

И-201

2756/2-76

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



19/vii-76

P9 - 9593

Г.А.Иванов, Ким Ен Зун, К.А.Решетникова,
В.А.Сергеев

ИССЛЕДОВАНИЕ
ДИСПЕРСИОННЫХ СВОЙСТВ ВОЛНОВОДА
С МОДИФИЦИРОВАННОЙ СПИРАЛЬЮ

1976

P9 - 9593

Г.А.Иванов, Ким Ен Зун, К.А.Решетникова,
В.А.Сергеев

ИССЛЕДОВАНИЕ
ДИСПЕРСИОННЫХ СВОЙСТВ ВОЛНОВОДА
С МОДИФИЦИРОВАННОЙ СПИРАЛЬЮ

Направлено в журнал "Радиотехника и электроника"

СЕРИЯ Ю. 1984

Введение

В последнее время в связи с проблемой синтеза далеких трансурановых элементов на ускорителях^{/1/} усилился интерес к использованию спиральных замедляющих систем для ускорения тяжелых многозарядных ионов и электронных колец^{/2-7/}.

Преимущества таких систем по сравнению с системой Альвареца и набором резонаторов состоят в непрерывности ускорения, в возможности регулирования конечной энергии без заметного ухудшения энергетического спектра пучка, а также в меньшем вакуумном объеме.

В технике с.в.ч. используются различные виды спиральных замедляющих систем. В настоящей работе мы рассмотрим волновод с модифицированной спиралью. Для целей ускорения электронных колец /коллективный метод/, где требуются большие апертуры канала и сравнительно низкие частоты, такая система представляет большой интерес. Дисперсионные характеристики модифицированной спирали изучались в ряде работ^{/8-13/}. Однако вывод дисперсионного уравнения в достаточно общем виде в указанных работах отсутствует, а экспериментальные результаты относятся к малым апертурам канала и сравнительно высоким частотам.

Настоящая работа в теоретическом плане является продолжением^{/14/}, где электродинамическим способом было получено дисперсионное уравнение для волновода с модифицированной спиралью. В настоящем сообщении введением условия на ребре значительно улучшается сходимость решения, основанного на строгом рассмотрении электродинамической задачи. Выводится также

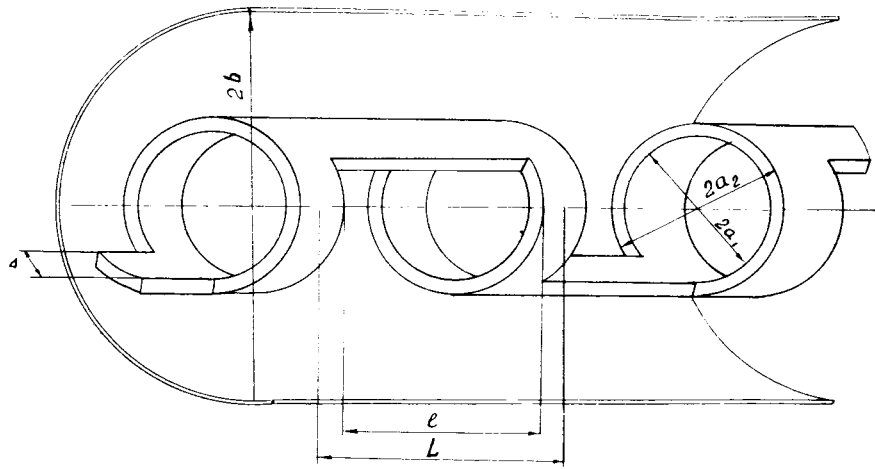


Рис. 1. Вид волновода с модифицированной спиралью.

приближенное дисперсионное уравнение. Приводятся схема и методика эксперимента. Расчетные данные сравниваются с результатами измерений.

На рис. 1 изображен волновод с модифицированной спиралью. Здесь a_1 - внутренний радиус витка спирали, a_2 - внешний радиус витка, b - радиус кожуха, $\Delta = \phi_0$ - размер перемычки в азимутальном направлении, $(L - \ell)$ - размер витка по z , ℓ - расстояние между витками, $D = 2L$ - период системы.

§1. О вычислении определителя

Исходным является волновое уравнение для векторного потенциала. В волноводе с модифицированной спиралью рассматриваем три области:

$$I - r \leq a_1; \quad II - a_1 < r \leq a_2; \quad III - a_2 < r \leq b.$$

На основе построенных решений для компонент векторного потенциала в азимутально несимметричном случае^{/14/} находим составляющие электромагнитного поля

в каждой области. Выражения для них приведены в Приложении 1. В дополнение к работе^{/14/} для улучшения сходимости решения учтем условия на ребре.

С этой целью неизвестные распределения тангенциальных компонент электрического поля на поверхности раздела $r = a_2$ представим в виде^{/15/}:

$$r = a_2$$

$$\left. \begin{aligned} E_z &= -k \sum_{j,t} A_{j,t} f_\phi / f_z e^{-i(k_{j,t} z + t\phi)} \\ E_\phi &= -k \sum_{j,t} B_{j,t} f_z / f_\phi e^{-i(k_{j,t} z + t\phi)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{при } |z| \leq \frac{\ell}{2} \\ &|\phi| \leq \pi - \phi_0 \end{aligned}$$

$$E_z = E_\phi = 0 \quad \text{при} \quad \frac{\ell}{2} < |z| < \frac{L}{2}, \quad (\pi - \phi_0) < |\phi| \leq \pi.$$

/1/

Здесь

$$f_z = \sqrt{1 - \left(\frac{2z}{\ell}\right)^2}, \quad f_\phi = \sqrt{1 - \left(\frac{\phi}{\pi - \phi_0}\right)^2},$$

$$k_{j,t} = k_0 + \frac{2\pi}{D}(j+t), \quad k_0 = k/\beta, \quad D = 2L,$$

j, t - целые числа, $\beta = \frac{v}{c}$, v - фазовая скорость. Подобным же образом представим тангенциальные компоненты электрического поля на поверхности раздела $r = a_1$

Выразим неизвестные коэффициенты $a_{ps}, b_{ps}, c_{ps}, d_{ps}$ из второй области через величины a'_{mn} из третьей. С одной стороны поверхности $r = a_2$ имеем:

$$\begin{aligned}
 E_z^{(III)} = E_z & \left. \vphantom{E_z} \right\} \text{при } |z| \leq \frac{\ell}{2}, \quad |\phi| \leq \pi - \phi_0, \\
 E_\phi^{(III)} = E_\phi & \\
 E_z^{(III)} = E_\phi^{(III)} = 0 & \text{при } \frac{\ell}{2} < |z| < \frac{L}{2}, \quad (\pi - \phi_0) < |\phi| < \pi.
 \end{aligned} \quad /2/$$

