

A-465

2427 / 2-76

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



28/11-76

P9 - 9603

В.С.Александров, Ю.И.Алексахин, Л.С.Барабаш,
И.А.Голутвин, Н.Ю.Казаринов, Э.А.Перельштейн,
В.П.Саранцев, Б.Г.Щинов

ИСКАЖЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ АДГЕЗАТОРА
МНОГОВИТКОВЫМИ РАЗОМКНУТЫМИ КАТУШКАМИ

1976

Р9 - 9603

В.С.Александров, Ю.И.Алексахин, Л.С.Барабаш,
И.А.Голутвин, Н.Ю.Казаринов, Э.А.Перельштейн,
В.П.Саранцев, Б.Г.Шинов

ИСКАЖЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ АДГЕЗАТОРА
МНОГОВИТКОВЫМИ РАЗОМКНУТЫМИ КАТУШКАМИ

Направлено в ЖТФ

Импульсное магнитное поле в адгезаторе коллективного ускорителя создается несколькими парами многовитковых катушек /ступенями сжатия/, расположенных симметрично относительно медианной плоскости камеры адгезатора и включающихся последовательно в определенные моменты времени ¹⁻⁵. Переменное магнитное поле включенных ступеней индуцирует в материале проводников незамкнутых катушек вихревые токи, которые могут приводить к значительным искажениям магнитного поля и его градиентов ^{2,3}.

Уменьшить искажения можно двумя способами:

а/ подавлением вихревых токов за счет применения специальных многожильных проводников ^{3,4} или проводников с большим удельным сопротивлением;

б/ соответствующим выбором формы поперечного сечения катушки. Первый способ связан с увеличением тепловыделения в катушке, что ограничивает частоту повторения циклов ускорения и, следовательно, интенсивность пучка ускоренных частиц. Для реализации второй возможности необходим метод расчета вихревых токов и их полей. Простой метод приведен в ², где разомкнутая катушка заменялась двумя встречными токами, циркулирующими по ее внешнему и внутреннему радиусам. Величины токов и их временная зависимость выбирались из экспериментальных данных.

В нашей работе предлагается метод, не требующий предварительных измерений. Расчеты хорошо согласуются с проведенным экспериментом.

1. Заменяем многовитковую катушку набором concentрических разомкнутых витков прямоугольного сечения с размерами a_r, a_z /рис. 1/. Рассмотрим токи, индуцированные одним из компонентов внешнего магнитного поля, например, B_z , в слое, образованном витками радиуса r_0 . Полагая $a_r / r_0 \ll 1$, будем считать слой

плоским и введем декартовы координаты $x = r - r_0$, $y = r\theta$. Ограничимся в разложении вектор-потенциала внешнего магнитного поля линейным по x членом

$$A_y^e(x, z) = A_{y0}^e(z) + B_z^e(z) \cdot x,$$

где B_z^e и A_{y0}^e - напряженность и вектор-потенциал внешнего магнитного поля при $r = r_0$.

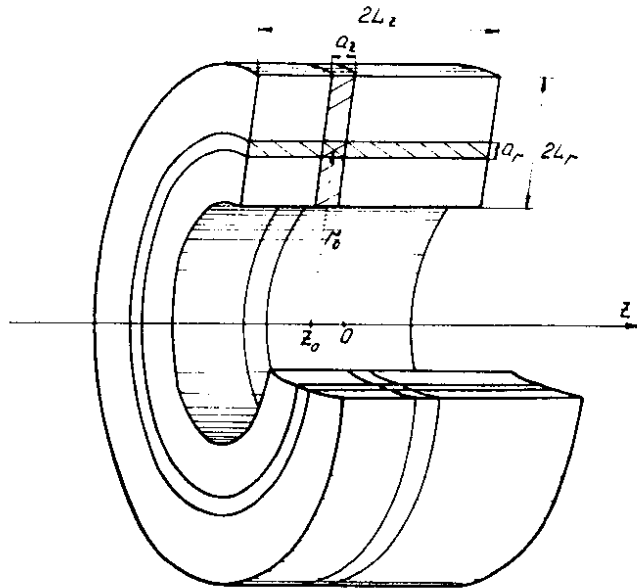


Рис. 1. Магнитная катушка и принятые для нее обозначения.

