

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



СЗУ50

Б-399

З/41-

P9 - 9115

Ю.Д.Безногих, А.Г.Бонч-Осмоловский,
М.А.Воеводин, Л.П.Зиновьев

4279/2-75

О ПОВЫШЕНИИ ИНТЕНСИВНОСТИ
ПУЧКА, УСКОРЕННОГО
В СИНХРОФАЗОТРОНЕ ОИЯИ.

1. Экспериментальные результаты,
основные представления о динамическом
кулоновском сдвиге частот колебаний

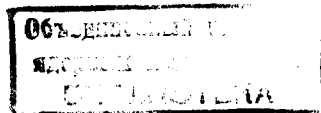
1975

P9 - 9115

Ю.Д.Безногих, А.Г.Бонч-Осмоловский,
М.А.Воеводин, Л.П.Зиновьев

О ПОВЫШЕНИИ ИНТЕНСИВНОСТИ
ПУЧКА, УСКОРЕННОГО
В СИНХРОФАЗОТРОНЕ ОИЯИ.

1. Экспериментальные результаты,
основные представления о динамическом
кулоновском сдвиге частот колебаний



Долгое время решение проблемы повышения интенсивности ускоренного пучка в синхрофазотроне ОИЯИ сталкивалось с серьезными трудностями, которые, с одной стороны, были обусловлены сравнительно низкой энергией инжекции инжектируемого пучка (9,4 МэВ) и, с другой стороны, несовершенством систем коррекции магнитного поля ускорителя, что приводило к большим потерям частиц на начальном этапе ускорения. Определенные сомнения при решении этого вопроса вызывались еще и тем, что магнитное поле синхрофазотрона по многим параметрам было далеко от совершенства. Казалось, что при существующих геометрических искажениях магнита из-за неравномерных вертикальных просадок квадрантов и их радиальных перекосов весьма трудно решить проблему повышения интенсивности без тщательной геодезической юстировки всего магнита в целом.

Ситуация коренным образом изменилась после запуска нового инжектора синхрофазотрона на энергию 20 МэВ и введения в строй новой системы коррекции магнитного поля. Последующая экспериментальная работа по повышению интенсивности и теоретическая разработка этой проблемы показали, что вопрос улучшения характеристик магнитного поля синхрофазотрона может быть достаточно эффективно решен введением на начальном этапе ускорения гибких динамических систем коррекции ведущего магнитного поля ускорителя.

Проведение этого комплекса работ, вместе с улучшением характеристик инжектируемого пучка, позволило поднять интенсивность ускоренного пучка в кольце синхрофазотрона до $1,5 \cdot 10^{12}$ прот/имп., т.е. более чем на порядок по сравнению с интенсивностью, которая существовала в ускорителе с инжекционным комплексом ЛУ-9.

1. Экспериментальное исследование влияния пространственного заряда на ограничение интенсивности ускоренного пучка

Модернизация инжектора ЛУ-9 синхрофазотрона ОИЯИ, которая была произведена в 1972 г., позволила увеличить более чем в 10 раз число частиц, инжектируемых в кольцевую камеру ускорителя. Естественно было ожидать увеличения интенсивности ускоренного пучка в конце цикла ускорения. Но эксперименты показали, что при энергии инжекции 9,4 МэВ простое увеличение интенсивности инжектируемого пучка не приводит к увеличению интенсивности ускоренного пучка в кольце синхрофазотрона. И хотя с ростом тока инжекции происходит рост числа частиц, захваченных в ускорение, в процессе ускорения соответственно увеличиваются потери и к 100 мсек максимальная интенсивность выходит на уровень $\sim 10^{11}$ прот/имп. Таким образом, экспериментально было установлено, что предельная интенсивность синхрофазотрона ОИЯИ при энергии инжекции $\sim 9,5$ МэВ находится на уровне 10^{11} прот/имп. Было выдвинуто предположение, что столь низкий уровень предельной интенсивности определяется плохим состоянием ведущего магнитного поля ускорителя и, в частности, несовершенством системы коррекции этого поля - РЗМИ-1 /1/- в начальный момент ускорения. Это предположение было подтверждено экспериментально при измерении потерь пучка в процессе ускорения. Выяснилось, что после начального формирования устойчивого сгустка частиц потери происходят (вплоть до 100 мсек ускорения) в основном в вертикальном направлении.

В связи с тем, что в 1974 г. намечался запуск нового инжектора ЛУ-20 на энергию 20 МэВ, необходимо было улучшить характеристики ведущего магнитного поля ускорителя, т.к. увеличение энергии инжекции до 20 МэВ могло поднять предельную интенсивность, согласно известным представлениям, всего лишь в $1,5 \pm 2$ раза.

Поэтому была спроектирована дополнительная система коррекции магнитного поля РЗМИ-2, которая позволяет более гибко осуществлять пространственно-временную

коррекцию показателя магнитного поля "n" в начальный период ускорения пучка. К моменту запуска инжектора ЛУ-20 новая система коррекции "n" была изготовлена.

Система РЗМИ-2 представляет собой комплекс электротехнического оборудования, предназначенный для создания поквadrантной активной коррекции показателя магнитного поля. Система состоит из 26 групп проводников, уложенных на поверхности полюсов главного магнита, 32 импульсных источников питания с программным управлением, элементов индикации и контроля /1/. Благодаря большому числу проводников, удается регулировать n по всей рабочей области ускорительной камеры. Форма нарастающего тока в корректирующих проводниках регулируется оперативно и наблюдается на экране осциллографа. Раздельное включение обмоток коррекции на независимые друг от друга источники тока позволяет создать систему азимутального изменения "n" по всем 4 квадрантам синхрофазотрона в отличие от системы РЗМИ-1. Длительность импульсного тока коррекции регулируется до 200 мсек и время его действия приходится на начальный этап ускорения, когда в синхрофазотроне наблюдается наибольший темп потерь ускоряемого пучка.

