ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р9 - 9233

Ким Ен Зун, К.А.Решетникова

ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВОДА С МОДИФИЦИРОВАННОЙ СПИРАЛЬЮ

1975

P9 - 9233

Ким Ен Зун, К.А.Решетникова

ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВОДА С МОДИФИЦИРОВАННОЙ СПИРАЛЬЮ

Направлено в ЖТФ

Введение

В коллективном методе ускорения электронное кольцо, содержащее ионы, после вывода из компрессора должно ускоряться системой резонаторов. Для ввода кольца в нужную фазу ускоряющего поля резонатора предусмотрена фазирующая система типа группирующей секции линейного ускорителя на бегущей волне /1/. Основное назначение этой системы состоит в том, чтобы обеспечить коэффициент захвата $\frac{\Delta\phi}{2\pi} \approx \frac{1}{4}$, где $\Delta\phi$ - диапазон фаз, используемых для ускорения. Исследования по динамике частиц показали возможность использования для целей фазировки спирального волновода /2/, работающего на той же частоте, что и ускоряющие резонаторы, и обеспечивающего малые фазовые скорости электромагнитной волны.

В связи со сравнительно большой длиной системы /$L \approx 6$ *м*/ для обеспечения механической прочности отдельных секций был выбран вариант волновода типа модифицированной спирали с кожухом /см. *рис. 1*/. Впервые предложенная в работе /3/, модифицированная спираль без кожуха экспериментально исследована в работе /4/, в работах /5,6/ использовалась спираль с кожухом для частот $f > 300$ *мГц* и сравнительно малых диаметров спирали /$2a \approx 2,4$ *см*/. Для целей коллективного метода требуются дисперсионные характеристики спирали для частоты $f \approx 150$ *мГц* и размеров волновода, пригодных для пропускания электронного кольца /$2a \approx$ ≈ 10-12 *см*/. Эта задача стимулировала постановку теоретических и экспериментальных исследований дисперсионных свойств модифицированной спирали.

Дисперсионные характеристики модифицированной спирали теоретически изучались в ряде работ /см./3,7,8/ /. В работах /3,7/ поля выражаются через токи, в связи с чем вводятся предположения о том или ином направлении токов, протекающих по спирали. В работе /8/ рассматриваются лишь азимутально-симметричные волны. Трудности получения дисперсионного уравнения в достаточно общем виде состоят здесь в наличии азимутальной несимметрии и двойной периодичности /по ϕ и z / при довольно сложных граничных условиях.

В настоящей работе предложен вывод дисперсионного уравнения электродинамическим способом с учетом указанных особенностей системы.

Вывод дисперсионного уравнения

Исходная система уравнений состоит из уравнений для составляющих векторного потенциала:

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_r}{\partial t^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_r}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_r}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2}-\frac{A_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}=0 \qquad /1a/$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_\phi}{\partial t^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_\phi}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 A_\phi}{\partial z^2}-\frac{A_\phi}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial \phi}=0 \qquad /1в/$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 A_z}{\partial \phi^2}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}=0. \qquad /1c/$$

Для вихревой части поля имеем:

$$\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad \vec{H}=\mathrm{rot}\,\vec{A}.$$

Рассмотрим решения уравнений /1/ для спирали, изображенной на *рис. 1*. Здесь a_1 - внутренний радиус кольца, a_2 - внешний радиус кольца, b - радиус кожуха, $\Delta=\phi_0$ - размер перемычки по ϕ, $S_0=\phi_0 a_1$, $L-\ell$ - размер кольца по z, $D=2L$ - период системы, ℓ - расстояние между кольцами.

