

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



Г-443

29/11-75
P9 - 9244

Б.С.Гетманов

4992/2-75

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОДОЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ
РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ КОЛЕЦ

I. Аналитическая теория

1975

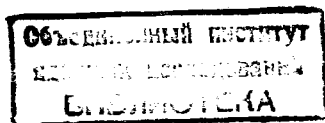
P9 - 9244

Б.С.Гетманов

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОДОЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ
РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ КОЛЕЦ

I. Аналитическая теория

Направлено в журнал
"Particle Acceleration"



ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных препятствий в эффективной реализации идеи коллективного ускорения ионов с помощью релятивистских электронных колец (РЭК)^{/1/} является склонность последних к разного рода неустойчивостям^{/2/}. Наиболее опасной представляется продольная (азимутальная) неустойчивость (ПН), которая носит гидродинамический характер и проявляется в группировке частиц кольца в сгустки - "банчи" (неустойчивость "отрицательной массы" - НОМ)^{/3/} и когерентном индуцированном синхротронном излучении ("радиационная неустойчивость")^{/4/}. Неустойчивость носит пороговый характер^{/5/}, связанный с разбросом ΔE - частиц в кольце по энергии (и радиусу - ввиду релятивистской связи энергии E с частотой вращения: $\omega = \frac{c\beta}{R}$; B - магнитное поле). В "подпороговом" режиме ($\Delta E > \Delta E_{crit}$) эффективность ускорения с помощью РЭК не превышает эффективности, достигнутой на ускорителях обычного типа^{/6/} (во всяком случае, для легких ионов). С другой стороны, уравнения, описывающие динамику неустойчивости РЭК, являются нелинейными, и может оказаться, что нелинейные взаимодействия способны ограничить уровень полей возмущения, замедлить скорость процесса и даже сорвать неустойчивость или привести к нелинейной стабилизации ее^{/7-8/}.

Продольная неустойчивость наблюдалась экспериментально как в работах по созданию E-слоя^{/9/}, так и в экспериментах с РЭК/^{10-11/}. Явление затухания когерентного излучения после характерного всплеска на ранней стадии развития неустойчивости говорит в пользу предположения о важности нелинейных эффектов, ограничивающих амплитуды полей возмущения и флуктуации плотности пучка.

При теоретическом изучении ПН РЭК важен удачный выбор модели РЭК. Наиболее распространенной является модель тонкого кольца^{/3/}, в которой пренебрегается связью продольных возмущений с поперечными и задача сводится к одномерной. Изучение ПН РЭК с учетом нелинейных взаимодействий аналитическими средствами даже в этой простой модели сталкивается со значительными трудностями (связанными, в частности, с отсутствием в задаче малого параметра)^{/12/}. В работе ^{/13/} в рамках той же модели предложено упрощенное "квазикинетическое" описание неустойчивости, на основе которого авторы делают предсказания об асимптотическом состоянии кольца на стадии насыщения неустойчивости, в соответствии с которыми параметры кольца, в частности E , на этой стадии будут, во всяком случае, не лучше, чем для устойчивого кольца, т.е. $\Delta E > E_{кр}$. Однако в этих работах, с одной стороны, пренебрегалась действительной частью импеданса, определяющей процесс излучения кольца, а с другой — не учитывался важный физический эффект перемешивания энергии гармоник, который может привести, если не к стабилизации, то к значительному замедлению процесса развития неустойчивости ^{/7,8/}.

Полное исследование динамики неустойчивости, с нашей точки зрения, возможно только численными методами. В работе^{/14/} численно изучалась динамика радиационной неустойчивости кольца в свободном пространстве, однако ясного ответа на вопрос о роли нелинейных взаимо-

действий и возможности нелинейной стабилизации ПН получено не было.

В настоящей работе аналитическими и численными методами исследуется ПН РЭК в модели тонкого кольца, причем основное внимание уделено анализу влияния нелинейных взаимодействий. Некоторые новые результаты теории ПН представлены в §2-4, качественный характер развития ПН - в § 5, § 6 посвящен описанию постановки задачи численного моделирования, а в § 7 и § 8 изложены результаты такого моделирования для кольца в свободном пространстве и камере соответственно.

§ 2. Общий формализм

Уравнения в гамильтоновском формализме, описывающие движение релятивистского пучка заряженных частиц в постоянном однородном магнитном поле, и следующий из них эффект "отрицательной массы" впервые были получены в^{/3/}. В этих работах, а также в работах^{/12-14/}, в которых проводилось дальнейшее исследование продольной неустойчивости, по существу, использовались уравнения в предположении (явно или неявно высказываемом) малости отклонения частот обращения частиц от средней ω . Такое приближение является неплохим при изучении НОМ, но оно может оказаться недостаточным при изучении продольной неустойчивости в общем случае (включая радиационную неустойчивость, когда действительная часть импеданса \underline{z} , отлична от нуля). В этом случае процесс излучения может привести к достаточно сильному отклонению частот обращения частиц от средней начальной. Использование точных уравнений движения особенно важно при изучении энергетического баланса кольца (не совсем корректное определение канонического импульса в^{/12,14/} приводит в этом случае к неверным результатам,

не ссылаясь на выводы /I2-I4/. Наконец, выражения для инкрементов и порогов неустойчивости в /I2-I4/ были получены, по существу, в приближении $Re \approx \lambda_n$ и должны быть уточнены для исследования продольной неустойчивости в общем случае.

