сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р9-91-91

В.М.Жабицкий

ПРИМЕНЕНИЕ Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПОДАВЛЕНИИ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПУЧКА В УСКОРИТЕЛЕ

1991

Свободные когерентные бетатронные колебания пучка в ускорителе могут возникнуть по разным причинам, например после инжекции из-за различных погрешностей при коррекции его угла влета с помощью ударного магнита. Вследствие импульсного разброса частиц в пучке и ненулевой хроматичности магнитного поля в ускорителе происходит переход когерентных бетатронных колебаний частиц пучка в некогерентные. В результате поперечные размеры пучка возрастают, плотность снижается, а качество пучка в целом несколько ухудшается. При достаточно большой интенсивности пучка появляется еще одна неприятность: свободные когерентные колебания могут стать затравкой для развития поперечной резистивной неустойчивости с когерентными колебаниями частиц достаточно большой амплитуды, коррекцию которых уже не сможет обеспечить система подавления неустойчивости из-за ограниченной мощности используемых в ней усилителей в цепи обратной связи. В связи с этими двумя причинами в настоящее время на некоторых ускорителях производят *коррекцию траектории пучка с помощью цепи обратной связи типа* датчик положения - усилитель - толкатель непосредственно после инжекции за промежуток времени, который должен быть короче характерного времени перехода когерентных бетатронных колебаний в некогерентные[1,2]. При этом подавление когерентных поперечных колебаний производят в течение нескольких десятков оборотов пучка с помощью специальной достаточно мощной импульсной системы до такой амплитуды колебаний, коррекция которой уже возможна с помощью системы подавления поперечной резистивной неустойчивости. В ускорителях нового поколения, таких как УНК, необходимость подобной системы коррекции становится еще более актуальной. Расчеты показывают[3], что в I ступени УНК инкремент резистивной неустойчивости значительно превышает разброс бетатронных частот и может достигать $0.1\omega_0$ (ω_0 - угловая скорость пучка), то есть примерно $10^4 c^{-1}$. Столь быстрое развитие неустойчивости с необходимостью требует наличия системы подавления свободных когерентных колебаний за очень короткое время.

В ряде работ[2-5] анализ систем подавления поперечных колебаний ограничен расчетом постоянной затухания колебаний для произвольной расстановки датчиков положения и толкателей. При этом обычно предполагается, что коэффициент передачи радиотехнических устройств цепи обратной связи системы подавления есть постоянная или слабо зависящая от частоты величина. В то же время для выделения полезной составляющей в сигнале с датчика положения, обусловленной когерентными бетатронными колебаниями, применяют фильтры типа гребенчатого /6/. При этом влияние вносимых фильтром фазовых искажений на устойчивость работы системы подавления не анализируется.

В настоящей работе рассмотрены возможные системы подавления свободных когерентных колебаний пучка с целью их применения на таких ускорителях, как УНК. Анализ предлагаемых систем производится с учетом цифровой обработки сигнала в цепи обратной связи, что можно осуществить с помощью современной цифровой электроники. Это приводит к ряду преимуществ таких систем перед аналоговыми. В цепи цифровой обработки сигнала анализируется влияние фильтра типа гребенчатого на устойчивость системы в целом, вычислена постоянная затухания поперечных когерентных колебаний частиц с учетом фильтра.

Рассмотрим работу системы подавления свободных когерентных колебаний пучка с передачей сигнала "назад" (см. рис.1). В таких системах смещение пучка регистрируется с помощью датчика положения (ДП),сигнал с которого передается по цепи обратной связи против хода пучка на толкатель (Т). Задержка сигнала в цепи обратной связи равна времени пролета пучка от датчика положения до толкателя. Для каждого из направлений в систему включены два датчика положения (ДП1 и ДП2), два толкателя (Т1 и Т2) и цепь отрицательной обратной связи (К) с коэффициентом передачи К и цифровой обработкой сигнала.