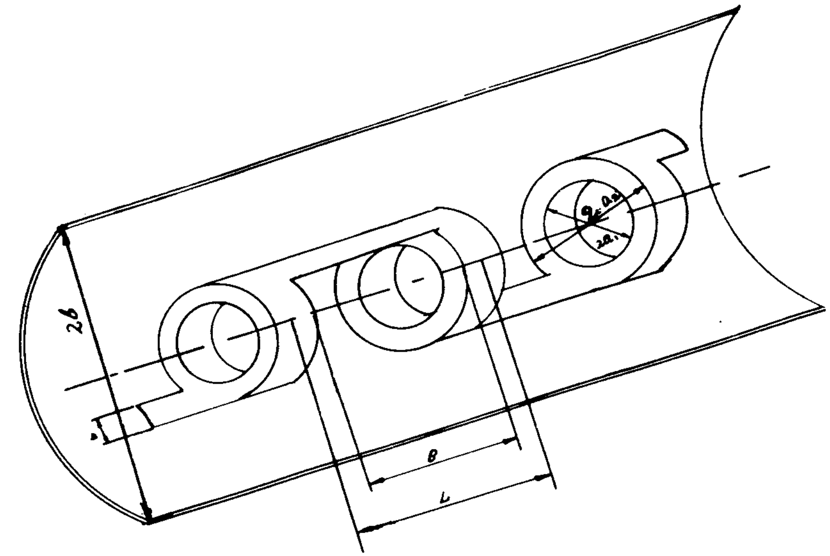

Рис. 1. Волновод с модифицированной спиралью.

Рассмотрим три области: $r\le a_1$, $a_1<r\le a_2$, $a_2<r\le b$. Решения уравнений /1/ в первой и третьей областях будем искать в виде:

$$\vec{A}=\vec{A}(r)\,e^{i(\omega t-k_{nm}z-m\phi)}, \quad \text{где} \quad k_{nm}=k_0+\frac{2\pi}{D}(n+m),$$

$$k_0=\frac{k}{\beta}, \quad k=\frac{\omega}{c}, \quad \beta=\frac{V}{c},$$

/V - фазовая скорость, ω - частота, c - скорость света, n,m - целые числа/. Такое представление для фазы удовлетворяет основному свойству симметрии модифицированной спирали: $(r,\phi,z)\to(r,\phi\pm\pi, z+D/2)$ т.е. при смещении по z на половину периода фаза по ϕ меняется на π /3/. Во второй области решения ищем в виде:

$$A_r = iA_r(r)\cos q\phi \sin gz e^{i\omega t}, \quad A_\phi = A_\phi(r)\sin q\phi \sin gz e^{i\omega t},$$

$$A_z = A_z(r)\cos q\phi \cdot \cos gz\, e^{i\omega t},$$

где $q = q(s)$, $g = g(p,s)$, p,s **- целые числа. В результате, получаем следующую систему уравнений /для I и III областей/:**

$$\frac{\partial^2 A_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_0}{\partial r} - \kappa^2_{nm} A_0 - \frac{(m-1)^2}{r^2} A_0 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_1}{\partial r} - \kappa^2_{nm} A_1 - \frac{(m+1)^2}{r^2} A_1 = 0, \qquad /2/$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial r} - \kappa^2_{nm} A_z - \frac{m^2}{r^2} A_z = 0.$$

Здесь $A_0 = A_\phi - iA_r$, $A_1 = A_\phi + iA_r$, $\kappa^2_{nm} = k^2_{nm} - k^2$. **Аналогичную систему уравнений получаем и для второй области с заменой:** $m = q$, $\kappa_{nm} = \chi_{ps}$, $\chi^2_{ps} = g^2_{ps} - k^2$.
В результате, получаем следующие решения.
В области I:

$$A_r = i\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}[b_{nm}I_{m-1}(x_1) - \bar{b}_{nm}I_{m+1}(x_1)]e^{-i(k_{nm}z+m\phi)}, \qquad /3a/$$

$$A_\phi = \sum [b_{nm}I_{m-1}(x_1) + \bar{b}_{nm}I_{m+1}(x_1)]e^{-i(k_{nm}z+m\phi)}, \qquad /3в/$$

$$A_z = \sum_{n,m} a_{nm}I_m(x_1)e^{-i(k_{nm}z+m\phi)}. \qquad /3c/$$

Здесь $x_1 = \kappa_{nm} r$.
В области II:

$$A_r = -\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\{[\bar{c}_{ps}I_{q-1}(x_2) - \bar{\bar{c}}_{ps}I_{q+1}(x_2)] + [\bar{d}_{ps}K_{q-1}(x_2) - \bar{\bar{d}}_{ps}K_{q+1}(x_2)]\}\cos q\phi \sin g_{ps}z, \qquad /4a/$$