Запуск инжектора ЛУ-20 позволил, как и ожидалось, увеличить предельную интенсивность пучка в кольце ускорителя в 2 раза и довести ее, при существующих коррекциях "n" от системы РЗМИ-1, до $2 \pm 2,5 \cdot 10^{11}$ прот/имп (см. рис. 1, кривая 1). При этом, как и с модернизированным инжектором ЛУ-9, наблюдалось, что увеличение выше определенного значения числа частиц, инжектируемых в камеру ускорителя, не влияет на конечную интенсивность ускоренного пучка. Было также отмечено, что конечная интенсивность ускоренного пучка слабо зависит от режима инжекции. В режиме инжекции без разгруппирователя (полный импульсный разброс частиц в инжектируемом пучке составлял при этом $\Delta p / p \approx \pm 0,7\%$) достижение конечной интенсивности $2,5 \cdot 10^{11}$ прот/имп. не требовало тщательной настройки ускорителя. В режиме инжекции с разгруппирователем (но без модуляции энергии инжектируемого пучка) получение той же конечной интенсивности требовало более критичной настройки ускорителя.

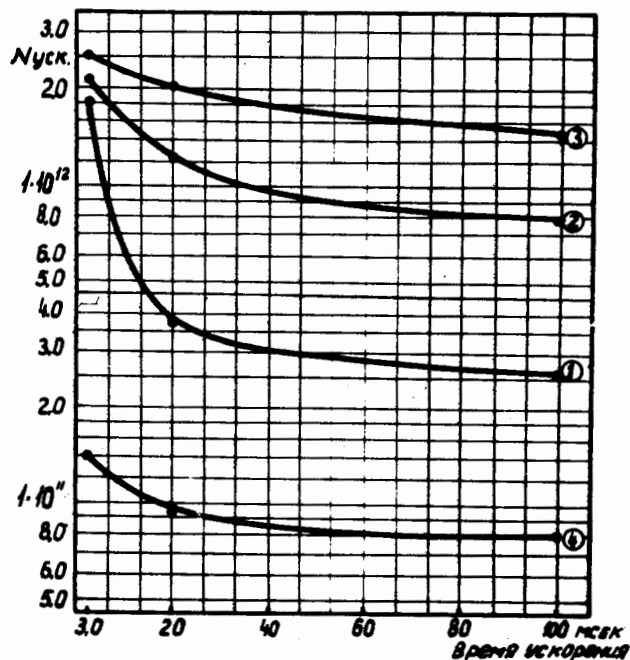


Рис. 1. Зависимость интенсивности ускоренного пучка от времени ускорения. 1 - система коррекции РЗМИ-1, инжекция без модуляции энергии ЛУ-20; 2 - дополнительно включена система коррекции РЗМИ-2 (без модулятора энергии); 3 - система коррекции РЗМИ-2 с включенным модулятором энергии; 4 - темп потерь частиц при малой начальной интенсивности.

При инжекции как с разгруппирователем (без модуляции энергии), так и без него, с ростом числа частиц в квазибетатронном режиме соответственно возрастало число частиц, захваченных в ускорение, но при этом возрастали также потери частиц на начальном этапе ускорения и конечная интенсивность оставались на уровне $2,5 \times 10^{11}$ прот/имп. (рис. 1).

В связи с этим, более тщательно, чем это делалось раньше, были проведены эксперименты по изучению влияния пространственного заряда на ограничение интенсивности ускоренного пучка в кольце синхрофазотрона. Удачным инструментом для изучения этих процессов явились кварцевые полупрозрачные мишени, установленные на участке инжекционного тракта инжектора ЛУ-20. Было установлено, что эти мишени (их на участке инжекционного тракта 4) при наведении каждой на пучок уменьшают интенсивность инжектируемого пучка примерно в два раза без изменения других характеристик пучка.

Методика эксперимента по изучению влияния пространственного заряда заключалась в следующем. Инжекция и электроника, управляющая процессами ускорения, настраивались таким образом, чтобы получить в кольце синхрофазотрона максимальную интенсивность ускоренного пучка при хорошей стабильности. Затем проводились измерения количества частиц в квазибетатронном режиме (N_{β}), количество частиц, захваченных в синхротронный режим ускорения (N_{Σ}) и число частиц, ускоренных до 100 мсек (N_{100}). После этого на участке транспортировки инжектируемого пучка последовательно вводились полупрозрачные мишени и каждый раз измерялись эти же параметры пучка. Такого рода измерения проводились в двух режимах коррекции ведущего магнитного поля:

- включена только система коррекции "п" РЗМИ-1;
- включена система коррекций "п" РЗМИ-1 и РЗМИ-2.

Результаты этого эксперимента представлены на рис. 2. Измерения показывают, что в синхрофазотроне ОИЯИ с включенной рабочей системой коррекции показателя поля РЗМИ-1 ограничение интенсивности ускоренного пучка наступает при количестве частиц $2,5 \times 10^{11}$ прот/имп (кривая 3 на рис. 2). Дальнейший рост числа частиц в квазибетатронном режиме приводит к очень медленному росту интенсивности ускоренного пучка, хотя захват в режиме ускорения растет линейно с ростом числа частиц в квазибетатронном режиме, т.е. ограничение интенсивности ускоренного пучка происходит в синхротронном режиме ускорения.

