

K-143

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

2759 / 2-76



19/VI-76

P9 - 9721

Н.Ю.Казаринов, Э.А.Перельштейн, В.Ф.Шевцов,
Б.Г.Щинов

ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА
НА ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС
БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ

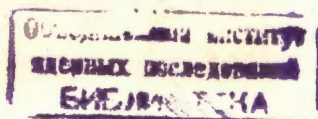
1976

P9 - 9721

Н.Ю.Казаринов, Э.А.Перельштейн, В.Ф.Шевцов,
Б.Г.Щинов

ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА
НА ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС
БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Направлено в "Particle Accelerators"



Казаринов Н.Ю., Перельштейн Э.А., Шевцов В.Ф.,
Шиннов Б.Г. P9 - 9721

Влияние пространственного заряда на параметрический
резонанс бетатронных колебаний

Рассматривается влияние сил пространственного заряда на параметрический резонанс бетатронных колебаний. Найдены условия, при которых размеры пучка меняются незначительно. Анализируется прохождение через резонанс. Результаты применяются для выбора допустимых траекторий в компрессорах коллективных ускорителей.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1976

Kazarinov N.Yu., Perelstein E.A., Shevtsov V.F.,
Shchinov B.G. P9 - 9721

Space Charge Effect on the Parametric
Resonance of Betatron Oscillations

The effect of the space charge on the parametric resonance of betatron oscillations is considered. The conditions of the small change in the beam dimensions have been found. The crossing of the resonance is studied. The present results are applied for choosing suitable trajectories in the collective accelerator compressors.

The investigation has been performed at the Department of New Acceleration Methods, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1976

Влияние собственного заряда пучка на параметрический резонанс некогерентных бетатронных колебаний подробно исследовалось в связи с определением предельных токов в циклических ускорителях ¹⁻⁶. В этих работах получены следующие основные результаты:

1. Решение линеаризованного уравнения Владимирского-Капчинского ⁷ в случае параметрического резонанса согласованных пучков дает сдвиг резонансных значений частот бетатронных колебаний огибающей /кратных $1/$, обусловленный собственным зарядом, на величину, примерно равную Q / Q - кулоновская поправка к частоте некогерентных бетатронных колебаний в единицах частоты обращения ^{1,6}.

2. По мере роста рассогласования заряженного пучка частота свободных колебаний огибающей стремится к 2ν ^{2,6}. Таким образом, для несогласованных пучков резонансные условия не зависят от собственных полей ¹.

3. При выборе рабочей точки, совпадающей со сдвинутой резонансной частотой, амплитуда колебаний ограничена и не сильно отличается от начальной при больших Q ¹.

Собственный заряд пучка препятствует резонансному росту амплитуды ¹⁻⁶.

4. Результаты, полученные в рамках модели Владимирского-Капчинского ^{1,2,6} пригодны до тех пор, пока разброс по частотам бетатронных колебаний в пучке не превышает кулоновского сдвига ⁶ /когерентный резонанс/.

* К такому же выводу можно прийти, рассматривая предельный случай больших амплитуд колебаний в усредненных уравнениях ^{7,8} работы ¹.

5. Прохождение параметрического когерентного резонанса улучшается из-за собственного заряда при увеличении частоты бетатронных колебаний и ухудшается в обратном случае /3,8,9/.

Мы вернулись к проблеме собственного заряда в параметрическом резонансе при анализе динамики электронных колец в адгезаторах /компрессорах/ коллективных ускорителей /9/. Специфика адгезаторов заключается в том, что для удержания пространственного заряда в начале сжатия колец требуются большие значения показателя спада внешнего /слабофокусирующего/ поля $-n$. В конце сжатия величину n удобно иметь достаточно малой. При этом n -траектория кольца обычно несколько раз пересекает резонансное значение /пересечение резонанса связано и с небольшим, обычно используемым числом ступеней сжатия/ /10-13/. Характерное время сжатия колец в /13/ составляет 10^{-3} с, так что без специальной временной коррекции поля резонансы проходятся медленно.

