

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА



СЗ45е3

24/2-75

Б-399

P9 - 9120

4116/2-75

Ю.Д.Безногих, А.Г.Бонч-Осмоловский, М.А.Воеводин,  
Л.П.Зиновьев

О ПОВЫШЕНИИ  
ИНТЕНСИВНОСТИ ПУЧКА, УСКОРЕННОГО  
В СИНХРОФАЗОТРОНЕ ОИЯИ

II. Резонансные потери, сравнение эксперимента  
и теории.  
Дальнейшие перспективы

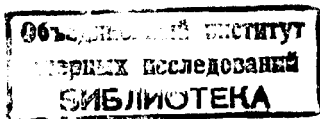
**1975**

P9 - 9120

Ю.Д.Безногих, А.Г.Бонч-Осмоловский, М.А.Воеводин,  
Л.П.Зиновьев

О ПОВЫШЕНИИ  
ИНТЕНСИВНОСТИ ПУЧКА, УСКОРЕННОГО  
В СИНХРОФАЗОТРОНЕ ОИЯИ

II. Резонансные потери, сравнение эксперимента  
и теории.  
Дальнейшие перспективы



В предыдущей работе авторов /1/ на основании данных эксперимента было высказано предположение о существенной роли кулоновского сдвига бетатронных колебаний в появлении быстрых резонансных потерь частиц в синхротроне. С учетом специфики ускорителя были развиты аналитические представления о динамическом кулоновском сдвиге колебаний, которые в данной работе используются для выяснения происхождения этих потерь и обоснования методов борьбы с ними.

### 1. Диаграммы резонансов и частот колебаний пучка

Рассмотрим ситуацию на диаграмме частот для конкретных параметров ускорителя. На рис. 1 показана рабочая окружность синхротрона  $\nu_x^2 + \nu_z^2 = 1,18$  и резонансные линии в окрестности точки  $n = 0,65$ , вплоть до резонансов четвертого порядка включительно /показан также наиболее близкий резонанс 5-го порядка/.

Рабочую точку в момент формирования сгустка на орбите ( $t = 0$ ) вычислим согласно /1/ и /2/ из /1/ \* для следующих параметров:

$$\begin{array}{lll}
 2L = 200 \text{ см}; & R = 2800 \text{ см}; & \Delta p/p = \pm 0,75\%; \\
 \mathcal{H} = 40 \text{ см}; & a_0 = 40 \text{ см}; & B = 0,35. \\
 \beta_0 = 0,2; & b_0 = 10 \text{ см}; & \\
 n = 0,65; & & 
 \end{array}$$

---

\* Нумерация формул единая для /1/ и данной работы.

При вычислениях /напомним, что согласно определению рабочей точки сдвиг частот вычисляется для центра пучка/ учтем изменение коэффициентов  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  согласно /10/ и то обстоятельство, что  $V\beta^2\gamma^2 \ll 1$ :

$$\left. \begin{aligned} \Delta\nu_r^0/N &\approx -0,79 \cdot 10^{-14} (1 - 0,5) = -0,4 \cdot 10^{-14}, \\ \Delta\nu_z^0/N &\approx -0,18 \cdot 10^{-13} (1 + 0,13) = -0,2 \cdot 10^{-13}. \end{aligned} \right\} /21/$$

Для числа частиц, захваченных в режим ускорения при  $t=0$ , равного  $N = 3 \cdot 10^{12}$ , получаем начальный сдвиг для центральной области пучка:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\nu_r^0 &= -1,2 \cdot 10^{-2}, \\ \Delta\nu_z^0 &= -6 \cdot 10^{-2}. \end{aligned} \right\} /22/$$

Примем для распределения плотности в поперечном сечении некоторую среднюю модель между рассмотренными выше распределениями Гаусса и Лоренца, так что коэффициент уменьшения градиента собственного поля на краю пучка возьмем равным 0,2. Учтем также формулу /11/ /см./<sup>1</sup>/ для вклада от полей изображения. Это дает для частиц, находящихся вблизи края пучка ( $x=a$ ), сдвиг

$$\left. \begin{aligned} \Delta\nu_r|_a &= -0,4 \cdot 10^{-2}, \\ \Delta\nu_z|_a &= -1,15 \cdot 10^{-2}. \end{aligned} \right\} /23/$$

Положение пучка на диаграмме частот с учетом /22/ и /23/ при  $n = 0,65$  обозначено заштрихованной областью между точками А и В. Начальные колебания плотности вследствие фазовых колебаний размывают эту область еще несколько больше /точки А' и В'/. Напомним, что такое размытие происходит в течение примерно первых 5 мс.

Учет поправок /13/ из работы /1/ несколько сложнее. Известный ход  $n(r)$  в машине без коррекций в связи с

тем, что  $n' \approx 0,3$  1/м и приблизительно постоянно в рабочей области, дает большую величину поправок:  $\Delta\delta\nu_r|_{t=0} \approx \pm 0,1$  и  $\Delta\delta\nu_z|_{t=0} \approx \pm 0,07$ , что существенно размывает область, занятую частотами колебаний пучка при радиально - синхротронных колебаниях. С системой коррекции РЗМИ-1 /1/ эти поправки на порядок меньше. К сожалению, в настоящее время экспериментально недостаточно изучен усредненный по азимуту ход  $n(r)$  в машине с коррекциями РЗМИ-2 /1/. Можно утверждать только, что размытие пучка по частотам становится односторонним / $\Delta\delta\nu_r < 0$  и  $\Delta\delta\nu_z > 0$ / и по абсолютной величине в начальный момент не превышает 0,03.

