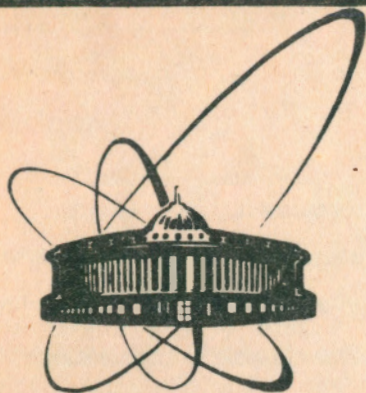


92-53



сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
дубна

3450

4152/92

P9-92-53

В.В.Андреев, И.П.Юдин

ОПТИКА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА  
РЕАЛЬНОЙ СОЛЕНОИДАЛЬНОЙ  
МАГНИТНОЙ ЛИНЗЫ

1992

Рассмотрены проблемы динамики пучка заряженных частиц в соленоиде с реальным распределением магнитного поля. В цилиндрической геометрии учитываются разложения компонент магнитного поля  $B_r$  и  $B_z$  до третьего порядка включительно с аксиальным распределением  $B(z)$  не только прямоугольного типа, но и с любым реальным распределением, например, типа "колокол":  $B(z) = B_0 / (1 + (z/a)^2)$ . Получено нелинейное уравнение движения частиц с учетом разброса их по импульсам. В рамках матричного формализма получены коэффициенты хроматической и сферической аберраций. Предлагаемый метод реализован в кодах программы типа TRANSPORT. Моделирование, проведенное на ряде соленоидальных линз, в том числе и 5 кэВ электронной пушки Пирса Мэрилендского университета, показало полное совпадение с результатами численного счета разностным методом. Исследованы физические эффекты фокусировки и распределения плотности тока частиц в пучке.

Работа выполнена в Лаборатории сверхвысоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1992

Перевод авторов и С.В.Чубаковой

Andreev V.V., Yudin I.P.  
Third-Order Beam Optics of Real Solenoid Lens

P9-92-53

The dynamics of charge particle beam in a solenoid with a real distribution of magnetic field, is under consideration in this paper. In cylindrical geometry the power series expansions truncated after  $r^3$  for magnetic field component  $B_r$  and  $B_z$ , is taken into account with axial field distribution  $B(z)$  either rectangular or any other type, for example, "bell-type":  $B(z) = B_0 / (1 + (z/a)^2)$ . The nonlinear equation of motion with a respect to a fractional momentum deviation has been obtained. Within transfer matrix formalism the chromatic and spherical aberration coefficients have been determined. The described method is realized in the code of a TRANSPORT-type program. Particle simulation, carried out with some solenoid lenses (such as a 5-keV Pierce-type electron gun of the University in Maryland, USA), has shown full agreement with results obtained on a numerical differential method (Runge-Kutta method). Physical effects of a beam focusing and a current density distribution have been investigated.

The investigation has been performed at the Particle Physics Laboratory, JINR.

Описание поведения пучков заряженных частиц в магнитооптических системах ускорителей на языке матриц перехода достаточно полно развито для линейного парааксиального приближения, использующего "прямоугольные" модели [1,2] магнитооптических элементов. Из-за плавного спада поля на торцах реальных линз и магнитов часто довольно трудно адекватно описать их "прямоугольными" моделями. Необходим учет абберационных членов в уравнении движения. Обычно [3] такие вычисления производятся с помощью разностных методов и требуют значительного времени счета. В данной работе на примере соленоидальной магнитной линзы показана возможность, оставаясь в рамках матричного метода, найти решение нелинейного уравнения движения пучка в поле соленоида до третьего порядка включительно.

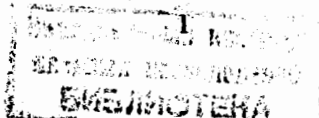
## 1. Нелинейное уравнение движения

Выберем цилиндрическую систему координат с осью Z, направленной вдоль оси соленоида. Запишем силу Лоренца, действующую на частицу с зарядом q и массой покоя m, находящуюся во внешнем осесимметричном поле [3]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(\gamma m \dot{r}) - \gamma m r \dot{\theta} - q r \dot{\theta} B_z = 0, \end{array} \right. \quad (1.1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(\gamma m r^2 \dot{\theta} + q \int_0^r B_z r' dr) = 0, \end{array} \right. \quad (1.1b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(\gamma m \dot{z}) + q r \dot{\theta} B_r = 0. \end{array} \right. \quad (1.1c)$$





где  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ ,  $\beta = v/c$ ,  $v$  - скорость частицы,  $c$  - скорость света,  $B_r$  и  $B_z$  - компоненты магнитного поля. Эффектом пространственного заряда здесь пренебрегаем.

Осевая симметрия поля

$$\varphi(r, z) = \varphi(-r, z) \quad (1.2)$$

позволяет сделать вывод о том, что центральная частица пучка, движущаяся по оси линзы, на протяжении всего своего движения не покинет оси. Легко получить разложение скалярного магнитного потенциала по степеням  $r$

$$\varphi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{2n}(z) \cdot \frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2}, \quad (1.3)$$

удовлетворяющее условию симметрии (1.2). В данной геометрии найдем разложения компонент поля до третьего порядка включительно:

$$\begin{cases} B_z(r, z) \approx B(z) - (1/4) \cdot B''(z) \cdot r^2, & (1.4a) \\ B_r(r, z) \approx -(1/2) \cdot B'(z) \cdot r + (1/16) \cdot B'''(z) \cdot r^3, & (1.4b) \end{cases}$$

где  $B(z)$  - аксиальное магнитное поле. Часто аксиальное поле соленоида представляют в виде "колокола":

$$B(z) = \frac{B_0}{1 + (2z/d)^2}, \quad (1.5)$$

где  $B_0 = B(0)$  - поле в центре линзы.

Подставляя выражение (1.4a) в условие сохранения углового момента (1.1b) с начальным условием  $\vartheta = 0$ , получим угловую скорость частицы пучка в виде

$$\dot{\vartheta} = \omega_L \cdot [1 - (B''/8B)r^2] \quad (1.6)$$

Здесь  $\omega_L$  - ларморова частота.

