quad /2/$$

Нас интересует движение заряженных частиц по орбите, близкой к круговой, для анализа его воспользуемся уравнениями движения в той форме, которую они приобретают после перехода от независимой переменной t к ϕ - азимутальному углу /см. [5] /:

$$\left.\begin{aligned} &(r^2 + r'^2)r'' - r(r^2 + 2r'^2 + z'^2) - r'z'z'' = \frac{\ell^3}{v}(r\omega_z - z'\omega_\phi)\,, \\ &(r^2 + r'^2)z'' - r'z'(r'' + r) = \frac{\ell^3}{v}(r'\omega_\phi - r\omega_r)\,. \end{aligned}\right\} \quad /3/$$

Здесь штрихом обозначена производная по ϕ, $\ell = \sqrt{r^2 + r'^2 + z'^2}$, $v = \frac{p}{m\gamma}$, p - полный импульс частицы, $\omega_i = \frac{eH_i}{mc\gamma}$, $i = r, \phi, z$, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

Считаем, что r', $z' \ll r$ и линеаризуем /3/, пренебрегая произведениями $r'z'$:

$$\left.\begin{aligned} r'' - r &= r^2\frac{\omega_z}{v} - rz'\frac{\omega_\phi}{v}\,, \\ z'' &= rr'\frac{\omega_\phi}{v} - r^2\frac{\omega_r}{v}\,. \end{aligned}\right\} \quad /4/$$

Когда ω_ϕ и ω_r равны нулю, существует решение этих уравнений, соответствующее вращению по круговой

---

* Анализ, развитый ниже, пригоден при оставлении всех членов ряда; можно показать, что лишь изменяется величина P, определенная /8/, а именно, $P^2 \to \sum_k P_k^2$.

орбите в однородном поле при аксиальной скорости, равной постоянной величине /будем рассматривать без ограничения общности случай, когда скорость вдоль оси $\dot z_0 = 0$ /:

$$r = R_{л} = -\frac{v}{\omega_z}, \quad \dot z = \dot z_0 = 0. \qquad /5/$$

Естественно, первое соотношение надо понимать в алгебраическом смысле, т.е. знак H_z – поля должным образом соответствует знаку заряда e .

В мультипольном и продольном магнитных полях будем искать орбиту, близкую к /5/, т.е. положим

$$r = R_{л}(1+\alpha), \quad z = R_{л}\,\delta. \qquad /6/$$

Используя /2/ и /5/, для величин α и δ получаем уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha'' + \alpha + \alpha^2 - p\,\delta'(1+\alpha)^N \cos N\phi = 0, \\ &\delta'' + p\,\alpha'(1+\alpha)^N \cos N\phi - p\,(1+\alpha)^{N+1} \sin N\phi = 0. \end{aligned}\right\} \qquad /7/$$

Здесь

$$p = \frac{b R_{л}^N}{v} = \frac{H_M}{H_z}, \quad H_M = \frac{4NI}{cR_0}\left(\frac{R_{л}}{R_0}\right)^{N-1}, \qquad /8/$$

H_M - амплитуда мультипольного поля на радиусе $R_{л}$.

2. *Свободные /медленные/ и вынужденные /быстрые/ колебания*

Вначале рассмотрим случай, когда можно провести линеаризацию уравнений /7/, т.е. выполнено условие

$$N\alpha \ll 1. \qquad /9/$$

Тогда уравнения приобретают вид

$$\alpha'' + \alpha - p\,\delta' \cos N\phi = 0,$$

$$\delta'' + p\,\alpha' \cos N\phi - p\,(N+1)\,\alpha \sin N\phi = p \sin N\phi. \qquad /10/$$

Поскольку предполагается, что справедливо условие $N \gg 1$, для нахождения решения /10/ применим метод усреднения [6]. Для этого введем обозначения

$$N\phi = \psi, \quad \epsilon = 1/N, \quad x_1 = \alpha, \quad x_2 = \frac{d\alpha}{d\phi}, \quad x_3 = \delta, \quad x_4 = \frac{d\delta}{d\phi}. \qquad /11/$$

Получаем систему уравнений 1-го порядка:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_1}{d\psi} = \epsilon x_2, \qquad \frac{dx_2}{d\psi} = -\epsilon x_1 + \epsilon x_4 p \cos\psi, \\ &\frac{dx_3}{d\psi} = \epsilon x_4, \qquad \frac{dx_4}{d\psi} = -\epsilon p x_2 \cos\psi + \epsilon p x_1 N \sin\psi + \epsilon p \sin\psi. \end{aligned}\right\} \qquad /12/$$

Легко убедиться, что в первом порядке по ϵ метод усреднения в данном случае дает лишь невозмущенное мультиполями движение, т.е.

