

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



К-471

11/1-76

P9 - 9257

В.С.Кладницкий

110/2-76

СИСТЕМЫ ИЗ ОДИНАКОВЫХ КВАДРУПОЛЬНЫХ ЛИНЗ
С РАВНЫМИ ВОЗБУЖДЕНИЯМИ

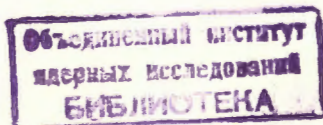
1975

P9 - 9257

В.С.Кладницкий

СИСТЕМЫ ИЗ ОДИНАКОВЫХ КВАДРУПОЛЬНЫХ ЛИНЗ
С РАВНЫМИ ВОЗБУЖДЕНИЯМИ

Направлено в ЖТФ



Кладницкий В.С.

P9 - 9257

Системы из одинаковых квадрупольных линз с равными возбуждениями

Рассмотрены дублет и триплет, составленные из одинаковых квадрупольных линз с равными возбуждениями. Показано, что при определенных ограничениях, налагаемых на величину расстояния P до предмета и возбуждение θ , такие системы собирают пучок по всем направлениям. При $p > 0$ триплет не может создать действительное стигматическое изображение. В пределах допустимых значений p и θ удовлетворяются многие практические требования, предъявляемые к положению и размерам изображения.

Работа выполнена в Лаборатории нейтронной физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1975

Kladnitsky V.S.

P9 - 9257

An Identical Quadrupole Lens Systems

Equigradient quadrupole doublet with identical elements and equigradient triplet are considered. These systems yield real images in both planes simultaneously under certain restrictions over object position p and magnetic gradient G . One is not able to find any triplet parameters to achieve stigmatism if $p > 0$. Many requirements to the image position and magnification can be satisfied within available p and G values.

The investigation has been performed at the Laboratory of Neutron Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1975

Для фокусировки пучков заряженных частиц применяются системы из двух, трех или четырех последовательно расположенных квадрупольных линз. Как правило, каждая из них питается от отдельного источника тока, что позволяет регулировать градиенты полей в линзах независимым образом. Однако многие проблемы фокусировки можно решить с помощью линз, имеющих одинаковые градиенты. При этом вся система может питаться от общего, достаточно мощного источника тока.

§1. Антисимметричный дублет

Рассмотрим антисимметричный дублет, составленный из двух квадрупольных линз одинаковой длины, которые имеют равные градиенты магнитного поля^{1/1}. Величину

$$\Theta = L \left(\frac{G}{BR} \right)^{1/2}, \quad /1/$$

где L - эффективная длина линзы, G - градиент магнитного поля, BR - магнитная жесткость фокусируемых частиц, назовем возбуждением линзы. В антисимметричном дублете возбуждения линз совпадают.

Матрица преобразования такого дублета в плоскости cd , где первая линза собирает, а вторая рассеивает заряженные частицы,

$$A_{cd} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Матрица дублета в плоскости dc отличается от A_{cd} только перестановкой элементов главной диагонали a_{11} и a_{22} . Разложив по степеням Θ синусы и косинусы в матричных элементах ^{1/}, мы получим следующие приближенные выражения:

$$a_{11} = 1 - (1+d)\Theta^2 - \frac{1+2d}{6}\Theta^4 + \frac{1+3d}{90}\Theta^6 - \frac{1+4d}{2520}\Theta^8, \quad /2/$$

$$a_{12} = 2 + d - \frac{2+5d}{30}\Theta^4, \quad /3/$$

$$a_{21} = -\frac{2+3d}{3}\Theta^4 + \frac{2+7d}{630}\Theta^8, \quad /4/$$

$$a_{22} = 1 + (1+d)\Theta^2 - \frac{1+2d}{6}\Theta^4 - \frac{1+3d}{90}\Theta^6 + \frac{1+4d}{2520}\Theta^8. \quad /5/$$

Здесь d - длина свободного от поля промежутка между линзами. Все расстояния будем выражать в единицах L .

