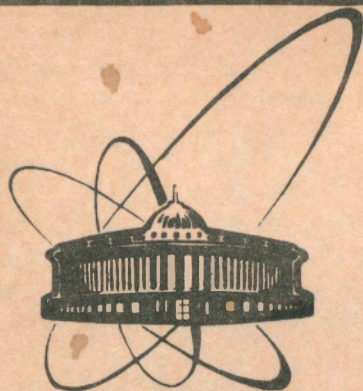


92-309.



СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

P9-92-309

В.М.Жабицкий, И.Л.Корнев\*, Л.А.Юдин\*

ПОДАВЛЕНИЕ РЕЗИСТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ  
СГРУППИРОВАННОГО ПУЧКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ  
ЦЕМЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

---

\*Московский радиотехнический институт

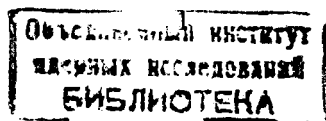
1992

## Введение

Исследованию систем подавления когерентных колебаний сгустков в синхротронах и накопителях в настоящее время уделяется большое внимание, так как с их помощью можно обеспечить затухание случайно возникших когерентных колебаний и предотвратить развитие различных неустойчивостей. В результате число ускоряемых частиц в десятки раз превосходит пороговые значения, получающиеся из-за затухания Ландау [1].

Для предотвращения развития поперечной резистивной неустойчивости в настоящее время применяют классическую систему подавления, где используется для каждого из направлений колебаний цепь отрицательной обратной связи, соединяющая один датчик положения (ДП) и один толкатель (Т). Однако на сооружаемых в настоящее время крупных ускорительных комплексах такая система оказывается недостаточной. Так, на I ступени ускорительно-накопительного комплекса УНК-1 (ИФВЭ, Протвино) ожидается резистивная неустойчивость [2] с постоянной нарастания около  $0.1\omega_0$  ( $\omega_0$  — циклическая частота обращения частиц), что почти в десять раз превосходит инкременты подавляемых в настоящее время поперечных неустойчивостей. Было показано, что классическая система не обеспечивает подавления такой быстрой неустойчивости [3]. В связи с этим предложена и реализуется новая быстрая система подавления когерентных бетатронных колебаний в УНК-1 [4,5]. Эта система в каждом из поперечных направлений колебаний имеет два датчика и два толкателя, связанных цепями обратной связи с цифровой обработкой сигнала.

Теоретические исследования систем подавления когерентных колебаний в синхротронах базируются на использовании метода одностороннего преобразования Фурье для функции смещения центра тяжести пучка, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка [2-7]. Этот метод успешно применяется для расчетов систем подавления сплошного пучка [3], в том числе при наличии цифровых фильтров в цепи обратной связи [4-6]. Однако для сгруппированного пучка такой метод наталкивается на значительные математические трудности [7]. Для исследования систем подавления свободных колебаний в [8] предложен метод, где дифференциальное уравнение сводится к линейному разностному матричному уравнению, которое исследуется на устойчивость с использованием одностороннего Z-преобразования. В настоящей работе используется такой же метод дискретного анализа для решения задачи о подавлении резистивной неустойчивости сгруппированного пучка.



# 1. Общее уравнение для описания системы подавления резистивной неустойчивости сгруппированного пучка

Пусть смещение  $i$ -й частицы сгустка  $x_i(s_b)$  задается от равновесной орбиты. Будем считать, что начальная равновесная орбита совпадает с осью вакуумной камеры. Тогда для  $x_i(s_b)$  можем записать следующее уравнение:

$$\left[ \frac{d^2}{ds^2} + K(s_b) \right] x_i(s_b) = \frac{1}{Am\gamma_0 v_0^2} (F_{Bi} + F_{Ki} + F_{Ei}),$$

где  $Am\gamma_0 v_0$  — продольный импульс ускоряемой частицы, движущейся в синхротроне с периметром  $C_0$ , магнитная структура которого описывается с помощью коэффициента жесткости  $K(s_b) = K(s_b + C_0)$ . Возмущения в структуре представлены компонентами силы  $F_{Ei}$ , а действие системы подавления — с помощью сил  $F_{Ki}$ . В компоненте силы  $F_{Bi}$  учитываются электромагнитные поправки, обусловленные собственным полем сгустка, взаимодействием сгустков между собой, а также наведенными полями в стенках вакуумной камеры с конечной проводимостью. Будем следовать общепринятым моделям [9–13] с целью учета этих дополнительных эффектов. В первых, будем пренебрегать фазовым движением частиц в пределах одного сгустка. Тогда, проводя усреднение по  $N_b$  частицам в одном  $k$ -м сгустке

$$x_k(s_b) = \langle x_i(s_b) \rangle = \frac{1}{N_b(k)} \sum_{i=1}^{N_b(k)} x_i(s_b),$$

переходим от уравнения движения отдельной частицы к уравнению движения центра тяжести "жесткого" сгустка:

$$\left[ \frac{d^2}{ds^2} + K(s_b) \right] x_k(s_b) = \frac{1}{Am\gamma_0 v_0^2} (\langle F_{Bi} \rangle + F_K + F_E).$$

Отметим, что переменная  $s_b$  может принимать любые значения, не ограниченные интервалом от нуля до  $C_0$ .

Условимся смещение центра тяжести сгустка и угол наклона его траектории к равновесной орбите на обороте с номером  $n$  описывать следующим образом:

$$x_k(s_b) = x_k[n, s], \quad x'_k(s_b) = x'_k[n, s], \quad (1)$$

где  $s$  — текущее положение  $k$ -го сгустка на орбите относительно первого датчика положения. Ясно, что диапазон изменения  $s$  есть

$$0 \leq s \leq C_0.$$

Пройдя периметр орбиты из точки  $s_b$  на  $n$ -м обороте в точку  $s_b + C_0$ , сгусток переходит на  $(n + 1)$ -й оборот. Поэтому можем записать:

$$\hat{X}_k[n, s + C_0] = \hat{X}_k[n + 1, s], \quad (2)$$

где  $\hat{X}_k$  — матрица-столбец, в которой первый элемент есть  $x_k[n, s]$ , а второй —  $x'_k[n, s]$ . Данное определение  $s$  будем использовать для всех сгустков, а матричное уравнение (2) далее будем называть условием непрерывности.