Теория продольной неустойчивости РЭК в приближении толстого ($\lambda_n \gg \lambda_n$) кольца основывается на рассмотрении одномерного кинетического уравнения Власова для функции распределения электронов

$\psi(\beta, w, t)$ в фазовом пространстве (β, w) - азимутального угла и соответствующего обобщенного момента:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial \beta} + w \frac{\partial \psi}{\partial w} = 0. \quad (2.1)$$

Здесь

$$\beta = \omega(w) = \frac{eB}{mc} \gamma(w) = \frac{cBc}{E(w)} \quad (2.2)$$

- частота обращения частицы с каноническим импульсом w в однородном магнитном поле B , $E = mc^2 \gamma$ - соответствующая энергия.

Выражение для канонического импульса w можно найти, воспользовавшись I-м уравнением Гамильтона

$$\frac{\partial H}{\partial w} = \beta \quad (2.3)$$

и имея в виду, что, по определению, гамильтониан частицы H есть ее энергия, выраженная через импульс.

Тогда из (2.3), (2.2) имеем

$$w(\beta) = \int_{\beta}^E \frac{dE}{\beta} = \frac{1}{2} \frac{E^2 - E_0^2}{ecB}. \quad (2.4)$$

Здесь под полем B мы будем понимать сумму внешнего поля B_{ext} и собственного среднего поля пучка \bar{B}_f , которое можно считать однородным и постоянным.

Постоянную E_0 можно положить, например, равной энергии покоя $\bar{E} = mc^2$, тогда имеем

$$W = \frac{1}{2} \frac{mc^2(\gamma^2 - 1)}{\bar{\omega}}, \quad (2.5)$$

где $\bar{\omega} = \lim_{\gamma \rightarrow 1} \omega(\gamma) = \frac{eB}{mc}$ — гиromaгнитная частота.

Удобнее, однако, сложить E_0 равной энергии частицы со средней начальной частотой обращения в пучке $\omega_0 = \frac{eB}{m\gamma_0 c}$. В дальнейшем индексом "0" мы будем обозначать величины, относящиеся к частицам на орбите с частотой ω_0 (E_0, R_0, γ_0, V_0). В частности, $W_0 = 0$. Тогда имеем

$$\omega = \frac{1}{2} \frac{(mc^2)^2(\gamma^2 - \gamma_0^2)}{e\epsilon B} = \frac{1}{2} \frac{mc^2(\gamma^2 - \gamma_0^2)}{\gamma_0 \omega_0} = \frac{1}{2} \frac{mcR_0(\gamma^2 - \gamma_0^2)}{\gamma_0 \beta_0}. \quad (2.6)$$

При $\Delta\gamma = |\gamma - \gamma_0| \ll 1$, $\beta \approx 1$ получаем

$$W = mcR_0 \Delta\gamma. \quad (2.7)$$

Введенный в работах [13, 14] канонический импульс отличается от (2.7) множителем 2π ; при этом нарушается каноническая связь между энергией и функцией Гамильтона, но из-за соответствующего переопределения эффективной массы (см. ниже) это обстоятельство не влияет на результаты [13, 14], не относящиеся к анализу энергетического баланса кольца.

Эффективная масса частицы, по определению, есть

$$\bar{M} = \frac{\partial W}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{dW}{dE} \frac{dE}{d\omega} = \frac{1}{\dot{\alpha}} \left(1 - \frac{E_0}{E} \right) = \frac{E}{\omega^2} = \frac{m\gamma R^2}{\beta^2}. \quad (2.8)$$

зведем $\alpha_0 = \overline{M}_z^{-1} = -\omega_0^2/E_0$. (Это определение отличается от [13, 14] множителем $(2\pi)^{-1}$). Тогда, используя (2.4), выражение для энергии частицы можно представить в следующем виде:

$$E = \sqrt{E_0^2 + 2E_0 \omega_0 W} = -\frac{\omega_0^2}{\alpha_0^2} \sqrt{1 - \frac{2\alpha_0 W}{\omega_0}}. \quad (2.9)$$

Теперь можно написать гамильтониан для частицы в кольце:

$$H = T + V(\varphi) = -\frac{cc^2}{\alpha_0^2} \sqrt{1 - \frac{2\alpha_0 W}{\omega_0}} + 2\pi R \cdot e \int E(\varphi, t) d\varphi, \quad (2.10)$$

где $E(\varphi, t)$ представляет собой электрическое азимутальное поле возмущения, усредненное по сечению кольца и обязанное коллективному взаимодействию частиц.