Здесь $E_z^{(III)}$, $E_\phi^{(III)}$ - компоненты поля при $r=a_2$ из области III. Они равны:

$$\begin{aligned}
 E_z^{(III)} &= \sum_{n,m} a'_{nm} f_1(a_2), \\
 E_\phi^{(III)} &= \sum_{n,m} a'_{nm} f_2(a_2),
 \end{aligned}$$

где функции f_1 и f_2 даны в *Приложении 1*. Величины E_z , E_ϕ определяются выражениями /1/. Из /2/ для коэффициентов Фурье $A_{j,t}$; $B_{j,t}$ имеем:

$$\begin{aligned}
 A_{j,t} &= \sum_{n,m} a'_{nm} f_1 \cdot A_1(j, t, n, m), \\
 B_{j,t} &= \sum_{n,m} a'_{nm} f_2 \cdot B_1(j, t, n, m),
 \end{aligned} \quad /3/$$

где

$$\begin{aligned}
 A_1(j, t, n, m) &= \mu_0 \cdot \frac{J_1(\beta_1)}{\beta_1} \cdot J_0(\beta_2), \\
 B_1(j, t, n, m) &= \mu_0 J_0(\beta_1) \cdot \frac{J_1(\beta_2)}{\beta_2},
 \end{aligned}$$

$$\mu_0 = \frac{\pi(\pi - \phi_0)}{4} \cdot \frac{\ell}{2},$$

$$\beta_1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\ell}{L} [(j+t) - (n+m)],$$

$$\beta_2 = (t-m)(\pi - \phi_0).$$

Здесь использованы интегральные представления функций Бесселя:

$$J_0(a) = J_0(-a) = \frac{1}{\pi-1} \int_{-1}^1 \frac{e^{iax}}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$\frac{J_1(a)}{a} = \frac{1}{\pi-1} \int_{-1}^1 e^{iax} \sqrt{1-x^2} dx.$$

С другой стороны поверхности $r=a_2$ имеем соотношения, аналогичные /2/, но слева стоят тангенциальные компоненты электрического поля из области II, равные

$$\begin{aligned}
 E_z^{(II)} &= -k \sum_{p,s} \ell_z(a_2) \cos(q\phi) \cdot \cos(g_{ps} z), \\
 E_\phi^{(II)} &= -k \sum_{p,s} \ell_\phi(a_2) \sin(q\phi) \cdot \sin(g_{ps} z).
 \end{aligned}$$

Связь функций ℓ_z , ℓ_ϕ с коэффициентами a_{ps} , b_{ps} , c_{ps} , d_{ps} дана в *Приложении 1*. Для коэффициентов Фурье $\ell_z(a_2)$, $\ell_\phi(a_2)$ получим:

$$\ell_z(a_2) = \sum_{j,t} A_{j,t} \cdot C_1(j, t, p, s),$$

$$\ell_\phi(a_2) = \sum_{j,t} B_{j,t} \cdot C_2(j, t, p, s), \quad /4/$$

где

$$C_1(j, t, p, s) = \frac{\pi^2}{4} [J_0(\gamma_1) + J_0(\gamma_2)] \cdot \left[\frac{J_1(\gamma_1)}{\gamma_1} + \frac{J_1(\gamma_2)}{\gamma_2} \right],$$

$$C_2(j, t, p, s) = -\frac{\pi^2}{4} [J_0(\gamma_1) - J_0(\gamma_2)] \cdot \left[\frac{J_1(\gamma_1)}{\gamma_1} - \frac{J_1(\gamma_2)}{\gamma_2} \right].$$

Здесь

$$a_1 = \frac{\ell}{2} [g_{ps} - k_0 - \frac{\pi}{L}(j+t)]; \quad \gamma_1 = (\pi - \phi_0)(q-t),$$

$$a_2 = \frac{\ell}{2} [g_{ps} + k_0 + \frac{\pi}{L}(j+t)]; \quad \gamma_2 = -(\pi - \phi_0)(q+t).$$

Подставляя вместо $A_{j,t}; B_{j,t}$ их значения из /3/, найдем:

$$\ell_z(a_2) = \sum_{n,m} a'_{nm} f_1 \cdot D, \quad /5/$$

$$\ell_\phi(a_2) = \sum_{n,m} a'_{nm} f_2 \cdot C,$$

где

$$D = \sum_{j,t} A_1(j,t,n,m) \cdot C_1(j,t,p,s),$$

$$C = \sum_{j,t} B_1(j,t,n,m) \cdot C_2(j,t,p,s).$$

Очевидно, что D и C - функции n,m,p,s ($p=0,1,2,\dots; s=1,2,\dots$). Следующие два уравнения находим из условия непрерывности тангенциальных компонент магнитного поля при переходе через поверхность раздела $r = a_2$

$$h_z(a_2) = \sum_{n,m} a'_{nm} f_4 \cdot C',$$

$$h_\phi(a_2) = \sum_{n,m} a'_{nm} f_5 \cdot D', \quad /6/$$

где $f_4, f_5, h_z(r)$ и $h_\phi(r)$ даны в *Приложении 1*. Коэффициенты C' и D' , зависящие от n, m, p, s , равны:

$$C' = -2 \left[\frac{\sin \lambda_1}{\lambda_1} - \frac{\sin \lambda_2}{\lambda_2} \right] \cdot \left[\frac{\sin \lambda_3}{\lambda_3} - \frac{\sin \lambda_4}{\lambda_4} \right],$$

$$D' = -2 \left[\frac{\sin \lambda_1}{\lambda_1} + \frac{\sin \lambda_2}{\lambda_2} \right] \cdot \left[\frac{\sin \lambda_3}{\lambda_3} + \frac{\sin \lambda_4}{\lambda_4} \right].$$

Здесь

$$\lambda_1 = \frac{\ell}{2} (k_{nm} - g_{ps}); \quad \lambda_3 = (\pi - \phi_0)(m - q),$$

$$\lambda_2 = \frac{\ell}{2} (k_{nm} + g_{ps}), \quad \lambda_4 = (\pi - \phi_0)(m + q).$$

Соотношения /5/, /6/ образуют систему уравнений, из которой неизвестные коэффициенты $a_{ps}, b_{ps}, d_{ps}, c_{ps}$ можно выразить через величины a'_{nm} .