Второе предположение, обычное для описания резистивной неустойчивости, сделаем о силе взаимодействия сгустков между собой. Будем считать, что это взаимодействие обусловлено хвостовыми полями, возникающими от наведенных сгустком в стенках вакуумной камеры токов. Примем, что

$$\frac{1}{Am\gamma_0 v_0^2} \langle F_{Bi} \rangle = -\frac{2Q_0}{R^2} f_k[n, s],$$

где  $Q_0$  — число бетатронных колебаний сгустка без учета его электромагнитного взаимодействия со стенками вакуумной камеры и с другими сгустками;  $R = C_0/2\pi$  — средний радиус орбиты. Сразу после инжекции  $M$  сгустков для силы взаимодействия между ними на нулевом обороте в соответствии с введенными определениями можно записать:

$$\begin{aligned} f_1[0, s] &= \Delta Q_{11}[0, 0] x_1[0, s]; \\ f_2[0, s] &= \Delta Q_{22}[0, 0] x_2[0, s] + \Delta Q_{21}[0, \Delta s_{21}] x_1[0, s]; \\ &\dots \dots \dots \\ f_M[0, s] &= \sum_{j=1}^M \Delta Q_{Mj}[0, \Delta s_{Mj}] x_j[0, s]. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь вновь в компоненте силы  $f_k$  текущее положение сгустка с номером  $k$  обозначено как  $s_k = s$ . В каждой из компонент силы  $f_k$  присутствуют слагаемое, обусловленное взаимодействием рассматриваемого сгустка с собственным изображением в стенках вакуумной камеры, и другие слагаемые, связанные с взаимодействием пролетевших это место сгустков с хвостовыми полями. Например, для силы взаимодействия сгустка с номером  $M$  с уже пролетевшим это место на орбите сгустком с номером  $j < M$  этот вклад в текущей точке орбиты  $s$ , где рассчитывается сила взаимодействия, пропорционален смещению  $x_j[0, s]$   $j$ -го сгустка в тот момент времени, когда он пролетал эту точку орбиты  $s$ . Коэффициент пропорциональности, учитывающий ослабление поля к моменту подлета рассматриваемого сгустка, в соответствии с выбранной моделью в явном виде зависит только от расстояния  $\Delta s_{Mj}$  между действительным положением пролетевшего сгустка  $s_j$  в рассматриваемый момент времени и текущей точкой

наблюдения  $s$ . Подчеркнем еще раз очень существенный момент используемой модели: сила взаимодействия в явном виде зависит только от расстояния между сгустками  $\Delta s_{kj}$ . Очень важно также помнить, что только  $\Delta Q_{kj}[0, \Delta s_{kj}]$  при  $k$ , отличных от  $j$ , есть коэффициенты ослабления для хвостового поля. При  $k = j$  величины  $\Delta Q_{kk}[0, 0]$  есть квазистатические поправки к числу бетатронных колебаний за оборот, обусловленные когерентным движением. Чтобы подчеркнуть данную особенность, введем обозначение:  $\Delta Q_{kk}[0, 0] = \Delta Q_{0k}$ . Если все сгустки одинаковые, то  $\Delta Q_{0k} = \Delta Q_0$  есть квазистатический когерентный сдвиг.

В соответствии с (3) легко записать выражения для сил взаимодействия на последующих оборотах, учитывая как хвостовые поля рассматриваемого сгустка, связанные с его пролетом через точку наблюдения на предшествующих оборотах, так и аналогичные хвостовые поля других сгустков. Например, для  $k$ -го сгустка на  $(n+1)$ -м обороте имеем

$$f_k[n+1, s] = \Delta Q_{0k} x_k[n+1, s] + \sum_{m=0}^{n+1} \sum_{j=1}^{k-1} \Delta Q_{kj}[m, \Delta s_{kj}] x_j[n+1-m, s] + \sum_{m=0}^n \sum_{j=k}^M \Delta Q_{kj}[m, \Delta s_{kj}] x_j[n-m, s]. \quad (4)$$

В (4) учтено, что сгусток с номером  $k$  взаимодействует с хвостовыми полями сгустков с номерами  $j \geq k$ , которые были наведены ими на предшествующих оборотах. В том числе  $k$ -й сгусток взаимодействует с собственным хвостовым полем, наведенным на предшествующем обороте. Поэтому для него  $\Delta s_{kk} = C_0$ . Выражение (4) для силы взаимодействия сгустков имеет самый общий вид в рамках принятой модели. Отметим характерную разницу между головными сгустками ( $j < k$ ) по отношению к рассматриваемому и следующими ( $j > k$ ) за ним. Эта разница, очевидно, связана с началом формирования пучка в камере синхротрона, когда в хвост к первому сгустку инжектируется второй и так далее для всех  $M$  сгустков.

Вернемся теперь к анализу исходного дифференциального уравнения для "жесткого" сгустка. При конкретизации силы  $F_K$ , описывающей действие системы подавления, примем обычные предположения [4-6], которые делаются при задании силы толчков воздействия на сгустки, пропорциональные смещению их центров тяжести в предшествующие моменты времени. Пусть сигнал об отклонении сгустка через  $N$  цепей обратной связи передается на  $k$ -й сгусток в толкателе. Тогда

$$\frac{1}{Am\gamma_0 v_0^2} F_K = \sum_{i=1}^N \Delta x'_{ki}[n] \delta(s - s_{Ki}).$$

Изменение угла в  $i$ -м толкателе на  $n$ -м обороте, расположенном в точке  $s_{Ki}$  на орбите, при отсутствии ошибок синхронизации (толкатель воздействует на сгусток, который генерировал сигнал на пластинах датчика положений на входе цепи обратной связи) и наличии широкополосных усилителей в цепях обратной связи (отсутствуют остаточные эффекты к моменту влета в толкатель других сгустков) пропорционально отклонению сгустка в  $j$ -м датчике положения, падающему в точке  $s_{Pj}$ :

$$\Delta x'_{ki}[n] = u[n-q] \sum_{j=1}^N \sum_{m=0}^{n-q} \frac{K_{ij}[m]}{\sqrt{\beta_{Ki} \beta_{Pj}}} (x_k[n-q-m, s_{Pj}] + \delta x_k[n, s_{Pj}]),$$

где  $\delta x_k[n, s_{Pj}]$  — смещение равновесной орбиты  $k$ -го сгустка относительно электрической оси симметрии  $j$ -го ДП. Общая задержка сигнала в цепи обратной связи равна  $qT_0$ . Смешивание сигналов с разных оборотов с помощью фильтра отмечено в этой формуле суммой по  $m$ . Смешивание сигналов разных сгустков в радиотехнических устройствах цепи обратной связи в пределах одного оборота здесь не учитывается. Такая модель вполне справедлива, если полоса пропускания усилителей не меньше частоты следования сгустков.

Суммируя все вышесказанное и учитывая, что компонента силы возмущений  $F_E$  не зависит от номера оборота, уравнение движения для сгустка с номером  $k$  можем записать в следующем виде:

$$\left[ \frac{d^2}{ds^2} + K(s) \right] x_k[n, s] = -\frac{2Q_0}{R^2} f_k[n, s] + \frac{F_{Ek}(s)}{Am\gamma_0 v_0^2} + \sum_{i=0}^N \Delta x'_{ki}[n] \delta(s - s_{Ki}).$$

Полученная система дифференциальных уравнений описывает динамику сгустков сгруппированного пучка с учетом действия системы подавления когерентных бетатронных колебаний.