В области возбуждений $0 < \Theta < \pi/2$, представляющей практический интерес для фокусировки пучков ускоренных частиц, $a_{12} > 0$, $a_{22} > 0$, $a_{21} < 0$, а знак a_{11} зависит от величины возбуждения. Для малых возбуждений этот матричный элемент положителен, с ростом Θ он при некотором Θ_0 проходит через нуль и становится отрицательным. Величина Θ_0 зависит от расстояния между линзами и для $d=0$; 1 и 2 равняется соответственно 0,9369; 0,6715 и 0,5547.

Обозначим через p расстояние от входа системы линз до предмета, а через q - расстояние от ее выхода до изображения. При заданном p величины q для плоскостей cd и dc найдем из соотношений

$$q_{cd} = F_{cd} \frac{p - C_{cd}}{p - F'_{cd}} \quad /6/$$

$$q_{dc} = F_{dc} \frac{p - C_{dc}}{p - F'_{dc}}. \quad /7/$$

Здесь $F'_{cd} = -a_{22}/a_{21}$ - расстояние от входа дублета до фокуса предметного пространства в плоскости cd , $F_{cd} = -a_{11}/a_{21}$ - расстояние от его выхода до фокуса пространства изображений. Положение соответствующих фокальных точек в плоскости dc определяется формулами $F'_{dc} = F_{cd}$ и $F_{dc} = F'_{cd}$. Параметры $C_{cd} = -a_{12}/a_{11}$ и $C_{dc} = -a_{12}/a_{22}$ имеют следующий смысл. Если $p = C_{cd}$, то в плоскости cd положение изображения совпадает с выходной границей дублета. Совершенно аналогично для $p = C_{dc}$ изображение в плоскости dc оказывается расположенным на выходе дублета.

Отметим, что $p > 0$ соответствует реальному предмету, находящемуся в предметном пространстве, а $q > 0$ - действительному изображению в пространстве изображений.

Систему линз, которая одновременно создает действительные изображения в обеих плоскостях, назовем собирающей. Анализ формул /6/ и /7/ показывает, что при заданном возбуждении антисимметричный дублет является собирающим лишь для определенной области положительных значений p . Чтобы найти границы этой области, рассмотрим графики на *рис. 1*, показывающие зависимости F , F' и C от Θ . Очевидно, что предмет должен быть расположен дальше от собирающего дублета, чем наиболее удаленный из фокусов его предметного пространства. Следовательно, $p > F'_{cd}$, поскольку $F'_{cd} > F'_{dc}$. В случае $\Theta < \Theta_0$ величина p не ограничена сверху, так как и C_{cd} и C_{dc} отрицательны. Однако для $\Theta > \Theta_0$ выбранное расстояние до предмета должно удовлетворять условию: $F'_{cd} < p < C_{cd}$.

Подставив в /6/ и /7/ граничные значения для p , найдем пределы, в которых меняются расстояния до изображений, -