Легко показать, пользуясь (2.6), что обобщенный момент W , определенный формулой (2.4), точно совпадает с обобщенным угловым моментом, определенным обычным образом:

$$W = R p_\varphi - \sum R A_\varphi^{(0)} = M - \sum R A_\varphi^{(0)} \quad (2.11)$$

(здесь $p_\varphi = mc\beta\gamma$ — азимутальный импульс) для постоянного однородного магнитного поля \mathbf{B} (тогда вектор-потенциал имеет единственную азимутальную компоненту, связанную с полем соотношением

$A_\varphi = \frac{1}{2} BR$) и при $E_0 = mc^2 (\gamma_0 = 1)$. Переход к $W(E, \beta)$ с $\gamma \neq 1$ соответствует градиентному преобразованию вектор-потенциала.

Соответственно "кинетическая" часть гамильтониана (2.10) совпадает с "кинетической" частью традиционного гамильтониана, описывающего одномерное движение в постоянном магнитном поле

$$H = \sqrt{m^2 c^2 + \frac{1}{R^2} (W + \sum R A_\varphi)^2} \quad (2.12)$$

в "квази-релятивистском" приближении $\frac{dR}{dt} \frac{1}{\omega_0 R} \ll 1$, в котором спра-

велика формула (2.2) для неравновесной частицы в поле), одномерность модели (эквивалентная пренебрежению связью между продольным и поперечным движениями) ведет к тому, что гамильтониан (2.10) остается справедливым и при учете возмущенной части вектор-потенциала $A_{\varphi}^{(1)}$: $A_{\varphi} = A_{\varphi}^{(0)} + A_{\varphi}^{(1)}(\varphi, t)$. Это связано с тем, что производная $\partial_{\varphi} A_{\varphi}^{(1)}$ не дает вклада в поле, а производная

$\partial_t A_{\varphi}^{(1)}$ учтена во втором члене (2.10), который представляет возмущенное поле электрического возмущения. Приближение одномерности требует ограничиться рассмотрением не спектров, а их разностей ($\frac{\Delta \omega}{\omega} \ll 1$, $\frac{\Delta \omega}{R} \ll 1$).

Результатиан (2.10) ведет к уравнению движения

$$\frac{\partial H}{\partial W} = \dot{\varphi} = \frac{\omega}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.13)$$

$$- \frac{\partial H}{\partial \varphi} = \dot{W} = 2\pi R \omega \epsilon \xi \quad (2.14)$$

Разложим (2.10) и (2.14) по степеням $\frac{v^2}{c^2}$ и получим

$$T = - \frac{W^2}{2} + \omega W + \frac{\omega W^2}{2} + \dots \quad (2.15)$$

$$\dot{\varphi} = \omega + \frac{\omega W}{c} + \dots \quad (2.16)$$

Представим (2.15) в виде

$$T = - \frac{1}{2} \omega^2 \xi^2 + \frac{1}{2\alpha} (\omega + \alpha W)^2 \quad (2.17)$$

Второй член в (2.17) совпадает с "кинетической" частью гамильтониана [работы /13/ и приводит к правильному уравнению движения в при-

близости $\left| \frac{d_0 \omega}{c} \right| \ll 1$, но дает неверное выражение для полной энергии. Тем не менее в теории НОМ этот член правильно описывает "плывное" движение и позволяет получить закон сохранения энергии /13/.

Разложив в (2.1) ψ и ξ в ряды Фурье по гармоникам $e^{in\omega}$:

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n(\omega + t) e^{in\omega}, \quad (2.16)$$

$$\xi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n(t) e^{in\omega},$$

так что

$$\begin{aligned} \psi_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi, \\ \xi_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi, \end{aligned} \quad (2.17)$$

получаем бесконечную систему уравнений:

$$\partial_t \psi_n(\omega, t) + in \dot{\varphi} \psi_n(\omega, t) + 2\pi R_0 \sum_m \xi_m(t) 2\omega \psi_{n-m} = 0 \quad (2.20)$$

используя связь ξ_n формулой

$$\xi_n = 2\pi \frac{e^2 c}{2\pi R_0} \bar{n}_n, \quad (2.21)$$

где $\bar{n}_n = \frac{1}{2\pi R_0} \int \psi_n e^{in\omega}$ - флуктуация линейной плотности числа частиц в пучке, получаем систему уравнений, исходную для дальнейшего рассмотрения

$$\partial_t \psi_n + \frac{in d_0}{\sqrt{1 - \frac{d_0 \omega}{c}}} \psi_n + \frac{e^2 c}{2\pi R_0} \sum_m \lambda_{n-m} 2\omega \psi_m = 0, \quad (2.22)$$