Подставляя (1.6) в (1.1a) и исключая из (1.1a) и (1.1c) зависимость от времени, получим нелинейное уравнение радиальной траектории

$$r'' = -k_0^2 r \cdot [1 - \frac{B''}{2B} r^2 + r'^2 + k_0^2 r^2 - \frac{B'}{B} r r'] \quad (1.7)$$

где  $k_0 = \frac{qB(z)}{2\gamma mc\beta} = \frac{qB(z)}{2p}$  - фокусирующая сила линзы,  $p$  - импульс частицы. Уравнение (1.7) не зависит от знака заряда фокусируемой частицы.

Учтем естественное отклонение импульса частицы от некоторой величины  $p_0$ :

$$p = p_0(1 + \delta) \quad (1.8)$$

Подставляя (1.8) в (1.7) получаем окончательное уравнение, определяющее реальную траекторию частицы:

$$r'' = -k_0^2 r \cdot [1 - 2\delta - \frac{B''}{2B} r^2 + r'^2 + k_0^2 r^2 - \frac{B'}{B} r r' + 3\delta^2] \quad (1.9)$$

где  $k_0 = \frac{qB(z)}{2p_0}$ . Из (1.9) следует, что абберация второго порядка соленоидальной магнитной линзы - хроматическая (т.е. зависящая от  $\delta$ ).

В случае, если для любых значений  $z$  величины  $r, r'$  и  $\delta$  останутся малыми, приходим к линейному уравнению движения параксиальной частицы

$$r'' = -k_0^2(z)r \quad (1.10)$$

## 2. Линейная оптика реального соленоида

Для решения линейного уравнения движения (1.10) в качестве независимых переменных выберем  $r, r', l$  и  $\delta$ . Здесь  $l$  - разница в длине пути между произвольной и некоторой выбранной траекториями. В силу симметрии (1.2) в качестве выбранной относительной траектории выберем центральную, тогда по определению

$$l = \int_0^z (\sqrt{1 + (r')^2 + r^2 \cdot (\vartheta')^2} - 1) dz \quad (2.1)$$

Разобьем область действия поля соленоида  $[-D/2; D/2]$  на

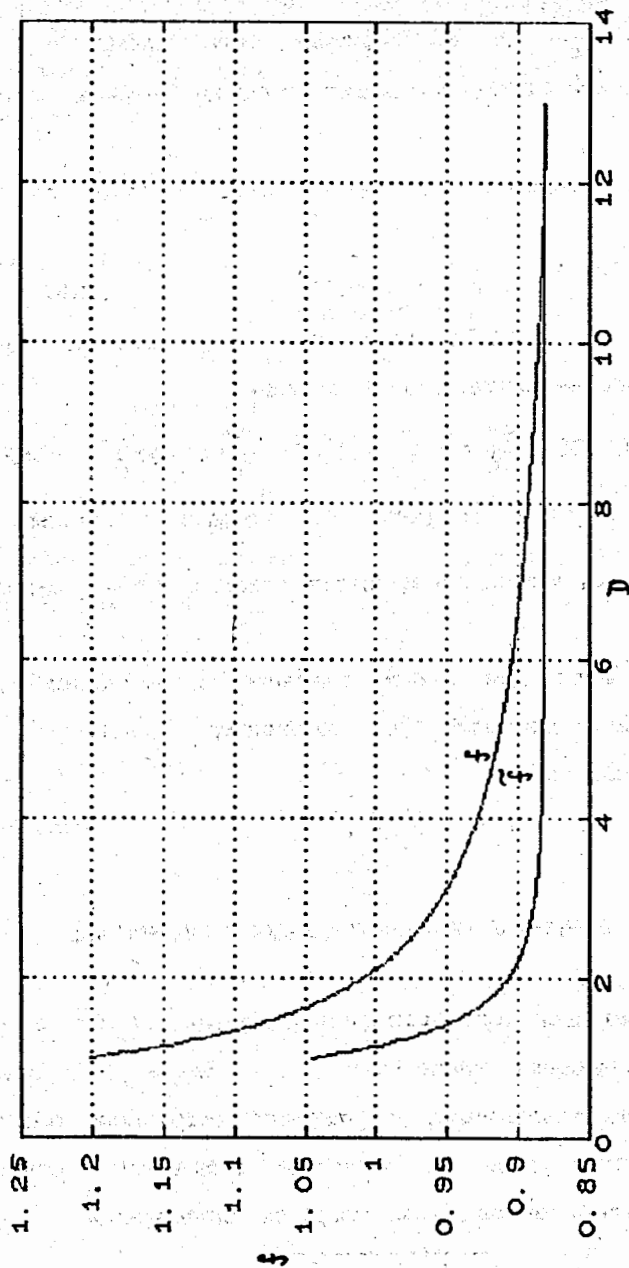


Рис. 1

достаточно большое число отрезков и представим общее действие линзы как действие слоя, составленного из многих тонких линз разной силы. Пусть общее количество указанных соленоидов -  $N$  с толщинами  $\Delta = D/N$  и силами

$$k_i = \frac{qB_0}{2\gamma mc\beta} \cdot \frac{1}{1 + (2z_i/d)^2}, \quad i=1, N.$$

Решая линейное уравнение (1.10), для каждой из тонких линз определим [1,2] матрицу перехода следующим образом:

$$\begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \\ l \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k_i \Delta) & (1/k_i) \sin(k_i \Delta) & 0 & 0 \\ -k_i \sin(k_i \Delta) & \cos(k_i \Delta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{i-1} \\ r'_{i-1} \\ l \\ \delta \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Матрица всего промежутка есть произведение  $N$  матриц  $R^i$  вида (2.2):

$$RCD = \prod_{i=1}^N R^i = R^N \cdot R^{N-1} \cdot \dots \cdot R^1. \quad (2.3)$$

Результирующая матрица перехода при  $N \rightarrow \infty$ ,  $\Delta \rightarrow 0$  и  $N \cdot \Delta \rightarrow D$  близка к матрице  $\tilde{R}$  соленоидальной линзы с силой  $\tilde{k} = \frac{qB_0}{2\gamma mc\beta}$  и эффективной длиной [5]:

$$l_{\text{eff}} \cdot B_0 = \int_{-\infty}^{\infty} B(z) dz = \pi/2 \cdot d, \quad (2.4)$$

На рис. 1 показаны фокусные расстояния матриц  $R$  и  $\tilde{R}$ . Видно, что для дальнейших исследований можно ограничиться промежутком действия поля  $D \approx 10d$ , начиная с которого фокусные расстояния линз равны. На рис. 2 изображена зависимость относительной разности конечных размеров пучков, полученных с помощью (2.3) и (2.4) от числа  $N$ .