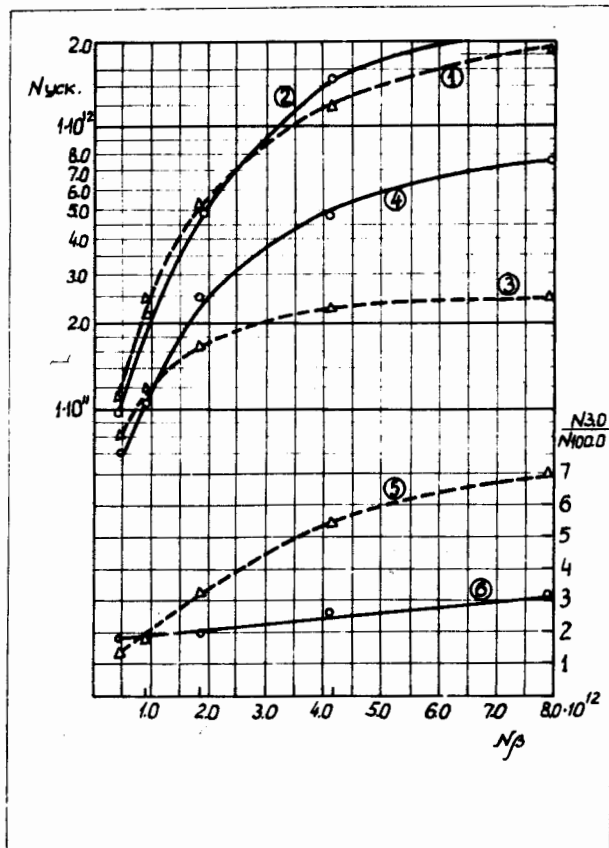


Рис. 2. Зависимость интенсивности ускоренного пучка и темпа потерь от числа частиц, циркулирующих в квазибетатронном режиме при различных коррекциях "п" магнитного поля. Кривые 1,3,5 - для коррекции "п" с системой РЗМИ-1; 1 - для $t = 3$ мсек; 3 - для $t = 100$ мсек. Кривые 2,4,6 - для коррекции "п" с системой РЗМИ-1 и дополнительной системой РЗМИ-2; 2 - для $t = 3$ мсек; 4 - для $t = 100$ мсек.

При включении дополнительной системы коррекции РЗМИ-2 уровень ограничения интенсивности в синхротронном режиме существенно сдвигается в область

больших значений заряда циркулирующего пучка. Интенсивность ускоренного пучка в этих экспериментах была доведена до 8.10 прот/имп. (см. кривую 2 рис. 1 и кривую 4 рис. 2). Из кривых 5 и 6 рис. 2 видно, что увеличение интенсивности ускоренного пучка при включении дополнительной системы коррекции связано в основном с резким снижением потерь пучка в процессе ускорения. При этом наблюдается слабая зависимость потерь пучка от количества частиц, захваченных в синхротронный режим ускорения (кривая 6), в отличие от случая, когда работает только система коррекции РЗМИ-1 (кривая 5).

Интересно отметить, что при малой интенсивности ускоренного пучка потери частиц сравнительно малы и примерно одинаковы, как при работе только системы РЗМИ-1, так и при работе с дополнительными коррекциями от системы РЗМИ-2 (рис. 1, кривая 4). Таким образом, ход кривой 5 обусловлен, с одной стороны, действием пространственного заряда при больших интенсивностях в ускоряемом пучке и, с другой стороны, искажениями в ведущем магнитном поле на начальном этапе ускорения, которые рабочая коррекция РЗМИ-1 не компенсирует.

Эксперимент показал, что при включении дополнительной коррекции очень существенное влияние на повышение интенсивности ускоренного пучка оказывает введение на различных радиусах азимутальных гармоник показателя "п" и его производных, которые компенсируют существующие в машине азимутальные искажения этих параметров магнитного поля.

На рис. 3,4 показаны экспериментально полученные значения Δn в зависимости от радиуса для 4 квадрантов кольца ускорителя для случая оптимальной настройки дополнительной коррекции на максимум тока ускоренного пучка. Δn - величина добавки к показателю магнитного поля, заданному рабочими коррекциями "п" от системы РЗМИ-1. На рис. 3 Δn показана для момента начала синхротронного режима ускорения, на рис. 4 - соответственно по истечении 30 мсек ускорения. Из рис. 3,4 видно, что $\Delta n = f(r)$ изменяется во времени.

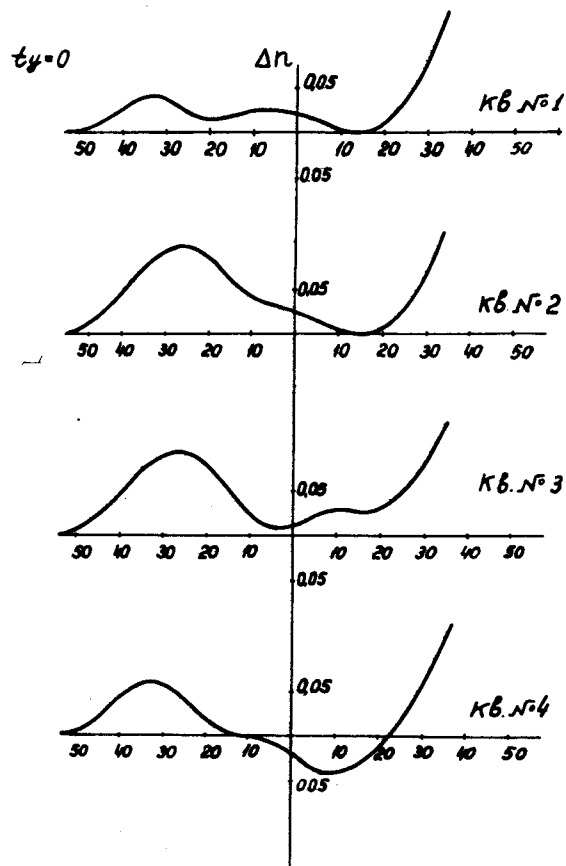


Рис. 3. Значения Δn в зависимости от радиуса, для 4 квадрантов в начальный момент ускорения ($t = 0$).