Для сжатия колец представляют интерес вопросы: о влиянии пространственного заряда пучка на резонансы в широкой области отстроек от резонансной частоты; об уточнении пункта 1 с целью такого выбора n -траектории /с учетом Q /, чтобы параметрический резонанс вообще не проходил; о количественной формулировке пункта 5 /если резонанс проходит/. Эти вопросы и разбираются в данной работе.

Г. Возьмем в качестве исходных уравнения Владимирского-Калчинского для огибающих пучка в радиальном - a_r и аксиальном - a_z направлениях, для определенности считая резонансным z -движение:

$$\frac{d^2 a_z}{d\theta^2} + \left(\frac{1}{2} + \delta\right)^2 a_z - \frac{F_z^2}{a_z^3} - \frac{Q(a_{r_0} + a_{z_0})a_{z_0}}{a_r + a_z} = \epsilon a_z \cos \theta \quad /1/$$

$$\frac{d^2 a_r}{d\theta^2} + \left[1 - \left(\frac{1}{2} + \delta\right)^2\right] a_r - \frac{F_r^2}{a_r^3} - \frac{Q(a_{r_0} + a_{z_0})a_{z_0}}{a_r + a_z} = -\epsilon a_r \cos \theta \quad /2/$$

В уравнениях /1-2/ приняты обозначения: $\delta = \nu - \frac{1}{2}$ - расстройка частоты аксиальных колебаний без учета влияния собственных полей, F_z , F_r - фазовые объемы z и r колебаний, соответственно, a_{z_0} и a_{r_0} - размеры согласованного пучка, величина $Q = \frac{4\nu_e r_0^2}{\beta^2 \gamma^3 a_{z_0} (a_{z_0} + a_{r_0})}$, r_0 - средний радиус кольца, ν_e - погонный электрон, ϵ - относительная ошибка показателя спада внешнего поля, γ - релятивистский фактор электронов, вращающихся в кольце со скоростью βc .

Система /1-2/ не поддается аналитическому исследованию, поэтому для анализа используется модельное уравнение, которое получается из /1/ при подстановке $a_r = a_z$ /в любой момент времени/ /1/. Решение этого уравнения при $\epsilon = 0$, $Q = 0$ имеет вид

$$\left(\frac{a_z}{a_{z_0}}\right)^2 = \sqrt{1 + A^2} + A \sin(2\nu\theta + \phi), \quad /3/$$

где A и ϕ - произвольные постоянные.

Вместо /3/ в качестве нулевого приближения можно использовать выражение, учитывающее пространственный заряд при $\epsilon = 0$. Для этого достаточно заменить величину F_z^2 на $F_z^{*2} = F_z^2 - Q a_{z_0}^4$.

Результаты последующих вычислений совпадают с результатами /1/. В первом порядке малости по ϵ в выражении /3/ A и $w = \frac{2\delta\theta + \phi}{2}$ следует считать медленно

меняющимися функциями, которые удовлетворяют уравнениям Смита /1/:

* Уравнения получены для линейных пучков, однако ими можно пользоваться, если рассматривать изменение во времени размеров сечения кольца, вращающегося с циклотронной частотой. Математически это выражается в замене переменной в уравнениях Владимирского-Калчинского. Зависимость от начального азимута сечения учитывается соответствующим выбором начальной фазы в возмущающей силе.