Видно, что уже при  $N=50$  эти разности близки к нулю.

**Замечание.** Если длина промежутка спада поля много меньше длины промежутка постоянного поля (не равного 0), то матрицы  $R^i$  из (2.2) можно разложить по параметру малости  $k_i \Delta$  ( $\Delta \rightarrow 0$ ) и уже затем умножать, как в (2.3). Умножая матрицу перехода линзы в

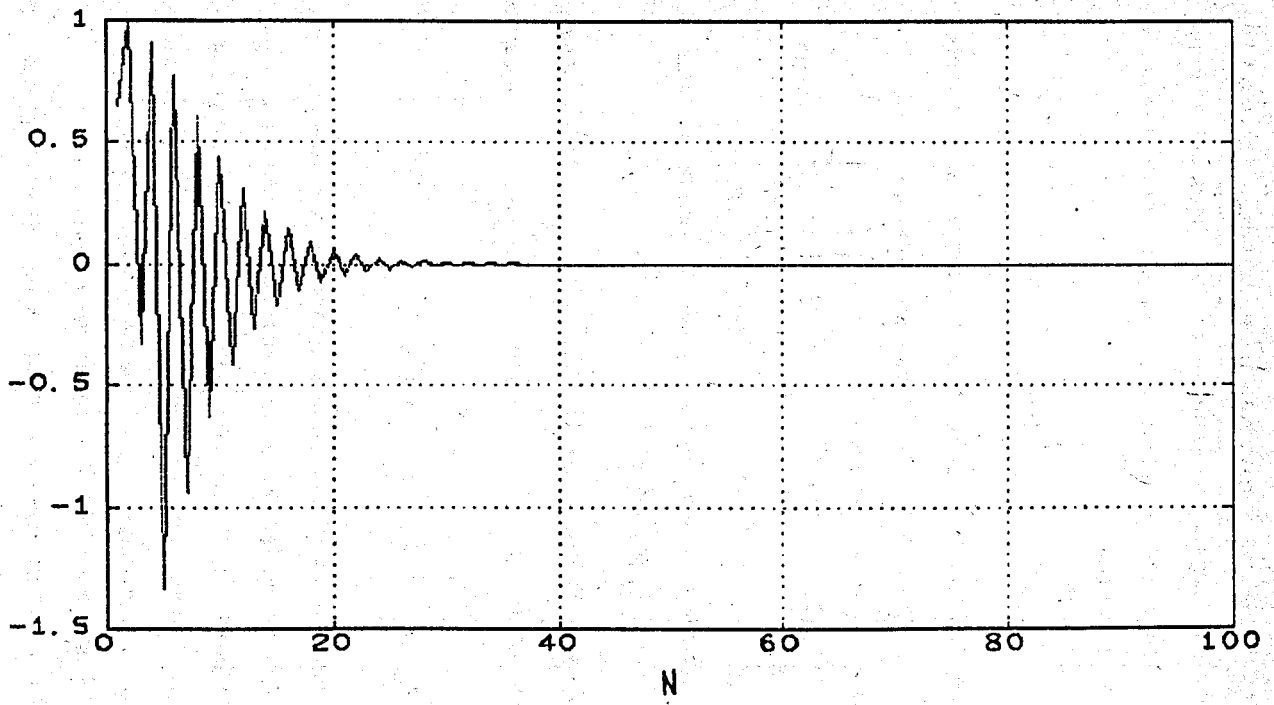


Рис. 2

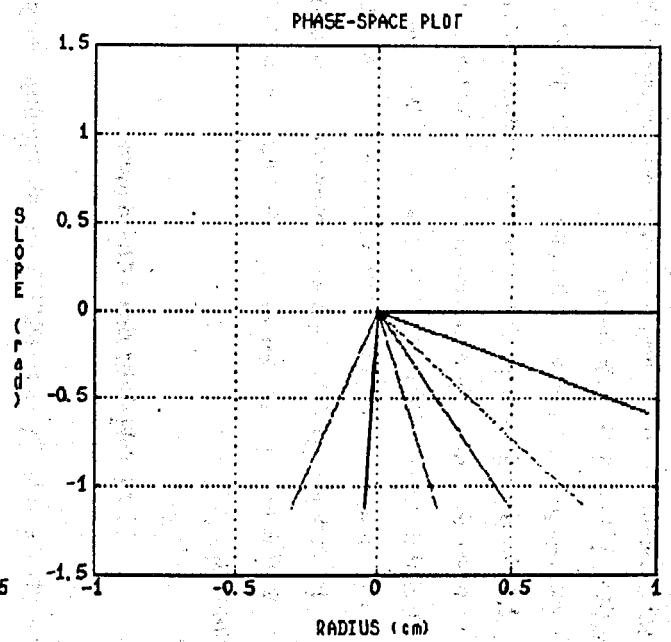
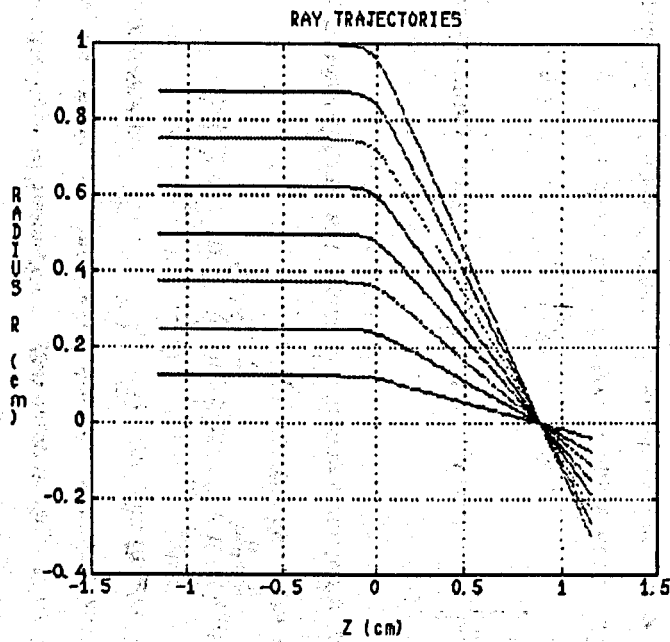


Рис. 3

"прямоугольной" модели (2.4) слева и справа на полученную матрицу, имеем общую матрицу перехода элемента.