$$A_\phi = \sum_{p=0,\, s=1}\{[\bar{c}_{ps}I_{q-1}(x_2) + \bar{\bar{c}}_{ps}I_{q+1}(x_2)] + [\bar{d}_{ps}K_{q-1}(x_2) + \bar{\bar{d}}_{ps}K_{q+1}(x_2)]\}\sin q\phi \sin g_{ps}z. \qquad /4в/$$

$$A_z = \sum_{p=0,\, s=1}\{\bar{a}_{ps}I_q(x_2) + \bar{\bar{a}}_{ps}K_q(x_2)\}\cos q\phi \cdot \cos g_{ps}z. \qquad /4c/$$

Здесь

$$q = \frac{\pi}{2(\pi - \phi_0)}(2s-1), \quad s = 1,2,\dots,$$

$$g_{ps} = \frac{2\pi}{\ell}(p+2s), \quad p = 0,1$$

$$x_2 = \chi_{ps} r.$$

Решения во второй области удовлетворяют граничным условиям: $A_z = A_r = 0$ **при** $|\phi| = \pi - \phi_0$, $|z| < \frac{\ell}{2}$ **и** $A_r = 0$ **при** $|z| = \frac{\ell}{2}$, $0 < |\phi| \le (\pi - \phi_0)$.
В области III:

$$A_r = i\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\{c_{nm}[I_{m-1}(x_3) - \ell_{nm}I_{m+1}(x_3)] + d_{nm}[K_{m-1}(x_3) - h_{nm}K_{m+1}(x_3)]\}e^{-i(k_{nm}z+m\phi)}, \qquad /5a/$$

$$A_\phi = \sum_{n,m}\{c_{nm}[I_{m-1}(x_3) + \ell_{nm}I_{m+1}(x_3)] + d_{nm}[K_{m-1}(x_3) + h_{nm}K_{m+1}(x_3)]\}e^{-i(k_{nm}z+m\phi)}, \qquad /5в/$$

$$A_z = \sum_{n,m}\{a'_{nm}[I_m(x_3) + G_{nm}K_m(x_3)]\}e^{-i(k z+m\phi)}, \qquad /5c/$$

где $x_3 = \kappa_{nm} r$ **/** $I(x)$, $K(x)$ **- модифицированные функции Бесселя/. Здесь везде опущен множитель** $e^{i\omega t}$.

Граничные условия на границах раздела сводятся, как обычно, к непрерывности тангенциальных компонент электромагнитного поля при переходе из одной области в другую и к равенству нулю тангенциальной компоненты электрического поля на идеально проводящей поверхности:

$$r = b \qquad \dot{A}_{z3} = 0 \qquad \dot{A}_{\phi 3} = 0 \,, \qquad /6/$$

Точка означает дифференцирование по времени.

$r = a_2$,

$$\dot{A}_{z_2} = \dot{A}_{z_3} \,, \quad \dot{A}_{\phi_2} = \dot{A}_{\phi_3} \qquad /7а/$$

$$\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)_2 = \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)_3 \qquad \text{при } |z| < \frac{\ell}{2} \qquad /7в/$$

$$\left[\frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right]_2 = \left[\frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right]_3 \qquad |\phi| < \pi - \phi_0 \qquad /7с/$$

$$\dot{A}_{z_3} = 0 \,, \quad \dot{A}_{\phi_3} = 0 \qquad \text{при } \ell/2 \le z \le L/2 \,, \quad \pi - \phi_0 \le |\phi| \le \pi \qquad /7d/$$

$r = a_1$,

$$\dot{A}_{z_1} = \dot{A}_{z_2} \,, \quad \dot{A}_{\phi_1} = \dot{A}_{\phi_2} \qquad /8а/$$

$$\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)_1 = \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)_2 \qquad \text{при } |z| < \ell/2, \qquad /8в/$$

$$\left[\frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right]_2 = \left[\frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right]_3 \qquad |\phi| < \pi - \phi \qquad /8с/$$

$$\dot{A}_{z_1} = 0 \,, \quad \dot{A}_{\phi_1} = 0 \qquad \text{при } \frac{\ell}{2} \le |z| \le \frac{L}{2} \,, \quad \pi - \phi_0 \le |\phi| \le \pi \,. \qquad /8d/$$