Из равенства нулю полного тока в разомкнутом витке

$$\left(\int_{-a_r/2}^{a_r/2} j_y dx = 0 \right) \text{ следует, что ток возбуждается антисимметричной по } x \text{ частью } A_y^e * :$$

* Токи смещения пренебрежимо малы, т.к. рассматриваемая область частот находится значительно ниже резонансной частоты контура, образованного индуктивностью катушки и ее межвитковой емкостью.

$$j_y = -\frac{\sigma}{c} \frac{\partial}{\partial t} (B_z^e \cdot x + A_y^e), \quad /1/$$

где σ - проводимость, A_y^e - вектор-потенциал тока j_y , удовлетворяющий уравнению

$$\Delta A_y^e = -\frac{4\pi}{c} j_y. \quad /2/$$

Очевидно, что при этом j_y и A_y^e - антисимметричные функции x , т.е. j_y образуют двойной токовый слой.

При $L_z \gg a_r$ можно пренебречь связью между слоями. Тогда решение уравнения /2/ с учетом антисимметричности j_y есть

$$A_y^e = -\frac{1}{c} \int_0^{a_r/2} dx' \int_{-L_z}^{L_z} dz' G(x, x', z, z') j_y(x', z'), \quad /3/$$

где

$$G(x, x', z, z') = \ln \frac{(x-x')^2 + (z-z')^2}{(x+x')^2 + (z-z')^2}. \quad /4/$$

Из выражения /4/ следует, что функция Грина G при $|z-z'| \gg a_r$ убывает как $\frac{a_r^2}{(z-z')^2}$, поэтому существенный вклад в интеграл в /3/ дает область $|z-z'| \leq a_r$. Ограничимся для плотности тока $j_y(z')$ в этой области первым членом разложения в ряд Тейлора в окрестности точки z .

Это возможно при условии $\left| \frac{a_r}{j_y} \cdot \frac{\partial j_y}{\partial z} \right| \ll 1$, что с учетом

/1/ эквивалентно требованию

$$\left| \frac{a_r}{B_z} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z} \right| \ll 1.$$

Подставляя $j_y(z)$ вместо $j_y(z')$ в /3/ и проводя интегрирование по z' в бесконечных пределах, получаем

$$A_y^e = \frac{4\pi}{c} \int_0^{a_r/2} G(x, x') j_y(x', z) dx', \quad /5/$$

где

$$G(x, x') = \begin{cases} x, & x < x' \\ x', & x > x' \end{cases} \text{ - функция Грина одномерной задачи.}$$

Из выражений /1/ и /5/ следует уравнение для нахождения j_y

$$j_y(x, z) = j_0(x, z) - \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{a_r} G(x, x') j_y(x', z) dx' \quad /6/$$

где $j_0 = -\frac{\sigma x}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t}$. Переменная z входит в /6/ как параметр.

Для нахождения решения уравнения /6/ удобно воспользоваться собственными функциями ядра G , удовлетворяющими уравнению

$$\psi_k = \lambda_k \int_0^{a_r} G(x, x') \psi_k(x') dx' \quad /7/$$

Ортонормированные собственные функции /7/, удовлетворяющие условию $\psi(0) = 0$, есть

$$\psi_k = \frac{2}{\sqrt{a_r}} \sin \sqrt{\lambda_k} x,$$

где $\lambda_k = \left(\frac{\pi}{a_r}\right)^2 (2k-1)^2$, $k = 1, 2, \dots$

В результате плотность тока представляется в виде:

$$j_y(x, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) D_k(z, t),$$

где

$$D_k(z, t) = \frac{1}{\tau_k} \int_0^t e^{-\frac{t-t'}{\tau_k}} B_k(z, t') dt' + C_k(z) e^{-\frac{t}{\tau_k}},$$

$$B_k(z, t) = \int_0^{a_r} \psi_k(x) j_0(x, z, t) dx = (-1)^k \frac{c \tau_k}{2\pi \sqrt{a_r}} \frac{\partial B_z^r(z, t)}{\partial t},$$

$$C_k(z) = \int_0^{a_r/2} \psi_k(x) j_y(x, z, t=0) dx, \quad /8/$$

$$\tau_k = \frac{\tau}{(2k-1)^2}, \quad \tau = \frac{4a_r^2 \sigma}{\pi c^2}.$$

Полученное значение "времени проникновения" τ магнитного поля в проводник приблизительно на порядок

меньше "скин-времени" /6/, что является следствием антисимметричности тока.

Для медного проводника толщиной $a_r = 1$ см $\tau \approx 0,45$ мс.