$$F_{cd} < q_{cd} < \infty, \quad /8/$$

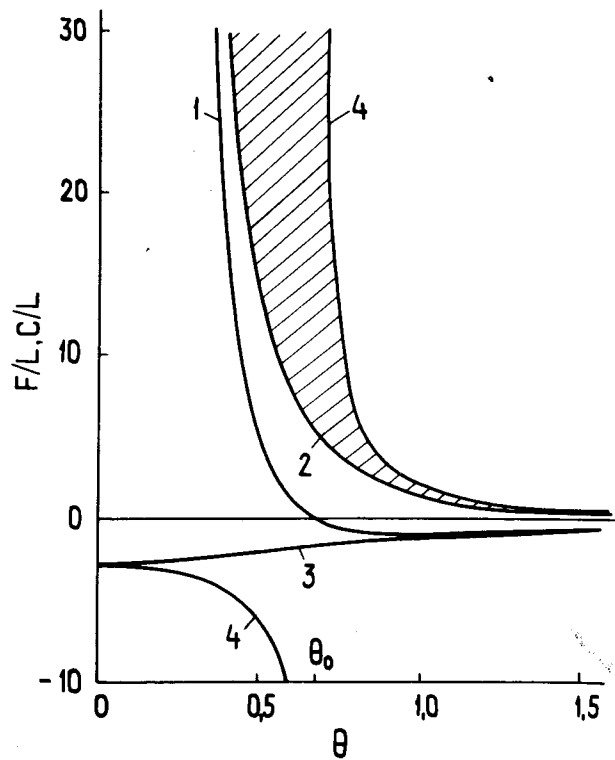


Рис. 1. Зависимость параметров дублета F, F' и C от возбуждения: 1 - $F_{cd}(F'_{dc})$; 2 - $F_{dc}(F'_{cd})$; 3 - C_{dc} ; 4 - C_{cd} . Расстояние между линзами $d/L=1$. Заштрихована область допустимых значений p .

$$F_{dc} < q_{dc} < F_{dc} + \frac{f}{\delta} \quad /9/$$

при возбуждении $\Theta < \Theta_0$, и

$$0 < q_{cd} < \infty \quad /10/$$

$$F_{dc} + \frac{f F'_{dc}}{\delta F'_{dc} - f} < q_{dc} < F_{dc} + \frac{f}{\delta} \quad /11/$$

при возбуждении $\Theta > \Theta_0$. Здесь $f = -1/a_{21}$ - фокусное расстояние дублета. Величина $\delta = (F_{dc} - F_{cd})/f = a_{22} - a_{11}$ характеризует астигматизм дублета. Отметим, что в интересующем нас интервале возбуждений f и δ положительны.

Когда возбуждение проходит через значение Θ_0 и продолжает расти, область допустимых p , заштрихованная на рис. 1, очень быстро сокращается. Интервал возможных значений q_{dc} также становится весьма узким. Действительно, из рисунка видно, что для $\Theta > \Theta_0$ $F'_{dc} \approx C_{dc}$, а с учетом этого обстоятельства формула /7/ дает $q_{dc} \approx F_{dc}$. В результате дублет становится менее гибкой фокусирующей системой.

При заданном возбуждении выражения /6/ и /7/ представляют собой дробно-линейные функции от p . Их графики /рис. 2/ - равноугонные гиперболы, асимптоты которых параллельны осям p и q . Уравнения асимптот

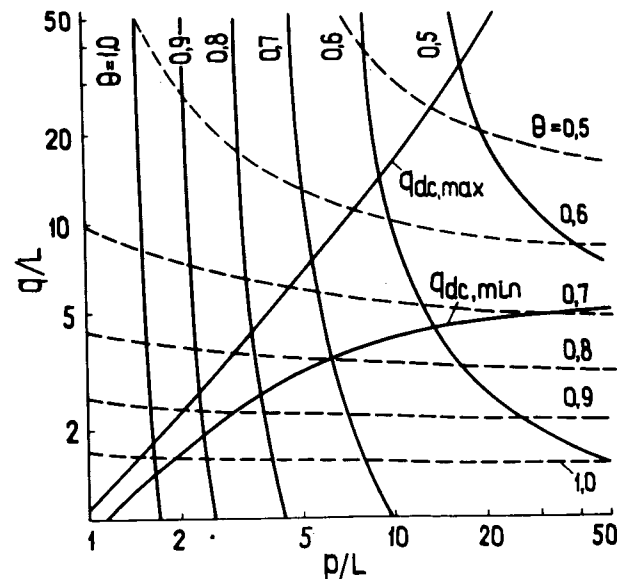


Рис. 2. Положение изображения в зависимости от положения предмета для дублета с $d/L=1$. Сплошные кривые относятся к плоскости cd , штриховые - к плоскости dc .

первой гиперболы: $p = F'_{cd}$ и $q = F_{cd}$, а уравнения асимптот второй: $p = F'_{dc}$ и $q = F_{dc}$. Поэтому в случае $\Theta < \Theta_0$ гиперболы не пересекают осей координат. Если же $\Theta > \Theta_0$ то первая гипербола пересекается с осью p , а вторая - с осью q . На рис. 2 приведены также графики для $q_{dc, \min}$ и $q_{dc, \max}$, ограничивающие область вариации q_{dc} в случае собирающего дублета.