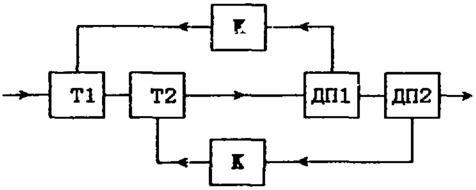

Рис.1

Пусть, как обычно, смещение частиц пучка $x(s)$ задается от равновесной орбиты. Для уравнения движения частицы имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2v}{d\varphi^2} + Q^2v = \frac{Q^2\beta\sqrt{\beta}}{m\gamma_o v_o^2} F_{возм} . \qquad (1)$$

Здесь используются обобщенные переменные:

$$v(\varphi) = x(s)/\sqrt{\beta(s)}, \qquad \varphi = \int\frac{ds}{Q\ \beta(s)} ,$$

где β – параметр матрицы Твисса, Q – число бетатронных колебаний за оборот с учетом поправки на когерентный кулоновский сдвиг[3]. В качестве возмущающей силы далее будет фигурировать сила действия короткого толкателя:

$$F_{возм} = F_T(\varphi_T)\Delta\varphi_T\delta(\varphi - \varphi_T), \qquad (2)$$

где $\delta(\varphi)$– дельта-функция Дирака; φ_T– положение толкателя, $\Delta\varphi_T$– протяженность толкателя $[\ \Delta\varphi_T = l_T/(Q\beta_T)\ ]$. Из (1) в области действия толкателя (2) имеем

$$\frac{dv(\varphi_T^+)}{d\varphi} - \frac{dv(\varphi_T^-)}{d\varphi} = Q\ \Delta v = \frac{Ql_T\sqrt{\beta_T}}{m\gamma_o\ v_o^2} F_T(\varphi_T).$$

Состояние частиц пучка удобно задавать матрицей-столбцом $\hat{V}(\varphi)$, в которой первый элемент совпадает с $v(\varphi)$, а второй равен производной $dv(\varphi)/d\varphi$. Тогда прохождение толкателя можно представить в следующем виде[4]:

$$\hat{V}(\varphi_T^+) = \hat{I}\hat{V}(\varphi_T^-) + Q\hat{T}\ \Delta\hat{V}(\varphi_T), \qquad (3)$$

где $\hat{I}$ – единичная матрица, а матрица $\hat{T}$ имеет вид

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица-столбец $\Delta\hat{V}(\varphi_T)$ описывает действие толкателя и состоит из двух элементов, первый из которых равен введенной выше величине Δv, а второй равен нулю.

Учитывая (3), нетрудно установить связь между двумя последовательными состояниями частиц пучка на (n+1)-м и n-м оборотах на азимуте, например, первого ДП с учетом прохождения двух толкателей. Пусть для промежутков от ДП1 до Т1 и от ДП2 до Т2 матрицы перехода $\hat{C}$ одинаковы. Пусть также одинаковы матрицы перехода $\hat{B}$ для промежутков ДП1 – ДП2 и Т1 – Т2. Будем считать, что матрица перехода от Т2 к ДП1 есть $\hat{A}$, причем фазовая протяженность этого промежутка равна $\alpha\pi$. Действие первого толкателя на азимуте $\varphi_{т1}$ на n-м обороте будем характеризовать матрицей $\Delta\hat{V}_1[n]$, а второго – $\Delta\hat{V}_2[n]$. Тогда

$$\hat{V}(\varphi_{д1}+2\pi(n+1)) = \hat{A}\hat{V}(\varphi^+_{т2}+2\pi n) = \hat{A}\{\hat{V}(\varphi^-_{т2}+2\pi n)+ Q\hat{T}\Delta\hat{V}_2[n]\} =$$

$$=\hat{A}\{\hat{B}\hat{V}(\varphi^+_{т1}+2\pi n)+Q\hat{T}\Delta\hat{V}_2[n]\}= \hat{A}\{\hat{B}\hat{C}\hat{V}(\varphi_{д1}+2\pi n)+Q\hat{B}\hat{T}\Delta\hat{V}_1[n]+Q\hat{T}\Delta\hat{V}_2[n]\}=$$

$$= \hat{M}\hat{V}(\varphi_{д1}+2\pi n)+Q\hat{A}\{\hat{B}\hat{T}\Delta\hat{V}_1[n]+\hat{T}\Delta\hat{V}_2[n]\},$$