## 2. Общее решение

Для решения системы дифференциальных уравнений используем метод одностороннего  $Z$ -преобразования. Как обычно, для изображения дискретизированной функции  $y[n, s]$  имеем

$$\tilde{y}(z, s) = \sum_{n=0}^{\infty} y[n, s] z^{-n}.$$

Для определения оригинала, то есть функции  $y(s_k = s + nC_0)$  по заданному изображению, воспользуемся формулой обратного преобразования

$$y(s_k) = \frac{1}{C_0} \frac{1}{2\pi i} \int_C \tilde{y}(z, s) z^{\left(\frac{s_k}{C_0} - 1\right)} dz$$

с бесконечным числом обходов окружности единичного радиуса. Принимая во внимание, что  $s = s_b - nC_0$ , получаем

$$y(s_b) = \sum_{n=0}^{\infty} y[n, s] \frac{1}{C_0} \frac{1}{2\pi i} \int_C z^{(s_b/C_0 - 1 - n)} dz = \sum_{n=0}^{\infty} y[n, 0] \delta(s_b - nC_0).$$

Ясно, что функции  $y[n, 0] \delta(s_b - nC_0)$  имеют смысл бесконечно короткого импульса в точках  $nC_0$  с площадью  $y[n, 0]$ . Иначе говоря, выборки  $y[n, 0]$  для функции  $y(s_b)$  являются весовыми коэффициентами в бесконечной последовательности  $\delta$ -функций в точках  $nC_0$ . Таким образом, решения  $x_k[n, s]$  для полученной системы уравнений совпадают с действительными смещениями сгустков по крайней мере в одной точке на орбите, причем на произвольном обороте. Поэтому с точки зрения устойчивости движения сгустков устойчивость решений  $x_k[n, s]$  является необходимой.

Умножая левую и правую части полученных уравнений на  $z^{-n}$  и суммируя по  $n$  от нуля до бесконечности, получим

$$\left[ \frac{d^2}{ds^2} + K(s) \right] \tilde{x}_k(z, s) = -\frac{2Q_0}{R^2} \tilde{f}_k(z, s) + \frac{z}{z-1} \frac{F_{Ek}(s)}{Am\gamma_0 v_0^2} + \sum_{i=1}^M \Delta \tilde{x}'_{ki}(z) \delta(s - s_{Ki}).$$

Применяя в (4) теорему опережающего сдвига и теорему о свертке, а также учитывая начальное условие (3), для компонент сил взаимодействия сгустков имеем

$$\begin{aligned} \tilde{f}_k(z, s) = & \Delta Q_{0k} \tilde{x}_k(z, s) + \sum_{j=1}^{k-1} \Delta \tilde{Q}_{kj}(z, s_j - s) \tilde{x}_j(z, s) + \\ & + \sum_{j=k}^M z^{-1} \Delta \tilde{Q}_{kj}(z, C_0 + s - s_j) \tilde{x}_j(z, s). \end{aligned}$$

В итоге получаем следующую систему уравнений, число которых равно числу сгустков  $M$ :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d^2}{ds^2} + K(s) + \frac{2Q_0}{R^2} \Delta Q_{0k} \right] \tilde{x}_k(z, s) + \frac{2Q_0}{R^2} \sum_{j=1}^{k-1} \Delta \tilde{Q}_{kj}(z, \Delta s_{kj}) \tilde{x}_j(z, s) + \\ + \frac{2Q_0}{zR^2} \sum_{j=k}^M \Delta \tilde{Q}_{kj}(z, \Delta s_{kj}) \tilde{x}_j(z, s) = \frac{z}{z-1} \frac{F_{Ek}(s)}{Am\gamma_0 v_0^2} + \\ + z^{-q} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\tilde{K}_{ij}(z)}{\sqrt{\beta_{Ki} \beta_{Pj}}} \left( \tilde{x}_k(z, s_{Pj}) + \frac{z}{z-1} \delta x_k(s_{Pj}) \right) \delta(s - s_{Ki}). \quad (5) \end{aligned}$$

Необходимо также добавить условие непрерывности (2), которое после  $Z$ -преобразования примет вид

$$\hat{X}_k(z, s + C_0) = z \hat{X}_k(z, s) - z \hat{X}_k[0, s], \quad (6)$$

где  $\hat{X}_k[0, s]$ —матрица-столбец, описывающая состояние сгустка с номером  $k$  на нулевом обороте. Матрица-столбец  $\hat{X}_k(z, s)$  состоит из элементов  $\tilde{x}_k(z, s)$  и  $\tilde{x}'_k(z, s)$ .

Прежде чем решать систему уравнений (5) с учетом условия (6), необходимо конкретизировать величины  $\Delta Q_{kj}[n, \Delta s_{kj}]$  и их  $Z$ -изображения. Воспользуемся работами [9–13], где вычислены хвостовые поля одиночного сгустка. Тогда для сгустков, расстояние между которыми равно  $\Delta s_{kj}$ , можем записать [11]:

$$\Delta Q_{kj}[n, \Delta s_{kj}] = -2\nu_b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{D_m} \exp\left(-\left(n + \frac{\Delta s_{kj}}{C_0}\right) \alpha_m\right).$$

Параметр  $\nu_b$  для сгустка с числом частиц  $N_b$  равен

$$\nu_b = \frac{r_p N_b \beta_c}{2\pi\gamma_0 b^2},$$

где  $r_p$ —классический радиус ускоряемой частицы;  $\beta_c$ —среднее значение  $\beta$ -функции;  $b$ —радиус вакуумной камеры кругового сечения с толщиной стенки  $d$ . Постоянные затухания  $\alpha_m$  компонент хвостовых полей есть

$$\alpha_m = \frac{T_0}{T_m}; \quad T_m = \frac{\mu_0 b^2}{\rho y_m^2}; \quad D_m = \frac{y_m^2}{2} \left[ \left( \frac{J_2(y_m)}{J_0\left(\left(1 + \frac{d}{b}\right)y_m\right)} \right)^2 - 1 \right].$$

Величины  $y_m$  находятся как нули уравнения:

$$J_0\left(\left(1 + \frac{d}{b}\right)y_m\right) N_2(y_m) - J_2(y_m) N_0\left(\left(1 + \frac{d}{b}\right)y_m\right) = 0,$$

где  $J_n$ —функция Бесселя первого рода порядка  $n$ ;  $N_n$ —функция Неймана. Наибольшая постоянная времени  $T_1$  есть время диффузии поля в проводящие стенки вакуумной камеры, которая равна

$$T_1 \cong \frac{\mu_0 b d}{2\rho}.$$

Постоянная  $T_1$  соответствует наименьшему корню  $y_1^2 \cong 2b/d$ . Для больших величин  $y_m$  имеем следующие асимптотические оценки:

$$y_m \cong \frac{\pi b}{d} m, \quad m > 1, \quad y_m \gg 1.$$

Если

$$t = n + \frac{\Delta s_{kj}}{C_0} \ll T_m,$$

то поле не проникает за стенки вакуумной камеры и в сумме по  $m$  для  $\Delta Q_{kj}[n, \Delta s_{kj}]$  необходимо учитывать все слагаемые, что дает

$$\Delta Q_{kj}[n, \Delta s_{kj}] \cong -\nu_b \frac{2}{b} \sqrt{\frac{\rho}{\pi \mu_0 t}} T_0, \quad \Delta \tilde{Q}_{kj} \cong -(1+i)\nu_b \frac{\delta}{b},$$

где  $T_0 \Delta \tilde{Q}_{kj}$  — компонента одностороннего преобразования Фурье предшествующего оригинала, а  $\delta$  — величина скин-слоя на частоте  $\omega/2\pi$ . В другом предельном случае, когда  $t \gg T_1$ , поле успевает проникнуть за стенки вакуумной камеры. Тогда в сумме по  $m$  для  $\Delta Q_{kj}[n, \Delta s_{kj}]$  достаточно оставить первое слагаемое. В результате приходим к выражению

$$\Delta Q_{kj}[n, \Delta s_{kj}] \cong -2\nu_b \frac{T_0}{T_1} \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right), \quad \Delta \tilde{Q}_{kj} \cong -\frac{2\nu_b}{1-i\omega T_1}.$$

Таким образом, оба этих выражения для  $\Delta Q_{kj}[n, \Delta s_{kj}]$  в предельных случаях совпадают с известными [2].

