

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА



Г-443

29/41-75

P9 - 9245

Б.С.Гетманов, В.Г.Маханьков

4993/2-75

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОДОЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ  
РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ КОЛЕЦ.

II. Численное моделирование.

Кольцо в свободном пространстве

**1975**

P9 - 9245

Б.С.Гетманов, В.Г.Маханьков

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОДОЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ  
РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ КОЛЕЦ.**

**II. Численное моделирование.**

Кольцо в свободном пространстве

Направлено в "Particle Accelerators"

Настоящая работа является продолжением предыдущей /1/.

Все обозначения совпадают с принятыми ранее. Ссылки на формулы работы /1/ имеют трехзначную нумерацию (I.n.m).

### § I. Постановка задачи численного моделирования

В пределах применимости рассматриваемой модели система уравнений (I.2.23)  $\partial_t \psi_n + i(n, \omega_0 + \omega) \psi_n + \frac{e^2}{2\pi k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \lambda_{n-m} \partial_w \psi_m = 0$  конечна и состоит из  $2n_m + 1$  уравнений, где  $n_m < R_0/2$  ( $z$  - малый радиус кольца). Мы будем предполагать, что при  $n > n_m$  гармоники некогерентны и возбуждаются слабо, и соответственно положим  $\psi_{n > n_m} = 0$ .

Начальные условия, т.е. значения  $\psi_n$  при  $t = 0$ , зададим следующие. Функцию распределения пучка выберем в форме распределения Гаусса с полушириной  $\langle w_0 \rangle$  (начальный разброс в пучке), нормированную в соответствии с (I.2.25):

$$\psi_n(w) |_{t=0} = \frac{N}{(2\pi)^{1/2} \langle w_0 \rangle} e^{-\frac{w^2}{2\langle w_0 \rangle^2}}. \quad (I.2)$$

Поскольку на начальной стадии предполагается справедливой линейная теория, начальные значения  $\psi_n \neq 0$  выразим через  $\psi_0$  с помощью (I.5.3) и будем считать, что начальный уровень полсы возмущения достаточно мал.

Для численных исследований важным является удобный выбор безразмерных переменных. Введем

$$\begin{aligned}
 x &= w / \langle \tilde{w} \rangle ; \quad \tau = \tilde{\gamma} t ; \quad \Psi_n = \frac{\langle \tilde{w} \rangle}{N} \psi_n ; \\
 \tilde{\lambda}_n &= \lambda_n / N ; \quad \tilde{z}_n = z_n / n z_0 ; \quad \tilde{s}_n = \frac{b_{n+1} - b_n}{2} .
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

Тогда система (1.2.23) принимает вид

$$\partial_\tau \tilde{\Psi}_n(x) + i n \alpha_0 x \tilde{\Psi}_n \frac{\langle \tilde{w} \rangle}{\tilde{\gamma}} + \frac{1}{\tilde{\gamma}} \frac{2e^2 N}{R_0 \langle \tilde{w} \rangle} \sum_m m \tilde{z}_m \tilde{\lambda}_{n-m} 2x \tilde{\Psi}_{n-m} = 0 .
 \tag{1.3}$$

Здесь мы опустили константу  $\omega_0$ , т.е. перешли к распределению с центром в  $\omega_0$ . В дальнейшем черточки над безразмерным переменным будут опускаться.

Величины  $\langle \tilde{w} \rangle$  и  $\tilde{\gamma}$  можно выбирать по-разному. Удобным является выбор

$$\begin{aligned}
 \tilde{\gamma} &= \tilde{n} \omega_0 \sqrt{\frac{2V}{\tilde{\gamma}_0}} \sqrt{\tilde{s}_n} , \\
 \langle \tilde{w} \rangle &= \langle w_{\text{кр.п.}} \rangle = \frac{E_0}{\omega_0} \sqrt{\frac{2V}{\tilde{\gamma}_0}} \sqrt{\tilde{s}_n} .
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

Т.е. время нормируется на линейный инкремент гармоник с номером  $\tilde{n}$  (например, с максимальным значением  $|z_n / n z_0|$ ; тогда в случае свободного пространства  $\tilde{n} = 1$  и порог неустойчивости  $I$ -й гармоники является порогом неустойчивости в целом), обобщенный момент — на критический разброс для гармоник с номером  $\tilde{n}$ , дающийся здесь в (1.4.8). Удобство такой нормировки заключается в том, что в этом случае система (1.3) инвариантна относительно параметра  $\sqrt{V/\tilde{\gamma}_0}$  и поэтому, задавая в качестве начального параметра счета начальный разброс, меньший критического в определенном отношении:

$$\langle x_0 \rangle = \langle x_{\text{кр.п.}} \rangle / m ,
 \tag{1.5}$$

мы автоматически получаем картину эволюции для любых значений параметров, входящих в величину  $\sqrt{V/\tilde{\gamma}_0}$ :  $N$ ,  $R_0$  (или  $B$  — удерживающего магнитного поля),  $\tilde{\gamma}_0$ , при условии выполнения  $V/\tilde{\gamma}_0 \ll 1$ . Можно, например, варьировать  $N$  — число электронов в кольце; при этом, естест-