Поступая аналогичным образом при $r = a_1$, получим систему уравнений типа /5/ и /6/, но справа будут стоять поля из 1 области (a_{nm}, b_{nm}). Подставляя в ее левую часть значения коэффициентов $a_{ps}, b_{ps}, c_{ps}, d_{ps}$, выраженные через a'_{mn} , окончательно найдем:

$$\sum_{n,m} [a'_{nm} \psi_1 - a_{nm} \bar{\psi}_1] = 0,$$

$$\sum_{n,m} [a'_{nm} \psi_2 - a_{nm} \bar{\psi}_2 - b_{nm} \bar{\psi}_2] = 0, \quad /7/$$

$$\sum_{n,m} [a'_{nm} \psi_3 - a_{nm} \bar{\psi}_3 - b_{nm} \bar{\psi}_3] = 0,$$

$$\sum_{n,m} [a'_{nm} \psi_4 - a_{nm} \bar{\psi}_4 - b_{nm} \bar{\psi}_4] = 0.$$

Значения коэффициентов $\psi = \psi(n, m, p, s), \bar{\psi}, \bar{\psi}$ даны в *Приложении 2*.

Условие существования нетривиального решения системы уравнений /7/ заключается в равенстве нулю детерминанта, составленного из членов, являющихся коэффициентами при неизвестных a'_{nm}, a_{nm}, b_{nm} . Это условие и является точным дисперсионным уравнением, связывающим частоту и фазовую скорость волны с параметрами системы. Дисперсионное уравнение решалось на быстродействующей ЭВМ CDC-6400.

Использовалась квадратная матрица ранга $3 \cdot (2N + 1)^2$. Индексы n, m изменялись от $-N$ до $+N$, от 0 , s от 1 до величины, определяемой из соотношения $ps = (2N + 1)$. При приведении к квадратной форме отбрасывались строки матрицы, соответствующие наибольшим значениям

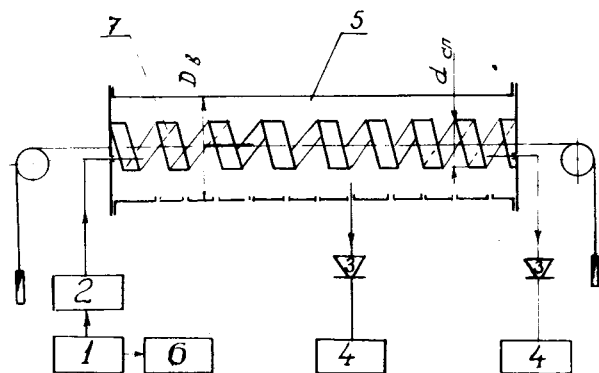


Рис. 2. Схема измерений: 1 - генератор с.в.ч.; 2 - ступенчатый аттенюатор; 3 - детектор; 4 - индикатор; 5 - волновод; 6 - частотомер; 7 - спираль.

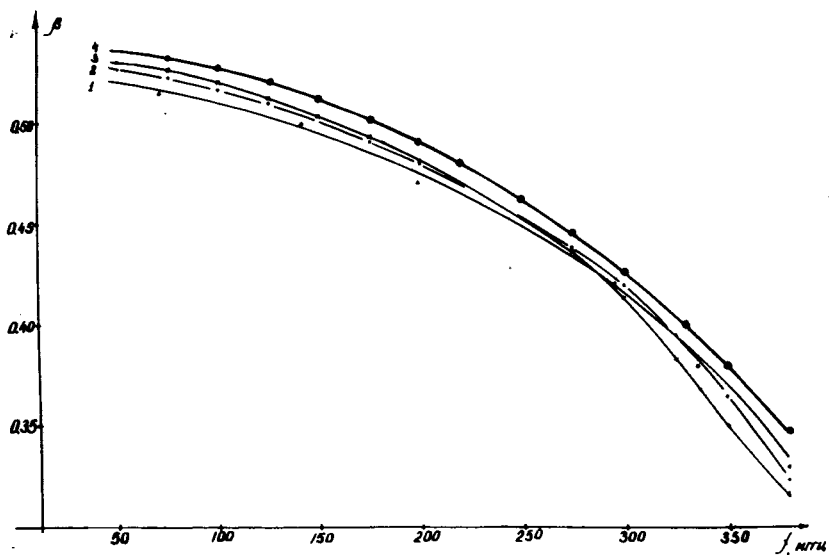


Рис. 3. Дисперсионные кривые: I - экспериментальные данные, II - расчет по определителю с $N = 4$, III - расчет по определителю с $N = 2$, IV - расчет по приближенному уравнению.

индексов $|p|, |s|$ для коэффициентов каждого уравнения из /7/. Суммирование в элементах определителя по j, t проходило от $-N$ до $+N$.

Расчет проводился для $N = 2, 3, 4$, что соответствует порядкам определителя 75, 147, 243. Вычисления показали, что учет условия на ребре улучшает асимптотическое убывание элементов матрицы с ростом номера и позволяет ограничиться, при той же точности, вычислением определителя с $N=2$ вместо $N=4$ без учета условия на ребре, что в 6 раз сокращает машинное время, при этом расчетные значения β оказываются значительно ближе к экспериментальным, чем без учета условия на ребре.

При учете условия на ребре переход от $N=2$ к $N=4$ увеличивает время счета в одной точке в 8,4 раза, значение фазовой скорости изменяется, в среднем, на 0,8%.

Результаты расчета дисперсионной кривой показаны на рис. 3, кривая II - при $N=4$, кривая III - при $N=2$. Значения параметров были взяты следующие: $a = a_1 = 5$ см; $a_2 = 5,5$ см; $b = 1,2$ см; $D = 8$ см; $(l-r) = 2$ см; $\lambda = 2$ см.

§2. Приближенное дисперсионное уравнение

В некоторых случаях можно упростить вычисление дисперсионной характеристики волновода типа модифицированной спирали.

Допустим, что расстояние между витками спирали мало по сравнению с длиной волны в волноводе ($l \ll \beta\lambda$). Ограничиваясь во второй области одной гармоникой, будем считать там поле не зависящим от z /16/.