Точке взаимного пересечения кривых q_{cd} и q_{dc} соответствует стигматичное изображение ($q_{cd} = q_{dc} = q_0$). Напишем для обеих плоскостей антисимметричного дублета выражения, аналогичные формуле Ньютона для световой оптики:

$$(p - F_{dc})(q_{cd} - F_{cd}) = f^2, \quad /12/$$

$$(p - F_{cd})(q_{dc} - F_{dc}) = f^2. \quad /13/$$

Вычитая /13/ из /12/, найдем

$$q_{cd} - q_{dc} = (F_{dc} - F_{cd}) \left[1 - \frac{f^2}{(p - F_{cd})(p - F_{dc})} \right]. \quad /14/$$

Поскольку $F_{dc} \neq F_{cd}$ условие совмещения положений изображений

$$(p - F_{cd})(p - F_{dc}) = f^2. \quad /15/$$

Анализ квадратного уравнения /15/ показывает, что оно имеет только одно положительное решение

$$p = \frac{1}{2} \{ (F_{dc} + F_{cd}) + [(F_{dc} - F_{cd})^2 + 4f^2]^{1/2} \}. \quad /16/$$

Если в уравнения /12/ и /13/ подставить $q_{cd} = q_0$ и $q_{dc} = q_0$, то они будут удовлетворяться одновременно лишь при условии, что $q_0 = p$. Поэтому формула /16/ определяет также и расстояние q_0 до стигматичного изображения. На рис. 3 показана зависимость положения стигматичного изображения от Θ . В наиболее интересной практически области $\Theta \leq 1$ мы можем воспользоваться формулой

$$q_0 = \frac{3 + 3[1 + (1+d)^2 \Theta^4]^{1/2}}{(2+3d)\Theta^4} - \frac{1+2d}{4+6d}. \quad /17/$$

Для увеличений стигматичного дублета справедливы соотношения

$$M_{cd} M_{dc} = 1 \quad /18/$$

$$|M_{cd}| - |M_{dc}| = \delta. \quad /19/$$

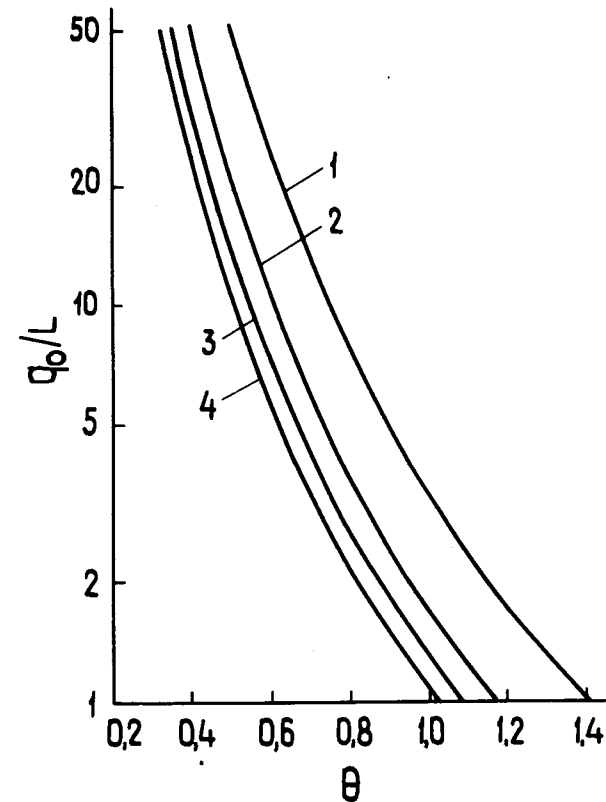


Рис. 3. Положение изображения в стигматичном дублете как функция возбуждения при разных d/L : 1 - $d/L = 0$; 2 - $d/L = 1$; 3 - $d/L = 2$; 4 - $d/L = 3$.

Используя выражения /2/ и /5/, запишем δ в виде $\delta \approx 2(1+d)\theta^2$. Отсюда видно, что с ростом возбуждения дублета быстро растет и разность увеличений в двух его плоскостях /рис. 4/.

