

A-469

УЧО/2-76

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



9/II-76

P9 - 9348

Ю.И.Алексахин, А.П.Беляев, Э.А.Перельштейн

ПРОДОЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ
СИЛЬНОТОЧНОГО ПУЧКА В КАНАЛЕ
В МАГНИТОДИЭЛЕКТРИКЕ

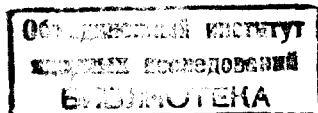
1975

P9 - 9348

Ю.И.Алексахин, А.П.Беляев, Э.А.Перельштейн

ПРОДОЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ
СИЛЬНОТОЧНОГО ПУЧКА В КАНАЛЕ
В МАГНИТОДИЭЛЕКТРИКЕ

Направлено в журнал "Радиофизика"



Алексахин Ю.И., Беляев А.П., Перельштейн Э.А.

P9 - 9348

Продольная устойчивость сильноточного пучка в канале
в магнитоэлектрике

В работе рассмотрены вопросы продольной устойчивости бесконечно-го замагниченного сильноточного пучка, движущегося в канале в магнитоэлектрике. Найдены величины инкрементов неустойчивостей в зависимости от параметров пучка, геометрии и характеристик магнитоэлектрика.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1975

Alexakhin Yu.I., Belyaev A.P.,
Perelstein E.A.

P9 - 9348

Longitudinal Stability of High-Current Beam in
the Magnetoinsulator Channel

The problem of longitudinal stability of infinite magnetized high-current beam passing in a magnetoinsulator channel, has been considered. The values for the instability increments have been found depending on the beam parameter, geometry and characteristics of the magnetoinsulator.

The investigation has been performed at the Department of New Acceleration Methods, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1975

Впервые на возможность неустойчивости пучка заряженных частиц, движущихся через диэлектрик, указали в 1951 г. А.И.Ахиезер и Я.Б.Файнберг /1/. Использование этого эффекта для усиления дециметровых и сантиметровых радиоволн анализировалось в работах /2,3/. Неустойчивость пучка в канале в магнитоэлектрике рассматривалась в последнее время /4/ в связи с разработкой линейных индукционных ускорителей /5/. Это явление представляет интерес также с точки зрения генерации СВЧ полей и коллективного ускорения ионов сильноточными электронными пучками /6/.

В данной работе проведен последовательный анализ устойчивости малых продольных колебаний релятивистского моноэнергетического электронного пучка, движущегося по оси канала в изотропном феррите с диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной μ . Нелинейные процессы в феррите и пучке не исследовались, хотя они, так же как и анизотропность феррита, могут играть существенную роль при возбуждении волн сильноточным пучком.

Мы рассмотрим два случая:

- а) неограниченную среду с внутренним каналом радиуса d ;
- б) среду, ограниченную внешним радиусом $b > d$.

Предполагается, что изменением радиуса пучка (который для простоты считается равным d) по длине канала можно пренебречь (например, пучок замагничен).

Интересуясь относительными инкрементами, большими по сравнению с относительным энергетическим разбросом, мы используем одномерную гидродинамическую модель /2/, приводящую к связи между возмущением плотности заряда $\rho_1(r, z, t) = \rho_2(r) \cdot \exp(ik_z z - i\omega t)$ и продольным электрическим полем

$$\rho_1 = i \frac{e p_0}{m j_0^3} \cdot \frac{E_z}{(v_\phi - v_0)^2 k_z},$$

где v_0, ρ_0 - невозмущенные скорость и плотность пучка, $v_\phi = \frac{\omega}{k_z}$,
 $j_0 = (1 - \beta_0^2)^{-1/2}$, $\beta_0 = \frac{v_0}{c}$.

Находя совместно с граничными условиями решение волнового уравнения для E_z с источником $j_{z1} = \frac{\omega}{k_z} \rho_1$, получаем дисперсионное уравнение *)

$$\chi \frac{J_1(x)}{J_0(x)} = -x\alpha \mathcal{D},$$

где $\chi = x \left[\frac{\omega_p^2}{(\omega - k_z v_0)^2 - 1} \right]^{1/2}$, $\omega_p^2 = \frac{4\pi e p_0}{m j_0^3}$, $x = \frac{k_z d}{j_\phi}$,
 $\alpha = \frac{\epsilon}{j_\phi \sqrt{n^2 \beta_\phi^2 - 1}}$, $j_\phi = (1 - \beta_\phi^2)^{-1/2}$, $\beta_\phi = \frac{v_\phi}{c}$, $n^2 = \epsilon \mu$,

$J_n(x)$ - функция Бесселя.