Теперь вычислим положение пучка в момент  $t = 100$  мс, когда  $\beta$  и  $N$  увеличиваются в два раза. Зададимся /для режима инжекции с модуляцией энергии/  $a_{\delta 0} \approx b_0 \approx 10$  см,  $a_{c0} = 30$  см/см. /1/ /1/. Тогда получим размеры поперечного сечения пучка:

$$a_{100} = 22 \text{ см}, \quad b_{100} = 7 \text{ см}.$$

На рис. 2 показано вычисленное положение пучка в момент  $t = 100$  мс в предположении, что распределение плотности в сечении пучка остается неизменным и для того же числа частиц  $N = 3 \cdot 10^{12}$ . Рабочая точка при этом смещается в положение, которое определяется сдвигом:

$$\Delta\nu_r^{100} = -1 \cdot 10^{-2}, \quad \Delta\nu_z^{100} = -3,2 \cdot 10^{-2}.$$

Рассмотрение полученной картины на диаграмме частот показывает, что при ускорении достаточно большого числа частиц могут пересекаться различные резонансы, даже если значение  $n$  выбрано в зоне, свободной от резонансов. На данном примере видно, что при движении рабочей точки медленно проходит резонанс  $2\nu_z - \nu_r = 1$ , при колебаниях частиц многократно проходит /значительно быстрее/ резонанс  $2\nu_r + 2\nu_z = 3$  и при  $n' \neq 0$  также резонансы  $3\nu_z - \nu_r = 2$ ,  $3\nu_r - \nu_z = 1$ . В принципе, в начальный период /до 5 мс/ может захватываться полоса резонанса  $\nu_r + 3\nu_z = 3$  /при начальных колебаниях плотности/. При числе частиц в режиме ускорения  $\approx 5 \cdot 10^{12}$ , помимо последнего резонанса, захватывается и полоса резонанса  $2\nu_r + \nu_z = 2$ . Если в процессе ускорения час-

тицы теряются, то при движении рабочей точки медленно проходит полоса резонанса  $2\nu_r + 2\nu_z = 3$  /см. рис. 2 при  $N < 1,5 \cdot 10^{12}$  /.

## 2. Оценка ширины и силы резонансов

Дальнейшие рассуждения о возможном темпе потерь существенно определяются данными о характере искажений поля машины. Известные материалы по данному вопросу содержатся в [2], в [3] оценено численно влияние резонанса  $3\nu_r - \nu_z = 1$  на потери частиц при постоянном нахождении рабочей точки в полосе этого резонанса. К сожалению, практически отсутствуют данные, имеющие основное значение: об азимутальных вариациях поля и его производных в синхрофазотроне. Перечисленные выше суммовые и разностные резонансы 3 и 4 порядка определяются 1, 2 и 3 компонентами Фурье производных поля 2 и 3 порядков.

Для оценки азимутальных искажений поля и возможных потерь частиц в процессе прохождения резонансов на начальном этапе ускорения поступим следующим образом: экспериментально установлено, что введение корректирующей системы РЗМИ-2, характер поправок которой к магнитному полю машины известен, увеличивает количество ускоряемых частиц почти в 3 раза. Можно сделать предположение, что искажения, в особенности азимутальные вариации магнитного поля, одного порядка с вводимыми при коррекции величинами. Скорее всего, искажения поля до коррекции значительно больше.

В таблице приведены результаты математической обработки \* измерений корректирующего поля /рис. 3 и 4 работы [1]/. Они выражены в значениях компонент Фурье производных от добавки к показателю спада магнитного поля, вводимой системой коррекций РЗМИ-2

\* Ее выполнил В.А. Михайлов.

$t = 0$

Таблица 1

	$k=0$	1	2	3	4
$ \Delta \bar{n}_0^k $	$2,54 \cdot 10^{-3}$	$5,1 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$1,76 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$
$ \bar{n}_1^k  / \omega_m$	$3,14 \cdot 10^{-4}$	$6,27 \cdot 10^{-4}$	$3,1 \cdot 10^{-4}$	$2,1 \cdot 10^{-4}$	$1,6 \cdot 10^{-4}$
$ \bar{n}_2^k  / \omega_m^2$	$4,5 \cdot 10^{-5}$	$9 \cdot 10^{-5}$	$4,85 \cdot 10^{-5}$	$3,0 \cdot 10^{-5}$	$2,2 \cdot 10^{-5}$

$t = 30$  мс

	$k=0$	1	2	3	4
$ \Delta \bar{n}_0^k $	$6,3 \cdot 10^{-3}$	$1,25 \cdot 10^{-2}$	$6,3 \cdot 10^{-3}$	$4,2 \cdot 10^{-3}$	$3,1 \cdot 10^{-3}$
$ \bar{n}_1^k  / \omega_m$	$3,71 \cdot 10^{-4}$	$7,5 \cdot 10^{-4}$	$3,7 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$1,8 \cdot 10^{-4}$
$ \bar{n}_2^k  / \omega_m^2$	$5 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$3,3 \cdot 10^{-5}$	$2,5 \cdot 10^{-5}$

для двух /в качестве примера/ моментов времени:  $t = 0$ ,  
и  $t = 30$  мс.