На рис.3 показаны полученные с помощью (2.3) траектории и фазовый портрет пучка для нескольких  $z$  без учета абберационных членов. Проекция полученных фазовых распределений на реальное пространство дают текущие профили плотностей тока пучка. В отсутствие аббераций все профили повторяют начальное (равномерное) распределение, изменяясь лишь по амплитуде (по мере изменения площади сечения пучка). На это указывает и тот факт, что фазовый портрет состоит из отрезков прямых.

### 3. Хроматическая абберация

Для того, чтобы учесть хроматическую абберацию, необходимо в уравнении (1.9) оставить члены до второго порядка включительно. Для каждого тонкого соленоида получаем уравнения вида ( $k_i \equiv k$ ):

$$r'' = -k^2 r + 2k^2 r \delta \quad (3.1)$$

Пусть  $X^0 = \begin{pmatrix} r \\ r' \\ \delta \end{pmatrix}$  - вектор начальных условий. Представим искомый

вектор  $X(z)$  в виде разложения по начальным параметрам  $X_i^0 (i=1, \dots, 4)$  для произвольной компоненты [4]:

$$X_i(z) = \sum_{j=1}^4 R_{ij}(z) X_j^0 + \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 T_{ijk}(z) X_j^0 X_k^0 + \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 U_{ijkl}(z) X_j^0 X_k^0 X_l^0 + \dots \quad (3.2)$$

Абберационные коэффициенты  $R_{ij}$ ,  $T_{ijk}$  и  $U_{ijkl}$  определяют первый, второй и третий порядки матриц перехода и свойства системы в целом. Кроме того, "штрихованные" коэффициенты получаются простым дифференцированием по  $z$  от "нештрихованных":

$$\begin{cases} R_{2i}(z) = R'_{1i}(z) & (3.3a) \\ T_{2jk}(z) = T'_{1jk}(z) & (3.3b) \\ U_{2jkl}(z) = U'_{1jkl}(z) & (3.3c) \end{cases}$$

Нетрудно получить дифференциальные уравнения коэффициентов  $R_{ij}$ :

$$R''_{ij} + k^2 R_{ij} = 0, \quad i=1,2, j=1, \dots, 4 \quad (3.4)$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} R_{11}(0)=1, R_{12}(0)=R_{13}(0)=R_{14}(0)=0, R'_{1j}(0)=0 & (3.5a) \\ R_{22}(0)=1, R_{21}(0)=R_{23}(0)=R_{24}(0)=0, R'_{2j}(0)=0 & (3.5b) \end{cases}$$

Из общего вида (2.1) следует, что в первом порядке не равен нулю только элемент  $R_{33}=1$ . Так как на всей траектории  $\delta$  не меняется, то отличен от нуля только один коэффициент с  $i=4$  из (3.2):  $R_{44}=1$ . Суммируя сказанное, определим вид матрицы  $R$  так, как в (2.2).

Очевидно, что функция Грина уравнения (3.1) равна

$$G(z, \tau) = (1/k) \cdot \sin(k(z-\tau)) \quad (3.6)$$

Запишем первые четырнадцать слагаемых разложения (3.2) для  $r(z)$

$$\begin{aligned} r(z) = & R_{11} r^0 + R_{12} r'^0 + R_{13} \delta^0 + R_{14} \delta'^0 + T_{111} r^2 + T_{112} r r' + \\ & + T_{113} r r' \delta + T_{114} r \delta^2 + T_{122} r'^2 + T_{123} r' r' \delta + T_{124} r' \delta^2 + \\ & + T_{133} \delta^2 + T_{134} \delta \delta' + T_{144} \delta'^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Подставим (3.7) в (3.1). Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, легко определим, что все абберационные коэффициенты второго порядка являются решениями уравнений гармонических колебаний с вынуждающими силами, равными произведениям абберационных коэффициентов первого порядка

$$F_{ijk}^T(z) = \sum_m \sum_n F_{imn} R_{mj}(z) R_{nk}(z) \quad (3.8)$$

с начальными условиями, следующими из (3.1) и (3.2):

$$\begin{cases} T_{1jk}(0) = T'_{1jk}(0) = 0, & (3.9a) \\ T_{2jk}(0) = T'_{1jk}(0) = 0, & (3.9b) \\ T'_{2jk}(0) = T''_{1jk}(0) = f_{1jk}^T(0) & (3.9c) \end{cases}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} T''_{111} + k^2 T_{111} &= 2k^2 R_{11} R_{41}, \\ T''_{112} + k^2 T_{112} &= 2k^2 (R_{11} R_{42} + R_{12} R_{41}), \\ T''_{113} + k^2 T_{113} &= 2k^2 (R_{11} R_{43} + R_{13} R_{41}), \\ T''_{114} + k^2 T_{114} &= 2k^2 (R_{11} R_{44} + R_{14} R_{41}), \\ T''_{122} + k^2 T_{122} &= 2k^2 R_{12} R_{42}, \\ T''_{123} + k^2 T_{123} &= 2k^2 (R_{12} R_{43} + R_{13} R_{42}), \\ T''_{124} + k^2 T_{124} &= 2k^2 (R_{12} R_{44} + R_{14} R_{42}), \\ T''_{133} + k^2 T_{133} &= 2k^2 R_{13} R_{43}, \\ T''_{134} + k^2 T_{134} &= 2k^2 (R_{13} R_{44} + R_{14} R_{43}), \\ T''_{144} + k^2 T_{144} &= 2k^2 R_{14} R_{44}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Из общего вида матрицы  $R$  (2.2) и из системы (3.8) следует, что

$$T_{111} = T_{112} = T_{113} = T_{122} = T_{123} = T_{133} = T_{134} = T_{144} = 0, \quad (3.11)$$