Из условия /6/ получим:

$$G_{nm} = -\frac{I_m(x)}{K_m(x)} \,, \quad \ell_{nm} = -\frac{I_{m-1}(x)}{I_{m+1}(x)} \,, \quad h_{nm} = -\frac{K_{m-1}(x)}{K_{m+1}(x)} \,, \qquad /9/$$

где $x = \kappa_{nm} b$. Используя соотношение $\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$, найдем некоторые связи коэффициентов:

$$b_{nm} - \bar{b}_{nm} = \frac{k_{nm}}{\kappa_{nm}} a_{nm} \,, \qquad /10а/$$

$$\bar{\bar{c}}_{ps} - \bar{c}_{ps} = \frac{g_{ps}}{\chi_{ps}} \bar{a}_{ps} \,, \quad \bar{d}_{ps} - \bar{\bar{d}}_{ps} = \frac{g_{ps}}{\chi_{ps}} \bar{\bar{a}}_{ps} \,, \qquad /10в/$$

$$c_{nm} = \frac{k_{nm}}{\kappa_{nm}(1-\ell_{nm})} a'_{nm} \,, \quad d_{nm} = -\frac{k_{nm} G_{nm}}{\kappa_{nm}(1-h_{nm})} a'_{nm} \,. \qquad /10с/$$

Из граничных условий /7/, используя известную методику [9], получим систему для определения коэффициентов $\bar{a}_{ps}$, $\bar{c}_{ps}$, $\bar{d}_{ps}$, $\bar{\bar{a}}_{ps}$. С этой целью подставим /4в/, /4с/, /5в/ и /5с/ в /7а/, умножим первое соотношение на $\cos q\phi \cos g_{ps} z$, второе - на $\sin q\phi \sin g_{ps} z$ и проинтегрируем по z от $-L/2$ до $L/2$ и по ϕ от $-\pi$ до π с учетом условия /7d/. Далее, подставляем /4/ и /5/ в /7в/, /7с/, умножаем соответственно на те же множители и интегрируем по z от $-\ell/2$ до $\ell/2$ и по ϕ от $-(\pi-\phi_0)$ до $(\pi-\phi_0)$. В результате получим:

$$\bar{a} I_q + \bar{\bar{a}} K_q = \sum_{n,m} a'_{nm} f_1 \cdot D_{nmps} \qquad /11а/$$

$$\frac{g}{\chi}(\bar{a} I_{q+1} - \bar{\bar{a}} K_{q+1}) + (\bar{c} I'_q - \bar{d} K'_q) = \sum_{n,m} a'_{nm} f_2 C_{nmps} \,, \qquad /11в/$$

$$\bar{a}\left(-\chi I'_q + \frac{g^2}{\chi} I_{q+1}\right) + \bar{\bar{a}}\left(-\chi K'_q - \frac{g^2}{\chi} K_{q+1}\right) - \frac{2qg}{\chi a_2}(\bar{c} I_q - \bar{d} K_q) = \sum_{n,m} a'_{nm} f_3 D'_{nmps} \,, \qquad /11с/$$

$$g(\bar{a} I_q + \bar{\bar{a}} K_q) + 2\chi(\bar{c} I_q - \bar{d} K_q) = \sum a'_{nm} f_4 C'_{nmps} \,. \qquad /11d/$$

Здесь у коэффициентов $\bar{a}$, $\bar{\bar{a}}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ опущены значки p,s. Аргумент функций Бесселя I_q, K_q равен $(\chi_{ps} a_2)$. Штрих означает дифференцирование по аргументу. Введены следующие обозначения:

$$f_1 = I_m + G_{nm} K_m,$$

$$f_2 = \frac{k_{nm}}{\kappa_{nm}} \left[\frac{I_{m-1} + \ell_{nm} I_{m-1}}{1 - \ell_{nm}} - G_{nm} \frac{K_{m-1} + h_{nm} K_{m+1}}{1 - h_{nm}} \right],$$

$$f_3 = -\kappa_{nm} [I'_m + G_{nm} K'_m] + \frac{k^2_{nm}}{\kappa_{nm}} \left[\frac{I_{m-1} - \ell_{nm} I_{m+1}}{1 - \ell_{nm}} - \right.$$