Анализ кривых рис. 3,4 по азимутальным гармоникам дает возможность выделить 1-ую, 2-ую и т.д. азимутальные гармоники Δn в зависимости от r , а также азимутальные гармоники производных от Δn . В качестве примера на рис. 5,6 показаны 1-я, 2-я, 3-я азимутальные гармоники Δn для различных радиусов камеры ускорителя, которые построены по кривым рис. 3,4.

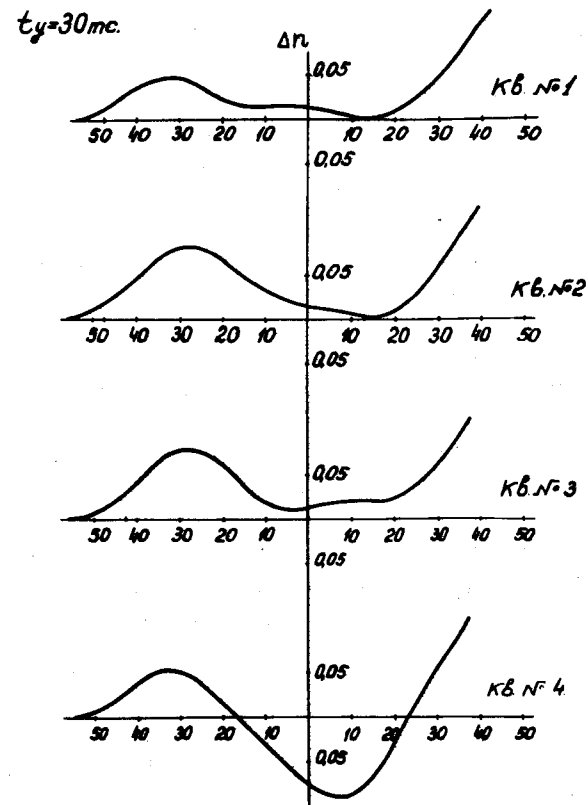


Рис. 4. Значения Δn в зависимости от радиуса для 4 квадрантов после 30 мсек ускорения ($t = 30$ мсек).

Таким образом, система РЗМИ-2 позволяет ввести в поле ускорителя пространственно-временные азимутальные гармоники Δn , $\Delta n'$, $\Delta n''$ и т.д., которые компенсируют существующие в ускорителе искажения поля, и тем самым повысить предельную интенсивность ускоренного пучка.

Следует заметить, что для магнита синхрофазотрона ОИЯИ особенно важно иметь гибкую систему коррек-

ции магнитного поля и по другим его параметрам (азимутальной асимметрии, медианной плоскости), т.к. квадранты магнита имеют большие геометрические и магнитные искажения /2/.

Подбором коррекций Δn магнитного поля и оптимизацией режима инжекции в описываемых экспериментах удалось увеличить интенсивность ускоренного пучка сначала до $1,1 \cdot 10^{12}$ прот/имп, а затем и до $1,5 \cdot 10^{12}$ прот/имп, доведя потери частиц в последнем случае до 40% от числа частиц, захваченных в синхротронный режим ускорения (рис. 1, кривая 3). В этих последних экспериментах при настройке режима инжекции использовался разгруппирователь с модулятором энергии /3/, который позволяет заполнить камеру в момент инжекции частицами с малыми начальными амплитудами радиальных свободных колебаний. Как будет показано ниже, такой режим инжекции существенно снижает инкремент нарастания колебаний частиц в z -направлении при прохождении рабочей точки пучка областей опасных резонансов на диаграмме частот.

Анализ экспериментальных данных показывает, что существующие потери частиц в процессе ускорения в синхрофазотроне ОИЯИ можно подразделить на два класса: первый имеет меньший темп и большую длительность, он присутствует, фактически мало изменяясь, и при малой начальной интенсивности пучка (рис. 1). В начальной части ускорения скорость этих потерь несколько выше, затем темп медленно снижается; в сумме данный класс потерь приводит примерно к 30-50%-ным потерям интенсивности пучка. Можно сделать предположение, что эти потери связаны с фазовым движением частиц в сепаратрисе и медленной раскачкой фазовых колебаний с последующим выходом части частиц из сепаратрисы за счет шумов в системе ускоряющего напряжения. Изучение этих потерь и сведение их к минимуму – задача последующих экспериментальных исследований.

Второй класс потерь появляется лишь при значительной интенсивности пучка на орбите ($N > 2 \cdot 10^{11}$) и приводит к резкому снижению интенсивности на на-

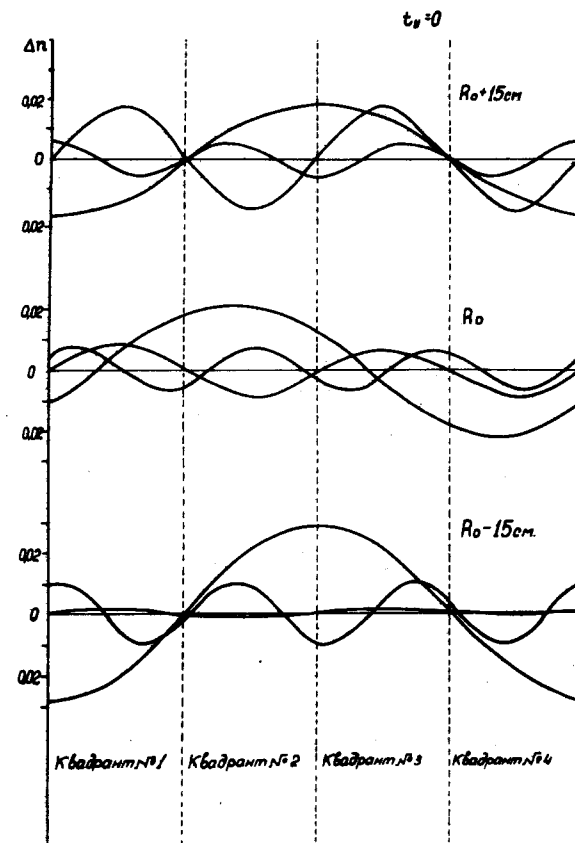


Рис. 5. Азимутальные гармоники Δn для 3 значений радиуса ускорителя в начале процесса ускорения ($t=0$).