Пусть внешнее магнитное поле после включения изменяется по синусоидальному закону

$$B_z(t) = B_z \sin \omega t.$$

В этом случае

$$j_y = \frac{c B_z}{\pi a_r} \sum_k (-1)^k (2k-1)^{-2} \sin \sqrt{\lambda_k} x T_k(t), \quad /9/$$

где

$$T_k(t) = \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau_k^2} \left[\sqrt{1 + \omega^2 \tau_k^2} \sin(\omega t + \phi_k) - e^{-\frac{t}{\tau_k}} \right],$$

$$\sin \phi_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_k^2}}, \quad \cos \phi_k = \frac{\omega \tau_k}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_k^2}}.$$

Таким образом, амплитуда наведенного тока пропорциональна $\frac{\omega \tau}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$, ее максимальное значение достигается при $\omega \tau \gg 1$, то есть когда омическое сопротивление

пренебрежимо мало по сравнению с индуктивным.

Аналогичным способом, рассматривая слои, образованные витками с фиксированным значением z , можно найти токи, индуцируемые полем B_r . Очевидно, что взаимодействием токов во взаимно перпендикулярных слоях точно так же, как и в параллельных, можно пренебречь. Таким образом, в каждом витке имеются два тока $j_{\theta}^{(r)}$ и $j_{\theta}^{(z)}$, индуцированные B_r и B_z компонентами магнитного поля.

2. Введем геометрические факторы $G_{\mu} = G_{\mu}(r, z, r'; z')$ так, чтобы магнитное поле линейного кругового тока

l с координатами r', z' , его градиент и вектор-потенциал определялись соотношениями ⁵:

$$F(r, z) = \frac{1}{c} G_{\Gamma}(r, z, r', z'),$$

в которых символом F обозначены A_{θ} , B_r , B_z ,

$\frac{\partial B_z}{\partial r}$ и т.д. Для витка с координатами r_0, z_0 , разла-

гая G_{Γ} по степеням $x = r' - r_0$ и $\xi = z' - z_0$ и интегрируя по сечению витка с весом $j_{\theta}^{(z)}(x) + j_{\theta}^{(r)}(\xi)$, получим с точностью до членов третьего порядка малости

$$F = \frac{2}{c} (I^{(r)} \frac{\partial G_{\Gamma}}{\partial z_0} - I^{(z)} \frac{\partial G_{\Gamma}}{\partial r_0}), \quad /10/$$

где $I^{(r)} = a_r \int_0^{a_r} \xi j_{\theta}^{(r)}(\xi) d\xi$, $I^{(z)} = a_z \int_0^{a_z} x j_{\theta}^{(z)}(x) dx$.

Используя выражение /9/ для плотностей токов $j_{\theta}^{(r,z)}$, представим /10/ в виде /при $a_r = a_z = a$ /

$$F = -\frac{2a^2}{\pi^3} (B_z \frac{\partial G_{\Gamma}}{\partial r_0} - B_r \frac{\partial G_{\Gamma}}{\partial z_0}) \sum_k T_k (2k-1)^{-1}. \quad /11/$$

Ряд в /11/ убывает с номером быстрее, чем $(2k-1)^{-2}$. Вклад в сумму от членов с $k \geq 2$ не превышает 10% для малых времен ($\omega t \ll 1$) и уменьшается с ростом t . Это позволяет значительно упростить численные расчеты, т.к. для $t \geq t_2$ можно с хорошей точностью ограничиться первым членом ряда в /11/.

3. Изложенный выше метод применялся для учета поправок к магнитному полю при расчете магнитной системы адгезатора УТИ ¹. Расчет проводился по алгоритму, предложенному в работе ⁵. Поля разомкнутых катушек находились путем суммирования полей отдельных витков, определенных выражениями /11/.

Рассматривались различные варианты магнитной системы, состоящей из катушек нулевой ступени /длительность токового импульса $\pi/\omega \approx 10$ мс/ и катушек трех ступеней сжатия / $\pi/\omega \sim 1$ мс/ ^{5,7}, содержащих несколько десятков медных витков квадратного сече-

ния, сторона квадрата $a = 1$ см. Собственные резонансные частоты катушек ступеней сжатия составляют ~ 200 кГц. Наибольшее искажение в магнитное поле вносится третьей ступенью, катушки которой расположены близко к плоскости сжатия электронного кольца. На рис. 2 показана схема расположения катушек с двумя вариантами третьей ступени: а и б.