венно, соответственно меняются (при фиксированном  $m$  (1.5)) реальные значения начального и критического разбросов, инкрементов и максимальное время эволюции:  $t_{max} = \tau_{max} / \gamma_E$ . Еще одно преимущество нормировки (1.4) состоит в том, что при регулярном поведении импеданса, как функции  $n$ , и соответственно инкремента (например, для случая свободного пространства) легко точно найти порог неустойчивости, численно исследуя систему в линейном приближении, когда часть гармоник нарастает, а часть затухает. В этом случае, как легко сообразить, величина  $\langle x_{ct} \rangle$  дается простой формулой

$$\langle x_{ct} \rangle = \langle x_0 \rangle (n_i)^{1/2}, \quad (1.6)$$

где  $n_i$  - число нарастающих гармоник (для свободного пространства). Численные эксперименты показали правильность формул (1.4, 7-8); например, для  $m = \langle x_{ct} \rangle / \langle x_0 \rangle = 2$   $n_i$  точно равно 8. Главная причина того, что мы работали в основном с уравнением (1.2.23), состоит в том, что точное уравнение (1.2.22) не допускает "инвариантной" нормировки. В итоге исходное для численных расчетов уравнение (1.3) в безразмерных переменных (1.2), (1.4) принимает вид

$$\partial_t \psi_n(x) = i \frac{n}{\pi} \times \psi_n - \frac{\partial n}{\partial x} \sum_m \frac{m}{\pi} \lambda_m \alpha_m \psi_n \psi_m. \quad (1.7)$$

Другая возможность состоит, например, в нормировке на полную начальную энергию кольца  $E_0$ :  $\langle w \rangle = \frac{E_0}{\omega_0} = m c R \cdot \gamma_0$ , и нормировке времени произвольным образом, например,  $t = \tau / u_0$ .

Технически "инвариантный счет" реализуется следующим образом. Программа для расчетов на ЭБЛ состоит из двух основных блоков: "инвариантного" и "физического". "Инвариантный" блок вычисляет значения  $\psi_n(x, \tau)$ , как численные решения эволюционной системы (1.3), и накапливает результаты на магнитную ленту; единст-

важным входным "физическим" параметром здесь является  $m = \langle x_{cr} \rangle / \langle x_0 \rangle$  и, естественно,  $\tau_n$ . В произвольный момент времени можно задать конкретные значения  $N, R_0, \gamma_0, \tau \leq \tau_{max}$  - и "физический" блок вычислит величины  $\sqrt{V/\gamma_0}$ , начальный и критический разбросы, спектры гармоник, полную энергию кольца и полей возмущения, мощность излучения, физическое время  $t$  (секунды) и разброс по энергии в момент времени  $\tau$ , нарисует графики эволюции соответствующих величин, а также проверит выполнение соотношения для баланса энергии (I.3.9).

В большинстве случаев мы использовали "инвариантную" нормировку, т.к. нас интересовало в первую очередь изучение влияния нелинейных взаимодействий на эволюцию кольца и полей возмущения при различных  $\tau(n)$  и в разных режимах (от сильно надкритического, или гидродинамического,  $\langle w_0 \rangle \ll \langle w_{cr} \rangle$ , до "околопорогового",  $\langle w_0 \rangle \leq \langle w_{cr} \rangle$ ; соответственно  $m = 1.0 - 1.5$ ) и исследование возможности возникновения нелинейной стабилизации.

В безразмерных переменных (I.2), (I.4) закон сохранения числа частиц имеет вид

$$\bar{I}_2 = 2\pi \int \psi_0(x, \tau) dx = 1, \quad (I.8)$$

а "дифференциальные законы сохранения" (I.3.I0-II) -

$$\partial_t \int x \psi_0 dx = 2\pi \sum_n \frac{n}{\pi} \frac{b_n^i}{\beta_n^i} |\lambda_n|^2; \quad (I.9)$$

$$\partial_t \left[ \int x^2 \psi_0 dx + 2\pi \sum_n \frac{b_n^i}{\beta_n^i} |\lambda_n|^2 \right] = 4\pi \sum_n \frac{n}{\pi} \frac{b_n^i}{\beta_n^i} \lambda_n \int x \psi_{-n} dx. \quad (I.I0)$$