Выполняя  $Z$ -преобразование для коэффициентов  $\Delta Q_{kj}[n, \Delta s_{kj}]$ , получаем

$$\Delta \tilde{Q}_{kj}(z, \Delta s_{kj}) = -2\nu_b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{D_m} \frac{z}{z - \exp(-\alpha_m)} \exp\left(-\frac{\Delta s_{kj}}{C_0} \alpha_m\right). \quad (7)$$

Вновь подчеркнем, что при  $k = j$  в (7) следует положить  $\Delta s_{kk} = C_0$ .

Система уравнений (5), в которой величины  $\Delta \tilde{Q}_{kj}(z, \Delta s_{kj})$  определены в соответствии с (3), описывает динамику сгустков для компонент одностороннего  $Z$ -преобразования смещения их центра тяжести. Решения (5) должны также удовлетворять условию (6). Если выключить систему подавления, положив коэффициенты  $\tilde{K}_{ij}$  равными нулю, то уравнения (5) упрощаются и принимают вид, характерный для задач в теории колебаний. В этом случае можно применить известные методы для решения системы дифференциальных уравнений, определить спектр собственных частот и написать решения однородных уравнений. Затем можно сделать следующий шаг и решить неоднородные уравнения. Полное решение уравнения складывается из решения однородного уравнения и неоднородного. При этом полное решение должно удовлетворять условию непрерывности (6), которое приведет к уравнению для определения  $z_k$ . Понятно, что такое решение можно найти, хотя в общем виде оно будет очень громоздким и сложно для анализа. Поэтому, на наш взгляд, полезнее исследовать некоторые частные случаи, которые не приводят к громоздким решениям и позволяют понять

основные особенности решения и предъявляемые к параметрам системы подавления требования.

### 3. Решение для системы подавления резистивной неустойчивости

Приведем решение для  $M$  сгустков, которые равномерно заполняют периметр синхротрона. Такая ситуация соответствует полному заполнению сгустками орбиты по окончании инжекции. Решение в этом случае должно переходить в решение для сплошного пучка, если число сгустков велико.

Пусть  $M$  сгустков равномерно распределены по периметру орбиты с шагом  $l_b = C_0/M$ . Тогда для расстояний между произвольными сгустками можем записать:

$$\frac{\Delta s_{kj}}{C_0} = \frac{k-j}{M}, \quad j < k, \quad \frac{\Delta s_{kj}}{C_0} = \frac{M+k-j}{M}, \quad j \geq k.$$

Введем обозначение  $\hat{Y}(z, s)$  для матрицы-столбца, состоящей из  $M$  элементов  $\tilde{x}_n$ . Принимая во внимание (7) и сделанные допущения, систему уравнений (5) для одинаковых сгустков можем записать в следующем матричном виде:

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{d^2}{ds^2} + K(s) + \frac{2Q_0 \Delta Q_0}{R^2} \right) \hat{I} - \frac{4Q_0 \nu_b}{R^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{D_m} \frac{\hat{q}_m}{z - \exp(-\alpha_m)} \right] \hat{Y}(z, s) = \\ & = \frac{z}{z-1} \frac{\hat{F}_E(s)}{\Lambda m \gamma_0 v_0^2} + \\ & + z^{-q} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\tilde{K}_{ij}(z)}{\sqrt{\beta_{Ki} \beta_{Pj}}} \left( \hat{Y}(z, s_{Pj}) + \frac{z}{z-1} \delta \hat{Y}(s_{Pj}) \right) \delta(s - s_{Ki}), \quad (8) \end{aligned}$$

где квадратная матрица  $\hat{q}_m$  размера  $M \times M$  состоит из элементов

$$\begin{aligned} (\hat{q}_m)_{kj} &= z \exp\left(-\frac{k-j}{M} \alpha_m\right), \quad j < k; \\ (\hat{q}_m)_{kj} &= \exp\left(-\frac{M+k-j}{M} \alpha_m\right), \quad j \geq k. \end{aligned} \quad (9)$$

Перейдем от переменных  $\tilde{x}_k$ , характеризующих отклонения сгустков от равновесной орбиты, к новым переменным  $\tilde{v}_n$ , образующим матрицу-столбец  $\hat{W}(z, s)$ , следуя правилу

$$\hat{W}(z, s) = \hat{F} \hat{Y}(z, s); \quad \hat{Y}(z, s) = \hat{F}^{-1} \hat{W}(z, s), \quad (10)$$

где

$$F_{nk} = \exp\left(-i\frac{2\pi k}{M}(n + \mu)\right), \quad F_{kj}^{-1} = \frac{1}{M} \exp\left(i\frac{2\pi k}{M}(j + \mu)\right).$$

Отметим, что

$$\sum_{k=1}^M F_{nk} F_{kj}^{-1} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \exp\left(i\frac{2\pi k}{M}(j - n)\right) = \delta_{nj}.$$

Произвольные величины  $\mu$  выберем таким образом, чтобы система уравнений (8) распалась на уравнения для нормальных координат. Домножая (8) слева на  $\hat{F}$  и принимая во внимание (10), получаем

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{d^2}{ds^2} + K(s) + \frac{2Q_0 \Delta Q_0}{R^2} \right) \hat{I} - \frac{4Q_0 \nu_b}{R^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{D_m} \frac{\hat{F} \hat{q}_m \hat{F}^{-1}}{z - \exp(-\alpha_m)} \right] \hat{W}(z, s) = \\ & = \frac{z}{z-1} \frac{\hat{F} \hat{F}_E(s)}{Am\gamma_0 v_0^2} + \\ & + z^{-q} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\tilde{K}_{ij}(z)}{\sqrt{\beta_{Ki} \beta_{Pj}}} \left( \hat{W}(z, s_{Pj}) + \frac{z}{z-1} \delta \hat{W}(s_{Pj}) \right) \delta(s - s_{Ki}). \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, если матрица  $\hat{F} \hat{q}_m \hat{F}^{-1}$  становится диагональной:

$$(\hat{F} \hat{q}_m \hat{F}^{-1})_{nj} = \lambda_n \delta_{nj}, \quad (12)$$

то преобразование (10) осуществляет необходимый переход от  $\tilde{x}_j$  к нормальным координатам  $\tilde{v}_n$ . С учетом (9) и (10) в (12) получаем

$$\begin{aligned} (\hat{F} \hat{q}_m \hat{F}^{-1})_{nj} = \frac{1}{M} \sum_{l=1}^M \frac{\exp(i\frac{2\pi l}{M}(j - n))}{\exp(-\beta) - 1} \left( z - \exp(-\alpha_m) + \right. \\ \left. + \exp(-\beta l) [\exp(-\alpha_m) - z \exp(M\beta)] \right), \end{aligned}$$