Обозначим

$$\Delta n(x, \phi) = \Delta n_0(\phi) + \bar{n}_1(\phi)x + n_2(\phi)x^2 + \dots, \quad /24/$$

где  $x = r - R_0$ ,  $\Delta n_0 = \Delta n_0(\bar{R})$ ,  $n_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k n}{dx^k} \Big|_{\bar{R}}$ .

Компоненты Фурье будем обозначать индексом сверху;  
например,  $\bar{n}_1^2$  определяет компоненту Фурье

$$\bar{n}_1^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{n}_1(x, \phi) e^{2i\phi} d\phi$$

и т.д.

Обозначим также

$$|\bar{n}_a^k| = 2 \sqrt{(\text{Re} \bar{n}_a^k)^2 + (\text{Im} \bar{n}_a^k)^2}. \quad /25/$$

Теперь можно использовать эти данные для оценки ширины и силы резонансов и степени раскачки колебаний частиц. Рассмотрение проведем, в основном, на примере двух характерных резонансов, имеющих, по-видимому, наибольшее значение: суммового резонанса 4 порядка  $2\nu_r + 2\nu_z = 3$  и разностного резонанса 3 порядка  $2\nu_z - \nu_r = 1$ . Для оценки ширины этих резонансов, а также возможного увеличения амплитуды колебаний при их прохождении применим методику, разработанную в /4,5/ и основанную на упрощающем предположении, что вертикальные бетатронные колебания малы и при рассмотрении процесса раскачки наиболее опасных вертикальных колебаний /вертикальный размер камеры сравнительно мал/ радиальные колебания можно считать стационарными, пренебрегая связью их с  $z$ -колебаниями. При этом, поскольку рассматривается лишь начальная стадия роста вертикальных колебаний, нелинейными эффектами - насыщением роста амплитуды, несимметрией направления прохождения полосы и пр. - пренебрегается. В нашем случае уже при удвоении амплитуды вертикальных колебаний происходит высадка частиц на стенки, и мы будем считать условие малости вертикальной амплитуды выполненным.

Суть метода состоит в следующем: в общем случае уравнения движения частицы в магнитном поле с искажениями можно привести к двум связанным нелинейным дифференциальным уравнениям 2 порядка относительно отклонений от равновесной орбиты  $x = r - R$  и  $z$ . При использовании предположения о малости  $z$ -отклонений в радиальном уравнении, написанном с учетом членов, ответственных за рассматриваемый конкретный резонанс,  $z$  полагается равным нулю. Тогда решение для  $x$  получается - в общем случае - в виде комбинации гармонических по азимуту слагаемых, в простейшем случае - в виде  $x = a_r \cos \nu_z \phi$ . Это стационарное решение затем используется в уравнении для  $z$ -колебаний, что приводит к уравнениям типа Хилла или Матье. Анализ таких уравнений дает возможность определить области устойчивости /ширину полос резонансов/, инкремент нарастания амплитуды  $z$ -колебаний и суммарный рост ее при прохождении полосы резонанса.

Отсылая за подробностями к цитированным статьям, мы применим этот подход к конкретным условиям синхротрона, причем ограничимся лишь получением оценок максимального роста амплитуды.

В связи с резко нелинейным характером вносимых системой коррекций РЗМИ-2 добавок к показателю поля  $n(r)$  оказывается, что наибольшее значение имеют высшие производные  $B_z$  по радиусу, что можно выразить следующей цепочкой неравенств:

$$n_0 \ll n_1 \ll n_2 \ll \dots \quad /26/$$

причем безразмерные величины  $n_k$  связаны со значениями  $\bar{n}_k$  /см. /24// соотношением

$$n_k = \bar{R}^k \bar{n}_k \quad /27/$$

Анализ табл. 1 показывает, что неравенства /26/ справедливы для любых компонент Фурье  $n_k$  /по крайней мере первых четырех/. Соотношения /26/ означают, что главную роль в членах, ответственных за возбуждение резонансов, играют высшие производные  $B_z(r)$  по  $r$ .

Например,

$$n_1 \Big|_{\bar{R}} = n_0 (1 - n_0) + \frac{\bar{R}^2}{B_z} \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \Big|_{\bar{R}} = \frac{\bar{R}^2}{B_z} \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} \Big|_{\bar{R}};$$

$$2n_2 \Big|_{\bar{R}} = n_0 (1 - 2n_0 + 2n_0^2) + \frac{\bar{R}^2}{B_z} \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} \Big|_{\bar{R}} (1 - 3n) + \frac{\bar{R}^3}{B_z} \frac{\partial^3 B_z}{\partial r^3} \approx \frac{\bar{R}^3}{B_z} \frac{\partial^3 B_z}{\partial r^3} \Big|_{\bar{R}}. \quad /28/$$

и т.д.