Выражения (I.8-I0) инвариантны относительно параметров кольца, и их справедливость проверялась на каждом шаге по времени в численных расчетах. В тех же переменных и в том же приближении выражения для энергии,

$$E(\tau) = 2\pi N E_0 \left[ \int \psi_0 dx + \sqrt{\frac{2\nu}{\delta_0}} \delta \int \psi_0 dx - \frac{\nu}{\delta_0} \delta \int x^2 \psi_0 dx - 2\pi \frac{\nu}{\delta_0} \sum b_n'' |\lambda_n|^2 \right], \quad (1.11)$$

и мощности излучения,

$$\frac{d}{dt} E = 4\pi^2 N E_0 \left[ \sqrt{\frac{2\nu}{\delta_0}} \sum \frac{b_n'}{\delta_0} |\lambda_n|^2 - \frac{2\nu}{\delta_0} \sum \frac{b_n'}{\delta_0} \lambda_n \right] \times \psi_0(x), \quad (1.12)$$

так же, как и точное соотношение (1.3.9),

$$\frac{d}{dt} \left\{ 2\pi N E_0 \left[ \int \psi_0 \sqrt{1 + \sqrt{\frac{\nu}{\delta_0}} \sqrt{\delta_0} 2x} dx - 2\pi \frac{\nu}{\delta_0} \sum b_n'' |\lambda_n|^2 \right] \right\} = \quad (1.13)$$

$$= 8\pi^2 N E_0 \sum \frac{b_n'}{\delta_0} \lambda_n \left( 1 + 2\sqrt{\frac{\nu}{\delta_0}} \sqrt{\delta_0} x \right)^{-1/2} \psi_0(x),$$

инвариантны относительно параметров кольца.

В численных экспериментах соотношения (1.8-13) выполнялись с точностью не хуже  $10^{-5}$  на протяжении всего счета, пока распределение вследствие сдвига и уширения не выходило на границе области численного рассмотрения.

Разностная схема, аппроксимирующая систему (1.7), была выбрана такой же, как в работе [1] (в которой доказана аппроксимация и устойчивость). Для счета мы ограничились 10-ю гармониками, предполагая, в соответствии с исходными предположениями, что при  $\Pi > 10$  поля некогерентны. Ограничение  $n = 10$  связано с вычислительными мощностями ЭВМ (в частности, просчет одного варианта требует от 4 до 7 часов времени на СДС-6200 - в зависимости от выбранных параметров). В действительной области систему (1.7) удобно переписать в компактном векторном виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + A \psi = u, \quad (1.14)$$

где  $\psi$ ,  $u$  - векторы с компонентами

$$\psi = \{ \psi_0, \psi_1', \psi_1'', \dots, \psi_{10}', \psi_{10}'' \}; \quad (\psi_n = \psi_n + i\psi_n''),$$

$$u = \left\{ 0, \frac{1}{\delta_0} \times \psi_1'; -\frac{1}{\delta_0} \times \psi_1'', \dots, \frac{10}{\delta_0} \times \psi_{10}', -\frac{10}{\delta_0} \times \psi_{10}'' \right\},$$

$A = A(\psi, \tau)$  - матрица, элементы которой суть линейные комбинации  $\lambda_n^I, \lambda_n^{II}$  с соответствующими численными коэффициентами. Матрица  $A$  "почти" симметрична ( $A_{nm} = A_{mn}$  при  $n, m = 2, \dots, 2I$ ;  $A_{n,1} = 2A_{2n}$ ; здесь первый индекс нумерует столбец). Поскольку  $A$  зависит от  $\psi$ , система (1.14) является квазилинейной (в математическом смысле) с непрерывно дифференцируемыми начальными данными и коэффициентами. Разностная схема, использовавшаяся для решения системы (1.14), - неявная, близкая ко 2-ому порядку точности.

Граничные условия в крайних точках рассматриваемого интервала по  $x$  на каждом слое времени  $\tau$  получались экспоненциальной экстраполяцией функций  $\psi_n$ . В численных экспериментах было выяснено, что влияние граничных условий на эволюцию  $\psi_n$  невелико, пока распределение не выходит на границы рассматриваемой области.

## § 2. Кольцо в свободном пространстве

Исследование продольной неустойчивости РЭК мы начнем с наиболее просто анализируемого случая свободного пространства; в этом случае импеданс есть регулярная функция  $n$ :  $|\frac{\partial \epsilon}{\partial \omega}| = n^{-\frac{2}{3}}$ .  
 Конкретнее /2,3/

$$\epsilon_n = \pi n^{\frac{2}{3}} z_0 \cdot 0.26 (-1 - \sqrt{3}/3 i). \quad (2.1)$$



Формула (2.1) справедлива, с хорошей точностью, для  $n > 5$ ; для  $n = 1, \dots, 4$  более accurate значения  $\lambda_n$  получаются численным расчетом. Отметим, что в [2] использовался неверный знак  $\lambda_n$ , что приводит согласно (1.4.7) к достаточно сильному уменьшению инкремента. Из (1.6) получаем, что при начальном разбросе

$$\langle x_0 \rangle < \langle x_{c1} \rangle \cdot 10^{-4} \approx 0,47 \langle x_{c2} \rangle \quad (2.2)$$

все рассматриваемые 10 гармоник являются неустойчивыми, что было подтверждено численным экспериментом.