Для многих практических применений необходимо, чтобы величина изображения не превышала величины предмета. Если положение предмета определяется равенством $p = F' + f$, то расстояние до изображения в данной плоскости $q = F + f$, и увеличение $M = -1$. В этом можно убедиться, подставив указанное значение p в /6/ или в /7/, а также в формулу для увеличения $M = f/(F' - p)$.

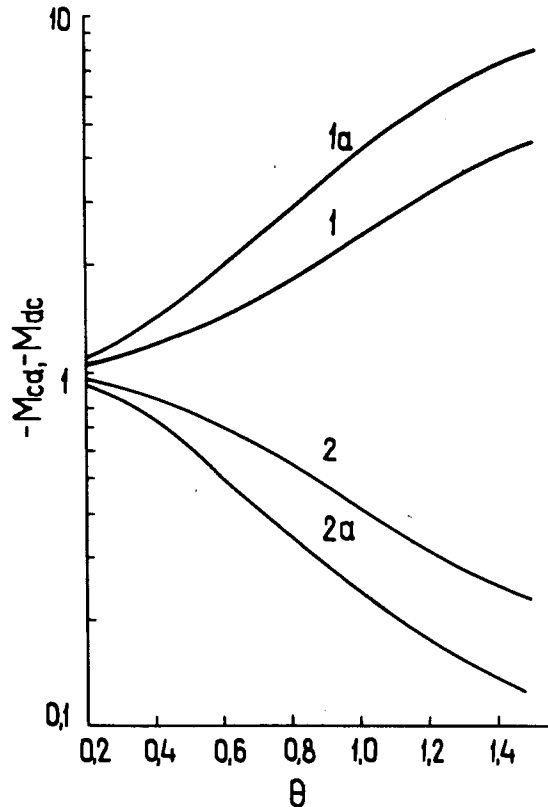


Рис. 4. Увеличение стигматического дублета в зависимости от возбуждения: 1 - M_{cd} ; 2 - M_{dc} при $d/L = 0$; 1a - M_{cd} , 2a - M_{dc} при $d/L = 1$.

Пусть на дублет падает стигматичный пучок частиц. В случае $p = F'_{cd} + f$ увеличение $M_{cd} = -1$. Расстояние до изображения

$$q_{cd} = F_{cd} + f = -\frac{1 + a_{11}}{a_{21}} \quad /20/$$

положительно только при $a_{11} > -1$. Следовательно, условие $a_{11} = -1$, которое можно записать в виде

$$(1 + 2d)\theta^4 + 6(1 + d)\theta^2 - 12 = 0, \quad /21/$$

определяет верхнюю границу возбуждения линз. В плоскости dc дублет создает изображение на расстоянии

$$q_{dc} = F_{dc} + \frac{f}{1 + \delta}. \quad /22/$$

Заметим, что $q_{cd} < q_{dc} < p$ и промежуток между изображениями

$$q_{dc} - q_{cd} = \frac{f\delta^2}{1 + \delta} \quad /23/$$

монотонно уменьшается с ростом возбуждения. Увеличение $M_{dc} = -1/(1 + \delta)$ отрицательно и по абсолютной величине меньше единицы.

Если же положение предмета задано соотношением $p = F'_{dc} + f$, то увеличение $M_{dc} = -1$. Расстояние до изображения в плоскости cd равно

$$q_{cd} = F_{cd} + \frac{f}{1 - \delta}, \quad /24/$$

и, чтобы это изображение было действительным, должно выполняться условие $\delta < 1$. Следовательно, соотношение $\delta = 1$, которое мы перепишем в виде

$$2(1 + d)\theta^2 = 1, \quad /25/$$

задает верхнюю границу возбуждения для данного случая. Увеличение $M_{cd} = 1/(\delta - 1)$ отрицательно и по абсолютной величине больше единицы. Кроме того, промежуток между изображениями

$$q_{cd} - q_{dc} = \frac{f\delta^2}{1-\delta} \quad /26/$$

весьма велик. Поэтому с практической точки зрения предпочтительно поместить источник частиц на расстоянии $p = F'_{cd} + f$ от дублета.