$$\alpha'' + \alpha = 0 \quad \text{и} \quad \delta'' = 0.$$

Проведем рассмотрение до второго порядка по ϵ включительно; несложные вычисления дают для $\tilde\alpha$ и $\tilde\delta$ следующие уравнения:

$$\tilde\alpha'' + (1 + p^2/2)\,\tilde\alpha = -\epsilon\,\frac{p^2}{2}, \quad \tilde\delta'' = 0. \qquad /13/$$

Таким образом, "медленное" движение во втором порядке по ϵ представляет собой свободные радиальные колебания с частотой $\omega_z\sqrt{1+p^2/2}$ около круговой орбиты, смещенной относительно ларморовского радиуса на величину

$$\alpha_0 = -\epsilon\,\frac{p^2}{2+p^2}, \qquad /14/$$

и неизменным /относительно /5// аксиальным движением $\delta = 0$.

Быстрое движение находится обычным способом и имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} a^{\sim} &= O(\epsilon^3), \quad \frac{da^{\sim}}{d\phi} = -\frac{\epsilon^2 p^2}{2(2+p^2)}\sin 2N\phi, \\ \delta^{\sim} &= -\epsilon^2\frac{2p}{2+p^2}\sin N\phi, \quad \frac{d\delta^{\sim}}{d\phi} = -\epsilon\frac{2p}{2+p^2}\cos N\phi. \end{aligned}\right\} \qquad /15/$$

Поскольку при выводе было поставлено условие /9/, выражения /14/ и /15/ справедливы, если

$$p^2 \ll 1. \qquad /16/$$

Для того, чтобы отказаться от этого ограничения, вернемся к общим уравнениям /7/, область применения которых связана с гораздо более слабыми условиями a'^2, $\delta'^2 \ll 1$. Применим метод усреднения непосредственно к ним. Тогда для "медленного" движения во втором порядке по ϵ получим:

$$a'' + a + a^2 = -\epsilon\frac{p^2}{2}(1+a)^{2N+1}. \qquad /17/$$

"Медленное" движение вдоль оси поля (z) происходит так же, как и в отсутствие мультипольного магнитного поля, т.е. в нашем случае $\bar{z} = \bar{z}' = 0$. Нас будет интересовать радиальное движение. Уравнение /17/ для a является нелинейным; его специфика состоит в том, что, несмотря на наличие малого параметра ϵ в правой части /в виде множителя/, что роднит его со стандартными уравнениями консервативных колебаний со слабой нелинейностью [6], малый параметр входит также в знаменатель показателя степени $(1+a)$, что существенно усиливает нелинейный характер уравнения. Действительно, рассмотрим применение стандартной методики разложения по малому параметру. Используя процедуру, изложенную в работе [6], получим следующий результат во втором порядке по ϵ:

$$a = a\cos\nu\phi - \epsilon C_0(a) + \epsilon\sum_{n=2}^{\infty}\frac{C_n(a)\cos n\nu\phi}{n^2-1}, \qquad /18/$$

безразмерная частота ν при этом равна:

$$\nu = 1 + \frac{\epsilon C_1(a)}{2a} - \frac{\epsilon^2}{2}\left(\frac{C_1}{2a}\right)^2 + \frac{\epsilon^2}{2a}\left\{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{C_n(a)\frac{dC_n}{da}}{n^2-1} - 2C_0(a)\frac{dC_0}{da}\right. . \qquad /19/$$

В этих формулах a - амплитуда свободных /"медленных"/ колебаний, $C_0(a)$ и $C_n(a)$ даются выражениями

$$C_0(a) = \frac{p^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}(1+a\cos x)^{2N}dx, \quad C_n(a) = \frac{p^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+a\cos x)^{2N}\cos nx. \qquad /20/$$

Положим в этих формулах, что амплитуда свободных колебаний достаточно мала, а именно, $2Na \ll 1$.

Тогда можно вычислить главные члены разложений, описывающие движение, не зависящее от амплитуды колебаний; несложные вычисления дают

$$C_0\big|_{a\to 0} = \frac{p^2}{2}, \quad C_n\big|_{a\to 0} = 0, \quad \frac{1}{a}\cdot\frac{dC_0}{da}\Big|_{a\to 0} = p^2N^2, \quad \frac{C_1(a)}{a}\Big|_{a\to 0} = p^2 N$$

и

$$a = a\cos\nu\phi - \epsilon p^2/2,$$

$$\nu = 1 + p^2/2 - 5/8\,p^4. \qquad /21/$$

Из второго уравнения /21/ видно, что в силу упомянутой выше специфики уравнения /17/ разложение ведется фактически не по степеням ϵ, а по степени p^2 и применимо, таким образом, при условии $p^2 \ll 1$. Сравнение с результатами прямой линеаризации исходных уравнений /13/-/14/ показывает идентичность соответствующих формул. Таким образом, стандартная методика в случае уравнения вида /17/ применима только при $p^2 \ll 1$, следовательно, только для слабого мультипольного поля ($H_M \ll H_Z$).