Мы опишем два основных принципиальных эксперимента: в режимах сильно надкритическом ( $\langle x_0 \rangle = 0,2 \langle x_{c2} \rangle$ ) и "околопороговом" ( $\langle x_0 \rangle = 0,58 \langle x_{c2} \rangle$ ).

I.  $\langle x_0 \rangle = 0,2 \langle x_{c2} \rangle$ . На начальной линейной стадии развития неустойчивости рост величин  $|\lambda_n| \sim |\epsilon_n|^{1/2}$  (1.2.22) происходит в пре-красном согласии с формулой (1.4.7), а именно: для  $n=3,4$  отношение амплитуд  $|\lambda_n|$  при увеличении  $\tau$  на единицу давало число  $n^3 \epsilon$  с тремя верными знаками; для  $n=1$  инкремент незначительно превышал значение, даваемой теорией, а при  $n=8-10$  был несколько меньше, причем со временем расхождение возрастало. Это явление будет объяснено ниже. На рис. 1а представлены графики  $|\lambda_n(t)|$  для  $n=1, 3, 5, 7, 10$ . Линейный экспоненциальный рост переходит со временем в осцилляции со средней амплитудой, более чем на порядок меньшей получаемой из оценочной формулы (1.4.10). Скорость процесса эволюции максимальна для десятой гармоники, имеющей наибольший инкремент. Отметим еще, что максимум амплитуды для  $n=1$  больше, чем соответствующие максимумы для  $n=2-9$ , и сравним с максимумом для  $n=10$ .

Рис. 1в-д демонстрируют поведение во времени энергии поля в кольце  $\mathcal{E}$ ; ( $\tau$ ) (член  $\mathcal{E}$ ; в (1.3.1)), мощности излучения  $d\mathcal{E}/d\tau$