Рассмотрим суммовый резонанс 4-го порядка.

$$2\nu_r + 2\nu_z = 3.$$

Этот резонанс возбуждается 3-ей гармоникой Фурье оккупольного возмущения  $\approx x^2 z^2$  в разложении гамильтониана системы. С учетом /25/ можно показать /см. /4//, что уравнение для вертикальных колебаний вблизи резонанса имеет приближенный вид:

$$y'' + \left\{ \nu_z^2 - \frac{1}{4} |n_2^3| \left( \frac{a_r}{R} \right)^2 [\cos(3+2\nu_r)\phi - \cos(3-2\nu_r)\phi] \right\} y = 0, \quad /29/$$

где  $y = \frac{z}{R}$ ,  $a_r$  - амплитуда радиальных бетатронных колебаний,  $n_2^3$  определено согласно /25/ и /26/.

$$\nu_z^2 = n - \frac{1}{2} |n_2^3| \left( \frac{a_r}{R} \right)^2, \quad \nu_r^2 = 1 - n + \frac{1}{4} |n_2^3| \left( \frac{a_r}{R} \right)^2. \quad /30/$$

Уравнение /29/ представляет собой уравнение типа Хилла, границы области устойчивости для которого /ширина полосы резонанса/ определяются следующим образом:

$$|(2\nu_z)^2 - (3 - 2\nu_r)^2| \leq \frac{1}{2} |n_2^3| \left( \frac{a_r}{R} \right)^2. \quad /31/$$

В этом соотношении можно полагать  $\nu_z^2 \approx n$ ,  $\nu_r^2 \approx 1 - n$ , поскольку считается, что  $\frac{1}{2} |n_2^3| \left( \frac{a_r}{R} \right)^2 \ll 1$ . При нахождении в полосе резонанса /31/ амплитуда  $z$ -колебаний растет по закону:

$$a_z = a_{z0} e^{\mu \phi} \Phi(\phi). \quad /32/$$

Здесь  $\Phi(\phi)$  представляет собой некоторую комбинацию тригонометрических функций аргумента  $\frac{3-2\nu}{2} \phi$ . Величина  $\mu$  равна нулю на границах полосы /31/ и максимальна в центре полосы. Максимальное значение  $\mu$  равно:

$$\mu_{\text{макс}} = \frac{1}{14} |n_2^3| \left( \frac{a_r}{R_0} \right)^2 \text{ 1/рад}. \quad /33/$$

Среднее значение  $\mu$  в полосе незначительно отличается /на 30%/ от максимального.

Таким образом, за оборот по орбите при нахождении в полосе резонанса амплитуда  $z$ -колебаний возрастает на величину

$$\frac{a_z |2\pi|}{a_{z0}} = e^{0,45 |n_2^3| \left( \frac{a_r}{R_0} \right)^2} = e^{0,45 |n_2^3| a_r^2}. \quad /34/$$

Перейдем к резонансу 3-го порядка:

$$2\nu_z - \nu_r = 1.$$

Ответственным за возбуждение резонанса является гексапольное возмущение /первая гармоника Фурье/, которому соответствует член вида  $xz^2$  в гамильтониане системы. Уравнение  $z$ -колебаний можно привести к виду

$$y'' + \nu_z^2 y - \frac{a_r}{R_0} |n_1^1| \cos \phi \cdot \cos \nu_r \phi = 0. \quad /35/$$

Уравнению /35/ соответствует полоса неустойчивости

$$|(2\nu_z)^2 - (1 - \nu_r)^2| \leq |n_1^1| \frac{a_r}{R_0} \quad /36/$$

и максимальное значение  $\mu$  /см. /30//:

$$\mu_{\text{макс}} = \frac{|n_1^1|}{4(1-\nu_r)} \cdot \frac{a_r}{R} = 0,7 |n_1^1| a_r. \quad /37/$$

Аналогично /34/ можно написать

$$\frac{a_z |2\pi|}{a_{z0}} = e^{4,5 |n_1^1| a_r}. \quad /38/$$

Напомним, что поскольку этот резонанс разностный, рост  $z$ -амплитуды ограничен соотношением

$$4a_r^2 + \frac{1 + \nu_r}{\nu_r} a_z^2 = \text{const.} \quad /39/$$

Формула /39/ показывает, что при начальной амплитуде  $z$ -колебаний, равной, например, 5 см, увеличение ее в 4 раза может происходить при величине  $a_{r0} \geq 14$  см.

Важным обстоятельством является то, что как ширины резонансов /см. /31/ и /34//, так и инкременты /31/ и /35/ существенно зависят от амплитуд радиальных бетатронных колебаний, в данном подходе - от их начальных значений. Особенно это касается первого из рассмотренных резонансов. В частности, при прохождении полосы резонанса с некоторой скоростью это приводит к суммарному изменению амплитуды колебаний, которое зависит от  $a_r$  в еще более высокой степени.