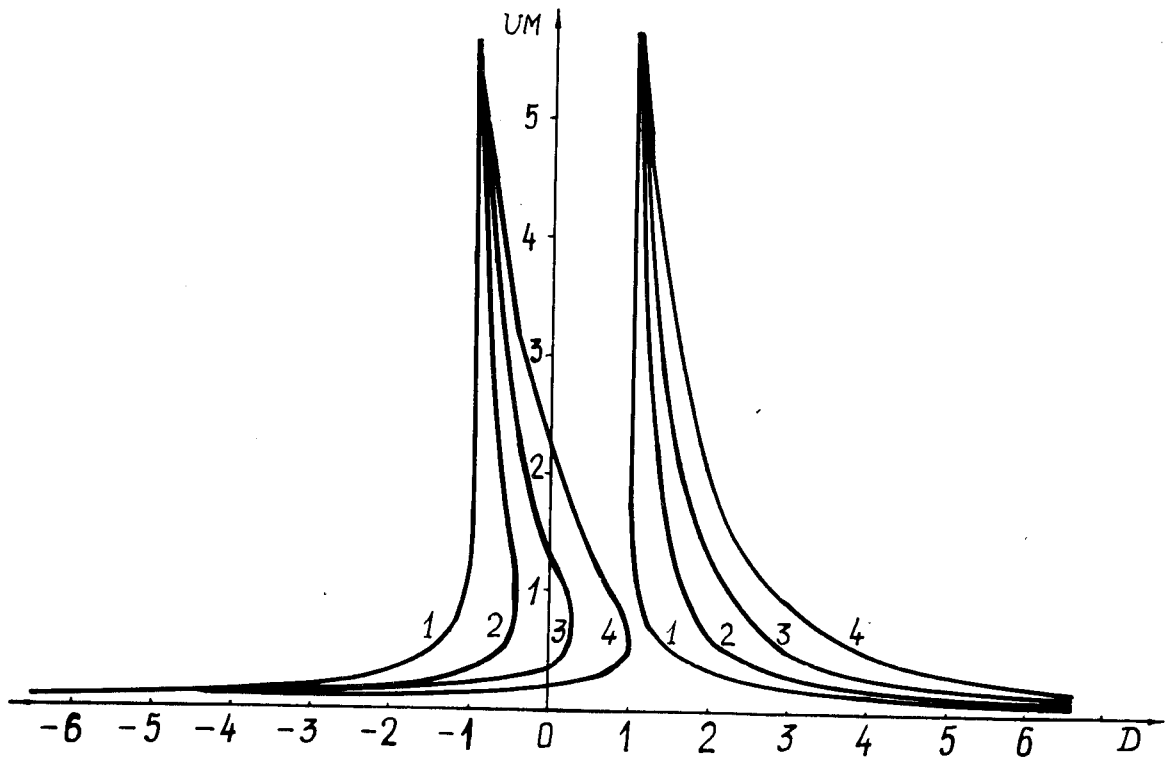


Рис. 1. Зависимость максимальных амплитуд колебаний огибающей от относительной расстройки 1 - $Q/G=0$, 2 - $Q/G=2$, 3 - $Q/G=4$, 4 - $Q/G=6$.