где

$$\lambda_n = \int \psi_n e^{in\omega} = 2\pi R_0 \bar{n}_n.$$

При $\left| \frac{d_0 \omega}{c} \right| \ll 1$ получаем традиционную /12-14/ форму уравнений:

$$2t \psi_n + i n (\omega_0 + \alpha \omega) \psi_n + \frac{e^2 c}{2\pi R_0} \sum_m \tilde{Z}_{n-m} \lambda_{n-m} 2\omega \psi_m = 0. \quad (2.23)$$

Функцию распределения $\psi(w, q, t)$ будем нормировать на полное число частиц в кольце N :

$$\int \psi d\omega dq = N ; \quad (2.24)$$

тогда

$$\int \psi_0(w, t) d\omega = N/2\pi. \quad (2.25)$$

§ 3. Анализ энергетического баланса кольца

Полную энергию кольца можно получить усреднением по переменным w и q (с весом $\psi(w, q, t)$) величины $T + \frac{1}{2} V$ (2.10) (фактор $1/2$ при V есть следствие двухчастичной природы взаимодействия^[13]), используя (2.18):

$$E(t) = E_p(t) + E_i(t) = \frac{2\pi \omega_0^2}{|\alpha|} \int_{w_{min}}^{\infty} \psi(w) \sqrt{1 + \frac{2|\alpha|w}{\omega_0}} d\omega - \frac{e^2 c}{2R_0} \sum_n \frac{\tilde{Z}_n''}{n} |\lambda_n|^2. \quad (3.1)$$

Здесь \tilde{Z}_n'' - мнимая часть комплексного в общем случае импеданса:

$$\tilde{Z}_n = \tilde{Z}_n' + i \tilde{Z}_n'' ; \quad \omega_{min} = -\frac{1}{2} \frac{E_0 \beta_0^2}{\omega_0}$$

(везде в дальнейшем одним штрихом и двумя штрихами будут обозначаться действительная и мнимая части комплексной величины).

x/ В дальнейшем уравнение (2.23) часто будет рассматриваться с $\omega_0 = 0$, т.е. для функции $\tilde{\psi}_n = \psi_n e^{i n \omega_0 t}$ (распределение с центром в ω_0).

Отметим, что в силу свойств фурье-разложения

$$Z_{-n} = Z_n^* ; \quad Z'_n = Z'_n ; \quad Z''_n = -Z''_n .$$

Член $(\sum_{n=1}^{\infty} |Z'_n|^2)$, получаемый при усреднении (2.10), равен нулю вследствие антисимметрии относительно замены $n \rightarrow -n$, что естественно ввиду требования вещественности выражения для энергии (3.1).

Строго говоря, в рамках гамильтонова формализма в одномерной модели описание радиационной неустойчивости, которая определяется действительной частью импеданса Z'_n (см. ниже), невозможно. Однако уравнение (2.22) фактически имеет более общий характер и область применимости; импеданс Z_n вычисляется независимым образом, при этом модель в этом пространстве. Расширение формальной области применимости (3.1) за счет введения в рассмотрение Z'_n дает возможность рассматривать нестационарные процессы и описывать излучение.

В начальный момент времени, когда поля возмущений равны нулю, энергия кольца есть

$$E(0) = N \frac{w_0^2}{\lambda^2} = N |z_0| \langle w^2 \rangle , \quad (3.2)$$

где

$$\langle w^2 \rangle = \int w^2 \psi^2(w) dw / \int \psi^2(w) dw = \frac{2}{\lambda^2} \int w^2 \psi^2(w) dw ; \quad (3.3)$$

$\langle w^2 \rangle = \langle w^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ - начальный полуразброс пучка (мы считаем, что начальное распределение $\psi^2(w)$ симметрично по w , так что $\int w \psi^2(w) dw = 0$).

В пределе бесконечно тонкого кольца ($\langle w^2 \rangle = 0$) его энергии $E(0) = N |z_0|^2 \gamma_0$ согласно (2.15).

Для выяснения вопроса о сохранении энергии кольца, определяемой выражением (3.1), вычислим производную dE/dt , воспользовавшись уравнениями (2.2). Имеем:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2\pi\omega_0}{|z_0|} \int \sqrt{1 + \frac{2|u_0|W}{\omega_0}} \partial_u \psi_0 dW - \frac{e^2 c}{2R_0} \sum_n \frac{2^n}{n!} \lambda_n \lambda_{-n} + \lambda_{-1} + \lambda_1 \quad (3.4)$$

В силу (2.22)

$$\partial_u \psi_0 = -\frac{e^2 c}{2\pi R_0} \sum_n z_n \lambda_n \partial_u \psi_0 \quad (3.5)$$

интегрирование (2.22) по W дает

$$\frac{dz_n}{dt} = -in\omega_0 \int \left(1 + \frac{2|u_0|W}{\omega_0} \right)^{-\frac{1}{2}} \psi_0 dW \quad (3.6)$$