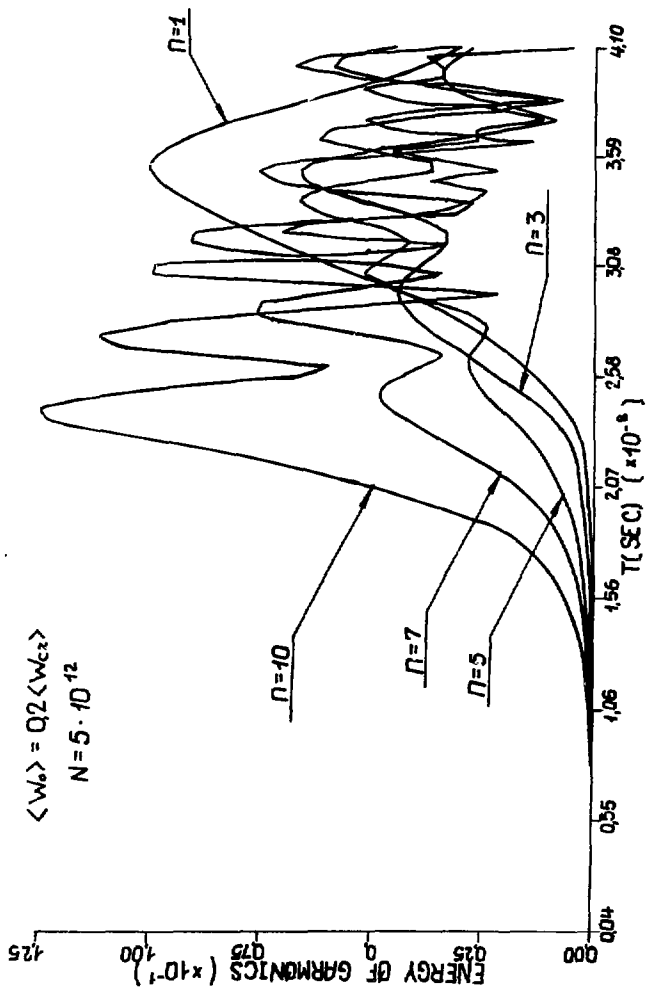


Рис. 1а

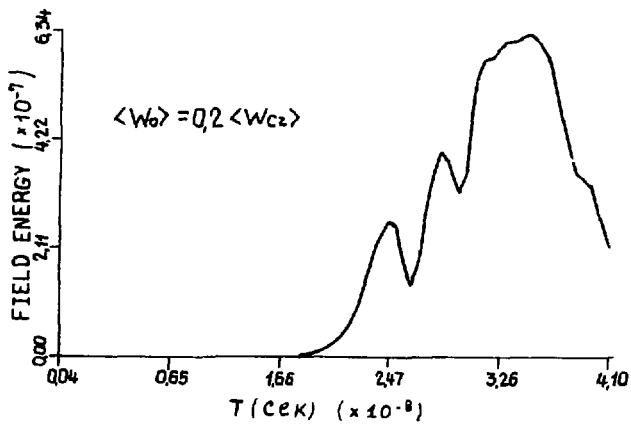
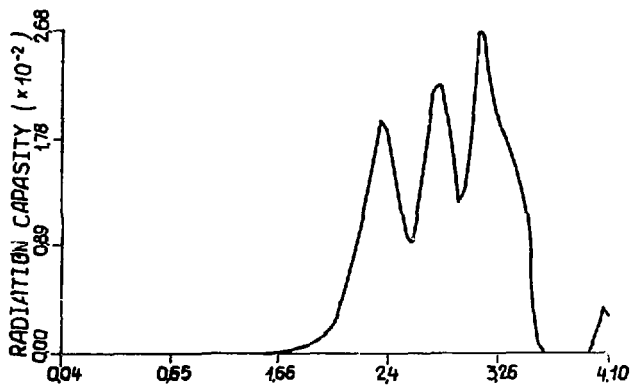


Рис. I в-с

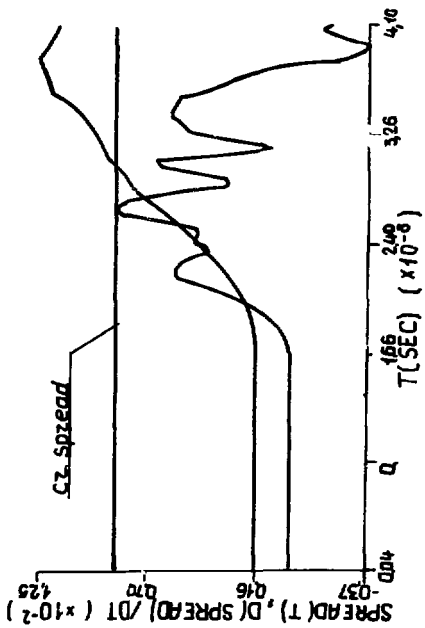


FIG. 1 d

$$\langle W \rangle = 0.2 \langle W_c \rangle$$

$$\tau = 1.08 \cdot 10^{11} / \langle W \rangle$$

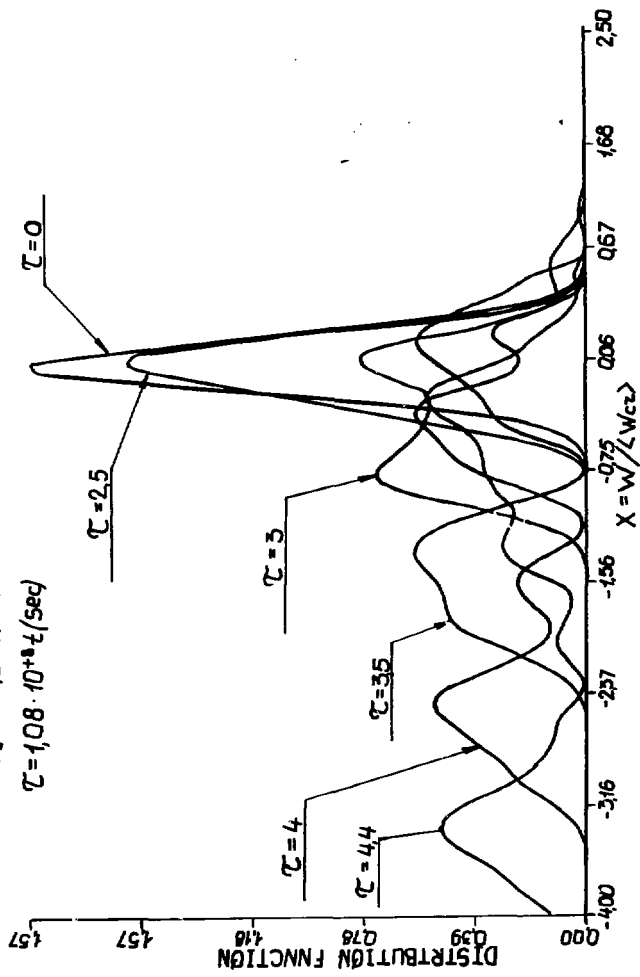


FIG. 1c

(1.12), разброса по энергии в кольце  $\langle w \rangle$  и производной  $\mathcal{J}\langle w \rangle / d\tau$  т.е.  $\sqrt{\chi/\gamma_0} = 0.043$  ( $N = 5 \cdot 10^{12}$ ;  $\gamma_0 = 7.2$ ;  $R_0 = 12$  см).