чальной части ускорения (до 100 мсек). Из экспериментов видно, что фактически эти потери сосредоточены во времени на самой начальной стадии после формирования сгустка (3-20 мсек) и темп их резко возрастает с увеличением интенсивности пучка в квазибетатронном режиме (рис. 1, кривая 1).

Цель настоящего исследования заключается в выяснении происхождения второго класса потерь и разработке

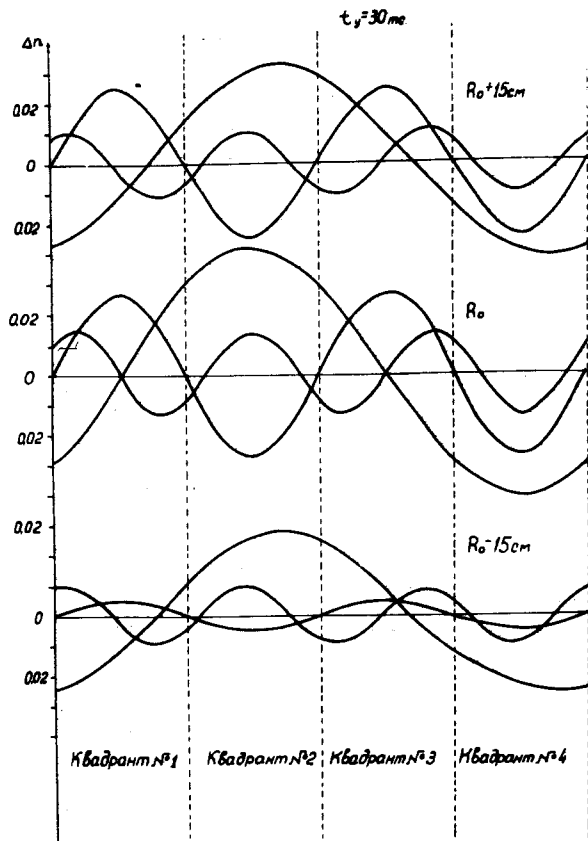


Рис. 6. Азимутальные гармоники Δn для 3 значений радиуса ускорителя после 30 мсек ускорения ($t = 30$ мсек).

экспериментальных методов их подавления. Предположение, которое естественно сделать, заключается в том, что вследствие несовершенства магнитного поля ускорителя, резонансы 3-го и 4-го порядков, находящиеся в окрестности выбранной по одночастичной теории рабочей точки ускорителя ($n \approx 0,65$), могут обладать достаточной силой. При значительной интенсивности пучка вследствие кулоновского сдвига частот бетатронных

колебаний рабочая точка смещается, причем величина этого сдвига может зависеть от времени. Вследствие этого могут пересекаться, в том числе многократно, резонансные полосы, что и приводит к раскачке колебаний частиц и потерям их на стенках камеры. К рассмотрению этого процесса мы и перейдем.

2. Некогерентный сдвиг частот бетатронных колебаний

В условиях синхрофазотрона (сравнительно малая энергия инжекции) наибольшее значение имеет некогерентный сдвиг частот бетатронных колебаний, вычислением которого мы и займемся.

Обозначим через $2L$ - длину камеры, $2h$ - ее высоту, пучок будем предполагать имеющим эллиптическое поперечное сечение с полуосями a - большая (r - направление) и b - малая (z - направление). Фактор группировки пучка обозначим B .

Так как в нашем случае $L \gg h$, хорошую точность при вычислениях обеспечивает модель камеры в виде двух бесконечных проводящих пластин на расстоянии $2h$, между которыми расположен пучок. Расстояние между полюсами магнита, которые также будем считать бесконечно большими, обозначим $2g$. Тогда, в предположении, что размеры пучка гораздо меньше $2h$, кулоновский некогерентный сдвиг частот бетатронных колебаний может быть вычислен по следующим формулам /4/:

$$\Delta \nu_r = - \frac{r_p \bar{R} N}{\pi B \beta^2 \gamma^3 a(a+b) \nu_r} \left\{ 1 - \frac{a(a+b)}{h^2} [\epsilon_1 (1+B \beta^2 \gamma^2) + \epsilon_2 \frac{h^2}{g^2} B \beta^2 \gamma^2] \right\}. \quad (1)$$

$$\Delta \nu_z = - \frac{r_p \bar{R} N}{\pi B \beta^2 \gamma^2 b(a+b) \nu_z} \left\{ 1 + \frac{b(a+b)}{h^2} [\epsilon_1 (1+B \beta^2 \gamma^2) + \epsilon_2 \frac{h^2}{g^2} B \beta^2 \gamma^2] \right\}. \quad (2)$$

Здесь N - число частиц, захваченных в режим ускорения (число частиц в сгустке),

$$r_p = \frac{e^2}{M c^2} = 1,53 \cdot 10^{-16} \text{ см},$$

\bar{R} - средний радиус ускорителя.

$$\epsilon_1 = \frac{\pi^2}{48}, \quad \epsilon_2 = \frac{\pi^2}{24}.$$

Первые члены в фигурных скобках в (1) и (2) определяются собственными электрическим и магнитным полями пучка и написаны в предположении, что плотность заряда и тока в поперечном сечении эллипса a, b постоянна. Члены с ϵ_1 связаны с электрическими, а члены с ϵ_2 - магнитными полями изображения.