Коэффициент \mathcal{D} для безграничной среды имеет вид

$$\mathcal{D} = \frac{H_1^{(1)}(k_r d)}{H_0^{(1)}(k_r d)}, \quad (2)$$

где $k_r = k_z \sqrt{n^2 \beta_\phi^2 - 1}$, $H_n^{(1)}(x)$ - функция Ганкеля первого рода.

В случае ограниченной среды в зависимости от граничных условий при $r = b$

$$\mathcal{D} = \frac{J_0(k_r b) Y_1(k_r d) - J_1(k_r d) Y_0(k_r b)}{J_0(k_r b) Y_0(k_r d) - J_0(k_r d) Y_0(k_r b)} \quad (3)$$

*) Мы рассматриваем (I) как уравнение относительно ω при заданном k_z . Можно, очевидно, считать заданной частоту, тогда мнимая поправка к k_z , определяющая неустойчивость, при $|\beta_\phi - \beta_0| \ll \beta_0$ будет равна $\text{Im} k_z = -\text{Im} \omega / v_0$.

для границы диэлектрик - металл и

$$\mathcal{D} = \frac{Y_1(k_r d) - J_1(k_r d) \cdot \mathcal{D}'}{Y_0(k_r d) - J_0(k_r d) \cdot \mathcal{D}'}, \quad (4)$$

где

$$\mathcal{D}' = \frac{K_1(x \frac{b}{d}) \cdot Y_0(k_r b) + \alpha K_0(x \frac{b}{d}) \cdot Y_1(k_r b)}{K_1(x \frac{b}{d}) \cdot J_0(k_r b) + \alpha K_0(x \frac{b}{d}) \cdot J_1(k_r b)},$$

для границы диэлектрик-вакуум. Здесь $Y_n(x)$ и $K_n(x)$ функции Неймана и Макдональда порядка n .

I. Рассмотрим сначала случай $b \rightarrow \infty$.

Ограничимся длинами волн в среде, намного меньшими радиуса канала, то есть положим $k_r d \gg 1$.

Тогда дисперсионное уравнение примет вид

$$\chi \frac{J_1(x)}{J_0(x)} = ix\alpha. \quad (5)$$

Уравнение (5) имеет бесчисленное множество решений, из которых интерес представляет минимальное (по модулю) решение, соответствующее наименьшему изменению E_z по сечению пучка ($E_z(r) \sim J_0(x \frac{r}{d})$).

Считая $(v_\phi - v_0)/v_0$ малым параметром, положим $v_\phi = v_0$ в выражениях для x и α , тогда $x = \frac{k_z d}{j_0}$ и $\alpha = \epsilon / (j_0 \sqrt{n^2 \beta_0^2 - 1})$.

При $x\alpha \ll 1$ для наименьшего решения ($|x| \ll 1$) имеем $x^2 = 2ix\alpha$, или

$$\Gamma^2 = \frac{\omega_p^2}{1 + \frac{2i\epsilon\alpha}{x}}, \quad (6)$$

где $\Gamma = \omega - k_z v_0 = k_z (v_\phi - v_0)$.

Дальше примем, что в интересующем нас диапазоне частот дисперсий ϵ и μ можно пренебречь.

Если $\alpha \ll 1$, то инкремент $Im\Gamma$ (ж), как функция x , имеет максимум $|2|$ при $x = x_{max}(\alpha) = \frac{2\alpha}{\sqrt{3}}$, равный

$$Im\Gamma_{max} = \frac{\omega_p}{2\sqrt{2}}. \quad (7)$$

С увеличением отношения $\frac{\epsilon}{\mu}$ ($\alpha \approx \frac{1}{\beta_0 \beta_0} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$ для $n^2 \beta_0^2 \gg 1$) частота, на которой инкремент максимален, увеличивается ($\omega_{max} \approx \frac{2c}{\sqrt{3}d} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$) до тех пор, пока выполняется условие $\alpha \ll 1$. Само максимальное значение инкремента (7) остается при этом практически неизменным.