В начальный период поведение  $E_i(\tau)$  аналогично поведению  $|\lambda_n(\tau)|$  для больших  $n$ ; при  $\tau = 3$  появляется первый максимум, затем  $E_i(\tau)$  осциллирует с нарастающей амплитудой. В описываемом эксперименте счет был прерван при  $\tau = 4.4$ , т.к. кольцо уширилось настолько, что график  $\psi_0(x)$  вышел на границы рассматриваемой численной области. Замечательным фактом является очень близкая форма кривой мощности излучения  $\mathcal{J}E/d\tau$  к форме кривой энергии  $E_i(\tau)$  (с превышением более чем на 4 порядка), а также сходное поведение во времени  $\mathcal{J}\langle x \rangle / d\tau$ . К концу счета величина энергии, излученной кольцом (при вышеприведенных значениях параметров), составила  $\sim 20\%$  полной энергии кольца; соответственно энергии поля в кольце  $E_i|_{\tau=4.3} = 0.003\%$ , время эволюции  $t = 4 \cdot 10^{-8}$  с.

На рис.10 представлены графики  $\psi_0(x)$  в моменты времени  $\tau = 0; 2.5; 3; 3.5; 4; 4.4$ . Поведение  $\psi_0(x, \tau)$  демонстрирует вполне удовлетворительное соответствие с приведенными в §5.1/качественными соображениями о тенденции поведения  $\psi_0(x)$ . К моменту  $\tau = 4.4$  кольцо полностью развалилось и счет был прекращен (конечное значение разброса  $\langle x \rangle = 6.15$   $\langle x_0 \rangle = 1.23$   $\langle x_{cr} \rangle$ ).

Из изложенного следует вывод, что в данной модели при начальном разбросе, значительно меньшем критического, в свободном пространстве кольцо разваливается за очень короткое время ( $t < 10^{-7}$  с).

Каковы пути преодоления этой ситуации - получения относительно устойчивого (за относительно большое время) кольца? Достаточно радикальная возможность будет рассмотрена в следующем параграфе, а пока проанализируем те приближения, в которых рассматривалась описанная модель. Из вышеописанных результатов ясно, что нелиней-

ные взаимодействия становятся весьма эффективными, даже определяющими по достижении амплитудами гармоник определенного уровня, ограничивая уровень полей возмущения (в линейном приближении гармоники с течением времени неограниченно возрастают). Мы полностью пренебрегли рассмотрением гармоник с  $n > 10$ , считая их некогерентными. Некогерентность приводит к сильному уменьшению инкремента неустойчивости. В случае, когда некогерентные гармоники находятся в устойчивом режиме, нелинейные взаимодействия могут эффективно перекачивать энергию из неустойчивых мод, приводя к нелинейной стабилизации неустойчивости. Более точно, под нелинейной стабилизацией мы будем понимать сильное уменьшение скорости развития неустойчивости за счет нелинейных взаимодействий. Ясно, что получить совершенно устойчивое и "не расплывающееся" кольцо в практическом режиме нельзя, ибо в любом случае в конечном итоге энергии турбулентности диссипируется, приводя к нагреву и увеличению разброса кольца, пока неустойчива хотя бы одна гармоника. Однако при оптимально подобранных параметрах нелинейные взаимодействия могут бы в принципе очень сильно замедлить этот процесс. Для этого необходимо, чтобы существовало преимущественное направление перекачки в сторону больших  $n$ .

II. Рассмотрим теперь "околопороговый" режим  $\langle x_0 \rangle = 0.58 \langle x_{cr} \rangle$ . В этом случае для  $n > 5$  гармоники затухают, а для  $n \leq 5$  инкремент уменьшается в соответствии с (4.9). Рис.2 аналогичен рис.1 для предыдущего случая и тех же значений параметров. Скорость процесса в целом значительно уменьшена ( $\sim$  в 4 раза). До  $\tau = 12-13$  младшие гармоники растут в приблизительном соответствии с линейной теорией, затем начинают закрываться, и с этого момента старшие гармоники, нерегулярно флуктуировавшие ранее около среднего значения