Выясним, что изменится в этих формулах, если размер пучка нельзя считать малым по сравнению с камерой. В слабофокусирующих машинах, в частности, синхрофазотроне, на начальной стадии ускорения радиальный размер пучка сравним и даже больше $2h$.

Вначале оценим влияние неоднородного распределения плотности в поперечном сечении пучка на первые члены в (1) и (2). Оценку получим на примере круговой формы пучка, причем предположим, что плотность заряда и тока изменяется по гауссовому закону, т.е. например, для плотности заряда записываем:

$$\rho(x) = \rho_0 e^{-x^2/\bar{a}^2}, \quad (3)$$

$$x^2 = z^2 + (r-R)^2.$$

Очевидно, ρ_0 просто связана с линейной плотностью зарядов в пучке:

$$\sigma = 2\pi\rho_0 \int_0^\infty e^{-x^2/\bar{a}^2} x dx = \pi\rho_0 \bar{a}^2, \quad \bar{a} \ll h. \quad (4)$$

Величина \bar{a} , очевидно, представляет собой эффективный размер пучка. Теперь можем найти электрическое поле и его градиент:

$$E_x = 4\pi\rho_0 \frac{1}{x} \int_0^x e^{-x^2/\bar{a}^2} dx = \frac{2\sigma}{x} (1 - x^2/\bar{a}^2), \quad (5)$$

$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{2\sigma}{\bar{a}^2} \left[e^{-x^2/\bar{a}^2} \left(2 + \frac{\bar{a}^2}{x^2} \right) - \frac{\bar{a}^2}{x^2} \right]. \quad (6)$$

Поскольку градиент поля теперь зависит от x , величина сдвига также меняется по сечению пучка.

При $x \ll \bar{a}$ $\frac{dE_x}{dx} \sim \frac{2\sigma}{\bar{a}^2}$ и нетрудно убедиться, что для сдвига получаем выражение в виде двух первых членов в (1) и (2), поскольку в этом случае

$$\Delta v_r^2 = \Delta v_z^2 = - \frac{eE_x' \bar{R}^2}{MC^2\beta^2 \gamma^3}.$$

Существенно иной результат получается для частиц вблизи периферии пучка, т.е. при $x \sim \bar{a}$. Из (6) видно, что градиент поля уменьшается и равен

$$\frac{dE_x}{dx} \Big|_{x=\bar{a}} = \frac{2\sigma}{\bar{a}^2} \left(\frac{3}{e} - 1 \right) \sim 0,1 \frac{2\sigma}{\bar{a}^2}. \quad (7)$$

Таким образом, для пучков с неоднородным распределением частиц по сечению сдвиг частот за счет собственного поля пучка для частиц на периферии существенно меньше, чем в центре и по (1) и (2), для гауссова распределения меньше даже на порядок величины*. Нетрудно показать, что для пучка с эллиптической формой сечения этот результат сохраняется.

Теперь рассмотрим влияние конечного размера пучка на поля изображения. Считая, что плотность распределена по сечению равномерно, получим оценку максимального влияния, т.к. ясно, что для спадающего к краям распределения плотности и тока эффект будет меньше (эффективный размер как бы уменьшается). Пусть изображения заряда в стенках камеры (изображение тока совершенно аналогично) представляют собой совокупность полос шириной $2a$ и пренебрежимо малой высотой с линейной плотностью заряда $\sigma = \frac{eN}{2\pi R}$.

Очевидно, эти изображения расположены симметрично

* Такие же несложные вычисления показывают, что для более пологого распределения вида $\rho = \frac{\rho}{1+x^2/\bar{a}^2}$ (распределение Лоренца) коэффициент уменьшения сдвига на краю пучка по сравнению с центром равен $1 - \ln 2$, т.е. 0,31.

относительно центра камеры на расстояниях от него $\pm 2h$, $\pm 4h$ и так далее.

Вычислим E_x и E_z составляющие электрического поля в точке с координатами x, z от одной полосы с номером k (это значит, что ее расстояние от центра камеры равно $z' = 2hk$). Тогда имеем

$$E_x = \frac{\sigma(-1)^{k+a}}{a} \int_{-a}^{x-x'} \frac{dx'}{\sqrt{(x-x')^2 + (z-z')^2}} = \frac{(-1)^k \sigma}{2a} \ln \frac{(x+a)^2 + (z-2hk)^2}{(x-a)^2 + (z-2hk)^2}, \quad (8)$$

$x > 0.$

Аналогично

$$E_z = (-1)^{k+1} \frac{\sigma}{a} \left(\arctg \frac{x+a}{z-2hk} - \arctg \frac{x-a}{z-2hk} \right), \quad z \geq 0. \quad (9)$$

Далее можно вычислить градиенты поля $\frac{dE_x}{dx}$ и $\frac{dE_z}{dz}$, определяющие сдвиги частот колебаний. Соответствующие выражения оказываются функциями координат частицы в пучке, так же, как и раньше при учете неоднородности плотности. Опуская соответствующие несложные вычисления, приведем результат вычисления коэффициента ϵ_1 в центре пучка и на краю ($z=0$, $x=0$ и $x=a$).

Так как заряды пар изображений чередуются знаком, для сдвига получается знакопеременный ряд:

$$\epsilon_1 \Big|_{\substack{x=0 \\ z=0}} = h^2 \left[\frac{1}{a^2 + 4h^2} - \frac{1}{a^2 + 16h^2} + \frac{1}{a^2 + 36h^2} - \dots \right] = \frac{\pi^2}{48} - \frac{a^2/4h^2}{4(1 + \frac{a^2}{4h^2})} \quad (10)$$

При получении последнего приближенного равенства пренебрежено малыми членами, поскольку считается, что $a < 2h$.