$$\left. - G_{nm} \frac{K_{m-1} - h_{nm} K_{m+1}}{1 - h_{nm}} \right], \qquad /12/$$

$$f_4 = k_{nm} \left[\frac{(1 + \ell_{nm})}{(1 - \ell_{nm})} I_m + G_{nm} \frac{(1 + h_{nm})}{(1 - h_{nm})} K_m \right],$$

$$D_{nmps} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k_{nm} z + m\phi)} \cos(q\phi) \cos(g_{ps} z)\, d\phi dz,$$

$$/13/$$

$$C_{nmps} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k_{nm} z + m\phi)} \sin(q\phi) \sin(g_{ps} z)\, d\phi s z.$$

Коэффициенты D', C' аналогичны D, C, но в пределах по z от $\ell/2$ до $\ell/2$, по ϕ от $-(\pi - \phi_0)$ до $(\pi - \phi_0)$. Аргумент функций Бесселя с индексом m здесь равен $(\kappa_{nm} \cdot a_2)$. Определив коэффициенты $\bar{a}$, $\bar{\bar{a}}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ из /11/, подставим их в соотношения, аналогичные /11a/ - /11c/, но полученные из граничных условий /8/, т.е. при $r = a_1$. В результате, для нахождения коэффициентов a'_{nm}, a_{nm}, b_{nm} получим следующую систему уравнений:

$$\sum_{n,m} (a'_{nm} \psi_1 - a_{nm} \bar{\psi}_1) = 0$$

$$\sum_{n,m} (a'_{nm} \psi_2 - a_{nm} \bar{\psi}_2 - b_{nm} \bar{\bar{\psi}}_2) = 0 \qquad /14/$$

$$\sum_{n,m} (a'_{nm} \psi_3 - a_{nm} \bar{\psi}_3 - b_{nm} \bar{\bar{\psi}}_3) = 0.$$

Здесь введены обозначения:

$$\bar{\psi}_1 = I_m D;\ \bar{\psi}_2 = -\frac{k_{nm}}{\kappa_{nm}} I_{m+1} C;\ \bar{\psi}_3 = \left[-\kappa_{nm} I'_m + \frac{k^2_{nm}}{\kappa_{nm}} I_{m+1}\right] D',$$

$$\bar{\bar{\psi}}_2 = 2 I'_m \cdot C;\ \bar{\bar{\psi}}_3 = 2m \frac{k_{nm}}{\kappa_{nm} a_1} \cdot I_m \cdot D'. \qquad /15/$$

Индексы n, m, p, s у коэффициентов D, D', C опущены. В /15/ $I_m = I_m(\kappa_{nm} a_1)$. Далее.

$$\psi_1 = (F_0 I_q + F_1 K_q),$$

$$\psi_2 = \mu_1 (F_0 I_{q+1} - F_1 K_{q+1}) + 2(F_2 I'_q - F_3 K'_q), \qquad /16/$$

$$\psi_3 = -\mu_2 (F_0 I'_q + F_1 K'_q) + \mu_3 (-F_2 I_q + F_3 K_q) +$$

$$+ \mu_4 (F_0 I_{q+1} - F_1 K_{q+1}),$$

где

$$\mu_1 = \frac{g_{ps}}{2\chi_{ps}},\ \mu_2 = \chi_{ps},\ \mu_3 = \frac{2q g_{ps}}{\chi_{ps} a_2},\ \mu_4 = \frac{g^2_{ps}}{\chi_{ps}},$$

$$I_q = I_q(\chi_{ps} a_1),\quad K_q = K_q(\chi_{ps} a_1).$$

Для коэффициентов F имеем:

$$F_0 = \frac{Q_0 K_q + Q_1 K'_q + Q_2 K_{q+1}}{Z}, \quad F_1 = -\frac{Q_0 I_q + Q_1 I'_q - Q_2 I_{q+1}}{Z},$$

$$F_2 = \frac{Q_3 K_q + Q_4 K'_q}{Z_1}, \qquad F_3 = \frac{Q_3 I_q + Q_4 I'_q}{Z_1}. \qquad /17/$$