Тогда для компонент электрического поля в этой области получим:

$$E_z(\text{II}) = -k(aJ_q + bN_q) \cos(q\phi),$$

$$E_\phi(\text{II}) = -2k(cJ'_q + dN'_q) \sin(q\phi),$$

$$E_r(\text{II}) = -\frac{2qk}{y}(cJ_q + dN_q) \cos(q\phi). \quad /8a/$$

$$H_z(\text{II}) = -2k(cJ_q + dN_q) \sin(q\phi),$$

$$H_\phi(\text{III}) = -k(aJ'_q + bN'_q) \cos(q\phi),$$

$$H_r(\text{II}) = -\frac{q}{r}(aJ_q + bN_q) \sin(q\phi). \quad /86/$$

Здесь

$$q = \frac{\pi}{2(1 - \frac{\phi_0}{\pi})}, \quad J_q = J_q(y), \quad J'_q = \frac{dJ_q}{dy}, \quad y = kr, \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

Множитель $e^{i\omega t}$ везде опущен. Для тангенциальных компонент электрического поля на поверхностях $r = a_1$, $r = a_2$ по-прежнему используем представление /1/. Тогда из условия /2/ найдем:

$$a'_{nm} f_1(a_2) = \mu_0 \sum_{j,t} \bar{A}_{j,t} J_0(\beta_1) \frac{J_1(\beta_2)}{\beta_2} \quad /9/$$

$$a'_{nm} f_2(a_2) = \mu_0 \sum_{j,t} \bar{B}_{j,t} J_0(\beta_2) \frac{J_1(\beta_1)}{\beta_1},$$

где $\mu_0 \beta$ даны в /3/.

Выражая коэффициенты $\bar{A}_{j,t}$, $\bar{B}_{j,t}$ через поля из второй области при $r = a_2$, получим:

$$\bar{A}_{j,t} = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{J_1(\beta_3)}{\beta_3} [J_0(\gamma_1) + J_0(\gamma_2)] \cdot (aJ_q + bN_q) \Big|_{r=a_2},$$

$$\bar{B}_{j,t} = \frac{\mu_0}{i} \cdot J_0(\beta_3) \cdot \left[\frac{J_1(\gamma_2)}{\gamma_2} - \frac{J_0(\gamma_1)}{\gamma_1} \right] \cdot (cJ'_q + dN'_q) \Big|_{r=a_2}. \quad /10/$$

Здесь

$$\beta_3 = \frac{\ell}{2} \left[k/\beta + \frac{\pi}{L}(j+t) \right].$$

Подставляя /10/ в /9/, найдем:

$$a'_{nm} f_1 = (aJ_q + bN_q) \Big|_{r=a_2} \cdot S, \quad /11a/$$

$$a'_{nm} f_2 = 2(cJ'_q + dN'_q) \Big|_{r=a_2} \cdot R. \quad /11б/$$

Здесь

$$S = \frac{\mu_0^2}{2} \cdot \sum_{j,t} \{ J_0(\beta_1) \cdot \frac{J_1(\beta_2)}{\beta_2} \cdot \frac{J_1(\beta_3)}{\beta_3} \cdot [J_0(\gamma_1) + J_0(\gamma_2)] \},$$

$$R = \frac{\mu_0^2}{2i} \cdot \sum_{j,t} \{ J_0(\beta_1) \cdot \frac{J_1(\beta_1)}{\beta_1} \cdot J_0(\beta_3) \cdot \left[\frac{J_1(\gamma_2)}{\gamma_2} - \frac{J_0(\gamma_1)}{\gamma_1} \right] \}.$$

Значения аргументов функций Бесселя (γ, β) приведены в /3/ и /4/.

Из /11/ найдем:

$$\frac{2c}{a} \frac{(J'_q + \frac{d}{c} N'_q) \Big|_{r=a_2}}{(J_q + \frac{b}{a} N_q) \Big|_{r=a}} = \frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{S}{R}. \quad /12/$$

Из условия непрерывности тангенциальных компонент магнитного поля при $r = a_2$ получим:

$$-2k(cJ'_q + dN'_q) \Big|_{r=a_2} = \sum_{n,m} a'_{nm} f_4 \cdot R', \quad /13a/$$

$$-k(aJ'_q + bN'_q) \Big|_{r=a_2} = \sum_{n,m} a'_{nm} f_5 \cdot S', \quad /13б/$$

где

$$R' = \frac{1}{\ell(\pi - \phi_0) - \ell/2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} dz \int_{-(\pi - \phi_0)}^{(\pi - \phi_0)} e^{-i(k_{nm}z + m\phi)} \sin(q\phi) d\phi,$$

$$S' = \frac{1}{\ell(\pi - \phi_0) - \ell/2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} dz \int_{-(\pi - \phi_0)}^{(\pi - \phi_0)} e^{-i(k_{nm}z + m\phi)} \cos(q\phi) d\phi.$$

Подставив в /13а/ значения a'_{nm} из /11б/, а в /13б/ - значения a'_{nm} из /11а/, получим:

$$\frac{-k(J'_q + \frac{d}{c}N'_q)}{(J'_q + \frac{d}{c}N'_q)_{r=a_2}} \Big| = \sum_{n,m} \frac{f_4}{f_2} \cdot R' \cdot R, \quad /14а/$$

$$\frac{-k(J'_q + \frac{b}{a}N'_q)}{(J'_q + \frac{b}{a}N'_q)_{r=a_2}} \Big| = \sum_{n,m} \frac{f_5}{f_1} \cdot S' \cdot S. \quad /14б/$$

Из /14/ найдем:

$$\frac{a}{b} = - \frac{kJ'_q + J'_q \sum_{n,m} Z_{n,m}}{kJ'_q + N'_q \sum_{n,m} Z_{n,m}} \Big|_{r=a_2}, \quad /15а/$$

$$\frac{d}{c} = - \frac{kJ'_q + J'_q \sum_{n,m} \mathcal{L}_{n,m}}{kN'_q + N'_q \sum_{n,m} \mathcal{L}_{n,m}} \Big|_{r=a_2}, \quad /15б/$$

где $Z_{n,m} = \frac{f_5}{f_1} S' \cdot S$; $\mathcal{L}_{n,m} = \frac{f_4}{f_2} \cdot R' \cdot R$.

Используя представление /1/ на границе раздела $r = a_1$ аналогично вышеизложенному, найдем:

$$a_{nm} \bar{\phi}_1 = (aJ'_q + bN'_q) \Big|_{r=a_1} \cdot S, \quad /16а/$$

$$a_{nm} \bar{\phi}_2 + b_{nm} \bar{\phi}_2 = 2(cJ'_q + dN'_q) \Big|_{r=a_1} \cdot R. \quad /16б/$$

Отсюда:

$$b_{nm} = -a_{nm} \frac{\bar{\phi}_2}{\phi_2} + 2 \frac{(cJ'_q + dN'_q)}{\phi_2} \Big|_{r=a_1} \cdot R. \quad /17/$$

Из условия непрерывности H_ϕ при $r = a_1$ имеем:

$$-k(aJ'_q + bN'_q) \Big|_{r=a_1} = \sum_{n,m} [a_{nm} \bar{\phi}_5 + b_{nm} \bar{\phi}_5] \cdot S'.$$