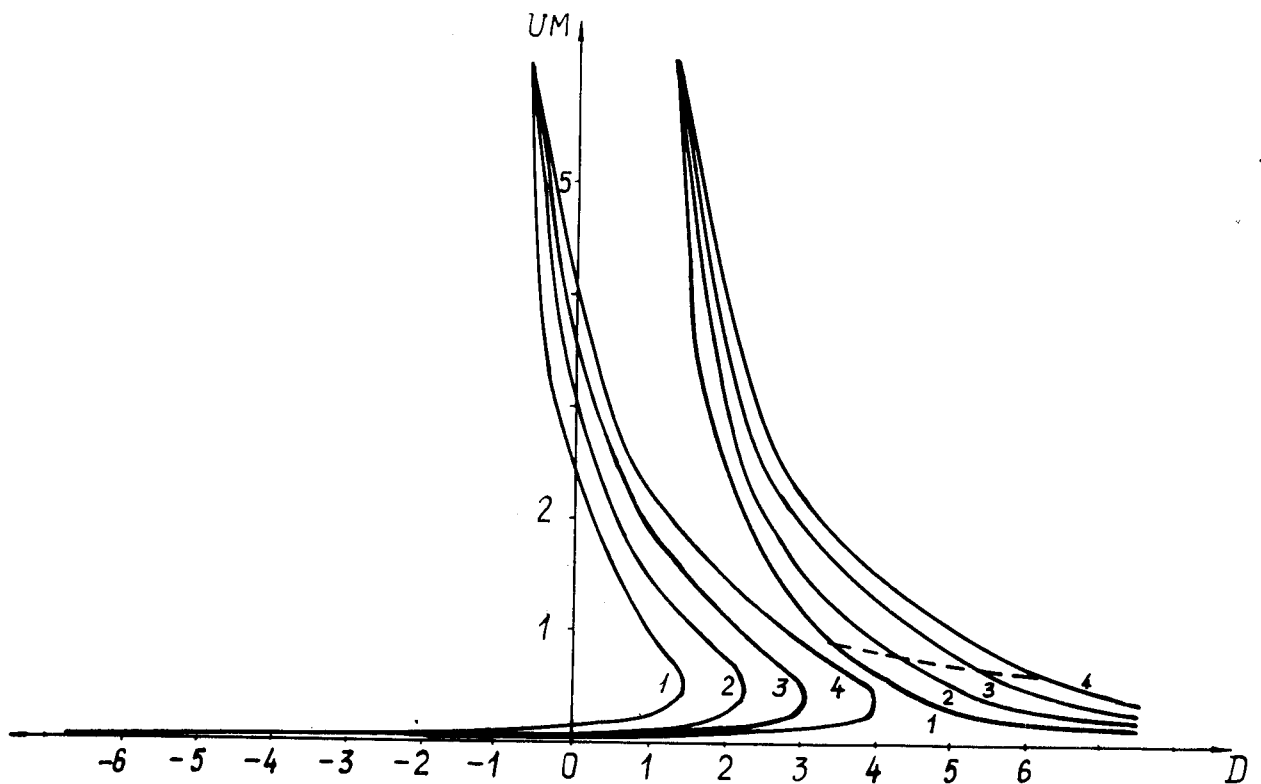


Рис. 2. Зависимость максимальных амплитуд колебаний огибающей от относительной расстройки 1 - $Q/G=7$, 2 - $Q/G=9$, 3 - $Q/G=11$, 4 - $Q/G=13$.

$$\frac{dA}{d\theta} = 2G \sqrt{1+A^2} \cos 2w \quad /4/$$

$$\frac{dw}{d\theta} = \delta - G \frac{\sqrt{1+A^2}}{A} \sin 2w - \frac{Q}{1+\sqrt{1+A^2}}, \quad /5/$$

где $G = \frac{\epsilon}{2}$.

Особенный интерес представляют стационарные решения системы /4-5/. На *рис. 1-2* изображены функции

$UM = \frac{a_{z \max}}{a_{z^0}} - 1 / a_{z \max}$ - максимальное значение огибающей/⁰, вычисленные по стационарным амплитудам для различных значений относительной расстройки $D = \frac{\delta}{G}$ и кулоновского сдвига Q/G .

На *рис. 2* нанесена также стационарная кривая, построенная Смитом /1/, - пунктир, для которой выполняется условие резонанса линейной теории ($\delta = Q/2$). Из рисунков видно, что при любом кулоновском сдвиге стационарная кривая состоит из двух ветвей. Левая ветвь - двузначная функция D в области от -1 до некоторого $D = D_{\max}$. Анализ устойчивости решений показывает, что в области двузначности верхняя часть ветви - неустойчивая, нижняя - устойчивая.

Правая ветвь определена в области $1 < D < \infty$, она бесконечно растет при $D \rightarrow 1$, устойчива всюду.

Если условиться понимать под резонансной полосой такую область D , где нет стационарных решений системы /4-5/, то ширина резонансной полосы есть $P = 1 - D_{\max}$ при условии $P > 0$. Зависимость P от Q/G представлена на *рис. 3*. При $Q = 5,8G$ резонансная полоса исчезает. При больших кулоновских сдвигах в области $1 < D < D_{\max}$ существуют два устойчивых стационарных решения. В этом случае колебания огибающей согласованных /без учета возмущения/ пучков должны происходить вблизи нижней стационарной кривой /левая ветвь/. Отметим,