где введено

$$\beta = -i\frac{2\pi}{M}(n + \mu) - \frac{\alpha_m}{M}.$$

Выберем постоянные  $\mu$  так, что

$$z \exp(-i2\pi\mu) = 1. \quad (13)$$

Тогда имеем

$$z \exp(M\beta) = \exp(-\alpha_i), \quad \exp(-\beta) = \exp\left(i\frac{2\pi n}{M} + \frac{\alpha_m + \ln z}{M}\right).$$

С учетом такого определения значений  $\mu$  получаем

$$(\hat{F} \hat{q}_m \hat{F}^{-1})_{nj} = \frac{z - \exp(-\alpha_m)}{\exp(i\frac{2\pi n}{M} + \frac{\alpha_m + \ln z}{M}) - 1} \delta_{nj}. \quad (14)$$

В итоге дифференциальные уравнения для новых переменных  $\tilde{v}_n$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{d^2}{ds^2} + K(s) + \frac{2Q_0}{R^2} \left( \Delta Q_0 - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2\nu_b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{D_m} \frac{1}{\exp(i\frac{2\pi n}{M} + \frac{\alpha_m + \ln z}{M}) - 1} \right) \right] \tilde{v}_n = \\ & = \frac{z}{z-1} \frac{(\hat{F} \hat{F}_E(s))_n}{Am\gamma_0 v_0^2} + z^{-q} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\tilde{K}_{ij}(z)}{\sqrt{\beta_{Ki} \beta_{Pj}}} \tilde{v}_n(z, s_{Pj}) \delta(s - s_{Ki}). \end{aligned} \quad (15)$$

Необходимо также добавить условие непрерывности (6), которое после преобразования (10) примет вид

$$\hat{V}_n(z, s + C_0) = z \hat{V}_n(z, s) - z \hat{V}_n[0, s],$$

где

$$\hat{V}_n[0, s] = \sum_{k=1}^M \hat{X}_k[0, s] \exp(-i\frac{2\pi k}{M}(n + \mu)).$$

Таким образом, преобразование (10) обеспечивает переход к нормальным координатам, для которых система связанных уравнений (8) распадается на  $M$  независимых друг от друга уравнений (15).

Общее уравнение (15) полностью эквивалентно исследованному в [5,6,8] уравнениям для сплошного пучка и может быть решено с использованием приведенных в этих работах результатов. Исключительно с целью упрощения всех выражений будем полагать далее отсутствующими возмущения в ведущем магнитном поле и ошибки в установке ДП относительно равновесной орбиты. Тогда решение (15) есть

$$\hat{V}_n(z, s) = \frac{z \hat{I} - \hat{D}^{-1} \hat{M}_n(z) \hat{D} \det \hat{M}_n(z)}{\det(z \hat{I} - \hat{M}_n(z))} z \hat{V}_n[0, s],$$

где  $\hat{D}$  — обычная матрица перехода из точки  $s$  в точку  $s_{P1}$ ;

$$\hat{M}_n(z) = \hat{M}_{0n}(z) + z^{-q} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\tilde{K}_{ij}(z)}{\sqrt{\beta_{Ki} \beta_{Pj}}} \hat{M}_n(z, s_{P1} + C_0, s_{Ki}) \hat{T} \hat{M}_n(z, s_{Pj}, s_{P1});$$

$\widehat{M}_{0n}(z)$ —матрица оборота из точки  $s_{P1}$  на орбите при выключенной системе подавления;  $\widehat{M}_n(z; s_2, s_1)$ —обычная матрица перехода из точки  $s_1$  в точку  $s_2$ . Подчеркнем, что во всех этих матрицах, где вычисляются фазовые набег, следует принимать в качестве числа бетатронных колебаний за оборот величину  $Q_n$ , которая в соответствии с (15) задается следующим выражением:

$$Q_n^2 = Q_0^2 + 2Q_0\Delta Q_0 - 4Q_0\nu_b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{D_m} \frac{1}{\exp(i\frac{2\pi n}{M} + \frac{\alpha_m + \ln z}{M}) - 1}. \quad (16)$$

Для каждого  $Q_n$  собственные значения  $z_{(n)k}$  определяются из уравнения

$$z_{(n)k}^2 - z_{(n)k} \text{Tr} \widehat{M}_n(z_{(n)k}) + \det \widehat{M}_n(z_{(n)k}) = 0. \quad (17)$$

Значения  $z_{(n)k}$  полностью определяют решение поставленной задачи и позволяют рассчитать необходимые параметры системы подавления когерентных бетатронных колебаний.

## 4. Некоторые результаты

### 4.1. Одиночный сгусток

Анализ решений начнем со сравнения с известными результатами для одиночного сгустка при выключенной системе подавления. В этом случае в (16) для  $M = 1$  имеем

$$Q^2(z) = Q_0^2 + 2Q_0\Delta Q_0 - 4Q_0\nu_b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{D_m} \frac{1}{z \exp \alpha_m - 1}. \quad (18)$$

Уравнение (17) при выключенной системе подавления приводит к эквивалентному трансцендентному уравнению

$$z = \exp(\pm i2\pi Q(z)). \quad (19)$$

Возможны два типа решений в (19). Во-первых, вне особенностей  $Q(z)$ . Тогда можно воспользоваться методом последовательных приближений. В нулевом по  $\nu_b$  приближении имеем

$$z_{k(0)} = \exp(i2\pi(n_k \pm Q_c)),$$

где  $n_k$ —целое число и  $Q_c = Q_0 + \Delta Q_0$ . Подставляя  $z_{k(0)}$  в  $Q(z)$ , получаем следующее решение:

$$z_k = \exp \left[ \pm i2\pi \left( Q_c - \nu_b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m \exp(-i2\pi(n_k \pm Q_c)) - \exp(-\alpha_m)}{D_m \text{ch} \alpha_m - \cos 2\pi Q_c} \right) \right].$$

Отсюда ясно, что решение будет неустойчивым, если

$$0.5 < Q_c - \text{Int}(Q_c) < 1,$$

где  $\text{Int}(Q_c)$ —целая часть  $Q_c$ . Устойчивым решение будет при

$$0 < Q_c - \text{Int}(Q_c) < 0.5. \quad (20)$$

Следовательно, для всех  $Q_c = Q_0 + \Delta Q_0$ , лежащих между полуцелым и ближайшим сверху целым числом, колебания будут неустойчивы. При выборе  $Q_c$  выше целого числа и меньше полуцелого колебания одиночного сгустка будут устойчивыми. Данный результат для одиночного сгустка хорошо известен [12,13].