Поскольку нас интересует случай сильного поля ($p \gtrsim 1$), поступим следующим образом.

Уравнение /17/ имеет частное решение в виде постоянной, которое можно найти из соотношения

$$a_0 = -\epsilon\frac{p^2}{2}(1+a_0)^{2N}, \qquad /22/$$

Формула /22/ определяет постоянное смещение орбиты,и, полагая $a_0 \ll 1$ /поправки на конечность a_0 легко вычислить/, а также обозначив

$$q = -2Na_0, \qquad /23/$$

получим для величины q трансцендентное уравнение

$$qe^q = p^2. \qquad /24/$$

При $p^2 \ll 1$ отсюда получаем для a_0 уже известный результат /14/. Положим $a = a_0 + \tilde{a}$ и потребуем, чтобы выполнялось

$$\tilde{a} \ll \frac{1}{N}. \qquad /25/$$

Подставим a в таком виде в уравнение /17/ и разложим правую часть около $1+a_0$, тогда $\tilde{a}$ будет удовлетворять следующему уравнению:

$$\tilde{a}'' + \nu^2 \tilde{a} = 0,$$

причем

$$\nu^2 = 1 + 2N|a_0| = 1 + q. \qquad /26/$$

Формулы /22/ и /26/ дают решение поставленной задачи при малых амплитудах свободных колебаний в произвольном мультипольном поле /величина поля ограничена лишь условием, чтобы $a_0 \ll 1$/. Если $p^2 \ll 1$, то легко проверить, что с точностью до членов порядка p^4 включительно полученное решение совпадает с формулами /21/.

Отметим, что в мультипольном магнитном поле нелинейность собственно колебаний $(\tilde{a})$ наступает при значительно меньших амплитудах $|\tilde{a}| \lesssim 1/N$, чем в однородном поле $(\tilde{a} \lesssim 1)$. При нарушении /25/ можно в рамках стандартной процедуры учесть следующие члены разложения по $\tilde{a}$ в /26/, что приведет к зависимости сдвига a_0 и частоты ν от амплитуды колебаний.

Величина q и постоянное смещение орбиты для малых свободных колебаний определяется уравнением /24/.

Составим табличку, в которой для ориентировки приведено несколько численных значений q в зависимости от p.

Таблица

p	0,717	1,0	1,22	1,65	2,83	3,84
p^2	0,5	1,0	1,5	2,71	8,0	14,8
q	0,35	0,56	0,73	1	1,61	2

При $q = 2$ смещение орбиты $a_0 = \frac{\bar{r}}{R_л} = -1/N$.

Физическая причина уменьшения роста $|a_0|$ и q при увеличении $H_М$ ясна: в связи с резко неоднородным характером поля $H_М$ по радиусу $(\sim r^{N-1})$ даже небольшое уменьшение среднего радиуса вращения частиц приводит к уменьшению поля на орбите, что и тормозит рост q при больших p.

"Быстрые" вынужденные колебания теперь имеют вид:

$$a^{\sim} = \frac{\epsilon^3 q}{8} \cos 2N\phi, \quad \delta^{\sim} = -\epsilon^2 \sqrt{q} \sin N\phi. \qquad /27/$$

Условия применимости этих выражений: $N \gg 1$ и $a_0 \ll 1$ $(q \ll 2N)$.

3. *Обсуждение результатов*

Полученные решения /22/,/26/ и /27/ означают, что в присутствии мультипольного магнитного поля происходит следующее. Частицы, которые в однородном магнитном поле вращались по ларморовскому радиусу, переходят на орбиту меньшего радиуса /среднего/, это сжатие орбиты невелико, относительная величина его порядка $1/N$, где $2N$ - число проводников, создающих мультипольное магнитное поле. Движение при этом разделяется на два класса: быстрые /вынужденные/ колебания /с амплитудой $\sim 1/N^3$ для радиального и $\sim 1/N^2$ для аксиального колебаний/ и медленные /свободные/ колебания по радиусу. Амплитуда медленных радиальных колебаний задается начальными условиями /например, при инжекции в область мультипольного поля/, а частота существенно отлична от циклотронной /в поле H_Z / и определяется величиной мультипольного магнитного поля.

Это обстоятельство означает, что достаточно сильное мультипольное магнитное поле $(H_M \sim H_Z)$ обладает заметным центрирующим действием, т.е. препятствует развитию когерентных смещений орбиты заряженных частиц, относительно которых движение в однородном магнитном поле, вообще говоря, неустойчиво [7,8].

Заметим, что аналогичным центрирующим действием обладает также азимутальное симметричное H_ϕ поле [9], но эффект сжатия орбит в таком поле не возникает.