где $\hat{M}=\hat{A}\hat{B}\hat{C}$ – матрица оборота. Проводя усреднение по всем частицам пучка в его поперечном сечении на заданном азимуте, получаем следующее матричное уравнение для центра тяжести пучка:

$$\hat{V}[n+1] = \hat{M}\hat{V}[n] + Q\hat{A}\{\hat{B}\hat{T}\Delta\hat{V}_1[n] + \hat{T}\Delta\hat{V}_2[n]\}. \qquad (4)$$

Здесь $\hat{V}[n]=\langle\hat{V}(\varphi_{д1}+2\pi n)\rangle$ – матрица, описывающая состояние центра тяжести пучка на азимуте $\varphi_{д1}$ на n-м обороте (скобочками <...> обозначено усреднение по частицам поперечного сечения пучка в указанном выше смысле).

Элементы матриц $\Delta\hat{V}_1[n]$ и $\Delta\hat{V}_2[n]$, характеризующие действие толкателей на пучок, численно выражаются через коэффициент передачи **K** цепи обратной связи и показания ДП, зависящие от смещения пучка относительно равновесной орбиты в месте расположения ДП. Возможна также их функциональная зависимость от других параметров, например внешних возмущений $F_{внеш}$. В общем виде это можно представить как

$$\Delta\hat{V}_{1,2}[n] = f(\hat{V}[n],\ \mathbf{K},\ F_{внеш},\ \ldots). \qquad (5)$$

После доопределения элементов матриц $\Delta\hat{V}_{1,2}[n]$ и подстановки их в (4) получаем уравнение, связывающее состояния центра тяжести пучка через оборот после прохождения магнитной структуры и двух толкателей. Это результирующее уравнение есть уравнение динамики центра тяжести пучка для автоматической системы с замкнутым контуром регулирования. Среди множества решений этого уравнения необходимо найти те, при которых движение частиц будет устойчиво, причем введение цепи регулирования предотвращает раскачку частиц пучка в поперечном направлении.

Полученное линейное разностное матричное уравнение (4) можно эффективно решить, используя одностороннее Z-преобразование последовательности $\hat{V}[n]$:

$$\hat{\mathbf{V}}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{V}[n]z^{-n},\qquad \hat{V}[n]=\frac{1}{2\pi i}\int_C \mathbf{V}(z)z^{n-1}dz. \tag{6}$$

Здесь C - любой замкнутый контур, окружающий все особые точки $\hat{\mathbf{V}}(z)$ на комплексной z-плоскости, в частности любая окружность $|z|>R_V$, где R_V - радиус круга, вне которого сходится (абсолютно и равномерно) задающий $\hat{\mathbf{V}}(z)$ ряд. Такой способ решения выбран также по соображениям удобства последующего анализа движения частиц пучка при наличии цепи обратной связи с цифровой обработкой сигнала, поскольку Z-преобразование широко используется при анализе систем дискретного времени /7/.

Используя теорему о вычетах для вычисления контурного интеграла в (6), можем записать:

$$\hat{V}[n]=\sum_k \mathrm{Rez}\ \hat{\mathbf{V}}(z_k)z_k^{n-1}.$$

Отсюда ясно, что устойчивое движение частиц возможно, если все полюсы z_k на комплексной z-плоскости лежат внутри окружности с радиусом R=1, то есть

$$|z_k|<1. \tag{7}$$

Декремент затухания колебаний частиц D будет определяться полюсом с максимальной величиной модуля:

$$D=-\ln(\max|z_k|).$$

Таким образом, определив положение полюсов z_k на комплексной z-плоскости, можно выявить величины параметров, при которых движение частиц устойчиво, а также постоянную затухания поперечных колебаний частиц.