Второй тип решений в (19) связан с особенностями  $Q(z)$ , которые соответствуют значениям  $z = \exp(-\alpha_m)$ . В этом случае решения можно искать в следующем виде:

$$z_k = \exp(-\alpha_m - \mu), \quad |\mu| \ll 1,$$

что дает в соответствии с (19) следующее уравнение:

$$-\alpha_m - \mu = i2\pi(n_k \pm Q(z_k))$$

или

$$\left( n_k - i\frac{\mu + \alpha_m}{2\pi} \right)^2 = Q^2(z_k) \cong Q_c^2 + 4Q_0\nu_b \frac{\alpha_m}{D_m} \mu^{-1},$$

где в последнем уравнении в сумме по  $m$  для  $\Delta Q(z)$  оставлен только один полюсный член. Решение последнего уравнения, удовлетворяющее условию  $|\mu| \ll 1$ , при малых  $\nu_b$  есть

$$\mu = \mu_{(m)} = 4Q_0\nu_b \frac{\alpha_m}{D_m} \frac{1}{\left( n_k - i\frac{\alpha_m}{2\pi} \right)^2 - Q_c^2}.$$

Таким образом, дополнительное решение есть

$$z_{k(m)} = \exp \left( -\alpha_m - 4Q_0\nu_b \frac{\alpha_m}{D_m} \frac{1}{\left( n_k - i\frac{\alpha_m}{2\pi} \right)^2 - Q_c^2} \right).$$

Принимая во внимание, что

$$z_k = \exp(-i\omega_k T_0),$$



для циклической частоты  $\omega_k$  собственной волны поперечного смещения получаем

$$\omega_{k(m)} = -\frac{i}{T_m} - i \frac{4Q_0\nu_b}{T_m D_m} \frac{1}{\left(n_k + Q_c - i \frac{\alpha_m}{2\pi}\right) \left(n_k - Q_c - i \frac{\alpha_m}{2\pi}\right)}$$

Это значение для  $\omega_k$  при  $m = 1$  совпадает с решением в [2] дисперсионного уравнения для сплошного пучка, которое было получено с использованием традиционных методов исследования резистивной неустойчивости с помощью одностороннего преобразования Фурье. Нетрудно показать, что решения  $\omega_{k(m)}$  при малых  $\nu_b$  будут всегда затухающими.

При включенной быстрой системе подавления [4,5] уравнение (17) принимает вид

$$z = (1 \mp iK(z) \exp(\mp i\psi_{PK})) \exp(\pm i2\pi Q), \quad (21)$$

где  $\psi_{PK}$  — комплексная величина, у которой реальная часть  $\text{Re}\psi_{PK}$  совпадает с набегом фазы когерентных бетатронных колебаний между первым датчиком положения и первым толкателем. Подчеркнем, что  $Q$  и  $\psi_{PK}$  зависят от  $z$ . При использовании широкополосного усилителя в цепи обратной связи алгоритм решения уравнения (21) заключается в следующем. Вне особенностей  $Q(z)$  и  $K(z)$  может быть использован метод последовательных приближений. Тогда

$$z_k = [1 \mp iK \exp(\mp i\varphi_{PK} Q(z_{(0)}))] \exp(\pm i2\pi Q(z_{(0)})),$$

где

$$\begin{aligned} z_{(0)} &= [1 \mp iK \exp(\mp iQ_c \varphi_{PK})] \exp(\pm i2\pi Q_c), \\ Q(z_{(0)}) &= Q_c - 2\nu_b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{D_m} \frac{1}{z_{(0)} \exp \alpha_m - 1}, \end{aligned}$$

а  $\varphi_{PK}$  — угловое расстояние между ДП1 и Т1. Процесс итераций можно повторить. Поскольку в области устойчивости  $|z_k| < 1$ , то он сходится к некоторому решению  $z_k$ . Отметим, что  $z_{(0)}$  зависит от  $K$ . В результате от  $K$  начинает зависеть  $Q(z_{(0)})$ . Имеем:

$$Q(z_{(0)}) = Q_c - \nu_b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{D_m} \frac{\exp(-i \arg z_{(0)}) - [|z_{(0)}| \exp \alpha_m]^{-1}}{\text{ch}(\alpha_m + \ln |z_{(0)}|) - \cos(\arg z_{(0)})}$$

Видно, что в  $Q(z)$  поправки, зависящие от  $K$ , входят как слагаемые, пропорциональные  $\nu_b$ . Поэтому в них можно пренебречь зависимостью от  $K$  и подставлять величины  $z_{(0)}$  при  $K = 0$ . Это эквивалентно тому, что в (17)

вместо  $Q(z)$  необходимо подставить комплексные значения  $Q$  из (16), вычисленные при выключенной системе подавления. Именно таким образом решалось аналогичное уравнение для сплошного пучка в [4–6].

Для решений вблизи особенностей  $Q(z)$  можно повторить все те же рассуждения, что были приведены выше при анализе решений  $\omega_{k(m)}$ . Поскольку эти решения при малых  $\nu_b$  описывают затухающие колебания, то они всегда устойчивы.

Таким образом, уравнение (17) полностью эквивалентно аналогичному уравнению для сплошного пучка, за исключением тех моментов, которые проявляются в замене  $Q(\omega)$  на  $Q(z)$  и разобраны выше. Поэтому новых следствий для выбора параметров системы подавления не возникает.

## 4.2. Два сгустка

Принципиально новая ситуация для решений уравнения (17) возникает при  $M \geq 2$ . Действительно, при наличии двух сгустков на орбите их колебания при выключенной системе подавления в соответствии с (16) характеризуются двумя собственными значениями числа бетатронных колебаний за оборот  $Q_1$  и  $Q_2$ . Остановимся на этом моменте несколько подробнее. Нетрудно видеть, что при  $M = 2$  система уравнений (5) совпадает с хорошо исследованным уравнением колебаний двух связанных осцилляторов [14] и имеет решение при произвольном расстоянии  $l$  между идентичными сгустками. Не приводя длинных математических выкладок, укажем, что для собственных значений  $z_k$  получается совпадающее с (17) уравнение, однако

$$Q_{1,2}^2 = Q_0^2 + 2Q_0 \Delta Q_0 - 4Q_0 \nu_b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{D_m} \frac{1}{z \exp \alpha_m - 1} - 2\kappa \epsilon Q_0, \quad (22)$$

где  $\kappa = \pm 1$ , а параметр связи  $\epsilon$  есть:

$$\epsilon^2 = 4\nu_b^2 \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{D_m} \frac{\exp\left(\alpha_m - \frac{l\alpha_m}{C_0}\right)}{z \exp \alpha_m - 1} \right] \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{D_m} \frac{z \exp\left(\frac{l\alpha_m}{C_0}\right)}{z \exp \alpha_m - 1} \right]$$

Начнем анализ полученных решений со случая двух диаметрально противоположных сгустков, когда  $2l = C_0$ . Тогда

$$Q_{1,2}^2 = Q_0^2 + 2Q_0 \Delta Q_0 - 4Q_0 \nu_b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{D_m} \frac{1}{\kappa \sqrt{z} \exp\left(\frac{\alpha_m}{2}\right) - 1} \quad (23)$$

Видно, что получились выражения, совпадающие с (16) и аналогичные использованным при анализе неустойчивости одиночного сгустка. Поэтому

воспользуемся теми же приемами для решения дисперсионного уравнения, что и в предыдущем разделе. Вне особенностей  $Q(z)$  используем метод последовательных приближений. При выключенной системе подавления с нулевым приближением

$$z_k(0) = \exp(i2\pi(n_k \pm Q_c)), \quad Q_c = Q_0 + \Delta Q_0,$$

имеем

$$z_k = \exp \left[ \pm i2\pi \left( Q_c - \nu_b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{D_m} \frac{\kappa \exp(-i\pi(n_k \pm Q_c)) - \exp(-\frac{\alpha_m}{2})}{\operatorname{ch}(\frac{\alpha_m}{2}) - \kappa \cos(\pi(n_k \pm Q_c))} \right) \right].$$

Отсюда ясно, что движение сгустков будет устойчивым, если

$$\kappa \cos \pi n_k \sin 2\pi Q_c > 0.$$

Поскольку  $\kappa = -1$  для  $Q_1$  и  $\kappa = +1$  для  $Q_2$ , то одновременная устойчивость всех мод колебаний невозможна. Таким образом, при наличии на орбите двух сгустков всегда развивается резистивная неустойчивость.