Действительно, пусть, например, рассмотренные резонансы проходятся при  $\nu_r = \text{const}$  со скоростью, которая определяется постоянной величиной  $\frac{d\nu_z}{dt} = \dot{\nu}_z$ . В этом режиме ширины полос резонансов равны:

$$\Delta\nu_z = \frac{1}{16} |\bar{n}_2^3| a_r^2 \quad \text{для} \quad 2\nu_r + 2\nu_z = 3, \quad /40/$$

$$\Delta\nu_z = \frac{1}{8} |\bar{n}_1| a_r \quad \text{для} \quad 2\nu_z - \nu_r = 1. \quad /41/$$

Суммарное изменение амплитуды  $z$ -колебаний при прохождении полосы резонанса определяется теперь как

$$e^{\int \mu d\theta} = e^{\omega \int \mu dt} = e^{\omega \bar{\mu} \frac{\Delta\nu_{z0}}{\dot{\nu}_z}}. \quad /42/$$

Здесь  $\omega$  - частота обращения частиц в ускорителе на интервале времени, соответствующем прохождению полосы данного резонанса. Теперь имеем для амплитуд  $z$ -колебаний после прохождения резонансов:

$$2\nu_r + 2\nu_z = 3; \quad a_z = a_{z0} \exp \left[ \frac{1}{370} \cdot \frac{\omega_1}{\dot{\nu}_z} |\bar{n}_2^3|^2 a_r^4 \right]. \quad /43/$$

$$2\nu_z - \nu_r = 1; \quad a_z = a_{z0} \exp \left[ \frac{1}{17} \cdot \frac{\omega_2}{\dot{\nu}_z} |\bar{n}_1|^2 a_r^2 \right]. \quad /44/$$

Приведем еще формулу для амплитуды бетатронных колебаний при многократном прохождении полосы резонанса /суммового/ за счет радиально-синхротронных колебаний. Будем считать, что каждое прохождение увеличивает амплитуду на величину вида /43/, всего  $N_0$  прохождений. Для простоты предположим, что при этом из величин, входящих в /43/, изменяется только частота обращения  $\omega_1$  за счет скорости частиц  $\beta$ . Как видно из рис. 1 и 2,  $\dot{\nu}_z$  практически постоянна,  $|\bar{n}_2^3|$  согласно данным измерений также меняется несущественно. Тогда имеем

$$a_z = a_{z0} e^{\sum \alpha_k} = a_{z0} \exp \left[ \frac{\bar{\beta} c |\bar{n}_2^3|^2 a_r^4 T}{370 \Delta\nu_{z0} \cdot \bar{R}} \right]. \quad /45/$$

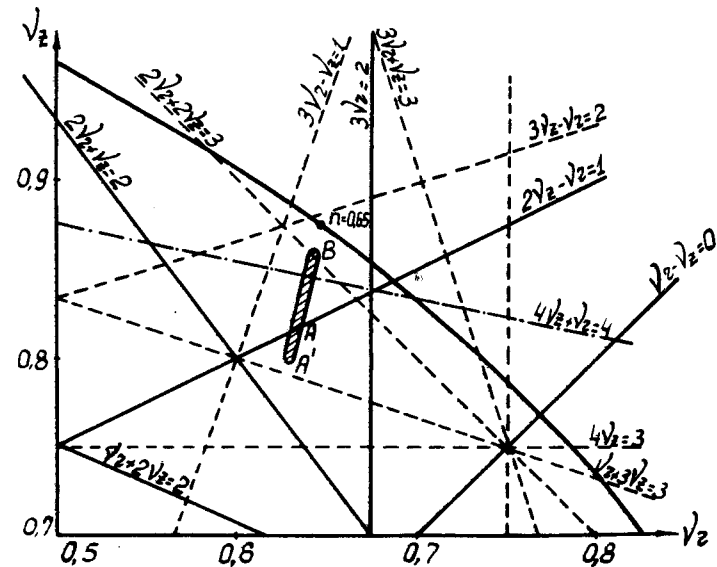


Рис. 1. Диаграмма резонансов и частот колебаний пучка ( $t = 0$ ).



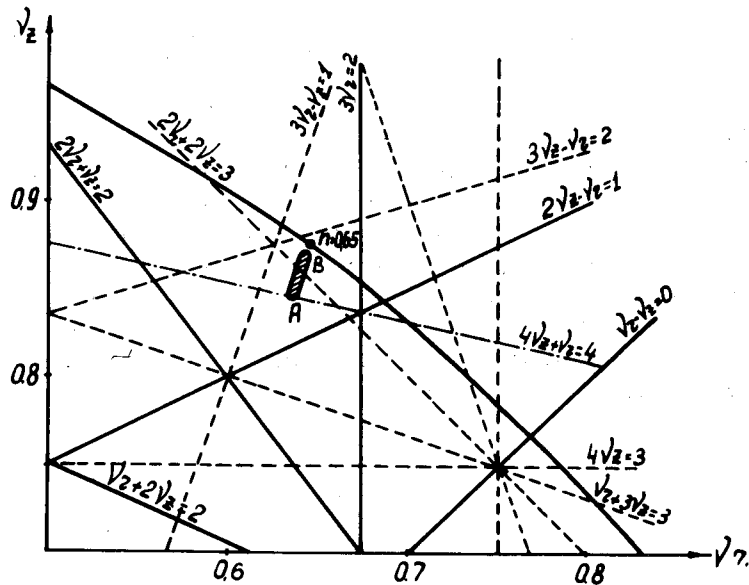


Рис. 2. Диаграмма резонансов и частот колебаний пучка /  $t = 100$  мс/.