Пусть теперь требуется создать пучок, который в одной из плоскостей дублета параллелен оптической оси, а в другой сходится. Если выбрать $p = F'_{cd}$, то оба требования удовлетворятся для любого значения Θ . При этом $q_{dc} = F_{dc} + f/\delta$ и $M_{dc} = -1/\delta$. Увеличение M_{dc} по модулю меньше единицы, если возбуждение линз превышает граничное значение, определяемое формулой /25/.

§2. Симметричный эквиградиентный триплет

Симметричный эквиградиентный триплет, у которого средняя линза вдвое длиннее, чем каждая из крайних, можно рассматривать как систему из четырех одинаковых линз с равными возбуждениями. Они составляют два антисимметричных дублета, расположенных вплотную. Порядок чередования линз во втором дублете обратен их порядку в первом. Умножив A_{cd} на A_{dc} , найдем матрицу триплета в плоскости cdc

$$\begin{bmatrix} 2a_{11}a_{22} - 1 & 2a_{12}a_{22} \\ 2a_{21}a_{11} & 2a_{11}a_{22} - 1 \end{bmatrix}, \quad /27/$$

а в результате умножения A_{dc} на A_{cd} получим его матрицу в плоскости dcd

$$\begin{bmatrix} 2a_{11}a_{22} - 1 & 2a_{12}a_{11} \\ 2a_{21}a_{22} & 2a_{11}a_{22} - 1 \end{bmatrix}. \quad /28/$$

Параметры триплета F и C определяются через элементы матриц /27/ и /28/ аналогично соответствующим параметрам дублета. Фокус предметного пространства и фокус пространства изображений в данной плоскости находятся на одинаковом расстоянии от границ триплета. В случае $2a_{11}a_{22} = 1$ положение фокальных точек совпадает с положением границ системы. Это происходит при возбуждении, которое мы обозначим через Θ_1 . Его можно приближенно вычислить из соотношения

$$\left[\frac{8}{3}(1+2d) + 2d^2 \right] \Theta^4 = 1. \quad /29/$$

Расчет показывает, что для заданного расстояния d возбуждение Θ_1 всегда меньше Θ_0 .

Расстояния от выхода триплета до изображений определяются формулами

$$q_{cdc} = F_{cdc} \frac{p - F_{cdc}}{p - C_{cdc}} \quad /30/$$

$$q_{dcd} = F_{dcd} \frac{p - F_{dcd}}{p - C_{dcd}}. \quad /31/$$

Воспользовавшись для анализа этих соотношений рис. 5, на котором представлены параметры триплета F и C в функции Θ , приходим к следующим выводам. При возбуждении $\Theta < \Theta_1$ триплет собирает пучок в обеих плоскостях, если $F_{cdc} < p < \infty$, поскольку оба параметра C_{cdc} и C_{dcd} отрицательны, а $F_{dcd} < F_{cdc}$. В интервале возбуждений $\Theta_1 < \Theta < \Theta_0$ триплет оказывается собирающим для $0 < p < C_{dcd}$, так как F_{cdc} и F_{dcd} меньше нуля, а $C_{dcd} < C_{cdc}$. И, наконец, если возбуждение $\Theta > \Theta_0$, триплет рассеивает пучок в плоскости dcd при любом положительном p . Таким образом, для реализации собирающего триплета необходимо ограничить выбор не только расстояния p до предмета, но и величины возбуждения ($\Theta < \Theta_0$).