Процесс подавления прецессионной неустойчивости /моды $n = 1$ - смещение кольцевого сгустка как целого/ с помощью квадрупольного магнитного поля наблюдался в недавних экспериментах на установке типа "Астрон" [3].

Центрирующее действие мультипольного магнитного поля при малых амплитудах вынужденных колебаний может обеспечить вращение плотного пучка без существенных потерь в непосредственной близости от цилиндрической металлической поверхности, что в ряде случаев дает дополнительные эффекты стабилизации [10,11].

Остановимся еще на одном важном следствии указанных выше свойств движения в мультипольном магнитном поле, связанном с понятием эффективной массы вращающихся частиц.

Известно, что эффективная масса частиц в однородном аксиальном магнитном поле отрицательна, что приводит к характерному коллективному эффекту в ансамбле вращающихся частиц - неустойчивости "отрицательной массы". Эффективная масса входит в уравнение азимутального движения в магнитном поле при наличии ускорения и определяется следующим образом:

$$M = \frac{E}{R^2 \omega^2 K} . \qquad /28/$$

Здесь E - полная энергия вращательного движения частиц, R и ω - радиус и частота обращения, $K = \frac{E}{\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial E}$, эта величина связана известным образом [5] с коэффициентом сжатия орбит $\frac{\partial \ln \Pi}{\partial \ln p_u}$, Π - периметр орбиты, p_u - импульс.

В азимутально-неоднородном магнитном поле типа, например, поля жестко-фокусирующих ускорителей, появляется критическая энергия, ниже которой масса положительна и только при достаточно большой энергии становится отрицательной.

Следует ожидать, что в мультипольном магнитном поле знак эффективной массы также будет зависеть от энергии частиц.

Вычислим коэффициент K непосредственно из выражения частоты обращения, которое используется при выводе уравнений движения /3/:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{v}{\ell} = \frac{v}{\sqrt{r^2 + r'^2 + z'^2}} . \qquad /29/$$

В нашем случае $(r'^2, z'^2 \ll r^2)$ она равна

$$\omega = \frac{v}{r} \simeq \omega_z (1 + a_0) , \qquad /30/$$

где a_0 определяется из /22/.

Учитывая, что $p \sim v^{N-1} \gamma^N$ /см. формулу /8//, а также то, что $E = mc^2\gamma$ и $\frac{dv}{d\gamma} = \frac{c}{\beta\gamma^3}$, после несложных вычислений получим

$$\frac{E}{\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial E} = -1 + \frac{q}{\beta^2(1+q)} , \qquad /31/$$

где q вычисляется при заданном p по формуле /24/.

Более точное выражение с учетом конечности a_0 выглядит следующим образом:

$$\frac{E}{\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial E} = -1 + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{q}{1+q} \, \frac{1 - 2|a_0|}{1 - \frac{|a_0|}{1+q}} . \qquad /31'/$$

При малых q масса M отрицательна и равна $M = -m\gamma$ - известный результат для однородного поля.

Согласно /31/, если

$$\gamma^2 < 1 + q = \nu_r^2 , \qquad /32/$$

то эффективная масса положительна и неустойчивость отрицательной массы отсутствует. Соотношение /32/ определяет критическую энергию аналогично случаю ускорителя с жесткой фокусировкой.

Жесткость фокусировки r -движения мультипольным магнитным полем и критическая энергия полностью определяются величиной q, которая зависит от отношения амплитуды мультипольного поля к величине продольного магнитного поля.

Литература

1. *М.С.Иоффе, Р.И.Соболев. АЭ, 17, 366 /1964/.*
2. *А.Г.Бонч-Осмоловский, В.И.Данилов. Авт. свид. №519070, Бюллетень ОИПОТЗ, № 23, 1976.*
3. D.Woodall, H.Fleishman, H.Berk. Phys.Rev.Lett.,34,260,1975.
4. *Ю.Мартыненко, Р.Соболев. АЭ, 17, 211 /1964/.*
5. *А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев. Теория циклических ускорителей. ГИФМЛ, Москва, 1962.*
6. *Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Наука, М., 1974.*
7. H.P.Furth. Phys.Fluids, 8, 2020 (1965).
8. *Г.И.Будкер. АЭ, 5, 9 /1956/.*
9. *А.Г.Бонч-Осмоловский. ЖТФ, 41, 1345 /1971/; А.Г.Бонч-Осмоловский, К.А.Решетникова. ЖТФ, 42, 987 /1972/.*
10. *Г.В.Долбилов, И.Н.Иванов, Э.А.Перельштейн, В.П.Саранцев, В.Ф.Шевцов. Препринт ОИЯИ, Р9-4737, Дубна, 1969.*
11. A.Faltens, L.J.Laslett. LBL-1070, Berkeley, Calif., 1972.

Рукопись поступила в издательский отдел 18 июня 1976 года.