Здесь  $\bar{v}$  - среднее значение скорости частиц,  $T = N_0 T_0$  - полное время прохождения резонанса,  $\Delta \nu_{z0}$  - сдвиг частоты за четверть периода синхротронных колебаний ( $T_0/4$ ).

Следует подчеркнуть, что формулы, приведенные выше для инкрементов и суммарного увеличения амплитуды, имеют в основном оценочный характер, т.к. они выведены в предположении  $a_z \ll a_r$ , так что раскачкой /или затуханием/  $a_r$  в процессе изменения  $a_z$  пренебрегается. Тем не менее для выяснения роли резонансов различного типа в появлении существенных потерь частиц эти формулы, особенно для ширины  $\mu$ , дают весьма полезную информацию. Естественно, более точные расчеты могут быть в дальнейшем сделаны при более детальном знании картины искажений магнитного поля ускорителя и с привлечением численных расчетов нелинейных связанных движений частиц в  $r$ - и  $z$ -направлениях.

Перейдем к численным иллюстрациям и обсуждениям.

Рассмотрим, каким образом с помощью изложенных в предыдущих разделах соображений можно качественно объяснить существование, при определенных условиях, быстрых потерь частиц на начальной стадии ускорения в синхрофазотроне, а также влияние системы коррекций РЗМИ-2 на темп этих потерь.

Как уже упоминалось, при значительном числе частиц, захваченных в режим ускорения ( $N \approx 2 \div 3 \cdot 10^{12}$ ), пучок попадает в полосу резонанса  $2\nu_z - \nu_r = 1$  /см. рис. 1/. Оценим показатель экспоненты в формуле /43/. В данном случае циклотронная частота  $\omega$  соответствует скорости частиц в начальный момент времени, т.е.  $\beta = \beta_0 = 0,2$  и  $\omega = 2,2 \cdot 10^6$  рад/с. Скорость смещения рабочей точки для параметров, выбранных в разделе 4, равна примерно  $\dot{\nu}_z \approx 0,3$  1/с; с учетом медленных потерь частиц она несколько выше, примем  $\dot{\nu}_z = 0,5$  1/с. Для  $|n_1^1|$  используем значения, взятые из табл. 1, т.е.  $|n_1^1| \approx 10^{-3}$  1/см. Тогда с помощью /44/ находим, что за время прохождения резонанса амплитуда  $z$ -колебаний может возрасти в два раза уже при  $a_{r0} > 2$  см. Однако, поскольку этот резонанс разностный, следует принять во внимание соотношение /39/, справедливое по крайней мере для не слишком больших амплитуд бетатронных колебаний. Из него следует, что амплитуда  $a_z$  может достигать 18 см /т.е. стенок камеры/ при начальной ее величине  $a_{z0}$  только для частиц, радиальные амплитуды колебаний которых  $a_{r0} > 13$  см\*.

Такие частицы могут быть потеряны на горизонтальных стенках камеры за время около 5-6 мс. /Время прохождения рабочей точкой резонансной полосы шириной  $2\Delta \nu_z = 3 \cdot 10^{-3}$ /. Если учесть начальные колебания

\* Для частиц с меньшими радиальными амплитудами /точнее, когда  $2 \text{ см} < a_{r0} < 13 \text{ см}$ , за время прохождения полосы резонанса будет происходить полный переход энергии колебаний из  $r$ -движения в  $z$  и обратно, но  $a_{z \text{ max}}$  будет меньше 18 см.

плотности, а также радиально-синхротронные колебания и изменение кулоновского сдвига при этом, время резонансных потерь будет больше 6 мс, причем это увеличение будет зависеть и от начального сдвига частот\*.

С другой стороны, если при этом заметная доля частиц будет теряться, то скорость смещения рабочей точки будет увеличиваться, что, в свою очередь, уменьшает темп потерь. Теряемая доля частиц и скорость потерь устанавливается в результате некоторого баланса между процессом резонансной раскачки колебаний и процессом перехода частоты через полосу резонанса. Так или иначе, в результате действия резонанса  $2\nu_z - \nu_r = 1$  в данном примере рабочая точка в зависимости от числа потерянных частиц смещается достаточно быстро /значительно быстрее, чем за счет действия адиабатических процессов при ускорении/ к рабочей окружности ускорителя.

При радиально-синхротронных колебаниях, частицы проходят также полосу суммового резонанса  $2\nu_r + 2\nu_z = 3$ , а затем, по мере снижения интенсивности пучка, ее проходит и рабочая точка. Сдвиг рабочей точки до полосы этого резонанса соответствует числу частиц в пучке  $N \approx 1,3 \cdot 10^{12}$ . Суммарное увеличение  $a_z$  при действии суммового резонанса можно оценить по формуле либо /43/, либо /45/. Расчеты показывают, что результаты оказываются близкими, поэтому произведем оценку согласно /43/. Теперь  $\omega$  возьмем соответствующим  $\approx 50-70$  мс, т.е.  $\omega = 3,5 \cdot 10^6$  рад/с. Скорость смещения рабочей точки примем прежней, что соответствует адиабатическому процессу, т.е.  $\nu_z \approx 0,5$  1/с. Согласно табл. 1  $|\bar{n}_2^3| \approx 3 \div 3,5 \cdot 10^{-5}$  1/см<sup>2</sup>; примем, что в маг-