Рассмотрим теперь случай $\alpha \gg 1$. При $x \ll \frac{1}{\alpha}$ по-прежнему работает формула (6), из которой получаем

$$\Gamma/\omega_p \approx -\frac{1-i}{2} \sqrt{\frac{x}{\alpha}}. \quad (8)$$

В этом интервале длин волн ($x \ll 1$) инкремент растёт с уменьшением длины волны.

Для волн, настолько коротких, что $x \gg 1$, минимальное решение уравнения (5) приблизительно равно $x \approx \mu_{02} \cdot (1 + \frac{i}{2\alpha})$, или

$$\Gamma/\omega_p \approx -\left[1 + \frac{\mu_{02}^2}{\alpha^2} \left(1 + \frac{2i}{\alpha x}\right)\right]^{-1/2}, \quad (9)$$

ж) Знак корня при вычислении Γ выбирается так, чтобы $Re\Gamma < 0$, что соответствует медленной волне $Re v_f < v_0$.

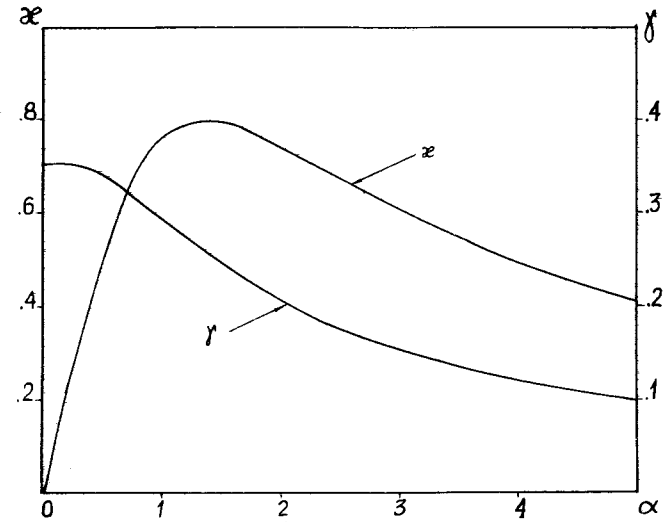


Рис. 1

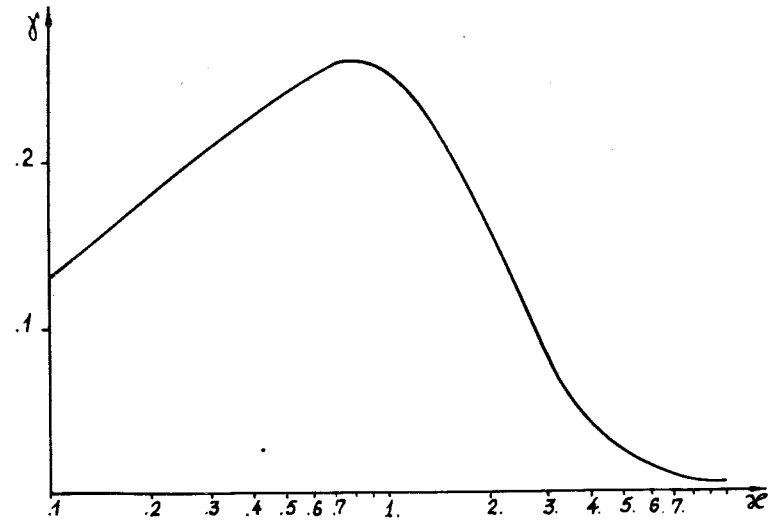


Рис. 2

где $\mu_{01} = 2,4$ - первый нуль функции $J_0(x)$. Согласно формуле (9) инкремент $Im\Gamma$ с уменьшением длины волны убывает, как x^{-3} . Таким образом, при $\alpha \gg 1$ инкремент, как функция x , должен иметь максимум при $x = x_{max}(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha}$. Формулы (8) и (9) при подстановке $x = \frac{1}{\alpha}$, действительно, дают приблизительно равные значения $-Re\Gamma \approx Im\Gamma \approx \frac{\omega_p}{2\alpha}$.