Здесь

$$Q_0 = f_3 D' + \mu_4 \cdot f_4 \cdot C' - \mu_6 \cdot f_1 \cdot D,$$

$$Q_1 = \mu_2 f_1 D; \quad Q_2 = \mu_4 f_1 C,$$

$$Q_3 = 2\mu_1 (F_0 I_{q+1} - F_1 K_{q+1}) - f_2 C, \qquad /18/$$

$$Q_4 = \mu_7 f_4 C' - \mu_1 f_1 D,$$

$$\mu_5 = \mu_3 / 2\chi_{ps}; \quad \mu_6 = \mu_5 g_{ps}, \quad \mu_7 = 1/2\mu_2,$$

$$Z_1 = I_q K'_q - I'_q K_q; \quad Z = \mu_2 Z_1 + \mu_4 (I_q K_{q+1} + K_q I_{q+1}) = \frac{k^2}{\chi_{ps} a_2}.$$

В /17/, /18/ все функции Бесселя берутся при $r = a_2$. Напомним, что в /14/ величины $\phi, \bar{\psi}, \bar{\bar{\psi}}$ зависят от n, m, p, s.

Условие разрешимости системы уравнений /14/ заключается в равенстве нулю детерминанта, составленного из членов, являющихся коэффициентами при неизвестных a'_{nm}, a_{nm}, b_{nm}. Это условие и является дисперсионным уравнением для модифицированной спирали. Определить из детерминанта системы уравнений /14/ зависимость фазовой скорости от частоты и геометрии спирали с учетом гармоник можно лишь с помощью ЭВМ. Проведем некоторые упрощения. Для коллективного метода ускорения существенен диапазон длин волн, при котором выполняется неравенство: $\lambda \gg \ell$. Толщина перемычки и колец в радиальном направлении обычно мала: $h = a_2 - a_1 \ll \ell$. В этом случае для $\delta = \chi_{ps} h \ll 1$ имеем:

$$I'_q(y_2) = I_q(y_1) + O(\delta), \quad K_q(y_2) = K_q(y_1) + O(\delta),$$

где

$$y_1 = \chi_{ps} a_1, \quad y_2 = \chi_{ps} a_2.$$

Выражения для функций ψ_1, ψ_2, ψ_3, входящих в определитель системы /14/, теперь упрощается:

$$\psi_1 = f_1 \cdot D + \delta(\Delta_1); \; \chi \psi_2 = f_2 C + \delta(\Delta_2); \; \psi_3 = f_3 D' + \delta(\Delta_3).$$

Здесь f_1, f_2, f_3 определяются выражениями /12/. Описание алгоритма для /14/, численные и экспериментальные результаты будут даны отдельно.

В заключение авторы благодарят Г.А.Иванова за постоянное внимание и интерес к работе.

Литература

1. *З.Г.Гаврилова, Г.А.Иванов. Препринт ОИЯИ, Р9-8227, Дубна, 1974.*
2. *Ким Ен Зун, З.Г.Гаврилова, Г.А.Иванов. Сообщения ОИЯИ, 9-8807, Дубна, 1975.*
3. *M.Chodorow and E.L.Chu. Journal of Applied Physics., v. 26, No. 1, p. 33, 1955.*
4. *C.K.Birdsall and T.E.Everhart, IRE Transactions on Electron Devices, v. ED-3, No. 4, p. 190, 1956.*
5. *А.К.Березин, П.М.Зейдлиц, А.М.Некрашевич, И.П.Скоблик. ЖТФ, т. XXIX, в. 7, стр. 815, 1959.*
6. *Р.А.Силин, В.П.Сазонов. Замедляющие системы. М., Советское радио, 1966.*
7. *В.П.Шестопалов, С.С.Калмыкова. ЖТФ, т. 31, в. 3, стр. 327, 1961.*
7. *Л.Н.Лошаков, Е.Б.Ольдерогге. Радиотехника, и. 30, вып. 3, стр. 40, 1975.*
8. *А.И.Ахиезер, Я.Б.Файнберг. УФН, т. 44, вып. 3, стр. 321, 1951.*

Рукопись поступила в издательский отдел 20 октября 1975 года.