нитном поле ускорителя эта величина порядка  $3 \cdot 10^{-5}$  1/см<sup>2</sup>. Тогда получим

$$\frac{a_z}{a_{z0}} = e^{1,7 \cdot 10^{-5} a_z^4} \quad /46/$$

Формула /46/ показывает, что резонанс  $2\nu_r + 2\nu_z = 3$  является "непроходимым" для частиц пучка, начальные амплитуды  $\gamma$ -колебаний которых /к моменту начала действия резонанса/ превышают 13 - 15 см, т.к. при этом амплитуды вертикальных колебаний возрастают почти в два раза /напомним, что мы в согласии с экспериментом полагали вертикальный полуразмер пучка равным 10 см, так что значительная доля частиц пучка имеет вертикальные начальные амплитуды бетатронных колебаний того же порядка/.

Из этих оценок сразу же следует, что срезвычайно важное значение для уменьшения темпа потерь из-за пересечения рабочей точкой пучка полос нелинейных резонансов связи рассмотренного типа имеет оптимизация процесса инжекции с тем, чтобы получить пучок частиц на орбите ускорителя с минимальными начальными амплитудами бетатронных колебаний. Наилучшие результаты по интенсивности ускоренного пучка были достигнуты экспериментально в режиме инжекции с модуляцией энергии инжектируемого пучка, когда максимальные значения  $\gamma$ -амплитуд существенно уменьшились.

Так, в экспериментах, когда была получена интенсивность ускоренного пучка  $1,5 \cdot 10^{12}$ , максимальные значения радиальных амплитуд по приблизительным оценкам не превосходили 15 - 20 см, в то время как в режиме без модуляции энергии максимальное значение радиальных амплитуд имеет полуразмер камеры, т.е. доходит до 60 см.

Второй важный вывод связан с воздействием на существующие в синхрофазотроне искажения ведущего магнитного поля, поскольку влияние резонансов на раскачку вертикальных колебаний определяется квадратом коэффициентов Фурье от производных магнитного поля по азимуту. Система коррекции РЗМИ-2, вводящая нелинейные добавки в магнитное поле ускорителя и позво-

\* Как уже указывалось, инкремент и суммарное возрастание  $a_z$ -амплитуды достаточно близки к истинным лишь при  $a_{z0} \ll a_{r0}$ . Следует ожидать /см. также численные расчеты в /5/ /, что при  $a_{z0} < a_{r0}$  возрастание  $a_z$  будет происходить несколько медленнее; таким образом, и по этой причине темп потерь будет меньшим, чем по приведенной оценке.

ляющая варьировать их как по азимуту, так и во времени, эффективно воздействует на искажения магнитного поля, что и позволяет резко уменьшить резонансные потери частиц. В экспериментах с интенсивностью частиц в пучке  $1,5 \cdot 10^{12}$  к 100 мс "выживало" примерно 60% частиц, захваченных в синхротронный режим ускорения. Когда система коррекции "п" РЗМИ-2 выключалась, число "выживших" частиц к 100 мс ускорения составляло только 20% от захваченных частиц.

В настоящее время еще не представляется возможным утверждать, что коррекции магнитного поля, вводимые системой РЗМИ-2, являются полностью оптимальными. В частности, азимутальные вариации добавок, вносимых в магнитное поле ускорителя, имеют ярко выраженный нелинейный характер в смысле зависимости  $n(r)$ . На настоящем начальном этапе исследований динамических коррекций и их влияния на потери интенсивности такие добавки /достаточно грубые/ быстрее приводят к эффекту, так как с помощью них проще вносятся азимутальные вариации в производные магнитного поля второго и третьего порядков, ответственных за возбуждение рассмотренных резонансов. Заметим, что если внесение таких добавок приводит к нелинейности усредненного поля по радиусу ( $n', n'' \neq 0$ ), то, в принципе, из-за размазки частот могут захватываться полосы дополнительных резонансов /см. ниже/. Поэтому можно высказать предположение, которое должно быть проверено в последующих экспериментах, что оптимальный режим коррекций должен приводить к введению азимутальных вариаций добавочного поля нужной кратности при одновременном "выравнивании" показателя усредненного поля ускорителя по радиусу. В последних экспериментах с максимальной интенсивностью пучка нелинейность  $\Delta n(r)$  добавок к полю была выражена менее резко / $n'$  в среднем уменьшилась более чем вдвое по сравнению с величиной, полученной в предыдущих опытах/.

Кроме рассмотренных резонансов, влияние на потери частиц могут оказывать и некоторые другие. Как уже упоминалось в разделе 1, при сравнительно умеренной интенсивности и дополнительном размытии рабочей точки из-за радиально-синхротронных колебаний ( $\Delta p, n' \neq 0$ ),

а также при  $n > 0,65$  могут пересекаться линии резонансов  $3\nu_r - \nu_z = 1$  и  $3\nu_z - \nu_r = 2$ . Оба эти резонанса связаны с перекосом медианной плоскости ускорителя и третьей производной  $\partial^3 B_z / \partial r^3$ , но их действия существенно различны.