Подставляя в правую часть значения a_{nm} из /16а/ и b_{nm} из /17/, найдем:

$$\begin{aligned} & - \frac{k(J'_q + \frac{b}{a}N'_q)}{(J'_q + \frac{b}{a}N'_q)_{r=a_1}} \Big| = \\ & = \sum_{n,m} \left[\frac{\bar{\phi}_5}{\phi_1} - \frac{\bar{\phi}_2 \cdot \bar{\phi}_5}{\phi_1 \cdot \phi_2} + 2 \frac{c}{a} \frac{(J'_q + \frac{d}{c}N'_q)}{(J'_q + \frac{b}{a}N'_q)_{r=a_1}} \Big| \cdot \frac{\bar{\phi}_5}{\phi_2} \cdot \frac{R}{S} \right] S \cdot S'. \end{aligned} \quad /18/$$

Подставляя в правую часть /18/ вместо $\frac{c}{a}$, $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$ их выражения из /12/, /15/, получим:

$$- \frac{k(J'_q + \frac{b}{a}N'_q)}{(J'_q + \frac{b}{a}N'_q)_{r=a_1}} \Big| = \sum_{n,m} Q_{nm}, \quad /19/$$

где

$$Q_{nm} = \left[\frac{\bar{\phi}_5}{\phi_1} - \frac{\bar{\phi}_2 \cdot \bar{\phi}_5}{\phi_1 \cdot \phi_2} + \mu \cdot \frac{\bar{\phi}_5}{\phi_2} \right] \cdot S \cdot S',$$

здесь

$$\mu = - \frac{f_2}{f_1} \frac{[k\bar{\Phi}_1 + \bar{\Phi}_3 \sum_{n,m} \mathcal{L}_{nm}]}{[k\bar{\Phi}_2 + \bar{\Phi}_0 \sum_{n,m} Z_{nm}]}$$

Значения функций $\bar{\Phi}$ даны в Приложении 2, формулы /5/. Из /19/ найдем:

$$\frac{b}{a} = - \frac{kJ'_q + J'_q \sum_{n,m} Q_{nm}}{kN'_q + N'_q \sum_{n,m} Q_{nm}} \Big|_{r=a_1}. \quad /20/$$

Сравнивая /15а/ и /20/, получим:

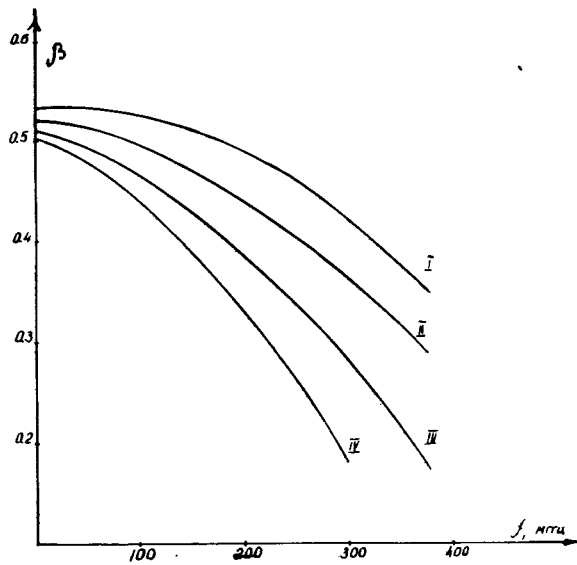


Рис. 4. Дисперсионные кривые для разных радиусов волновода - b . ($a = \text{Const}$): I - $\frac{b}{a} = 2,0$; II - $\frac{b}{a} = 1,7$; III - $\frac{b}{a} = 1,4$; IV - $\frac{b}{a} = 1,15$.

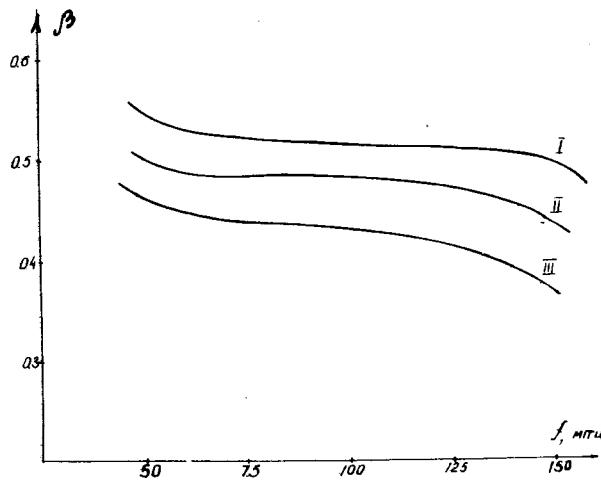


Рис. 5. Дисперсионные кривые для различных значений периода системы: I - $D = 12$ см; II - $D = 8$ см; III - $D = 6$ см.

$$\frac{kJ'_q(y_1) + J_q(y_1) \sum_{n,m} Q_{nm}}{kN'_q(y_1) + N_q(y_1) \sum_{n,m} Q_{nm}} = \frac{kJ'_q(y_2) + J_q(y_2) \sum_{n,m} Z_{nm}}{kN'_q(y_2) + N_q(y_2) \sum_{n,m} Z_{nm}}, \quad /21/$$

Здесь $y_1 = ka_1$, $y_2 = ka_2$.

Соотношение /21/ и является дисперсионным уравнением, справедливым при условии $l \ll \beta \lambda$. Расчеты показали хорошую сходимость рядов, входящих в /21/. Индексы n, m изменялись от $-N$ до $+N$. При переходе от $N=2$ к $N=4$ численное значение фазовой скорости β изменялось в среднем на 2%, при переходе от $N=4$ к $N=7$ численное значение β не менялось в четвертом знаке после запятой. Поэтому в дальнейших расчетах использовалось $N=4$. Результаты расчета дисперсионной характеристики при геометрических параметрах, указанных в §1, представлены на рис. 3 - кривая III. Время счета одной точки на графике ~ 30 с.

Зависимость замедления волны от геометрических параметров системы, полученная на основе /21/, представлена на рис. 4-6. Кривые рис. 4 показывают изменение дисперсионной характеристики с изменением радиуса кожуха (b), при расчете радиус спирали был постоянным $/a = a_1 = 5$ см/. На рис. 5 представлены дисперсионные кривые при разных периодах системы, на рис. 6 - при разной толщине витков спирали.

§3. Описание схемы измерений

Для проверки теории было проведено сравнение расчетной дисперсионной характеристики с данными измерений. Измерения проводились резонансным методом в режиме стоячей волны. В качестве резонансного макета использовался волновод с модифицированной спиралью, закороченный с двух сторон металлическими дисками. С одной стороны диск мог перемещаться. Модифицированная спираль была выполнена из медной полированной трубы методом фрезерования. В средней части спираль поддерживалась опорами из диэлектрика.