Подставляя (3.5) и (3.6) в (3.4) и интегрируя по частям в первом члене, получим

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{e^2 c \omega_0}{2R_0} \left\{ \sum_n z_n \lambda_n \int \left(1 + \frac{2|u_0|W}{\omega_0} \right)^{-\frac{1}{2}} \psi_0 dW - \right. \\ &\quad \left. - i \left[\sum_n z_n \lambda_n \left(1 + \frac{2|u_0|W}{\omega_0} \right)^{-\frac{1}{2}} \psi_0 dW - \sum_n z_n \lambda_n \left(1 + \frac{2|u_0|W}{\omega_0} \right)^{\frac{1}{2}} \psi_0 dW \right] \right\} = \\ &= \frac{e^2 c \omega_0}{2R_0} \left\{ \sum_n z_n \lambda_n \left[\left(1 + \frac{2|u_0|W}{\omega_0} \right)^{-\frac{1}{2}} \psi_0 + \lambda_n \left(1 + \frac{2|u_0|W}{\omega_0} \right)^{\frac{1}{2}} \psi_0 dW \right] + \right. \\ &\quad \left. + i \sum_n z_n \lambda_n \left[1 + \frac{2|u_0|W}{\omega_0} \right]^{\frac{1}{2}} \psi_0 dW \right\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В случае $z_n' > 0$, $z_n'' < 0$ неустойчивость называется неустойчивостью отрицательной массы (НОМ); в случае $z_n' = 0$, $z_n' \sim z_n''$ - продольной неустойчивостью, и в нее вносят вклад как действительная, так и мнимая части импеданса. Для НОМ из (3.7) получаем, заменяя во второй сумме (3.7) $n \rightarrow -n$:

$$\frac{dE}{dt} = 0,$$

т.е. в этом случае энергия кольца сохраняется (сходный результат получен в [13]).

При $Z_n \neq 0$ имеем

$$\frac{dE}{dt} = \frac{e^2 c \omega_0}{R_0} \sum_n Z_n' \lambda_n \left(1 + \frac{g' \omega_0 / \omega}{c \omega_0}\right)^{-2} \psi_n \omega. \quad (3.9)$$

Вычисления Z_n для кольца в свободном пространстве и камерах [5, 16] (подробнее ниже) показывают, что действительная часть всегда отрицательна. Следовательно, (3.9) описывает уменьшение энергии кольца за счет потерь на излучение, т.е. мощность излучения, которая определяется только вещественной частью импеданса.

При $\frac{g' \omega_0 / \omega}{c \omega_0} \ll 1$ использование приближенных соотношений (2.15) и (2.16) (уравнения (2.23) и приближенного гамильтониана) приводит к двум независимым дифференциальным соотношениям для моментов функции распределения:

$$\frac{d}{dt} \int \omega \psi_n \omega = \frac{\omega_0 e^2 c}{2\pi R_0} \sum_n Z_n' |\lambda_n|^2; \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{|\omega_0|}{2} \int \omega^2 \psi_n \omega + \frac{e^2 c}{4\pi R_0} \sum_n \frac{Z_n''}{\omega} |\lambda_n|^2 \right] = \\ = \frac{e^2 c}{2\pi R_0} |\omega_0| \sum_n Z_n' \lambda_n \int \omega \psi_n \omega. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Выражение (3.10) описывает изменение среднего момента кольца за счет излучения, а (3.11) - изменение суммы "кинетической" (тепловой) и потенциальной энергии кольца. Соотношение (3.10) имеет наглядный смысл: мощность излучения пропорциональна произведению "квадрата тока" $|\lambda_n|^2$ на "сопротивление" Z_n' . Величина $\int \omega \psi_n \omega$

пропорциональна "сдвигу" среднего радиуса кольца (распределения по ω) в сторону уменьшения за счет потерь энергии. Поэтому в случае $Z_n' = 0$, если начальное распределение симметрично $\{\omega \psi_n(\omega=0)\}$, оно остается таким же и в дальнейшем.

§ 4. Некоторые результаты линейной теории

При дальнейшем построении теории используется малый параметр $\nu_f \ll 1$. Здесь $\nu = \frac{e^2}{m^2 c^2} \frac{N}{2\pi R_0}$ - параметр Будкера (погонный электрон), $\gamma_0 = E_0 / m c^2$: в линейном приближении неустойчивость n -й гармоники имеет порог, связанный с затуханием Ландау [12, 13].

$$\left(\frac{\Delta E}{E} \right)_{cr} = \sqrt{\left| \frac{Z_n}{n Z_1} \right| \frac{\nu}{\gamma_0^2}} \quad (4.1)$$

($Z_1 = \frac{4\pi}{c^2} = 377 \text{ Ом}$ - импеданс свободного пространства).