Возможности и особенности этого метода проиллюстрируем на простом примере, когда толкатели выключены. Используя теорему опережающего сдвига и известные свойства Z-преобразования /7/, получим

$$z(\hat{\mathbf{V}}(z)-\hat{V}[0])=\hat{\hat{M}}\hat{\mathbf{V}}(z).$$

Здесь $\hat{V}[0]$ - матрица, описывающая начальное состояние пучка. Решая последнее уравнение относительно $\hat{\mathbf{V}}(z)$, получаем

$$\hat{\mathbf{V}}(z)=(z\hat{I}-\det(\hat{M})\hat{M}^{-1})z\hat{V}[0]/\det(z\hat{I}-\hat{M}). \tag{8}$$

В справедливости (8) легко убедиться, если учесть, что

$$\hat{M} + \det(\hat{M})\hat{M}^{-1} = Sp(\hat{M})\hat{I}, \qquad \hat{M}\hat{M}^{-1} = \hat{I}.$$

Подчеркнем, что решение (8) справедливо для произвольной квадратной матрицы $\hat{M}$ второго порядка. Так как $\det(\hat{M})\hat{M}^{-1} = \hat{M}_-$ есть матрица, которая отличается от матрицы $\hat{M}$ перестановкой элементов на главной диагонали и заменой знака у элементов m_{12} и m_{21}, то из (8) получаем, что обратное Z-преобразование полностью определяется полюсами z_k, которые находятся из уравнения

$$\det(z_k\hat{I} - \hat{M}) = z_k^2 - z_k Sp(\hat{M}) + \det(\hat{M}) = 0. \qquad (9)$$

Поскольку полюсы $z_k = \exp(\pm i2\pi Q)$ являются полюсами первого порядка, то, выполняя согласно (6) обратное Z-преобразование, приходим к следующему соотношению:

$$\hat{V}[n] = \left\{\hat{I}\sin(2\pi(n+1)Q) - \hat{M}_-\sin(2\pi nQ)\right\}\hat{V}[0]/\sin(2\pi Q) = \hat{M}^n\hat{V}[0].$$

В итоге получен результат, который с очевидностью следует из (4) при $\Delta\hat{V}=0$ и хорошо известен. Необходимо только обратить внимание на соотношения (7), (8) и (9), которые постоянно будут присутствовать в последующих примерах и играют особую роль, поскольку позволяют определить область параметров, при которых обеспечивается устойчивость движения частиц.

Перейдем теперь к анализу движения частиц пучка с учетом действия толкателей. Для этого в уравнении (4) необходимо доопределить силы толчков в толкателях в соответствии с (5). Обычно при рассмотрении работы толкателя в цепи обратной связи предполагается, что сила толчка пропорциональна смещению центра тяжести пучка в ДП на азимуте $\varphi_Д$, то есть

$$\Delta v = K\langle v(\varphi_Д)\rangle = K\langle x(\varphi_Д)\rangle/\sqrt{\beta_Д} = \frac{l_T\sqrt{\beta_T}}{m\gamma_0 v_0^2} F_T(\varphi_T). \qquad (10)$$

Подчеркнем, что здесь воздействие в толкателе передается на те же частицы, которые имели смещение $\langle x(\varphi_Д)\rangle=\langle v(\varphi_Д)\rangle\sqrt{\beta_Д}$ при пролете ДП, то есть воздействие в толкателе синхронизовано с показаниями в ДП для одних и тех же частиц. Уравнение (10) характеризует идеальную цепь обратной связи, для которой в первую очередь будет проанализировано матричное уравнение (4). С учетом (10) для одинаковых коэффициентов передачи **К** в цепях обратной связи ДП1 - Т1 и ДП2 - Т2 и ранее введенных обозначений получаем из (4)