Учитывая (3.3a) и (3.4), нетрудно определить ненулевые элементы матрицы  $T$ , удовлетворяющие начальным условиям (3.9):

$$T_{114}(z) = kz \cdot \sin(kz), \quad (3.12a)$$

$$T_{124}(z) = (1/k) \cdot \sin(kz) - z \cdot \cos(kz), \quad (3.12b)$$

$$T_{214}(z) = k \cdot \sin(kz) + k^2 z \cdot \cos(kz), \quad (3.12c)$$

$$T_{224}(z) = kz \cdot \sin(kz). \quad (3.12d)$$

Разлагая корень под интегралом в (2.1), получим во втором порядке

$$t = (1/2) \int_0^z (k^2 r^2 + r'^2) dz - \dots, \quad (3.13)$$

Аберрационные коэффициенты второго порядка получаются подстановкой

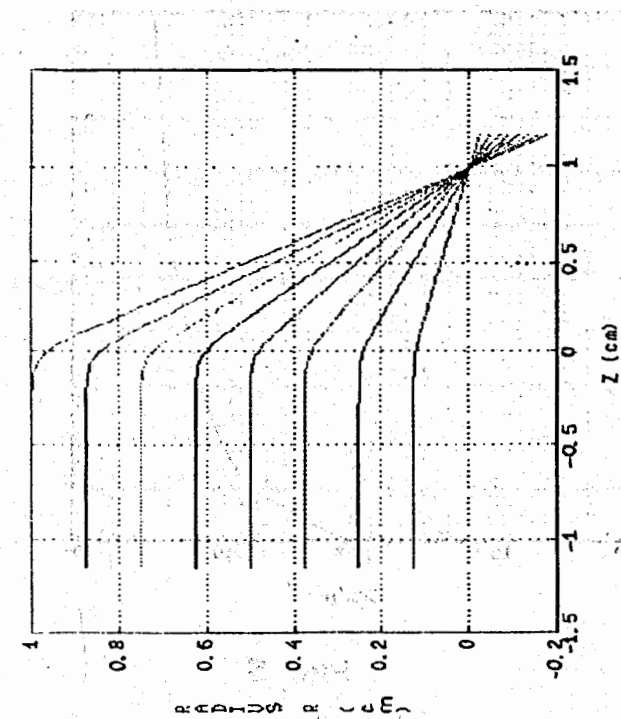
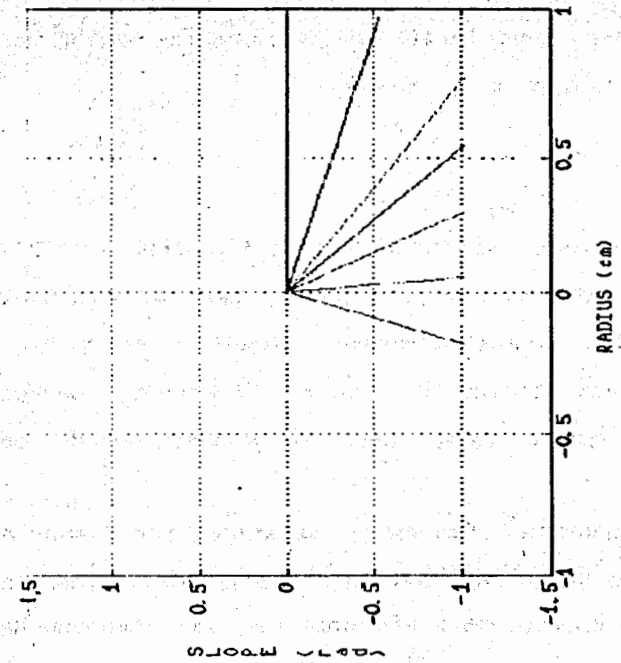


Рис. 4



разложений  $r(z)$  и  $r'(z)$  в (3.14) и последующим интегрированием.

Ненулевые элементы строки  $T_{3jk}$  равны

$$\begin{cases} T_{311}(z) = k^2 z/2, & (3.15a) \\ T_{322}(z) = z/2, & (3.15b) \end{cases}$$

На рис. 4 показаны траектории частиц и фазовый портрет пу для нескольких значений  $z$  с учетом действия хроматической aberrации ( $\delta=0.05$ ). Заметно изменение фазового портрета и, как следствие, профилей плотности тока. Начальное распределение плотности тока сохранилось, так как хроматическая aberrация линейна по  $r$ .

На рис. 5 изображена зависимость фокусного расстояния линзы от величины  $\delta$ . Из-за увеличения фокусного расстояния размеры пучка в месте ожидаемого кроссовера изменяются так, как показано на рис. 6.