Заметим, что при $\Theta = \Theta_1$ оба элемента главной диагонали матриц /27/ и /28/ обращаются в нуль. В результа-

те положение предмета и положение изображения оказываются связанными соотношениями

$$pq_{cdc} = \left(\frac{a_{22}}{a_{21}}\right)^2 \quad /32/$$

$$pq_{dcd} = \left(\frac{a_{11}}{a_{21}}\right)^2, \quad /33/$$

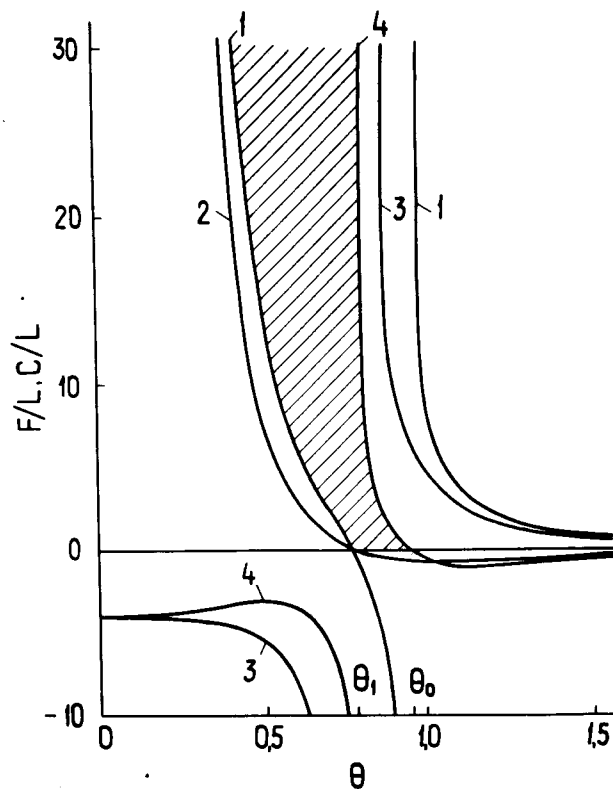


Рис. 5. Зависимость параметров триплета F и C от возбуждения: 1 - F_{cdc} ; 2 - F_{dcd} ; 3 - C_{cdc} ; 4 - C_{dcd} . Расстояние между линзами $d/L=0$. Заштрихована область допустимых значений p .

из которых видно, что для любого $p > 0$ оба изображения действительны.

Покажем, что эквиградиентный триплет не может создать действительного стигматичного изображения, если положения предмета в плоскостях cdc и dcd совпадают. Выразив в формулах /30/ и /31/ F и C через матричные элементы, найдем

$$(2a_{11}a_{22}-1)p + (2a_{11}a_{22}-1+2a_{21}a_{11}p)q_{cdc} + 2a_{12}a_{22}=0,$$

$$(2a_{11}a_{22}-1)p + (2a_{11}a_{22}-1+2a_{21}a_{22}p)q_{dcd} + 2a_{12}a_{11}=0.$$

Вычтем второе уравнение из первого в предположении, что $q_{cdc}=q_{dcd}=q$. В результате получим $pq=a_{12}/a_{21}$. Поскольку матричные элементы дублета a_{12} и a_{21} всегда имеют противоположные знаки, $pq < 0$, и, следовательно, для $p > 0$ q отрицательно.

Если падающий пучок астигматичен, то такой триплет может превратить его в стигматичный пучок на выходе. Необходимость в этом возникает, например, при фокусировке пучков, выходящих из циклических ускорителей. Для транспортировки пучка на значительное расстояние также можно воспользоваться несколькими эквиградиентными триплетами, если при этом не требуется создавать промежуточные стигматичные изображения.

Увеличения триплета M_{cdc} и M_{dcd} неодинаковы. Для того, чтобы одно из них равнялось -1 , достаточно поместить предмет в фокусе предметного пространства первого дублета. Изображение получится в фокусе пространства изображений второго дублета, а на границе двух дублетов - в центре триплета пучок будет параллелен оптической оси. Так, например, $M_{cdc} = -1$, если $p = F'_{cd}$. При этом $M_{dcd} = -1/[1+4(1+d)\theta^2+4(1+d)^2\theta^4]$ по модулю меньше единицы.

Как показано в работе /2/, получить в собирающем триплете увеличение $+1$ невозможно.

Литература

1. С.Я.Явор. Фокусировка заряженных частиц квадрупольными линзами. Атомиздат, М., 1968.
2. E.Regenstreif. *Contributions to the Theory of the Symmetric Quadrupole Triplet*, CERN 69-2, 1969.

*Рукопись поступила в издательский отдел
28 октября 1975 года.*