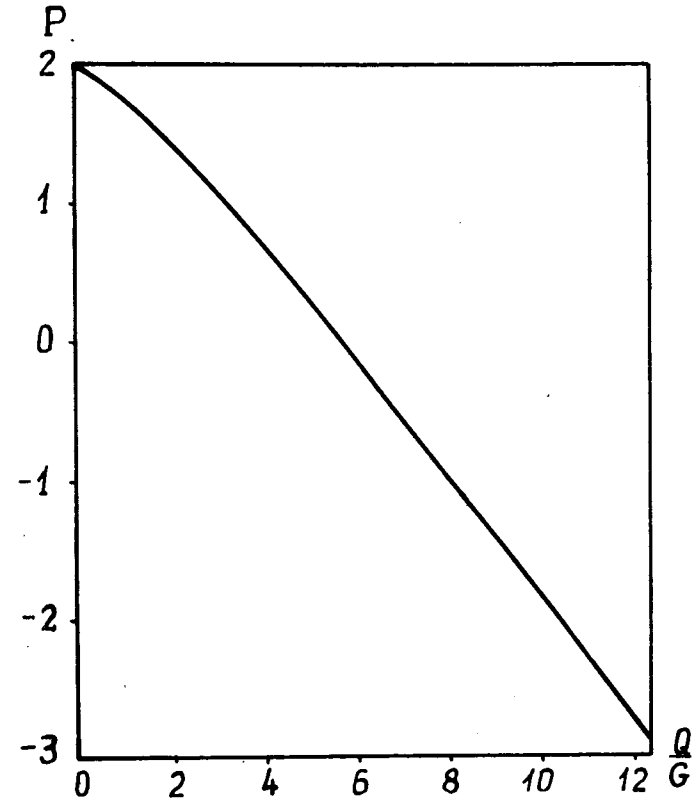


Рис. 3. Зависимость $P = 1 - D_{\max}$ от параметра Q/G .

что требования к согласованию очень жесткие - незначительные отклонения параметров пучка от согласованных приводят к колебаниям огибающей с большой амплитудой. Этот факт иллюстрируется *рис. 4*, где показаны интегральные кривые системы /4-5/ для параметров $D=2$, $Q/G=12$.

Условие незначительного роста амплитуды огибающей в параметрическом резонансе для согласованных пучков с большим пространственным зарядом можно выразить неравенством

$$\frac{Q}{G} \gg 6. \quad /6/$$

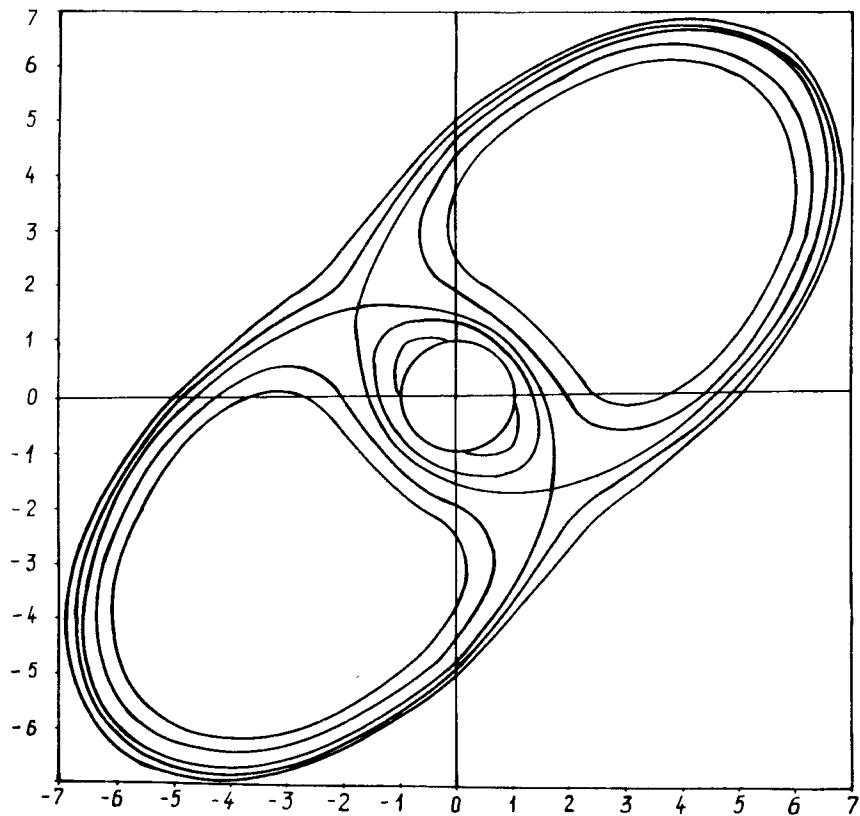


Рис. 4. Интегральные кривые системы /4-5/. $D=2$, $Q/G=12$.