Еще один интересный случай соответствует синхротронам с большим периметром и значительным расстоянием между сгустками, когда поле успевает проникнуть за стенки вакуумной камеры за время  $l/v_0$ . Именно такая ситуация возможна в УНК-1. В этом случае в сумме по  $m$  в (16) достаточно оставить только первое слагаемое. Тогда

$$Q_{1,2}^2 = Q_0^2 + 2Q_0\Delta Q_0 - 4Q_0\nu_b \frac{\alpha_1}{D_1} \frac{1}{\kappa \sqrt{z} \exp(\frac{\alpha_1}{2}) - 1}.$$

Подчеркнем, что этот результат получается при произвольном расстоянии  $l$  между сгустками. Важно лишь, чтобы поле успело проникнуть за стенки вакуумной камеры за время  $l/v_0$ . Отсюда получается тот же результат, что и выше: при наличии на орбите двух сгустков всегда развивается резистивная неустойчивость.

Подчеркнем очень важный момент: каждому из двух сгустков соответствуют два собственных значения числа бетатронных колебаний. Величина их разброса для эквидистантных сгустков равна

$$\delta Q = 4\nu_b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{D_m} \frac{\operatorname{sh}(\frac{\alpha_m}{2}) \cos(\pi(n_k \pm Q_c)) - i \operatorname{ch}(\frac{\alpha_m}{2}) \sin(\pi(n_k \pm Q_c))}{\operatorname{ch} \alpha_m - \cos(2\pi(n_k \pm Q_c))}.$$

Поскольку угловое расстояние между ДП1 и Т1 для быстрой системы подавления близко к  $2\pi$ , то разброс набегов фаз бетатронных колебаний от

ДП1 до Т1 приближенно есть

$$\delta\psi_{PK} \cong 2\pi \operatorname{Re} \delta Q = 8\pi\nu_b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{D_m} \frac{\operatorname{sh}(\frac{\alpha_m}{2}) \cos(\pi(n_k \pm Q_c))}{\operatorname{ch} \alpha_m - \cos(2\pi(n_k \pm Q_c))}.$$

Таким образом, добиться строгого выполнения оптимальных условий подавления когерентных поперечных колебаний одновременно для двух сгустков невозможно. В связи с этим необходимо рассчитывать систему подавления для наихудших условий, соответствующих такому собственному числу бетатронных колебаний за оборот, когда набег фазы бетатронных колебаний  $\operatorname{Re} \psi_{PK}$  для него максимально отличается от оптимального.

### 4.3. Большое число сгустков

Принимая во внимание, что  $i2\pi n + \ln z = -i\omega_k T_0$ , для очень большого числа сгустков имеем

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{Q}(z) &\cong 2\nu_b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{D_m} \frac{1}{\exp(i\frac{2\pi n}{M} + \frac{\alpha_m + \ln z}{M}) - 1} = \\ &= -2\nu_b M \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{D_m} \frac{1}{\alpha_m - i\omega_k T_0}, \end{aligned}$$

что находится в соответствии с формулами для сплошного пучка: поправки в  $Q$  пропорциональны числу частиц, то есть  $\nu_b M$ . Когда поле не проникает за стенки, то величина  $|\omega_k T_0|$  велика и в сумме по  $m$  необходимо учитывать все слагаемые, причем можно заменить  $\alpha_m$  и  $D_m$  на их асимптотические значения. В результате получим

$$\Delta \tilde{Q}(z) \cong -\nu_b M (1+i) \frac{\delta}{b},$$

то есть известную формулу для сплошного пучка в высокочастотном приближении. Когда поле проникает за стенки, то достаточно ограничиться первым слагаемым:

$$\Delta \tilde{Q}(z) = -\frac{2\nu_b M}{1 - i\omega_k T_0},$$

то есть получаем формулу для сплошного пучка в низкочастотном приближении.

Перейдем теперь к анализу решений уравнения (17) при выключенной системе подавления с учетом выражения (16) для числа бетатронных колебаний за оборот. Эквивалентное (17) уравнение есть

$$\begin{aligned} z_{(n)k} &\equiv \exp(-i\omega_{(n)k} T_0) = \exp(\pm i2\pi Q_{(n)}), \\ \omega_{(n)k} &= (n_k \pm Q_n) \omega_0, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $n_k$ —целое число. Напомним, что для сплошного пучка учет его собственного электромагнитного поля и наведенных полей в стенках вакуумной камеры приводит к добавлению к числу бетатронных колебаний  $Q_0$  за оборот, обусловленному магнитной структурой синхротрона, комплексной добавки, связанной с когерентным движением пучка. В результате возникает бесконечное множество собственных волн поперечного смещения, частоты которых отличаются, однако, на частоту обращения. Похожая ситуация возникает для сгруппированного пучка: здесь также имеем периодичность частот собственных волн. Однако наряду с этим, как и для двух сгустков, возникают спутники: каждому  $n$  соответствует свое значение  $Q_n$ . Происходит расщепление моды колебаний  $(n_k \pm Q_0 \pm \Delta Q_0)\omega_0$ . Подчеркнем, что число спутников равно числу сгустков, а сдвиги частот в тонкой структуре пропорциональны  $\nu_b$ . В соответствии с (10) и (13) имеем

$$\tilde{x}_m = \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}^{-1} \tilde{v}_n = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(i \frac{2\pi m}{M} \left(n - \frac{\omega(n)}{\omega_0}\right)\right) \tilde{v}_n.$$

Таким образом, каждому собственному решению  $v_n$  соответствует определенная корреляция между сгустками. При большом числе сгустков, например, при  $n = M$ , фазовый сдвиг между сгустками равен почти  $2\pi$ , а при  $n = M/2$ —около  $\pi$ .

Из (16) ясно, что все  $Q_n$  лежат между значениями при  $n = M/2$  и  $n = M$ . Поэтому для разброса  $\delta Q$  имеем

$$\delta Q = 4\nu_b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{D_m} \frac{\exp\left(\frac{\alpha_m + \ln z}{M}\right)}{\exp\left(2\frac{\alpha_m + \ln z}{M}\right) - 1}.$$

Подставляя нулевое приближение для  $z$  из (24), получаем для  $\delta Q$ :

$$\delta Q = 4\nu_b \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{D_m} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha_m}{M}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{M}(n_k \pm Q_c)\right) - i \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha_m}{M}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{M}(n_k \pm Q_c)\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{2\alpha_m}{M}\right) - \cos\left(\frac{4\pi}{M}(n_k \pm Q_c)\right)}.$$

Эта формула для  $\delta Q$  совпадает с аналогичной для разброса собственных значений числа бетатронных колебаний за оборот при  $M = 2$  для двух эквидистантных одинаковых сгустков.