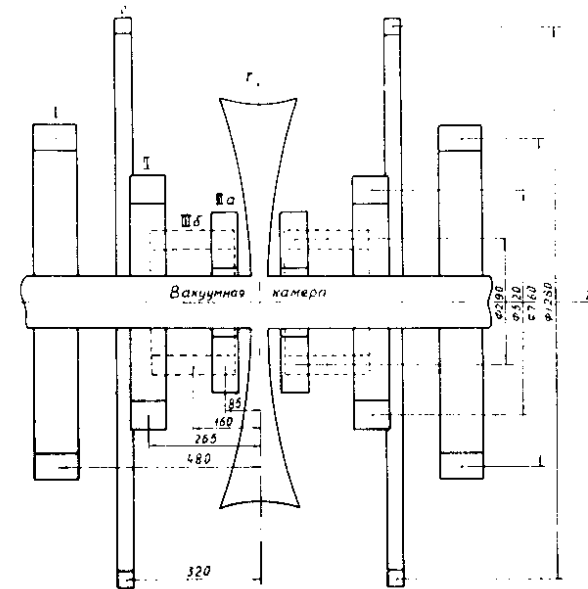


Рис. 2. Схема расположения катушек.

Основной характеристикой магнитного поля, определяющей устойчивость движения электронов, является

показатель спада $n = -\frac{r}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial r}$. На рис. 3 приведены

рассчитанные значения n на равновесных радиусах кольца / n -траектория/ при сжатии его полем $O; I$ и II ступеней: кривая 1 - с учетом полей вихревых токов в разомкнутой катушке третьей ступени, кривая 2 - без учета /или в отсутствие/ вихревых токов. Геометрия третьей ступени соответствует варианту а.

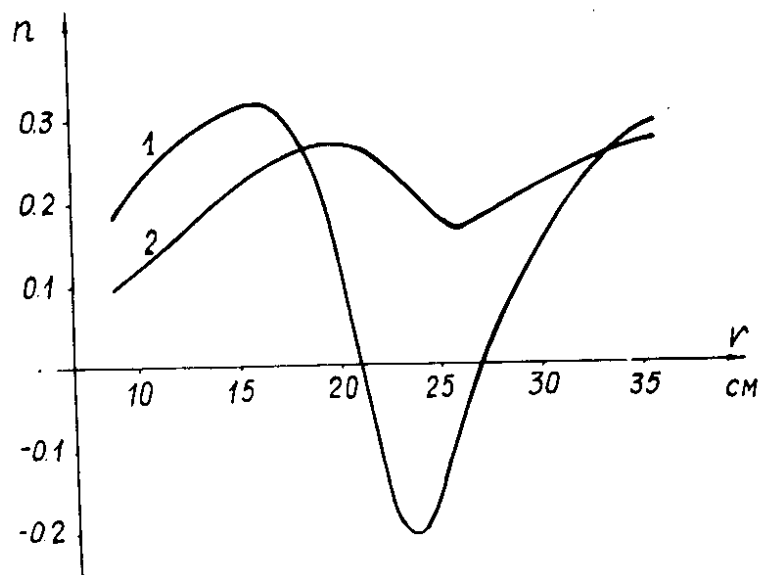


Рис. 3. n - траектория в поле O, I, II ступеней. 1 - рассчитанная по формулам /11/, 2 - без учета вихревых токов в катушках третьей ступени. /геометрия рис. 2а/.

Для экспериментальной проверки расчетов использовались результаты, полученные на установке, описанной в работе [7]. Кривая 1 на рис. 4 - изменение n - траектории в поле первой ступени, рассчитанное с учетом /11/, точки - измеренные значения /геометрия та же, что и для рис. 3/.

На рис. 4 приводится также искажение n - траектории, соответствующее геометрии б катушек III ступени - кривая 2. Чтобы понять влияние формы поперечного сечения катушки на n - траекторию, будем считать, что индуцированные токи сосредоточены вблизи поверхности проводников. Если расстояние между витками невелико по сравнению с их толщиной, то вклады от внутренних токов взаимно компенсируются и величина искажения определяется токами, текущими по поверхности катушки, и растет при увеличении размеров ее сечения. Для катушек третьей ступени $B_z \gg B_r$ /т.е. $j_\theta^{(z)} \gg j_\theta^{(r)}$ /, и ве-