II. Для выяснения справедливости результатов, полученных с помощью модельного уравнения /1/, система уравнений /1-2/ решалась численно на ЭВМ. На рис. 5 представлены максимальные значения огибающей $-a_{z \max}$ в зависимости от относительной расстройки D . Начальные условия соответствовали согласованным пучкам с учетом собственного заряда. Фазовые объемы выбирались равными $F_z=0,5$, $F_r=0,8$, величина $G=0,01$.

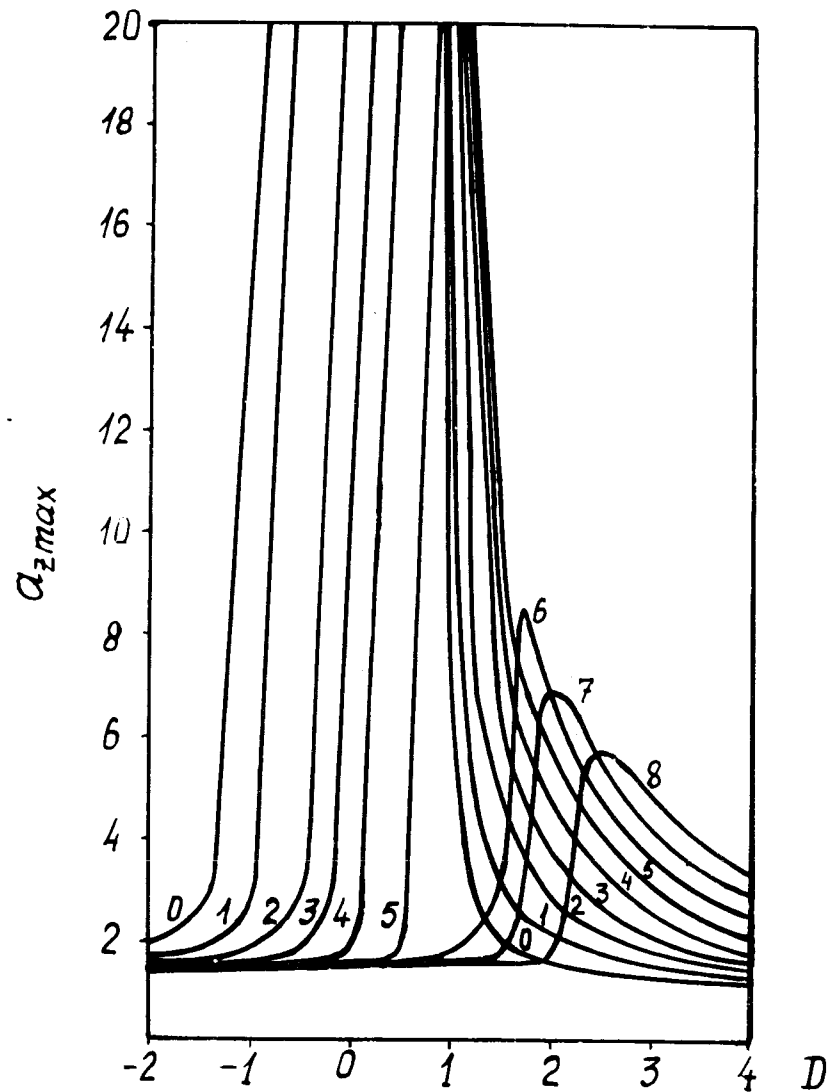


Рис. 5. Максимальные значения огибающей /результат численного решения системы уравнений /1-2//.