На краю пучка результат такой:

$$\epsilon_1 \Big|_{\substack{x=a \\ z=0}} = \frac{h^2}{4} \left[\frac{1}{a^2 + h^2} - \frac{1}{a^2 + 4h^2} + \frac{1}{a^2 + 9h^2} - \dots \right] = \quad (11)$$

$$= \frac{\pi^2}{48} - \frac{a^2}{4h^2} \left(\frac{1}{1+a^2/h^2} - \frac{1}{4(4+a^2/h^2)} + \frac{1}{9(9+a^2/h^2)} - \dots \right) - \frac{\pi^2}{48} \frac{a^2/5h^2}{1+a^2/h^2}$$

Совершенно также (относительно) меняется и коэффициент ϵ_2 в (1) и (2). Эти результаты показывают, что для протяженного пучка ($a \gtrsim 2h$) вклады полей изображения в кулоновский сдвиг частот уменьшаются, причем в центре пучка для $a \sim 2h$ примерно в 2,5 раза и на краю — почти в 6 раз. С учетом неравномерности плотности изображения это уменьшение несколько меньше.

Поскольку мы учитываем значительные размеры пучка, особенно в радиальном направлении, тем более следует принять во внимание возможное изменение частот при больших амплитудах колебаний и разбросе мгновенных орбит при $\delta = \frac{\Delta p}{p} \neq 0$.

Если в пучке имеется заметный импульсный разброс и показатель поля существенно зависит от радиуса, то при бетатронных и радиально-синхротронных колебаниях частицы периодически попадают в области пространства с разными n и, следовательно, при любом значении кулоновского сдвига, в том числе и нулевом, происходит размытие частот колебаний частиц в пучке.

Дисперсию частот $\Delta \nu_z, \Delta \nu_r$ соответственно можно представить в виде трех основных слагаемых:

$$\Delta \nu_{r,z} = \Delta \nu / \delta + \Delta \nu / \delta_{n,n''} + \Delta \nu / n' a_{r,z}^2. \quad (12)$$

Здесь первый член описывает влияние прямой зависимости n от r (он отличен от нуля и при $n(r) = \text{const}$), второй член связан с изменением мгновенных орбит при изменении r и отличен от нуля при $n(r) \neq \text{const}$. Третий фактически представляет собой сдвиг частоты, учитывающий конечные величины амплитуд бетатронных колебаний a_r и a_z при $n' \neq 0$.

Явное выражение этих величин можно найти, например, в [5], здесь мы выпишем лишь формулы для второго слагаемого в (12), имеющего для последующего анализа наибольшее значение:

$$\Delta_{\delta} \nu_r = - \frac{\Delta p}{p} \frac{\bar{R}}{2} \left(1 + \frac{\bar{R}}{R_M}\right) \frac{n'}{\nu_r^3},$$

$$\Delta_{\delta} \nu_z = \frac{\Delta p}{p} \frac{\bar{R}}{2} \left(1 + \frac{\bar{R}}{R_M}\right) \frac{n'}{\nu_r^2 \nu_z}. \quad (13)$$

Здесь \bar{R} – средний радиус ускорителя, \bar{R}_M – магнитный радиус, $n' = \frac{dn}{dr}$. Члены порядка $\delta^2 n''$, $\delta^2 n'^2$ существенны в (13) лишь при $n'=0$, они оказываются при этом порядка первого и третьего слагаемых в (12).

Заметим, что для величин $\Delta_{\delta} \nu_r$, $\Delta_{\delta} \nu_z$ выполняется соотношение $\Delta_{\delta} (\nu_r^2 + \nu_z^2) = 0$, т.е. при колебаниях частот дисперсия ν_r, ν_z за счет $\delta, n' \neq 0$ на диаграмме частот происходит по касательной к окружностям, concentрическим с рабочей окружностью ускорителя

$$\nu_r^2 + \nu_z^2 = \bar{R} / R_M.$$

3. Изменение рабочей точки ускорителя в процессе ускорения

Величины, определяющие дисперсию частот бетатронных колебаний частиц в пучке, определенные выше, не остаются постоянными в процессе ускорения, а изменяются (уменьшаются), причем, как правило, к концу ускорения они становятся пренебрежимо малыми. Сгусток частиц сжимается во всех направлениях при затухании амплитуд колебаний, что само по себе увеличивает собственные поля пучка, но более сильным демпфирующим процессом является компенсация электростатических полей магнитными при $\beta \rightarrow 1$ (фактор $1/\gamma^2$ в формулах (1) и (2)). Поэтому при достаточно большом γ на диаграмме частот пучок занимает очень малую область – практически точку – на рабочей окружности ускорителя. На начальном этапе ускорения из-за кулоновского сдвига и дисперсии частот $\Delta \nu_{\delta}$ пучок занимает на этой диаграмме некоторую область, внутри которой

совершаются сложные движения частиц в процессе синхротронных и радиально-синхротронных колебаний. Нужно иметь в виду еще и начальные колебания плотности в пучке, связанные с энергетическим разбросом сепаратрисы, происходящим в течение первых ~10 периодов синхротронных колебаний. Как показывает эксперимент, эти колебания могут достигать 20–30% от среднего значения начальной плотности пучка.