Результаты численного решения уравнения (5) с использованием ЭВМ подтверждают сделанные выводы. На рис. 1 показана величина $x_{max}(\alpha)$, соответствующая максимуму инкремента (или, что то же, коэффициента усиления) при фиксированном α . Для $\alpha \gg 1$ $x_{max}(\alpha) \approx \frac{2,2}{\alpha}$. На том же рисунке показана зависимость максимального значения $\mu = \frac{Im\Gamma_{max}}{\omega_p}$ от параметра α . При больших α в согласии с приближенным анализом $\mu \approx \frac{1}{2\alpha}$.

Таким образом, для усиления СВЧ невыгодно иметь значения $\alpha > 1,35$ ($\alpha = 1,35$ соответствует максимуму кривой $x_{max}(\alpha)$), так как при дальнейшем увеличении α длина волны, на которой коэффициент усиления максимален, возрастает, а само максимальное значение коэффициента усиления падает. Поэтому представляется целесообразным использование канала в феррите вместо канала с поглощающим покрытием, рассмотренным в /2/. Сравнение с расчётами /2/ показывает, что такой канал при тех же параметрах пучка позволяет получить максимум усиления на длине волны, почти на порядок меньшей, при этом коэффициент усиления в 2,5 раза больше (если последний выражен в дБ/м).

На рис. 2 показана зависимость $\mu = \frac{Im\Gamma}{\omega_p}$ от x при $\alpha = 1,35$.

2. Обратимся теперь к случаю ограниченной по радиусу среды.

Рассмотрим длинные волны, такие, что $k_0 b / \beta_0 \ll 1$, но все же $k_0 d \gg 1$ (что, очевидно, возможно, если $\beta_0 \beta_0 n \frac{d}{b} \gg 1$).

Тогда как для (3), так и для (4) приближенно имеем

$$D \approx ctg(k_0 \Delta), \quad \Delta = b - d. \quad \text{В среде с затуханием } Imk_0 > 0$$

и при достаточно большой толщине, когда $exp(2\Delta Imk_0) \gg 1$ и $D \approx -i$, можно пренебречь отражением волн от наружной границы и считать среду безграничной. В дальнейшем будем предполагать, что среда прозрачна: $Imk_0 = 0$; кроме того, будем считать выполненным условие $n^2 \beta_0^2 \gg 1$.

В интересном для приложений к теории индукционных ускорителей случае, $\alpha \ll 1$, $x \ll 1$, дисперсионное уравнение (5) можно заменить приближенным:

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\Gamma^2 \cdot (1 - \frac{2\alpha}{x} ctg k_0 \Delta)}. \quad (10)$$

Рассмотрим следующие возможности.

I) Дорезонансная область: $k_0 \Delta \ll 1$ (очевидно, это условие совместно с $k_0 d \gg 1$ только при $\Delta/d \ll 1$).

Решение уравнения (10) имеет вид

$$\Gamma = i\omega_p \left[\frac{\mu \beta_0^2 k_0^2 \Delta d}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\mu \beta_0^2 k_0^2 \Delta d}{2}} \right]^{1/2}. \quad (11)$$

Неустойчивость в этом случае носит квазистатический характер ($Re\Gamma = \nu_0$) и не связана с излучением. Продольная группировка электронов объясняется тем, что потенциальное электрическое поле ослаблено в ϵ раз, а вихревое, приводящее к стягиванию, в

μ раз увеличено. С уменьшением длины волны, то есть с увеличением k_z , по мере приближения к первому резонансу инкремент (II) растёт.

2) Резонансная область: $k_r d \geq 1$. Резонансные частоты определяются из уравнения

$$\operatorname{ctg}(nk_m d) = \frac{k_m d}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}.$$

В случае очень тонкой диэлектрической трубы ($\frac{2\epsilon d}{d} \ll 1$) первая резонансная частота приблизительно равна

$$\omega_1 = ck_1 \approx c \sqrt{\frac{2}{\mu d}},$$

во всех остальных случаях

$$\begin{aligned} \text{а) } m \ll \frac{\epsilon d}{d}, \quad k_m &\approx \frac{\pi(2m-1)}{2nd} \left(1 - \frac{d}{2\epsilon d}\right); \\ \text{б) } m-1 \gg \frac{\epsilon d}{d}, \quad k_m &\approx \frac{\pi(m-1)}{nd} \left[1 + \frac{2\epsilon d}{\pi^2(m-1)^2 d}\right]. \end{aligned}$$