Если начальный разброс в пучке значительно меньше критического, гидродинамический инкремент неустойчивости обычно [12-14] записывают в виде

$$\gamma_n = n \omega_0 \sqrt{\left| \frac{Z_n}{n Z_1} \right| \frac{\nu}{\gamma_0^2}} \quad (4.2)$$

Это выражение справедливо для НОМ [13] ($Z_n' = 0, Z_n'' < 0$); в общем случае необходима более точная формула. Для ее получения рассмотрим линеаризованное уравнение (2.23):

$$\partial_t \psi_n = -i n (\omega_0 + \Delta_0 \omega) \psi_n - b_n \lambda_n \partial_w \psi_0 \quad (4.3)$$

$$(b_n = \frac{e^2 c}{2\pi R_0} Z_n).$$

Будем искать решение в виде $\psi_n = \bar{\psi}_n e^{-i(\omega_n + n\omega_0)t}$. Тогда из (4.3) имеем:

$$\gamma_n = -i \sigma_n \bar{\lambda}_n \frac{\partial \varphi_n / \partial \omega}{\omega_n - n \sigma_n \omega} ; \quad (4.4)$$

интегрируем по ω , получаем

$$I = -i \sigma_n \int \frac{\partial \varphi_n / \partial \omega}{\omega_n - n \sigma_n \omega} \approx i \sigma_n n \sigma_0 \frac{N}{5 \sqrt{\omega_0}} = i \frac{n \sigma_0}{\sigma_0} \frac{2V}{\gamma_0} \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2} \quad (4.5)$$

при $n \sigma_n \omega \ll \omega_n$ (для распределения с малой шириной $\langle \omega_0 \rangle$, т.е. пучка с малым разбросом).

Отсюда следует выражение для инкремента ($\omega_n \rightarrow \omega_n + i \delta_n$)

$$\gamma_n = n \omega_0 \sqrt{\frac{2V}{\gamma_0}} \sqrt{\frac{|Z_n'| - Z_n''}{2n Z_0}} , \quad (4.6)$$

которое переходит в (4.2) при $Z_n' = 0$. Видно, что учет действительной части импеданса приводит к меньшему значению инкремента по сравнению с (4.2). Использование выражения (4.5) особенно важно при исследовании поведения в реальных камерах (например, в резонаторе), ибо показано^{/16/}, что в этих случаях импеданс может сильно меняться в окрестности резонансов, и в частности, может менять знак. При

$Z_n' < 0, Z_n'' > 0$ неустойчивости нет вообще, как это следует из (4.6), но не следует из (4.2); при $Z_n' > 0, Z_n'' > 0$ инкремент сильно уменьшается. Соответственно необходимо переопределить и выражение для порога неустойчивости:

$$\left(\frac{\Delta E}{E} \right)_{cr} = \sqrt{\frac{2V}{\gamma_0}} \sqrt{\frac{|Z_n'| - Z_n''}{n Z_0}} . \quad (4.7)$$

При $Z_n'' > 0$ и $|Z_n'| < |Z_n''|$ формула (4.7) дает сильное уменьшение порога, но становится менее точной. Это связано с тем, что в данном случае относительная расстройка между действительной частью частоты возмущения и n -й гармоникой частоты обращения боль-

ше полуширины распределения по частотам $\frac{\Delta \omega_0}{\omega_0}$. Поэтому механизм затухания Ландау может быть неэффективным из-за экспоненциально малого числа частиц для пучка с гауссовским распределением /17/.

Вблизи порога неустойчивости инкремент приблизительно дается выражением /12/

$$\begin{aligned} \gamma_n &\approx -n (\Delta \omega - \Delta \omega_{cr}), \\ (\Delta \omega_{cr} &= \omega_0 \left(\frac{\Delta E}{E} \right)_{cr}). \end{aligned} \quad (4.8)$$

В предельных случаях монохроматического пучка ($\Delta \omega \ll \Delta \omega_{cr}$) и пучка вблизи порога ($\Delta \omega \approx \Delta \omega_{cr}$) можно получить /5,12/ оценки темпа развития неустойчивости, уровня возбуждаемых полей и потери направленной энергии пучка на начальной стадии развития неустойчивости. В частности, для кольца в свободном пространстве ($|Z_u/nZ_0| \approx n^{-2}$) оценка амплитуды возбуждаемых полей, полученная путем экстраполяции предельных выражений, такова:

$$E_u \approx \frac{m c^2 v}{e R_0} n^{1/2}. \quad (4.9)$$

В наиболее интересном промежуточном режиме аналитически продвигаться трудно (что связано с отсутствием малого параметра), и ясное представление о характере развития неустойчивости может дать только численный эксперимент.

§ 5. Качественное исследование исходной системы

Для повышения достоверности результатов численных исследований и облегчения их интерпретации желательно выявить некоторые качественные особенности поведения системы (2.23) аналитическими средствами.