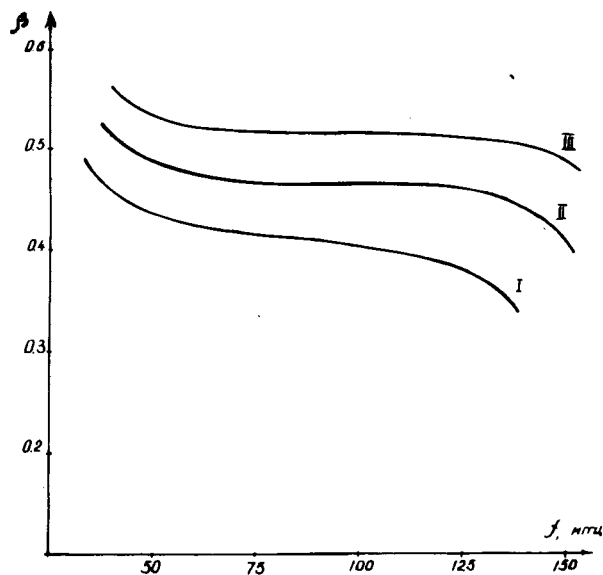


Рис. 6. Дисперсионные кривые как функции толщины витков спирали: I - $\Delta a = 1,5$ см; II - $\Delta a = 0,5$ см; III - $\Delta a = 0,25$ см.

Измерения длин волн в резонансном макете проводились методом возмущений с помощью металлических игл, протягиваемых вдоль оси системы, для чего в дисках были сделаны отверстия. Для исследования полей с помощью зонда вдоль волновода по образующей кожуха имелись отверстия с интервалом 2 см.

Связь исследуемой системы с генератором осуществлялась штырем с торцевой стенки резонатора. Неподвижный измерительный зонд устанавливался с противоположного торца. Схема измерения представлена на рис. 2.

В качестве с.в.ч. генератора использовались приборы /ГЗ-19, ГЗ-20/ с диапазоном частот /30-800/ МГц. Атенюатор 2 использовался с целью развязки и регулировки мощности. Распределение радиальной компоненты электрического поля контролировалось индикатором 4 через детектор 3. В качестве индикатора ис-

пользовался усилитель 28ИМ. Частота генератора контролировалась частотомером 6 /прибор ЧЗ-30/.

Изменяя частоту с.в.ч. генератора, можно в системе возбудить ряд резонансов, отвечающих условию, когда по длине системы укладывается целое число полуволн замедленной волны.

$$L_0 = m \frac{\lambda_z}{2},$$

где λ_z - длина замедленной волны, m - номер обертона.

Распределение аксиальной составляющей электрического поля - E_z исследовалось путем введения металлических игл, ориентированных вдоль z . По числу максимумов поля можно судить о номере обертона, соответствующем резонансной частоте. По расстоянию между минимальным или максимальным значением напряженности поля можно определить длину замедленной полуволны. Измерения проводились по оси системы.

Дисперсионная характеристика $\beta = \beta(\omega)$ строилась по точкам, соответствующим резонансным частотам для различных обертонов ($\beta = \lambda_z / \lambda$). Было замечено, что с увеличением номера обертона уменьшается влияние искажения поля у закорачивающих плоскостей. С целью увеличения числа точек для кривой $\beta = \beta(\omega)$ измерения проводились при разных длинах системы / $s_1 = 1,06$ см; $s_2 = 0,8$ см; $s_3 = 0,56$ м/. Геометрические параметры волновода $b = 12$ см; $a_2 = 5,5$ см; $a_1 = 5$ см, $D = 8$ см; $(L - \ell) = 2$ см, $\Lambda = 2$ см. Дисперсионная характеристика волновода с модифицированной спиралью, полученная в результате измерений, представлена на рис. 3 - кривая III.

Заключение

Мы исследовали дисперсионные свойства волновода с модифицированной спиралью в области частот $f = 50-200$ мГц при апертуре спирали, достаточной для пропускания электронного кольца / $a = 5$ см/. Сравнение теоретических и экспериментальных значений /рис. 3/

показало, что наилучшее приближение к данным эксперимента дает расчет с учетом условия на ребре по определителю 243 порядка $/N=4/$, однако он требует значительного машинного времени. Поскольку отличие результатов счета при $N=2$ и $N=4$ менее одного процента, то мы считаем, что в ряде случаев можно ограничиться вычислением определителя 74 порядка $/N=2/$. Время счета и поисков одной точки, где определитель равен нулю, составляет для $N=2-97$ с. Для предварительных расчетов удобно пользоваться приближенным дисперсионным уравнением $/21/$. Отличие расчетных и экспериментальных значений фазовой скорости в этом случае составляет, в среднем 3%.

Характер изменения дисперсионных характеристик в зависимости от геометрических параметров системы показан на рис. 4-6. Как видно из графиков, при одной и той же частоте фазовая скорость растет при увеличении радиуса кожуха, росте периода системы, при уменьшении толщины витков спирали. Тенденция хода кривых подтверждается некоторыми экспериментальными данными $/10/$. На основе полученных результатов были выбраны параметры волновода с модифицированной спиралью для использования в качестве ускоряющей системы в диапазоне фазовых скоростей $\beta = 0,35-0,55$.

Используя изложенную в этой статье методику, можно исследовать дисперсионные свойства модифицированной спирали в любой области параметров.

В заключение авторы благодарят В.П.Саранцева за поддержку, товарищей по работе - за ряд обсуждений.

Приложение I

Компоненты электромагнитного поля

I область

$$\begin{aligned} E_z &= -k \sum_{n,m} a_{nm} \bar{\phi}_1, & H_z &= \sum_{n,m} (a_{nm} \bar{\phi}_4 + b_{nm} \bar{\phi}_4), \\ E_\phi &= -k \sum_{n,m} (a_{nm} \bar{\phi}_2 + b_{nm} \bar{\phi}_2), & H_\phi &= \sum_{n,m} (a_{nm} \bar{\phi}_5 + b_{nm} \bar{\phi}_5), \\ E_r &= -k \sum_{n,m} (a_{nm} \bar{\phi}_3 + b_{nm} \bar{\phi}_3), & H_r &= \sum_{n,m} (a_{nm} \bar{\phi}_6 + b_{nm} \bar{\phi}_6). \end{aligned}$$

Здесь опущен множитель $e^{i(\omega t - k_{nm} z - m \phi)}$, где:

$$k_{nm} = k_0 + \frac{2\pi}{D}(n+m); \quad k_0 = \frac{k}{\beta}, \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