Из сказанного ясно, что на первой стадии ускорения понятие рабочей точки на диаграмме частот становится неопределенным, нужно говорить скорее о "рабочей области". Тем не менее, для удобства рассуждений мы введем понятие рабочей точки как совокупности частот колебаний частицы, находящейся вблизи центра пучка (на равновесной орбите). Реальное существование таких частиц зависит от формы распределения частиц в пучке по амплитудам колебаний, что в конечном счете определяется режимом инжекции в ускоритель. В процессе ускорения эта рабочая точка смещается к рабочей окружности ускорителя и, как было пояснено выше, в пределе больших γ весь пучок на диаграмме частот стягивается к этой точке.

Движение определенной таким образом рабочей точки и колебания частиц в пучке вокруг нее являются динамическим процессом, который определяется нарастанием магнитного поля ускорителя и соответственным увеличением азимутальной скорости частиц. Эти причины изменений мы назовем регулярными и в дальнейшем ими только и будем заниматься. Существуют и другие механизмы изменения параметров пучка, например, потери частиц и изменения амплитуд колебаний при рассеянии на остаточном газе, потери при прохождении резонансов и т.д.*

*Естественно, что при прохождении резонансов возможные потери частиц оказывают существенное влияние на темп самих потерь.

Амплитуды радиально-синхротронных и бетатронных колебаний определяют поперечные размеры пучка, продольный размер (В) определяется фазовыми колебаниями. Их затухание во времени вместе с изменением β и γ и определяет движение рабочей точки и дисперсию частот вокруг нее.

Вертикальный (z) размер пучка "b" определяется бетатронными колебаниями частиц. Если начальный размер обозначить b_0 , то изменение "b" происходит следующим образом:

$$b = b_0 \sqrt{\frac{H_0}{H}} = b_0 \sqrt{\frac{\beta_0 \gamma_0}{\beta \gamma}} \quad (14)$$

Горизонтальный размер а определяется не только бетатронными колебаниями, но, главным образом, импульсным разбросом в инжектируемом пучке, который при ускорении приводит к радиально-синхротронным колебаниям. Обозначим бетатронную часть амплитуды колебаний a_δ и синхротронную a_c и положим, что горизонтальный размер пучка является суммой этих амплитуд

$$a = a_\delta + a_c \quad (15)$$

Изменение a_δ известно, оно вида (14), что же касается a_c , то закон изменения этой величины в общем случае достаточно сложен. Нам в дальнейшем будет интересовать начальный этап ускорения, наиболее интересный с точки зрения влияния кулоновского сдвига, когда γ еще практически мало отличается от единицы. Например, в синхрофазотроне основные потери частиц происходят на протяжении первых 100 мсек ускорения, когда поле Н и β увеличиваются в два раза, так что $\beta_{100} \approx 0,4$ и $\gamma_{100} \approx 1,1$.

В этих условиях и большие и малые радиально-синхротронные колебания затухают приблизительно одинаково (предполагается, что ϕ_s - синхротронная фаза и V - ускоряющее напряжение - приблизительно постоянны):

$$a_c \sim a_{c0} \frac{\beta_0}{\beta} \quad (16)$$

Таким образом, изменение размера "a", согласно (15), определяется формулой

$$a = \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta}} (a_{\delta_0} + a_{c_0} \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta}}) \quad (17)$$

и зависит от соотношения начальных амплитуд a_{δ_0} - бетатронных и a_{c_0} - радиально-синхротронных колебаний.

Фактор группировки

$$B = \frac{\phi_{\max} - \phi_{\min}}{2\pi} \quad (18)$$

где $R(\phi_{\max} - \phi_{\min}) = R\Delta\phi$ - удвоенная амплитуда фазовых (синхротронных) колебаний. На начальном этапе ускорения эти колебания существенно нелинейны ($\Delta\phi \sim 1$), закон их затухания определяется из соотношения

$$J(\Delta\phi) \sim \sqrt{\frac{\alpha - 1/\gamma^2}{\gamma^2}} \quad (19)$$

где α - коэффициент расширения орбит ($\approx \frac{1}{\gamma^2}$), $J(\Delta\phi)$ - некоторая функция $\Delta\phi$. Отсюда видно, что при $\gamma \approx \text{Const}$ затуханием фазовых колебаний можно пренебречь. Заметим, что этот же результат справедлив и для малых фазовых колебаний, поскольку для них

$$\Delta\phi \sim \left(\frac{\alpha - 1/\gamma^2}{\gamma}\right)^{1/4}$$

Следовательно, для начального этапа ускорения фактор В можно считать постоянным.

Временной ход коэффициентов ϵ_1 и ϵ_2 ясен из формул (10) и (11), что касается дисперсии частот (13), то ее изменение во времени определяется затуханием $\frac{\Delta p}{p}$ и изменением n' при уменьшении амплитуд радиально-синхротронных колебаний в процессе ускорения:

$$\Delta_\delta \nu_{r,z} = \Delta_\delta \nu_{r,z} \Big|_0 \frac{\beta_0}{\beta} \frac{n'(r)|_{a_c}}{n'(r)|_{a_{c0}}} \quad (20)$$

Итак, мы имеем теперь весь необходимый аналитический аппарат для расчета сдвига частот колебаний частиц в пучке при выборе конкретных параметров системы и для идентификации потенциально опасных резонансов. Это будет сделано в следующей работе.

Литература

1. М.А.Воеводин, Н.А.Коруков. Сообщение ОИЯИ, 9-7318, Дубна, 1973.
2. Ю.Д.Безногих и др. Депонированное сообщение ОИЯИ, Б2-9-8775, Дубна, 1975.
3. Ю.Д.Безногих и др. Препринт ОИЯИ, Р9-5956, Дубна, 1971.
4. L.J.Laslett. Proc. of the 1963 Summer Study..., 7534, BNL, N.Y., 1963.
5. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев. "Теория циклических ускорителей". М., ГИФМЛ, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 августа 1975 года.