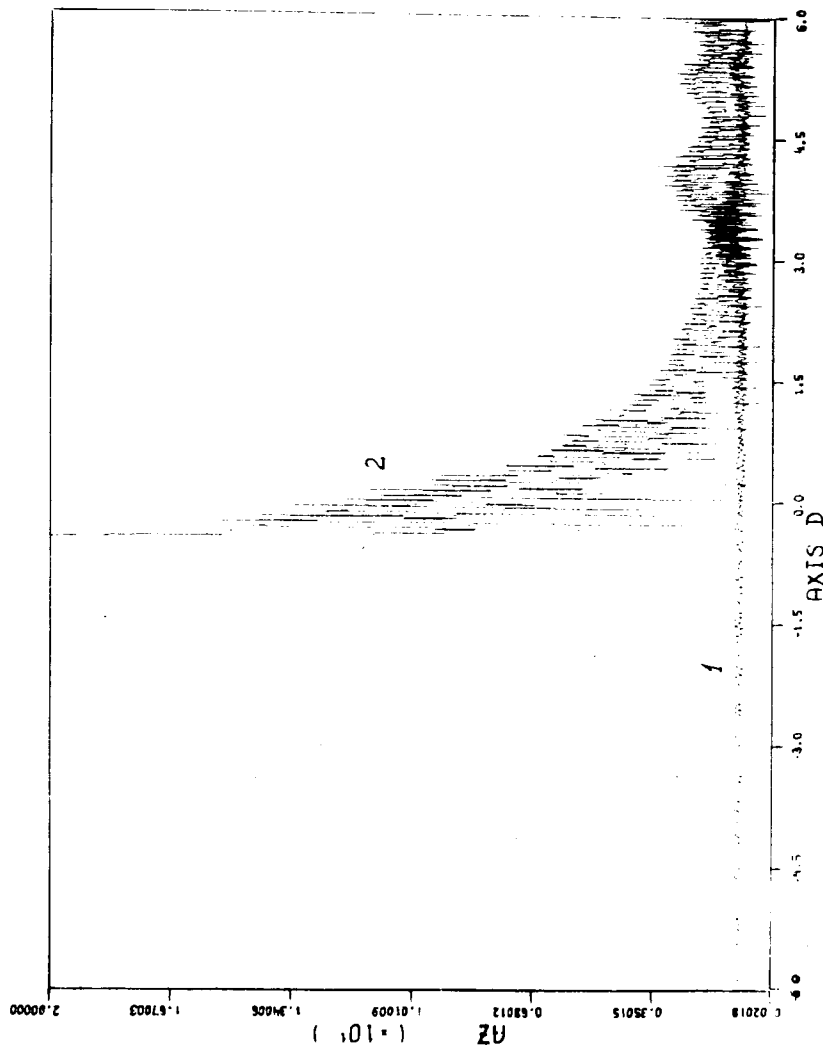


Рис. 6. Изменение огибающей при прохождении резонанса: 1 - прохождение с увеличением частоты, 2 - с ее уменьшением.

Различные кривые на рис. 5 построены для значений Q/G в интервале от 0 до 8 с шагом 1. Кривые пронумерованы по возрастанию Q/G . В счете вводилось обрезание по максимальной амплитуде $a_{z_{\max}} \leq 20$.

Кривые рис. 5 находятся в качественном согласии с модельными кривыми рис. 1-3. При $Q/G \leq 5$ наблюдается неограниченный рост амплитуды огибающей. При $Q/G > 5$ значения D , близкие к D_{\max} соответствуют скачкообразному изменению максимальных амплитуд. Наибольшие величины $a_{z_{\max}}$ на рис. 5 примерно совпадают со стационарными амплитудами рис. 1, 2, взятыми на правых ветвях в точках $D = D_{\max}$.

Заметим, что наибольшие амплитуды достигаются не при расстройках $\delta = Q/2$, как следует из линейной теории, а при $\delta \approx D_{\max} G$, что отвечает переходу стационарных устойчивых точек на рис. 1, 2 с правой ветви на нижнюю левую.