Функции ϕ равны:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_1 &= I_m(x_1), & \bar{\phi}_2 &= 2I'_m, \\ \bar{\phi}_2 &= -\frac{k_{nm}}{\kappa_{nm}} (I'_m - \frac{m}{x_1} I_m), & \bar{\phi}_3 &= 2 \frac{m}{\kappa_{nm} r} I_m, \\ \bar{\phi}_3 &= \frac{k_{nm}}{\kappa_{nm}} (I'_m - \frac{m}{x_1} I_m), & \bar{\phi}_4 &= -k_{nm} I_m, \\ \bar{\phi}_4 &= -k_{nm} I_m, & \bar{\phi}_5 &= 2 \frac{m k_{nm}}{\kappa_{nm} r} I_m, \\ \bar{\phi}_5 &= -\frac{m k_{nm}^2}{\kappa_{nm} r} I_m + \frac{k^2}{\kappa_{nm}} I'_m, & \bar{\phi}_6 &= 2 k_{nm} I'_m, \\ \bar{\phi}_6 &= \frac{m k^2}{\kappa_{nm} r} I_m - \frac{k_{nm}^2}{\kappa_{nm}} I'_m, & & \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} I_m &= I_m(x_1), \quad \text{где} \quad x_1 = \kappa_{nm} r, \\ \kappa_{nm}^2 &= k_{nm}^2 - k^2, \quad I'_m = \frac{dI_m}{dx_1}. \end{aligned}$$

II область

$$\begin{aligned} E_z &= -k \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \ell_z(r) \cos(q\phi) \cos(g_{ps} z), \\ E_\phi &= -k \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \ell_\phi(r) \sin(q\phi) \sin(g_{ps} z), \\ E_r &= -k \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \ell_r(r) \cos(q\phi) \sin(g_{ps} z), \\ H_z &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} h_z(r) \sin(q\phi) \sin(g_{ps} z), \end{aligned}$$

$$H_\phi = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} h_\phi(r) \cos(q\phi) \cos(g_{ps}z),$$

$$H_r = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} h_r(r) \sin(q\phi) \cos(g_{ps}z).$$

Здесь введены обозначения:

$$\ell_z(r) = Z_1,$$

$$\ell_\phi(r) = -\frac{qg_{ps}}{\chi_{ps}^2 r} Z_1 + \frac{g_{ps}}{\chi_{ps}} Z_2 + 2Z_3,$$

$$\ell_r(r) = -\frac{qg_{ps}}{\chi_{ps}^2 r} Z_1 + \frac{g_{ps}}{\chi_{ps}} Z_2 - \frac{2q}{\chi_{ps} r} Z_3,$$

$$h_z(r) = g_{ps} Z_1 + 2\chi_{ps} Z_3,$$

$$h_\phi(r) = -\frac{qg_{ps}^2}{\chi_{ps}^2} Z_1 + \frac{k^2}{\chi_{ps}} Z_2 - \frac{2qg_{ps}}{\chi_{ps} r} Z_3,$$

$$h_r(r) = \frac{qk^2}{\chi_{ps}^2 r} Z_1 - \frac{g_{ps}^2}{\chi_{ps}} Z_2 - 2g_{ps} Z_3,$$

где

$$Z_1 = a_{ps} I_q + b_{ps} K_q; \quad Z_2 = a_{ps} I'_q + b_{ps} K'_q,$$

$$Z_3 = C_{ps} I_q - d_{ps} K_q, \quad Z_4 = C_{ps} I'_q - d_{ps} K'_q,$$

$$I_q = I_q(x_2), \quad x_2 = \chi_{ps} r, \quad \chi_{ps}^2 = g_{ps}^2 - k^2,$$

$$g_{ps} = \frac{2\pi}{\ell} (p+s), \quad q = \frac{\pi}{2(\pi - \phi_0)} (2s-1), \quad p=0,1,2,\dots, \quad s=1,2,\dots$$

опущен везде множитель $e^{i\omega\tau}$.

III область

$$E_z = -k \sum_{n,m} a'_{nm} f_1, \quad H_z = \sum_{n,m} a'_{nm} f_4,$$

$$E_\phi = -k \sum_{n,m} a'_{nm} f_2, \quad H_\phi = \sum_{n,m} a'_{nm} f_5,$$

$$E_r = -k \sum_{n,m} a'_{nm} f_3, \quad H_r = \sum_{n,m} a'_{nm} f_6.$$

Функции f равны:

$$f_1 = I_m + G_{nm} K_m,$$

$$f_2 = \frac{k_{nm}}{\kappa_{nm}} \left[\frac{I_{m-1} + \ell_{nm} I_{m+1}}{1 - \ell_{nm}} - G_{nm} \frac{K_{m-1} + h_{nm} K_{m+1}}{1 - h_{nm}} \right],$$

$$f_3 = \frac{k_{nm}}{\kappa_{nm}} \left[\frac{I_{m-1} - \ell_{nm} I_{m+1}}{1 - \ell_{nm}} - G_{nm} \frac{K_{m-1} - h_{nm} K_{m+1}}{1 - h_{nm}} \right],$$

$$f_4 = k_{nm} \left[I_m \frac{1 + \ell_{nm}}{1 - \ell_{nm}} + G_{nm} K_m \frac{1 + h_{nm}}{1 - h_{nm}} \right],$$

$$f_5 = -\kappa_{nm} \left[I'_m + G_{nm} K'_m \right] + \frac{k_{nm}^2}{\kappa_{nm}} \left[\frac{I_{m-1} - \ell_{nm} I_{m+1}}{1 - \ell_{nm}} - G_{nm} \frac{K_{m-1} - h_{nm} K_{m+1}}{1 - h_{nm}} \right],$$

$$f_6 = \kappa_{nm} \left[\frac{m I_m}{\kappa_{nm} r} + G_{nm} \frac{m}{\kappa_{nm} r} K_m \right] - \frac{k_{nm}^2}{\kappa_{nm}} \left[\frac{I_{m-1} + \ell_{nm} I_{m+1}}{1 - \ell_{nm}} - G_{nm} \frac{K_{m-1} + h_{nm} K_{m+1}}{1 - h_{nm}} \right].$$

Здесь $I_m = I_m(x_1)$, $x_1 = \kappa_{nm} r$. Постоянные $G_{nm}, h_{nm}, \ell_{nm}$ равны:

$$G_{nm} = -\frac{I_m(x)}{K_m(x)}; \quad \ell_{nm} = -\frac{I_{m-1}(x)}{I_{m+1}(x)}; \quad h_{nm} = -\frac{K_{m-1}(x)}{K_{m+1}(x)},$$

где $x = \kappa_{nm} b$.