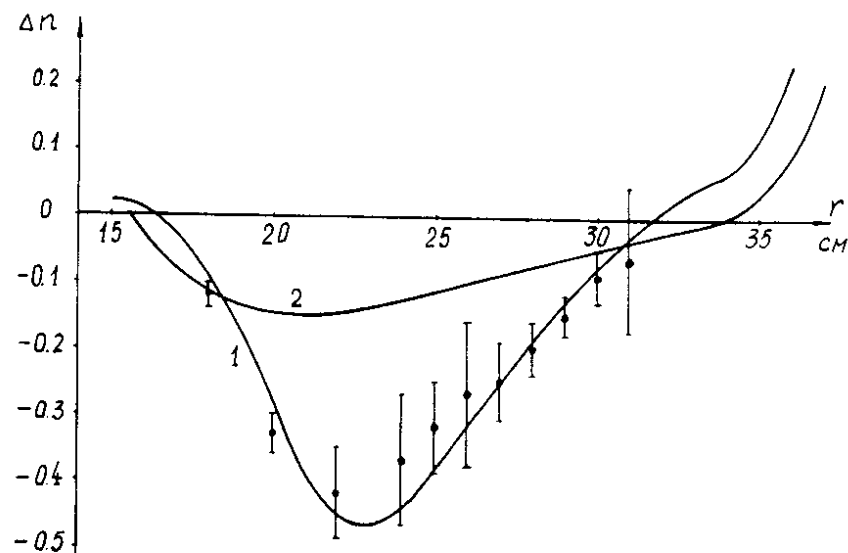


Рис. 4. Расчетные искажения n - траектории в поле I ступени вихревыми токами в III ступени. 1 - геометрия рис. 2а /точки - измеренные значения/, 2 - геометрия рис. 2б.

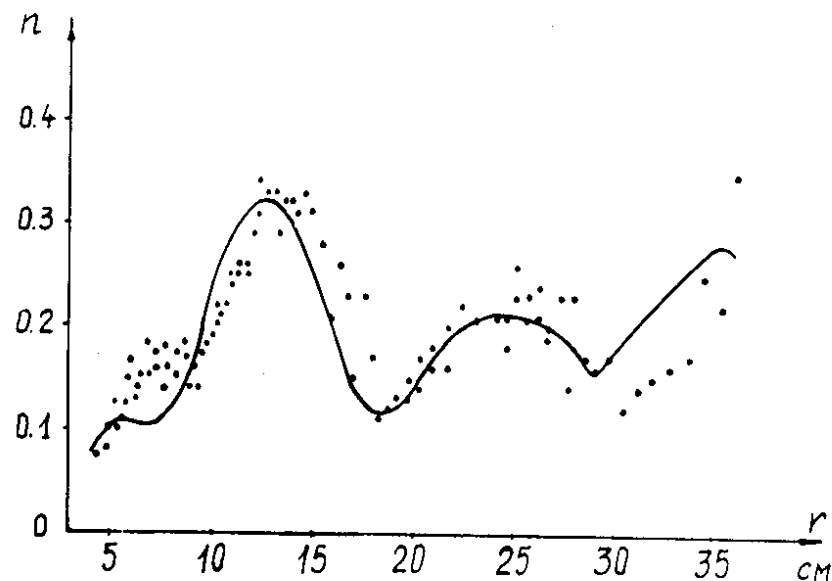


Рис. 5. n - траектория в поле выбранной магнитной системы /рис. 2б/. Сплошная кривая - расчет, точки - измеренные значения.

личина искажения пропорциональна радиальному размеру сечения катушки.

Расчет показал пригодность магнитной системы, соответствующей варианту б рис. 2, для сжатия электронных колец в адгезаторе УТИ. Рассчитанная /сплошная кривая/ и измеренная /точки/ n -траектории приводятся на рис. 5.

Литература

1. Л.С.Барабаш и др. ОИЯИ, Р9-7697, Дубна, 1974.
2. L.J.Laslett and W.A.Perkins. UCRL-20143, 1970.
3. D.Keeffe. Status Report. VIII ICHEA, Geneva, 1971.
4. R.T.Avery and L.J.Laslett. UCRL-20684, 1971.
5. В.С.Александров, Ю.И.Алексахин, Н.Ю.Казаринов, В.Г.Новиков, Э.А.Перельштейн, Б.Г.Щинов. ОИЯИ, Р9-9091, Дубна, 1975.
6. Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. ГИФМЛ, Москва, 1959.
7. В.С.Александров и др. ОИЯИ, Р9-8753, Дубна, 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 марта 1976 года.