Для большого числа сгустков в исходной формуле для  $\delta Q$  имеем

$$\delta Q \cong 2\nu_b M \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{D_m} \frac{1}{\alpha_m + \ln z}.$$

Такая сумма уже встречалась выше. Ее максимальное значение получается в случае проникновения поля за стенки вакуумной камеры. Следовательно,

$$\delta Q_{\max} = \frac{2\nu_b M}{1 - i\omega_k T_1}.$$

Подставляя нулевое приближение для  $\omega_k$  из (24) при выключенной системе подавления вне особенностей  $Q(z)$ , для  $\delta Q_{\max}$  получаем

$$|\delta Q_{\max}| = \frac{2\nu_b M}{1 + \left(\frac{bd}{\delta^2}\right)^2},$$

где величина скин-слоя  $\delta$  вычисляется на частоте когерентных бетатронных колебаний, равной  $(n_k \pm Q_0 \pm \Delta Q_0)\omega_0/2\pi$ . Таким образом, максимальное расщепление собственных значений не превосходит  $\nu_t = \nu_b M$ . Так, в УНК-1 это расщепление составляет около 0.1, что намного больше ожидаемого разброса  $Q$  вследствие импульсного разброса частиц.

Как и для двух сгустков, все приведенные выше оценки при малых  $\nu_b$  остаются в силе и для включенной системы подавления. Это означает, что добиться строгого выполнения оптимальных условий подавления когерентных поперечных колебаний одновременно для всех возможных мод колебаний сгустков невозможно. В связи с этим необходимо рассчитывать систему подавления для наихудших условий, соответствующих такому собственному числу бетатронных колебаний за оборот, когда набег фазы бетатронных колебаний  $\operatorname{Re}\psi_{PK}$  для него максимально отличается от оптимального. Быстрая система подавления [4], создаваемая для УНК-1, обеспечивает режим затухания поперечных когерентных колебаний, если

$$|\sin(\operatorname{Re}\psi_{PK})| > |\operatorname{sh}(2\pi ImQ)|.$$

В УНК-1 ожидается величина  $|ImQ| \cong 0.1$ , что приводит к допустимым значениям  $\operatorname{Re}\psi_{PK}$  около  $0.2\pi$  радиан. Поскольку угловая протяженность  $\varphi_{PK}$  промежутка между ДП1 и Т1 близка к  $2\pi$  радиан, то допустим разброс  $|\delta Q|$  около 0.1. Это означает, что быстрая система обеспечивает подавление всех мод колебаний, хотя практически отсутствует запас по области устойчивости.

## Заключение

Проведенный анализ подавления когерентных бетатронных колебаний сгустков сгруппированного пучка с использованием цепей обратной связи показал, что учет структуры пучка приводит к эффекту расщепления собственных частот волны поперечного смещения. В результате обеспечить условия оптимального подавления всех возможных мод колебаний становится невозможно. Величина расщепления собственных чисел бетатронных колебаний приблизительно равна мнимой части когерентного сдвига. В связи с этим эффект расщепления приобретает существенное значение на новых крупных синхротронах и коллайдерах.

В заключение авторы выражают признательность своим коллегам, совместно с которыми ведутся разработки и создание новой быстрой системы подавления для УНК-1, за плодотворные обсуждения.

## Литература

1. Ebert M. et al. — DESY 91-036, April 1991.
2. Балбеков В.И.—Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. ОИЯИ, Дубна, т.2, с.360 (1985).
3. Балбеков В.И. и др.— Препринт ИФВЭ 87-120, Серпухов, 1987.
4. Жабицкий В.М. и др.— Сообщение ОИЯИ Р9-91-99, Дубна, 1991.
5. Жабицкий В.М. и др.— Сообщение ОИЯИ Р9-91-494, Дубна, 1991.
6. Zhabitsky V.M. — CERN-SL/RFS 91-14, December 1991.
7. Kohaupt R.D. — DESY 91-071, June 1991.
8. Жабицкий В.М.— Сообщение ОИЯИ Р9-91-91, Дубна, 1991.
9. Лебедев А.И., Шальнов А.В.— Основы физики и техники ускорителей. М.: Энергоиздат, т.2 (1982).
10. Sprangle P., Kapetanakis C.A.— Particle Accelerators, vol.14, p.15 (1983).
11. Govindan Rangarajan, Chan K.C.D.— Phys.Rev. A., vol.39, p.4749 (1989).
12. Courant E.D., Sessler A.M. — Rev. Sci. Instrum., vol.37, p.1579 (1966).
13. Диканский Н.С., Скринский А.И. — АЭ, т.21, с.176 (1966).
14. Ландау Л.А., Лифшиц Е.М.— Механика. М.:Наука (1973).

Рукопись поступила в издательский отдел  
17 июля 1992 года

Жабицкий В.М., Корнев И.Л., Юдин Л.А.

P9-92-309

Подавление резистивной неустойчивости сгруппированного пучка с использованием цепей обратной связи

Приводится теоретический анализ системы подавления резистивной неустойчивости сгруппированного пучка в синхротроне. Для описания движения сгустков при наличии воздействий на них через цепи обратной связи получена система уравнений, в которой учтены собственные электромагнитные поля сгустков и наведенные ими поля в стенках вакуумной камеры с конечной проводимостью. Полученная система уравнений с помощью метода одностороннего Z-преобразования и ортогонального преобразования координат приводится к системе независимых уравнений. Найдены собственные решения и собственные частоты колебаний сгустков. Показано, что полученные решения в предельных случаях для одиночного сгустка и сплошного пучка при выключенной системе подавления приводят к известным результатам. Получено, что учет структуры пучка приводит к эффекту расщепления собственных частот колебаний поперечной волны когерентного смещения. Вычислены собственные значения чисел бетатронных колебаний с учетом эффекта расщепления, а также ширина их разброса. Показано, что эффект расщепления приводит к дополнительным требованиям на параметры системы подавления, особенно в ситуациях, когда минимая часть когерентного сдвига числа бетатронных колебаний не является малой величиной, что и ожидается на новых крупных ускорителях и накопителях. Приводятся численные оценки и обсуждаются последствия эффекта расщепления на параметры быстрой системы подавления для первой ступени УНК.

Работа выполнена в Лаборатории сверхвысоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1992

Zhabitsky V.M., Korenev I.L., Yudin L.A.

P9-92-309

Multi Bunch Resistive Wall Instability Damping with Feedback

In this article the theory of multibunch transverse resistive wall instability damping with feedback is developed. The system of coupling equations is obtained for description of bunched beam motion. In these equations the wake fields for bunched beam are calculated with resistive wall effects. To solve equations the Z-transform method and special coordinates transformation are used. The general solution and eigen frequencies are found. It is shown that these solutions without feedback coincide with the famous results for single bunch and coasting beam transverse resistive wall instability. But for two bunches or multi bunches the tune splitting is found. The band of the tune splitting is calculated. The influence of the tune splitting on the damper system stability is discussed. It is shown that the tune splitting leads to additional requirements on the damper system parameters especially when imaginary part of the tune is not small. Hence, this effect is important for a damper system in new large accelerators and colliders. The numerical results of tune splitting are shown and their influence on the fast damper system parameters is discussed for UNK-1 (Protvino, Russia) accelerator.

The investigation has been performed at the Particle Physics Laboratory, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1992