Везде опущен множитель $e^{i(\omega\tau - \kappa_{nm} z - m\phi)}$.

Приложение 2

Значения функций ψ , входящих в определитель

$$\psi_1 = P_0 (P_1 \Phi_0 + \Phi_1),$$

$$\psi_2 = P_0 \left[\frac{g_{ps}}{\chi_{ps}} (P_1 \Phi_2 + \Phi_3) - \frac{qg_{ps}}{\chi_{ps}^2 a_1} (P_1 \Phi_0 + \Phi_1) + 2(P_2 \Phi_2 + P_3 \Phi_3) \right],$$

$$\psi_3 = P_0 [g_{ps} (P_1 \Phi_0 + \Phi_1) + 2\chi_{ps} (P_2 \Phi_0 + P_3 \Phi_1)],$$

$$\psi_4 = P_0 \left[\frac{k^2}{\chi_{ps}} (P_1 \Phi_2 + \Phi_3) - \frac{qg_{ps}^2}{\chi_{ps}^2 a_1} (P_1 \Phi_0 + \Phi_1) - \frac{2qg_{ps}}{\chi_{ps}^2 a_1} (P_2 \Phi_2 + P_3 \Phi_3) \right]. \quad /1/$$

Здесь

$$P_0 = -\chi_{ps} a_2 \cdot f_1 \cdot D,$$

$$P_1 = -\frac{\chi_{ps}}{k^2} \left(\frac{f_5}{f_1} + \frac{qg_{ps}}{\chi_{ps}^2 a_2} \cdot \frac{f_4}{f_1} \cdot \frac{C'}{D} \right),$$

$$P_2 = -\frac{f_2}{2f_1} \cdot \frac{C}{D} - \frac{g_{ps}}{2\chi_{ps}} \left(P_1 + \frac{qg_{ps}}{\chi_{ps} a_2} \right),$$

$$P_3 = \frac{1}{2\chi_{ps}} \left(\frac{f_4}{f_1} \cdot \frac{C'}{D} - g_{ps} \right). \quad /2/$$

Заметим, что функции Бесселя, входящие в Γ , здесь берутся при $\Gamma = a_2$.

Через Φ обозначены следующие комбинации функций Бесселя:

$$\Phi_0 = I_q(y_1)K_q(y_2) - K_q(y_1)I_q(y_2),$$

$$\Phi_1 = I_q(y_1)K'_q(y_2) - K_q(y_1)I'_q(y_2),$$

$$\Phi_2 = I'_q(y_1)K_q(y_2) - K'_q(y_1)I_q(y_2),$$

$$\Phi_3 = I'_q(y_1)K'_q(y_2) - K'_q(y_1)I'_q(y_2). \quad /3/$$

Здесь $y_1 = \chi_{ps} a_1$, $y_2 = \chi_{ps} a_2$.
Далее:

$$\bar{\psi}_1 = \bar{\phi}_1 \cdot D,$$

$$\bar{\psi}_1 = 0,$$

$$\bar{\psi}_2 = \bar{\phi}_2 \cdot C,$$

$$\bar{\psi}_2 = \bar{\phi}_2 \cdot C,$$

$$\bar{\psi}_3 = \bar{\phi}_4 \cdot C',$$

$$\bar{\psi}_3 = \bar{\phi}_4 \cdot C',$$

$$\bar{\psi}_4 = \bar{\phi}_5 \cdot D',$$

$$\bar{\psi}_4 = \bar{\phi}_5 \cdot D'. \quad /4/$$

Заметим, что функции Бесселя, входящие в $\bar{\phi}, \bar{\psi}$ берутся при $\Gamma = a_1$. Значения функций $\bar{\Phi}$:

$$\bar{\Phi}_0 = J_q(\bar{y}_1)N_q(\bar{y}_2) - J_q(\bar{y}_2)N_q(\bar{y}_1),$$

$$\bar{\Phi}_1 = J_q(\bar{y}_1)N'_q(\bar{y}_2) - N_q(\bar{y}_1)J'_q(\bar{y}_2),$$

$$\bar{\Phi}_2 = J'_q(\bar{y}_1)N_q(\bar{y}_2) - N_q(\bar{y}_1)J_q(\bar{y}_2),$$

$$\bar{\Phi}_3 = J'_q(\bar{y}_1)N'_q(\bar{y}_2) - N'_q(\bar{y}_1)J'_q(\bar{y}_2). \quad /5/$$

Здесь $\bar{y}_1 = ka_1$, $\bar{y}_2 = ka_2$.

Литература

1. Г.Н.Флеров. УФН, 95, 1, 25, 1968.
2. H.Dänzer et al. Z.Naturforschung, 21a, Suppl.-Ht., 1966, 1761-1770.
3. H.Klein, N.Merz, O.Siart. Particle Accel., 3, 4, 235, 1972.
4. Г.П.Аверьянов, Н.М.Гаврилов, А.В.Шальнов. В сб. "Ускорители", М., Атомиздат, 10, 118, 1968.
5. С.Н.Богданова, З.Г.Гаврилова, К.А.Решетникова. ЖТФ, 33, 2, 368, 1973.
6. З.Г.Гаврилова, Г.А.Иванов. ОИЯИ, Р9-8227, Дубна, 1974.
7. Ким Ен Зун, З.Г.Гаврилова, Г.А.Иванов. ОИЯИ, 9-8807, Дубна, 1975.
8. M.Chodorow and E.L.Chu. Journal of Applied Physics., 26, 1, 33, 1955.

9. *C.K. Birsdall and T.E. Everhart. IRE Transactions on Electron Devices, ED-3,4, 190, 1956.*
10. *А.К. Березин, П.М. Зейдлиц, А.М. Некрашевич, И.П. Скоблик. ЖТФ, 29, 7, 815, 1959.*
11. *Р.А. Силин, В.П. Сазонов. Замедляющие системы. М., Советское радио, 1966.*
12. *В.П. Шестопалов, С.С. Калмыкова. ЖТФ, 31, 3, 327, 1961.*
13. *Л.Н. Лошаков, Е.Б. Ольдерогге. Радиотехника, 30, 3, 40, 1975.*
14. *Ким Ен Зун, К.А. Решетникова. ОИЯИ, Р9-9233, Дубна, 1975.*
15. *Е.В. Авдеев, Г.В. Воскресенский. В сб. "Ускорители", М., Атомиздат, 10, 52, 1968.*
16. *З.Н. Пасечник. Известия вузов. Радиоэлектроника, 10, 8, 831, 1967.*

*Рукопись поступила в издательский отдел
9 марта 1976 года.*