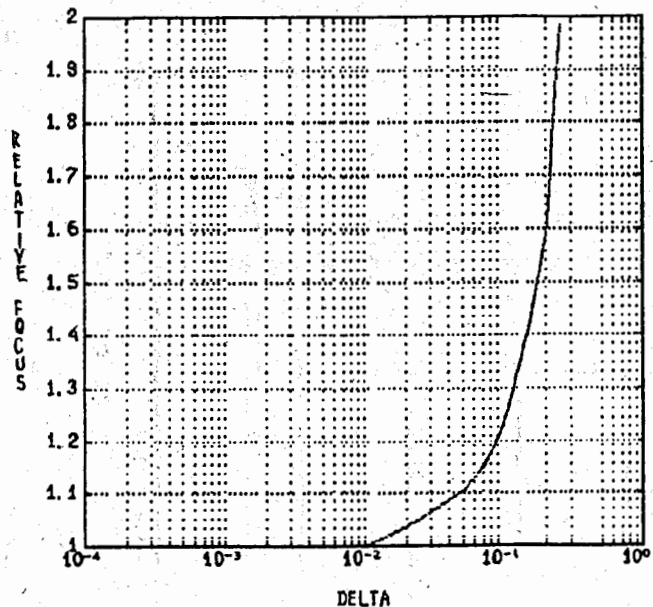


Рис. 5

BEAM RADIUS IN EXPECTED CROSSOVER PLASE

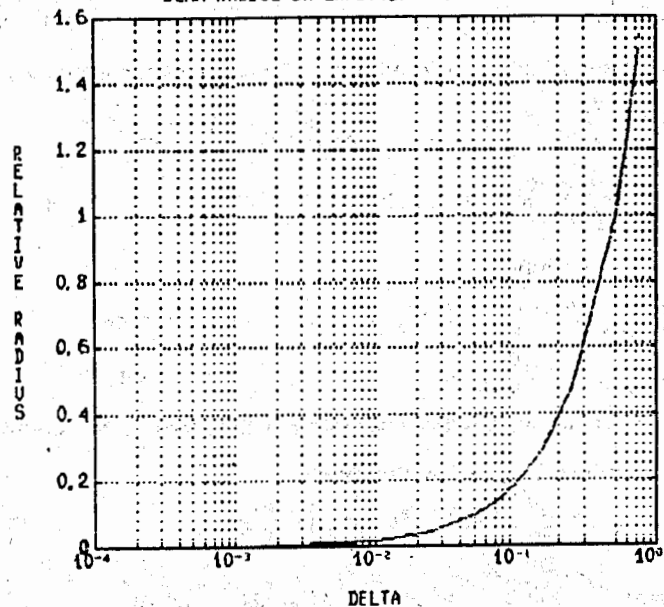


Рис. 6

#### 4. Абerrация третьего порядка

Абerrационные коэффициенты третьего порядка  $U_{ijkl}$  получим подстановкой разложения (3.2) в уравнение (1.9). Примем во внимание результаты, полученные в п. 2, 3, т. е. исключим из разложения (3.7) члены, равные нулю и добавим к оставшимся двадцать слагаемых, тогда

$$\begin{aligned} r(z) = & R_{11} r + R_{12} r' + T_{14} r \delta + T_{14} r' \delta + \\ & + U_{1111} r^3 + U_{1211} r^2 r' + U_{1311} r^2 \delta + U_{1411} r^2 \delta^2 + \\ & + U_{1122} r r' r' + U_{1123} r r' \delta + U_{1124} r r' \delta^2 + \\ & + U_{1133} r r' \delta^2 + U_{1134} r r' \delta \delta + U_{1144} r r' \delta^2 + \\ & + U_{1222} r' r'^3 + U_{1223} r' r'^2 \delta + U_{1224} r' r'^2 \delta^2 + \\ & + U_{1233} r' r' \delta^2 + U_{1234} r' r' \delta \delta + U_{1244} r' r' \delta^2 + \\ & + U_{1333} r' \delta^3 + U_{1334} r' \delta^2 \delta + U_{1344} r' \delta \delta^2 + U_{1444} r' \delta^3 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Все коэффициенты  $U_{ijkl}$ , также как и  $T_{ijk}$ , являются решениями

уравнений гармонических колебаний с возбуждающими силами;

$$f_{ijkl}^U(z) = \sum_m \sum_n F_{imn} R_{mj}(z) T_{nkl}(z) + \sum_m \sum_n F_{imn} T_{mjk}(z) R_{nl}(z) + \sum_m \sum_n \sum_p E_{imnp} R_{mj}(z) R_{mk}(z) R_{pl}(z), \quad (4.2)$$

и начальными условиями:

$$\begin{cases} U_{ijkl}(0) = U'_{ijkl}(0) = U_{2jkl}(0) = 0, & (4.3a) \\ U'_{2jkl}(0) = f_{ijkl}^U(0) & (4.3b) \end{cases}$$

Для разложения (4.1) нетрудно получить следующие (не равные нулю)

коэффициенты строки  $U_{ijkl}$  из уравнений:

$$U_{1111}'' + k^2 U_{1111} = k^2 \left( \frac{3B''}{2B} - k^2 \right) R_{11}^3 - k^2 R_{11} R_{21} R_{11}^2 + k^2 \frac{B'}{B} R_{11}^2 R_{21},$$

$$U_{1211}'' + k^2 U_{1211} = 3k^2 \left( \frac{3B''}{2B} - k^2 \right) R_{11}^2 R_{12} - 2k^2 R_{11} R_{21} R_{12} - k^2 R_{12} R_{21}^2 + 2k^2 \frac{B'}{B} R_{11} R_{12} R_{21} + k^2 \frac{B'}{B} R_{11}^2 R_{22},$$

$$U_{1122}'' + k^2 U_{1122} = 3k^2 \left( \frac{3B''}{2B} - k^2 \right) R_{11} R_{12}^2 - 2k^2 R_{12} R_{21} R_{12} - k^2 R_{11} R_{22}^2 + 2k^2 \frac{B'}{B} R_{11} R_{12} R_{22} + k^2 \frac{B'}{B} R_{12}^2 R_{21},$$

$$U_{1144}'' + k^2 U_{1144} = 2k^2 T_{114} R_{11} - 3k^2 R_{11} R_{22}^2,$$

$$U_{1222}'' + k^2 U_{1222} = k^2 \left( \frac{3B''}{2B} - k^2 \right) R_{12}^3 - k^2 R_{12} R_{22} R_{12}^2 + k^2 \frac{B'}{B} R_{12}^2 R_{22},$$

$$U_{1244}'' + k^2 U_{1244} = 2k^2 T_{124} R_{12} - 3k^2 R_{12} R_{22}^2, \quad (4.4)$$

Окончательный вид искоемых коэффициентов разложений  $r(z)$  и  $r'(z)$ ,

учитывая (3.3с), таков:

$$U_{1111}(z) = \frac{1}{8} \left( \frac{3B''}{2B} - 4k^2 \right) kz \cdot \cos(kz) + k \frac{B'}{8B} kz \cdot \cos(kz) - k \frac{B'}{4B} \sin(kz) + \frac{B''}{32B} \cos(kz) \cdot \sin(kz) + k \frac{B'}{16B} \sin(kz) \cdot \sin(2kz),$$

$$U_{1211}(z) = -\frac{1}{8k} \left( \frac{3B''}{2B} - k^2 \right) kz \cdot \cos(kz) + \frac{1}{2k} \left( \frac{3B''}{8B} - k^2 \right) \sin(kz) + \frac{B'}{8B} (kz \cdot \sin(kz) + (3/2) \sin(kz) \cdot \sin(2kz)) + \frac{3B''}{16kB} \sin^3(kz),$$

$$U_{1122}(z) = \frac{1}{8k^2} \left( \frac{3B''}{2B} - 4k^2 \right) kz \cdot \sin(kz) - \frac{3B''}{32k^2 B} \sin(kz) \cdot \sin(2kz) + \frac{B'}{8kB} kz \cdot \cos(kz) - \frac{B'}{8kB} \sin(kz) + \frac{3B''}{8kB} \sin^3(kz),$$