Таким образом, при больших кулоновских сдвигах становятся существенными нелинейные поправки к частоте колебаний огибающей ω , которую можно найти из уравнения /5/

$$\omega = 1 + 2\delta - Q + \frac{1}{8} Q A^2 \quad /7/$$

III. При медленном прохождении согласованного пучка через параметрический резонанс амплитуда колебаний огибающей должна примерно следовать стационарным устойчивым ветвям кривых рис. 1-2. Таким образом, прохождение резонанса с уменьшением частоты приведет к неограниченному росту амплитуды. Прохождение резонанса в обратном направлении соответствует движению по нижней ветви при $D \leq D_{\max}$ и переходу на правую ветвь при $D \geq D_{\max}$. Максимальная амплитуда в этом случае конечна и с увеличением кулоновской поправки Q уменьшается. Эти результаты из качественных соображений были получены в работах /3,8,9/.

Для примера на рис. 6 приведены результаты численного интегрирования системы уравнений /1-2/ в случае прохождения резонанса с постоянной скоростью

$\delta = \delta_0 + \delta' \theta$, $\delta_0 = \pm 6G$, $|\delta'| = 10^{-4}$. Кулоновский параметр $Q = 6G$; в начальный момент времени - пучок согласованный. Кривая 1 соответствует прохождению резонанса с увеличением частоты, кривая 2 - с уменьшением. Отметим, что допустимая область изменения частот согласованного пучка есть:

$$\delta(\theta) < D_{\max} G. \quad /8/$$

ВЫВОДЫ

Исходя из проведенного анализа, можно сказать, что при выборе параметров адгезаторов коллективных ускорителей эффективный показатель спада внешнего поля /учитывающий поправки за счет отраженных камерой полей, но не включающий кулоновскую поправку Q /, следует выбирать меньшим $n_{\max} = 0,25$. В предыдущем разделе мы нашли менее жесткое ограничение /8/, которое примерно согласуется с результатом линейной теории. Однако, согласно разделу I, небольшие отклонения пучка от согласованного приводят к большим амплитудам колебаний огибающей. Поэтому следует работать в области параметров, где существует лишь одна устойчивая левая ветвь стационарной кривой.

Ограничение сверху величины показателя спада в коллективных ускорителях привело бы к ограничению тока электронных колец. Поэтому необходимо обеспечить быстрое прохождение параметрического резонанса. В частности, это замечание относится к системе, рассчитанной в /14,15/.

В заключение авторы выражают благодарность Ю.И.Алексахину, А.Б.Кузнецову и В.А.Прейзендорфу за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. L.Smith. Труды Международной конференции по ускорителям, Москва, 1964, стр. 897.

2. P.Lapostolle. Труды Международной конференции по ускорителям. Москва, 1964, стр. 900.
3. А.Б.Кузнецов. Препринт ОИЯИ, Р9-2266, Дубна, 1965.
4. А.А.Коломенский, А.Т.Полухин. Вестник МГУ, физика, астрономия, 5, 1968, стр. 81.
5. А.А.Коломенский, А.Т.Полухин. АЭ, 29, 5, 1970, стр. 352.
6. П.Р.Зенкевич. Исследование колебаний размеров пучка в кольцевых ускорителях при учете сил пространственного заряда. ИТЭФ, Москва, 1970.
7. I.M.Kapchinsky, V.V.Vladimirsky. Proc. of the Int. Conf. on High Energy Accelerat. and Instrum., CERN, Geneva, 1959, p. 274.
8. И.В.Кожухов и др. Препринт ОИЯИ, 9-4715, Дубна, 1969.
9. И.Н.Иванов и др. Проблемы физики элементарных частиц и атомного ядра /ЭЧАЯ/, 1,2, Атомиздат, Москва, 1971, стр. 391.
10. V.I.Veksler et al. Proc. VI Int. Conf. on High Energy Accelerators, Cambridge, Mass., 1967, p. 289.
11. D.Keefe et al. Phys.Rev.Lett., 22, 1969, p.558.
12. C.Andelfinger et al. Report IPP 0/8 Max-Planck-Institut for Plasmaphysic, Munich-Garching, 1971.
13. Л.С.Барабаш и др. Препринт ОИЯИ, Р9-7697, Дубна, 1974.
14. В.С.Александров и др. Препринт ОИЯИ, Р9-9091, Дубна, 1975.
15. В.С.Александров и др. Препринт ОИЯИ, Р9-9215, Дубна, 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 апреля 1976 года.