1) Рассмотрим усеченную систему (2.23) для $n = 0, 1$ (рассуждения легко обобщаются для случая произвольного n) и перепишем ее в действительном виде:

$$\begin{cases} \partial_t \psi_0 = 2(\alpha_1 \partial_w \psi_1 + \beta_1 \partial_w \psi_0), \\ \partial_t \psi_1 = \alpha_0 w \psi_1 + \alpha_1 \partial_w \psi_0, \\ \partial_t \psi_2 = \alpha_0 w \psi_2 + \beta_1 \partial_w \psi_1. \end{cases} \quad (5.1)$$

Здесь

$$\alpha_1 = \sigma_1 \lambda - \sigma_1 \lambda^{-1}; \quad \beta_1 = \lambda^{-1} - \lambda; \quad \alpha_0 = \frac{\epsilon_1^2}{2\pi R}, \quad \gamma_n.$$

Продифференцируем 1-е уравнение (5.1) еще раз по времени и подставим в него выражения для $\partial_t \psi_1, \partial_t \psi_2$ из 2-го и 3-го уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \psi_0(w) &= \bar{\epsilon}^2 \partial_w^2 \psi_0 - \\ & 2(\partial_t \alpha_1 \partial_w \psi_1 + \partial_t \beta_1 \partial_w \psi_0) - 2\alpha_0 [\alpha_1 \partial_w(w \psi_1) + \beta_1 \partial_w(w \psi_0)]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь

$$\bar{\epsilon}^2 = 2(\alpha_1^2 + \beta_1^2) = 2(\sigma_1^2 + \sigma_1^{-2}) \lambda^2 \lambda^{-2} = 2|\sigma_1|^2 \lambda^2.$$

В общем случае $n > 1$ $\bar{\epsilon}^2 = \sum 2|\sigma_n|^2 |\lambda|^{-2}$.

Уравнение (5.2) нам нужно для того, чтобы качественно описать поведение функции $\psi_0(w, t)$ в начальный период развития неустойчивости, когда поля невелики и можно пренебречь нелинейными членами в системе (2.23) (для случая $n = 1$ они автоматически выпадают).

Второй член в правой части (5.2) можно привести к виду, аналогичному виду первого члена, если, предполагая выполненным дисперсионное соотношение линейной теории, выразить $\psi_{n \neq 0}(w)$ через $\psi_0(w)$ из (2.23) (в пренебрежении нелинейными членами):

$$\psi_n = -i \frac{\lambda_n \sigma_n \partial_w \psi_0}{\omega_n - \alpha_0 w}. \quad (5.3)$$

Это соотношение справедливо при $t \rightarrow 0$ и с хорошей точностью - на линейной стадии развития неустойчивости. При $\omega_0 \gg \text{in } \omega_0$ и $t_0 \sim 2\pi/\omega_0$, и тогда второй член правой части (5.2) можно записать в виде $\bar{c}_1 \omega_0^2 \psi_0$. Можно показать, что третий член правой части (5.2) меньше первых двух, и мы им пренебрежем. Тогда (5.2) принимает вид

$$\partial_t^2 \psi_0 - \omega_0^2 \psi_0 = \omega_0^2 \omega^2 \psi_0, \quad (5.4)$$

где $\omega_0^2 = \omega^2 + \bar{c}_1$.

Формальное решение (5.4) есть (при $t=0, \psi_0 = \psi_0, \dot{\psi}_0 = \dot{\psi}_0$)

$$\psi_0(w, t) = \frac{\int_0^{\omega_0^2 - \omega^2} \omega'^2 c_1(t) + \int_0^{\omega^2} \omega'^2 c_2(t)}{2} \cdot \frac{1}{\omega_0} \int_0^{\omega_0^2 - \omega^2} \psi_0(\omega', t) + \dots \quad (5.5)$$

здесь $\int_0^{\omega^2} \omega'^2 c_1(t) = \int_0^{\omega^2} \omega'^2 c_2(t)$; $\psi_0(\omega, t) = \psi_0(\omega, 0) e^{i\omega t}$

второй член (5.5) всегда мал по сравнению с первым

($\bar{c}_1^2 = 2 \sum \lambda_j^2 |c_{0j}|^2$ быстро растет с развитием неустойчивости).

Из (5.5) следует, что начальное распределение $\psi_0(w)$ с течением времени с нарастающей скоростью "расползается" симметричным образом на два подобных распределения, т.е. кольцо расщепляется на два кольца.

Вышеприведенные соображения, конечно, носят весьма грубый и качественный характер; их оправданием может служить тот факт, что описанное явление действительно наблюдалось в более или менее явно выраженной форме практически во всех численных экспериментах (см. ч. II). Более ярко этот эффект проявляется при малых начальных разбросах (в сильно надкритическом режиме, в соответствие с приближением

и максимално ярко - в случае $\omega = \omega_0$, когда нет излучения, тогда функция распределения быстро становилась "двугорбой", оставаясь совершенно симметричной относительно центра распределения. Такое поведение $\psi_0(\omega)$ сохранялось довольно долго и на нелинейной стадии развития неустойчивости, что представляется довольно удивительным.

На самом деле, конечно, кольцо в целом не разваливается на два кольца - оно разбивается в результате неустойчивости НОМ на отдельные санчи, плотность распределения электронов в которых сильно понижена на среднем радиусе; при усреднении по азимуту мы получаем вышеописанную картину.