$$U_{1144}(z) = -(1/2)kz \cdot \sin(kz) - (1/2)(kz)^2 \cos(kz) - (1/4)kz \cdot \cos(kz) \cdot \sin(2kz),$$

$$U_{1222}(z) = -\frac{1}{2k^3} \left( \frac{3B''}{8B} - k^2 \right) (kz \cdot \cos(kz) - \sin(kz)) + \frac{B'}{8k^2 B} kz \cdot \sin(kz) + \frac{B''}{16k^3 B} \sin^3(kz) - \frac{B'}{16k^2 B} \sin(kz) \cdot \sin(2kz),$$

$$U_{1244}(z) = -\frac{1}{2k} kz \cdot \sin(kz),$$

$$U_{2111}(z) = \frac{k}{8} \left( \frac{3B''}{2B} - 4k^2 \right) kz \cdot \cos(kz) + \frac{k}{8} \left( \frac{B''}{B} - 4k^2 \right) \sin(kz) - k \frac{2B'}{8B} kz \cdot \sin(kz) + \frac{3B''}{32B} k \cdot \cos(kz) \cdot \sin(2kz) - k \frac{23B'}{16B} \sin(kz) \cdot \sin(2kz),$$

$$U_{2211}(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{3B''}{8B} - k^2 \right) kz \cdot \sin(kz) + \frac{B'k}{8B} (kz \cdot \cos(kz) + 7 \sin(kz)) - 9 \sin^3(kz) + \frac{9B''}{32B} \sin(kz) \cdot \sin(2kz),$$

$$U_{2122}(z) = \frac{1}{2k} \left( \frac{3B''}{8B} - k^2 \right) kz \cdot \cos(kz) + \frac{1}{2k} \left( \frac{3B''}{4B} - k^2 \right) \sin(kz) - \frac{9B''}{32kB} \cos(kz) \cdot \sin(2kz) - \frac{B'}{8B} kz \cdot \sin(kz) + \frac{9B'}{16B} \sin(kz) \cdot \sin(2kz),$$

$$U_{2144}(z) = -k \cdot \sin(kz) - 2k \cdot kz \cdot \cos(kz) + (k/2)(kz)^2 \sin(kz) + (3k/4) \sin(kz) \cdot \sin(2kz),$$

$$U_{2222}(z) = -\frac{1}{2k} \left( \frac{3B''}{8B} - k^2 \right) kz \cdot \sin(kz) + \frac{B'}{8kB} kz \cdot \cos(kz) + \frac{B'}{4kB} \sin(kz) + \frac{3B''}{32k^2 B} \sin(kz) \cdot \sin(2kz) - \frac{3B'}{16kB} \cos(kz) \cdot \sin(2kz),$$

$$U_{2244}(z) = -(1/2)(\sin(kz) + kz \cdot \cos(kz)) \quad (4.5)$$

Подставляя разложения для  $r(z)$  и  $r'(z)$  до второго порядка в (2.1),

получим следующие ненулевые элементы строки  $U_{3jkl}$ :

$$\begin{cases} U_{3114}(z) = -k(1 - \cos(kz)), \\ U_{3214}(z) = (1/2) \sin^2(kz), \\ U_{3224}(z) = \frac{1}{2k} (kz - (1/2) \sin(2kz)). \end{cases} \quad (4.6)$$

Для дальнейших вычислений величин  $r(z)$  и  $r'(z)$  можно ввести следующую удобную формулу:

$$\begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix} = [R + T_4 \cdot \delta + U_{11} \cdot r_0^2 + U_{22} \cdot r_0'^2 + U_{44} \cdot \delta^2] \cdot \begin{pmatrix} r_0 \\ r_0' \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

где  $R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$ ,  $T_4 = \begin{pmatrix} T_{114} & T_{124} \\ T_{214} & T_{224} \end{pmatrix}$

$U_{11} = \begin{pmatrix} U_{1111} & U_{1211} \\ U_{2111} & U_{2211} \end{pmatrix}$ ,  $U_{22} = \begin{pmatrix} U_{1122} & U_{1222} \\ U_{2122} & U_{2222} \end{pmatrix}$ ,  $U_{44} = \begin{pmatrix} U_{1144} & U_{1244} \\ U_{2144} & U_{2244} \end{pmatrix}$

Результат прохождения пучка через реальную соленоидальную линзу с учетом aberrаций второго и третьего порядков представлен на рис. 7 ( $\delta=0.001$ ). Внешние частицы пучка пересекают осевую линию намного раньше места предполагаемого фокуса линзы. Это приводит к существенному искривлению фазовых прямых. Распределения плотностей тока пучка для  $z$ , указанных на рис. 7, приведены на рис. 8. Уже к  $z=2$  см движение пучка перестает быть ламинарным, формируется трубчатая структура плотности тока. К  $z=4$  см образуется довольно отчетливое гало вокруг центральной плотной области. В дальнейшем подобная структура сохраняется. Отметим большое влияние aberrации третьего порядка в приведенной линзе, тогда как хроматическая aberrация существенна лишь до  $z=4$  см.

Приведенные выше вычисления для модельной линзы были повторены авторами для линзы, рассматриваемой в [3]. Получено полное совпадение с результатами счета разностным методом (без учета эффекта пространственного заряда). Действие эффекта пространственного заряда связано с размыванием центральной плотной области и формированием достаточно устойчивой к полю трубчатой структуры. Плотности, показанные на рис. 8 ( $z=6-12$  см), образуются реально при довольно высоких внешних полях.