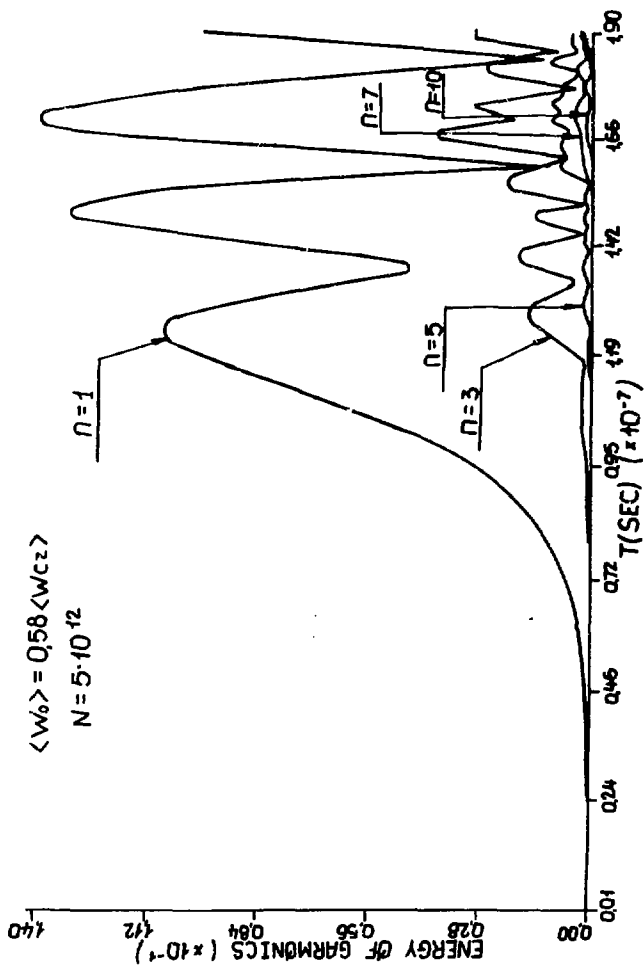
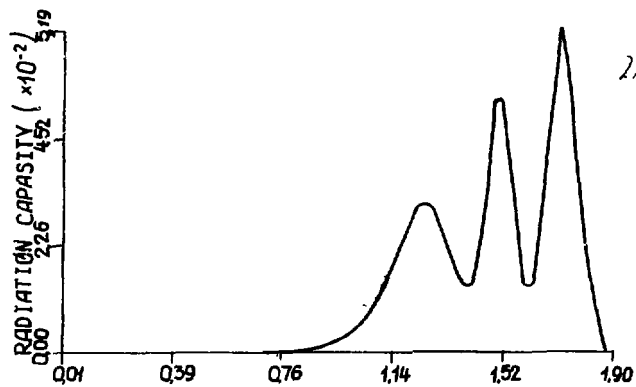
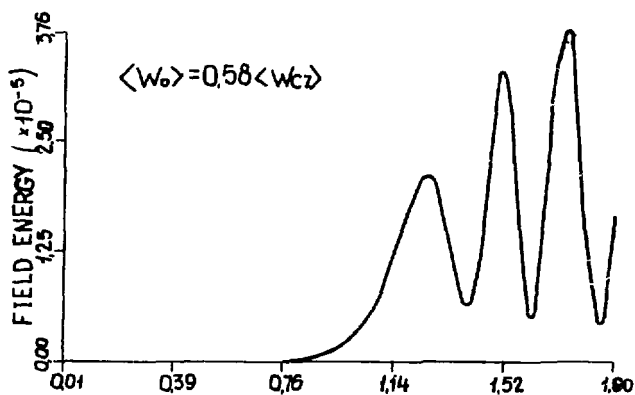