2) Уравнение (2.1) есть бессударительное кинетическое уравнение влизова, и исследование его численными методами приводит к специфическим трудностям, которые мы сейчас рассмотрим. Проинтегрируем формально систему (2.23) в линейном приближении:

$$\frac{d\psi_0(\omega, t)}{dt} = -\nu \psi_0(\omega, t) + \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega, \omega') \psi_0(\omega', t) d\omega' + \dots \quad (5.6)$$

Здесь χ - безразмерный обобщенный момент, введенный ниже для целей численного исследования, $\nu = \nu_0 / \omega_0$. Из уравнения (5.6) следует, что решение имеет осциллирующую часть с длиной волны

$\lambda = \nu_0^{-1}$, уменьшающейся со временем. Поэтому время счета на ЭВМ принципиально ограничено (при применении разностных методов), т.к. λ не может быть меньше шага по x . Нелинейные эффекты приводят к росту амплитуды осцилляций, к появлению захваченных частиц, что, в свою очередь, вызывает осцилляции на функции распределения. Это явление наблюдалось в работе /14/ (где было неверно интерпретировано) и во всех наших численных экспериментах, в ряде случаев

(при больших временах) приводит к сильному искажению формы функции распределения. Упомянутые осцилляции проявляются только на микроскопическом уровне описания и связаны с тенденцией функции распределения создавать с течением времени резкие градиенты в фазовом пространстве при отсутствии вязкости; они не должны давать вклад в макроскопические, измеряемые величины, даваемые моментами функции распределения. Отметим, что член типа $\varphi_2 e^{-\gamma_2 t}$ может описывать реальное явление "плазменного эха", наблюдаемое [15] экспериментально.

Для подавления колебаний на границах области изменения функции распределения были опробованы различные модели диссипативных членов, вводимые в правую часть уравнений (2.23). Мы остановились на затухании вида $\nabla \cdot (\chi \nabla f) - \chi \nabla^2 f + \chi \nabla \cdot (f \nabla \chi)$, где χ изменялось от 10^{-4} до 10^{-1} , а $\chi = \chi(x, y)$ чаще всего выбиралась линейной по x и y . При этом второй член в (5.6) заменяется на $\chi \nabla^2 f$. В ряде случаев введение затухания эффективно подавляло осцилляции, но одновременно приводило к замедлению процесса развития неустойчивости, оставляя его характер качественно неизменным.

Автор искренне благодарен Ю.И.Алексахину, Н.К.Казаринову и Э.А.Перельштейну за ценные обсуждения, Е.И.Жидкову и М.Г.Мещерякову за поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.И.Векслер, В.П.Саранцев и др. Коллективное линейное ускорение ионов. Материалы конференции по ускорителям, Кембридж, США, 1967.
2. А.Г.Бонч-Осмоловский и др. ОИЯИ, Р9-4138, Дубна, 1968.
3. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев. АЭ, 7, 549, 1959; C.Nielsen, A.Sessler, K.Symon. В сб. "Накопление релятивистских частиц", Атомиздат, М., 1963.
4. K.Wardis. Symposium. ERL, Berkeley, 1968, p. 434;
А.В.Гапонов. Изв. ВУЗов, Радиофизика, II, 836, 1959.
5. А.Г.Бонч-Осмоловский, Э.А.Перельштейн. Изв.ВУЗов, Радиофизика, XIII, IO8I, IO89, 1970.
6. J.Möle, D.J.Lasslett, A.M.Sessler. Report on Dubna Symposium. Preprint LBN-1062, 1972.
7. В.Г.Маханьков, М.Г.Мещеряков. АЭ, 36, 1974.
8. Б.С.Гетманов, В.Г.Маханьков, М.Г.Мещеряков. Доклад на Всесоюзном собрании по ускорителям заряженных частиц, Москва, 1974.
Аннотация докладов. Препринт ЦУИ Атоминформ, М., 1974.
9. V.W.Stalichard, R.V.Weiss-bull. Amer. Phys. Soc Ser. 2, 13, 114, 1968.
10. U.Schumacher et al. Report on IV All Union National Conference on particle accelerators, Moscow, 1974.
11. A.Faltens et al. Int. Conf. on Acceler. of charged part. Stanford, 1973.
12. А.Г.Бонч-Осмоловский, В.П.Цытович. Труды ФИАН, 66, 144, 1973.
13. C.Pellegrini, A.M.Sessler. Preprint LBL, ERAN-203, 1973.

14. B.N.Shchinov et al. Plasma Phys. 12, 211, 1973.
15. С.Шимару. Основные принципы физики плазмы. Атомиздат, 1975.
16. Ю.И.Алексахин, И.Л.Коронев, П.А.Кдин. ОИЯИ, Р9-7065, Дубна, 1973;
Ю.И.Алексахин, В.П.Саранцев. ОИЯИ, Р9-7357, Дубна, 1973.
17. V.K.Neil, A.M.Sessler. Rev. of Sci Instr., 25, 429, 1965.

Дукопись поступила в издательский отдел
23 октября 1976 года.