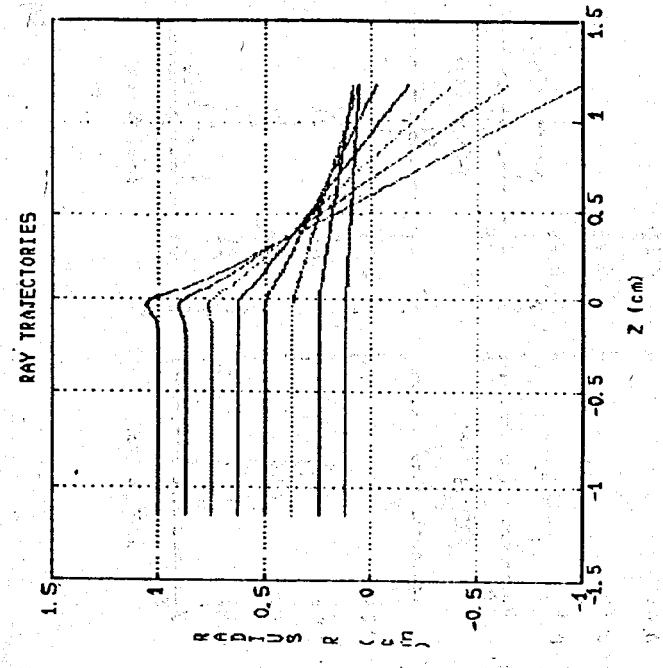
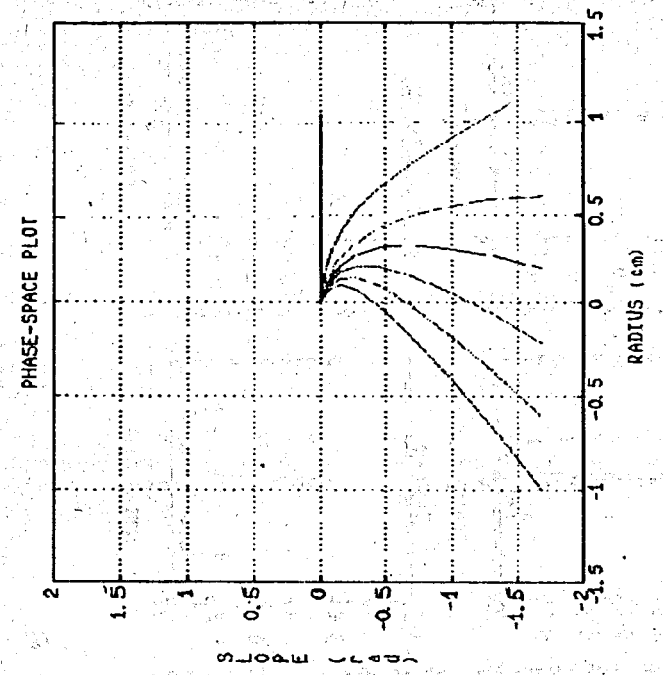


РИС. 7

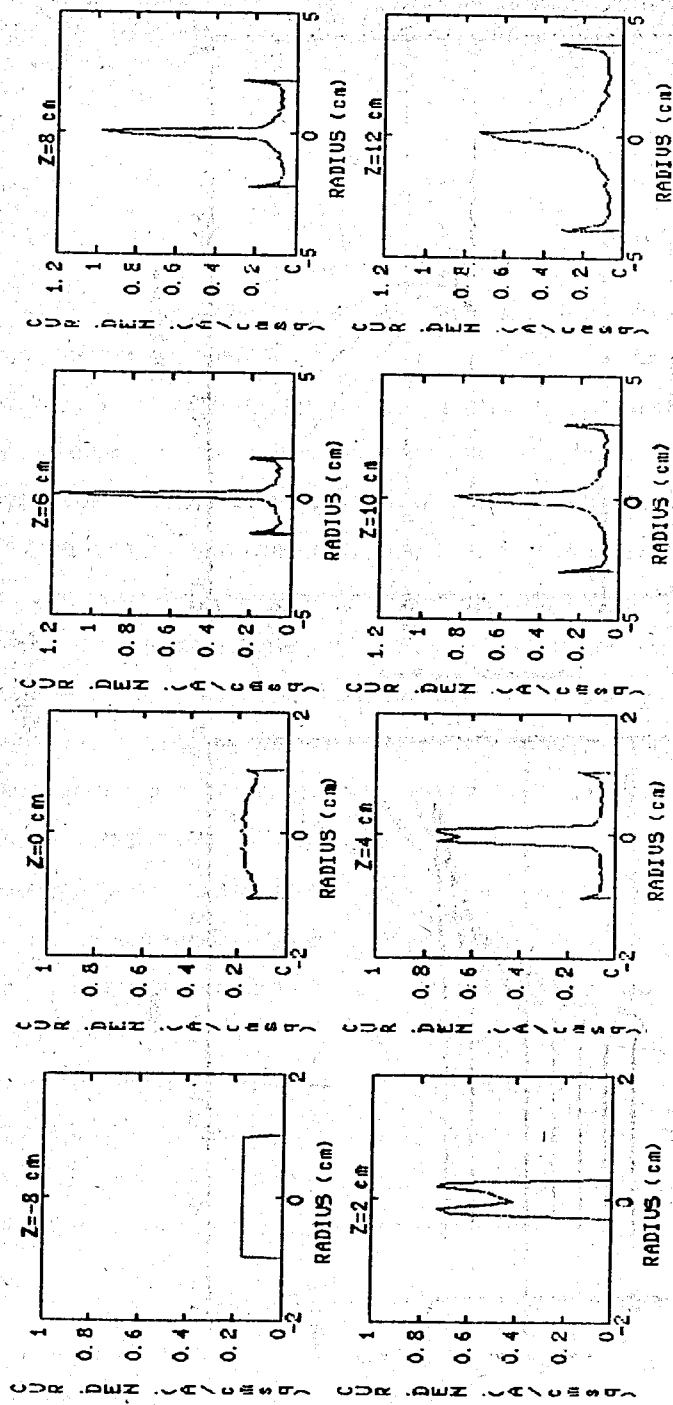


Рис. 8

Литература

1. Котов В.И., Миллер В.В. Фокусировка и разделение по массам частиц высоких энергий. М., "Атомиздат", 1969г.
2. Бенфорд А. Транспортировка пучков заряженных частиц. М., "Атомиздат", 1969г.
3. Loschialpo P. et al. J. Appl. Phys. 57(1),1985.
4. Brown K.L. et al. TRANSPORT a Computer Program for Designed Charged Particle Beam Transport Systems. SLAC-91, Rev.2 UC-28 (I/A). May 1977.
5. Андреев В.В., Юдин И.П. Построение полных матриц линейных преобразований промежутка ускорения (замедления) и соленоидальной магнитной линзы. ОИЯИ. БЗ - 1 - 92 - 31, Дубна, 1992.

Рукопись поступила в издательский отдел  
13 февраля 1992 года.