Имеем следующие соотношения для амплитуд  $z$  и  $r$  колебаний:

$$\left. \begin{aligned} a_z^2 + 0,24 a_r^2 &= \text{const} && \text{для резонанса } 3\nu_r - \nu_z = 1, \\ a_z^2 + 2,7 a_r^2 &= \text{const} && \text{для резонанса } 3\nu_z - \nu_r = 2. \end{aligned} \right\} /47/$$

Отсюда можно сделать вывод, что при примерно равных коэффициентах Фурье  $n_2^1$  и  $n_2^2$  резонанс  $3\nu_z - \nu_r = 2$  более опасен с точки зрения перекачки энергии из радиальной степени свободы в вертикальную. Следует ожидать также, что сила резонанса /коэффициент увеличения амплитуды  $z$ -колебаний при прохождении полосы/ зависит от  $a_r$  для резонанса  $3\nu_r - \nu_z = 1$ , как  $(\frac{a_r}{R})^6$ , а для резонанса  $3\nu_z - \nu_r = 2$  - как  $(\frac{a_r}{R})^2$ , т.е. последний резонанс менее чувствителен к уменьшению амплитуды радиальных бетатронных колебаний. Эти качественные заключения расходятся с выводами работы /3/.

По-видимому, нетрудно выполнить такие условия /выбор  $n$  и  $\frac{dn}{dr}$  в рабочей области/, когда потенциально опасный резонанс  $3\nu_z - \nu_r = 2$  вообще не будет происходить в процессе ускорения.

Более существенным препятствием, которое может ограничить максимально достижимую интенсивность в синхрофазотроне /при  $n \approx 0,65$  /, являются суммовые резонансы третьего порядка на второй гармонике возбуждения поля:  $2\nu_r + \nu_z = 2$  и особенно  $\nu_r + 2\nu_z = 2$  /см. рис. 1/. Расчеты по формулам раздела 2 из /1/ показывают, что в условиях полного заполнения частицами полезной апертуры камеры при инжекции и захвате в синхротронный режим сдвиг рабочей точки до первого из этих резонансов соответствует максимальной интенсивности в начале ускорения  $N = 5,4 \cdot 10^{12}$  час., а до вто-

рого -  $8 \cdot 10^{12}$  час. По-видимому, и это будет проверено в дальнейших экспериментах, максимальная интенсивность пучка синхрофазотрона лежит в этих пределах.

#### 4. Заключение

1. Как показали эксперименты, введением азимутальных коррекций "п" и организацией режима инжекции удается подавить вредное влияние резонансов  $2\nu_z - \nu_r = 1$  и  $2\nu_r + 2\nu_z = 3$ , соответственно снизить потери частиц на начальном этапе ускорения и получить интенсивность на уровне  $1,5 \cdot 10^{12}$  р/имп. Данные экспериментов находятся в хорошем качественном соответствии с развиваемыми в работе теоретическими представлениями.

2. Дальнейшие экспериментальные работы по повышению интенсивности, с нашей точки зрения, должны проводиться в следующих основных направлениях:

а/ усовершенствование систем программных коррекций в динамическом режиме. Причем это относится не только к коррекции "п", но и к коррекциям азимутальной асимметрии магнита и его меднанной плоскости.

б/ усовершенствование режима инжекции с целью максимального заполнения рабочей области камеры ускорителя частицами с минимальными амплитудами начальных свободных колебаний, особенно в радиальном направлении /оптимизация режима инжекции с модуляцией энергии/.

3. Теоретические представления о кулоновском сдвиге радиальных и вертикальных бетатронных колебаний, особенно при подходе к предельной интенсивности пучка /в области действия резонансов  $2\nu_r + \nu_z = 2$  и  $\nu_r + 2\nu_z = 2$  /, желательно дополнить численными расчетами по точным уравнениям движения частиц. Но для этого необходимо иметь более детальную информацию не только о топографии магнитного поля в рабочем объеме камеры ускорителя при оптимальной настройке динамических коррекций, но и о начальной функции распределения амплитуд свободных колебаний частиц в режиме инжекции с модуляцией энергии инжектируемого пучка.

В заключение авторы выражают благодарность А.М.Балдину, И.Н.Семенюшкину за помощь в организации работы и интерес к ее результатам, В.А.Михайлову за полезные обсуждения, Н.А.Корукову, В.А.Мончинскому, Ю.В.Смирнову, Б.Н.Кузихину за участие в экспериментах, а также А.П.Царенкову и Г.А.Бокову за информацию о распределении  $n(r)$  в различных режимах работы систем коррекции магнитного поля.

#### Литература

1. Ю.Д.Безногих и др. Сообщение ОИЯИ, Р9-9115, Дубна, 1975.
2. Ю.Д.Безногих и др. Депонированное сообщение ОИЯИ, Б2-9-8775, Дубна, 1975.
3. Б.В.Василишин и др. Депонированное сообщение ОИЯИ, Б1-9-8031, Дубна, 1974.
4. L.J.Laslett, A.M.Sessler. *Rev.Sci.Instr.*, 32, 1235 (1961).
5. L.J.Laslett, W.A.Perkins. *Nucl.Instr.Meth.*, 97, 523 (1971).

Рукопись поступила в издательский отдел  
8 августа 1975 года.