FIG. 2a





2a



2b

Рис.2В-с

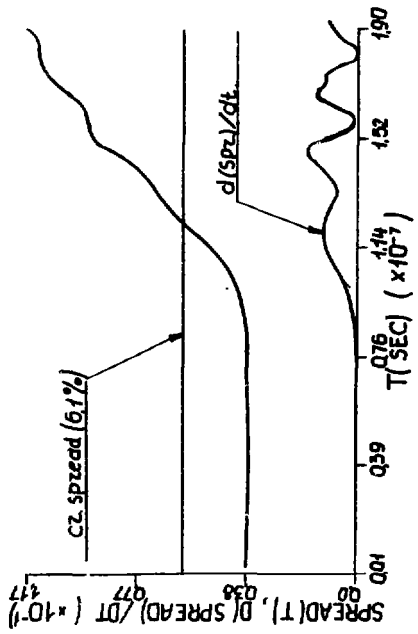


FIG. 2 d

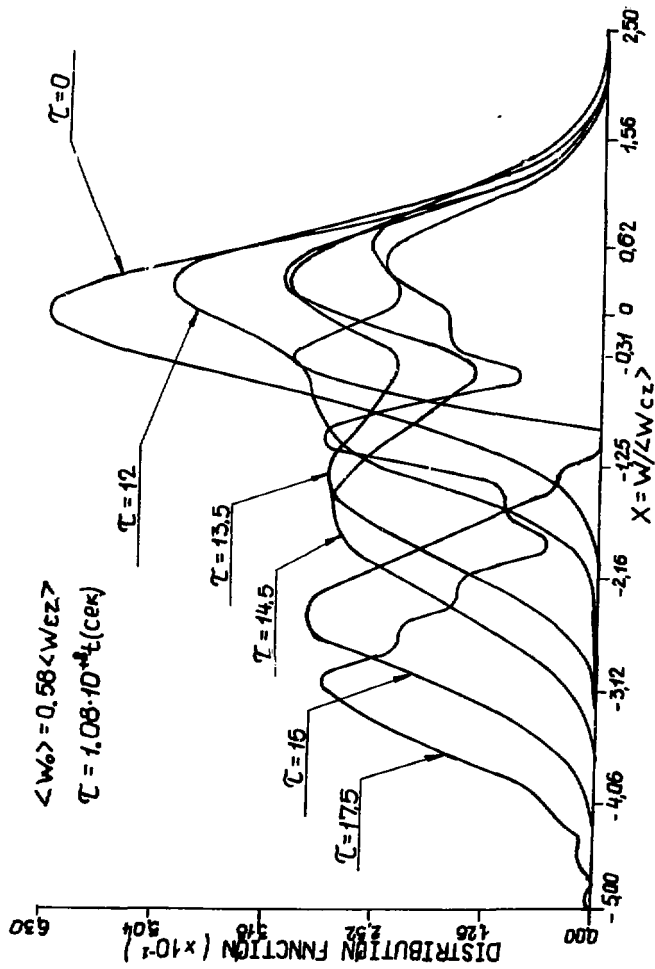


Рис. 2е

$10^{-5}$ , начинают стремительно, "взрывным" образом расти. Приблизительно с этого же момента начинается быстрое уширение и "сдвиг" функции распределения  $\psi_0$ , сопровождающиеся резким ростом излучения. После  $\tau = 20$  счет был прекращен, т.к. кольцо развалилось, его эффективный разброс превысил критический, и ясно, что дальнейшее течение процесса будет вполне аналогичным рассмотренному в предыдущем параграфе.

В рассмотренном примере продемонстрирована высокая эффективность нелинейных взаимодействий в смысле перекачки энергии из одних мод в другие. Ясно, что учет некогерентных гармоник приведет к еще большему замедлению процесса. Однако полученное здесь время развития неустойчивости ( $\tau = 1.9 \cdot 10^{-7}$  с) слишком мало для того, чтобы удовлетворить требованиям экспериментаторов. С ростом  $N$  - числа частиц в кольце - время еще более уменьшается.

Из представленных результатов следует, что при достаточно большом переносе амплитуд существует перекачка энергии в сторону больших  $n$ . Однако в обоих рассмотренных случаях мы сталкиваемся с несколько увеличенной скоростью нарастания  $l$ -й гармоники. Для точного выяснения преимущественного направления перекачки был поставлен следующий численный эксперимент: рассматривалась эволюция решений системы (1.7) в чисто нелинейном режиме (с выброшенными линейными членами) для  $n = 1, 2, 9, 10$ ; при начальных условиях  $|\lambda_n| = 10^{-2}$  для  $n = 1, 2$ ,  $|\lambda_n| = 10^{-4}$  для  $n = 9, 10$  и наоборот. В обоих случаях имело место нарастание  $|\lambda_1|$ ,  $|\lambda_2|$  и затухание  $|\lambda_9|$ ,  $|\lambda_{10}|$ . Отсюда следует, что существует преимущественное направление нелинейной перекачки в сторону меньших  $n$ , в особенности в первую гармонику, чем и объясняется отмеченное выше увеличение скорости роста низших гармоник. Следовательно, выгодно создавать отрицательный градиент

Z в сторону меньших n. Такой случай рассматривается в следующем параграфе.

Основной вывод из результатов настоящего раздела таков: в рамках данной модели в свободном пространстве при начальном разбросе, даже близком к критическому, кольцо за времена  $t < 5 \cdot 10^{-7}$  с расплывается до разброса, равного критическому и даже больше критического, а эффективность нелинейной стабилизации недостаточна для подавления неустойчивости на разумном уровне.

Авторы искренне признательны Ю.А.Алексахину, Н.Ю.Казаринову и Э.А.Перельштейну за ценные обсуждения, Е.П.Ядкову и М.Г.Мещерякову за поддержку.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б.С.Гетманов. ОИЯИ, Р9-9244, Дубна, 1975.
2. В.С.Счинов et al. Plasma Phys. 15, 211, 1973.
3. А.Г.Бонч-Осмоловский, В.Н.Цытович. Труды ФИАН, 66, 144, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел  
23 октября 1975 года.