В окрестности резонанса $|k - k_m| \ll \frac{\pi}{nd}$ уравнение (10) приводится к виду

$$1 = \frac{\omega_p^2 \omega_m}{\Gamma^2 (\omega - \omega_m)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2\epsilon d}{d} \left[1 + \frac{\mu}{\epsilon} \left(\frac{k_m d}{2}\right)^2\right]}. \quad (12)$$

Нетрудно убедиться, что инкремент, как функция "расстройки" $\delta = k_z \beta_0 - k_m$, максимален при $\delta = 0$.
Решение уравнения (12), соответствующее медленной волне, в этом случае есть

$$\Gamma = - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \left[\frac{\omega_p^2 \omega_m}{1 + \frac{2\epsilon d}{d} \left[1 + \frac{\mu}{\epsilon} \left(\frac{k_m d}{2}\right)^2\right]} \right]^{1/3}. \quad (13)$$

При малой толщине диэлектрика ($\frac{2\epsilon d}{d} \ll 1$) инкремент максимален на длине волны, соответствующей первой резонансной частоте, и равен

$$\operatorname{Im} \Gamma_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{c \omega_p^2}{\sqrt{2\mu d d}} \right]^{1/3}.$$

Если же $\frac{2\epsilon d}{d} \gg 1$, то максимум инкремента

$$\operatorname{Im} \Gamma_{\max} \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\frac{c \omega_p^2}{2nd}} \quad (14)$$

достигается на резонансной частоте

$$\omega_m \approx \frac{2c}{d} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}, \quad (15)$$

так что длины наиболее неустойчивых волн приблизительно одинаковы как для неограниченной, так и для ограниченной по радиусу среды.

Для иллюстрации приведем численную оценку.

Пусть $d = 5 \text{ см}$, $\mu = 100$, $\epsilon = 10$, $\gamma_0 = 3$ и ток пучка $I_0 = 500 \text{ А}$. Тогда, согласно (14) и (15), $(\operatorname{Im} \Gamma)^{-1} \approx 5 \text{ нс}$, $\omega_m \approx 3,8 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$.

3. Линейные индукционные ускорители обычно используются в тех случаях, когда необходим сильноточный моноэнергетический пучок^{/5/}. Поэтому энергетический разброс является важнейшей характеристикой таких ускорителей. Развитие неустойчивости приводит к модуляции энергии электронов на длине пучка. Воспользовавшись уравнением непрерывности, можно найти связь между амплитудами модуляции скорости (v_1) и тока пучка (I_1):

$$\frac{v_1}{v_0} = \left| \frac{\Gamma}{\omega} \right| \frac{I_1}{I_0}.$$

Считая $\omega = k_z v_0$ и подставляя k_z и Γ для волны с максимальным инкрементом (7), получим $\frac{v_1}{v_0} \approx \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{v}{\gamma_0^3} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{I_1}{I_0}$,

где $\nu = \frac{\epsilon I_0}{mc^2 v_0}$. Для приведённых выше параметров
 $v_1/v_0 \approx 0,7 \cdot I_1/I_0$. В то же время относительная модуляция
 продольного импульса существенно выше:

$$\frac{P_{21}}{P_{20}} \approx \mu^3 \frac{v_1}{v_0}.$$

Например, энергетическому разбросу в 3% соответствует 0,5%-ная
 модуляция тока на длине волны ~ 1 м. Поэтому требование малости
 энергетического разброса приводит к жёстким требованиям на началь-
 ную модуляцию тока даже при малых длинах ускорения.

Авторы благодарны В.С.Александрову за ценные замечания.

Литература

1. А.И.Ахиезер, Я.Б.Файнберг. ЖЭТФ, XXI, 1265, 1951.
2. В.А.Лопухин, А.А.Веденов. УФН, LIII, 69, 1954.
3. В.И.Курьев. Радиотехника и электроника, V, №9, 1458, 1960.
4. В.К.Гришин. ЖТФ, XLII, №1, 9, 1972.
5. Ю.П.Вахрушин, И.М.Матора. УФН, CX, II7, 1973.
6. В.К.Гришин. ЖТФ, XLV, №3, 672, 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
 28 ноября 1975 года.