$$\hat{V}[n+1] = \hat{M}_T\hat{V}[n],$$

где

$$\hat{M}_T = \hat{M} + KQ\hat{A}[\hat{B}\hat{T} + \hat{T}\hat{B}].$$

Используя Z-преобразование, получаем решение для **V**(z) в виде (8) с заменой матрицы $\hat{M}$ на $\hat{M}_T$. Примем во внимание, что

$$\hat{B}\hat{T} + \hat{T}\hat{B} = (1/Q)\sin(Q\Delta\varphi)\,\hat{I} + 2\cos(Q\Delta\varphi)\,\hat{T},$$

где $\Delta\varphi=\varphi_{Д2}-\varphi_{Д1}=\varphi_{T2}-\varphi_{T1}$. При $\Delta\varphi = \pi/2Q$ из (8) нетрудно получить, что полюсы z_k есть

$$z_{1,2} = \exp(\pm i2\pi Q) + K\exp(\pm i\alpha\pi Q).$$

Отсюда (для действительных **К** и Q)

$$|z_1|^2 = |z_2|^2 = 1+K^2+2K\cos((2-\alpha)\pi Q).$$

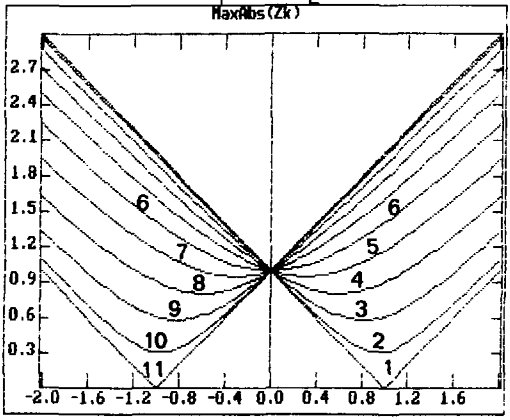

Рис.2. Зависимости $|z_k|$ от **К** при Q=52.71 и αQ=0.42+0.1(n-1). Цифры у кривых - значения n.

На рис.2 приведены графики зависимостей величин $|z_k|$ от коэффициента передачи **К** для различных значений параметра α при фиксированном Q. Напомним, что нас интересуют лишь те области значений Q, **К** и α, когда выполняется условие устойчивости движения частиц (7). В соответствии с ним имеем, что колебания будут затухающими, если

$$0 < æK < 2|\cos((2-\alpha)\pi Q)|, \qquad (11)$$

где

$$æ = -\mathrm{sign}[\cos((2-\alpha)\pi Q)].$$

Минимальное значение $|z_{1,2}|$ будет при

$$K = -\cos((2-\alpha)\pi Q), \qquad (12)$$

которое равно

$$|z|_{min} = |\sin((2-\alpha)\pi Q)|.$$

Поэтому максимальный темп подавления и одновременно максимальный диапазон для допустимых **К** имеем при

$$|\cos((2-\alpha)\pi Q)|=1. \qquad (13)$$

В этом случае набег фазы бетатронных колебаний между ДП1 и Т1 равен $\pi m+\pi/2$ (целое число $m<2Q-1$), так что $\hat{C}=æ\hat{B}$ и

$$\alpha\pi=2\pi-(m+1)\pi/Q.$$

На рис.3 приведены зависимости $|z_k|$ от **К** для различных α при Q=52.71 в области значений параметров для устойчивого движения частиц. Первая максимальная область устойчивости соответствует $\alpha=0.42/Q$ для положительных **К**. С увеличением фазовой протяженности промежутка между Т2 и ДП1 область устойчивости сужается и при $\alpha=0.92/Q$ становится нулевой. Следующая область устойчивости соответствует $\alpha=(1.42\pm0.5)/Q$ и отрицательным **К** ($-2<$**К**<0), затем – $\alpha=(2.42\pm0.5)/Q$ и положительным **К** и так далее.

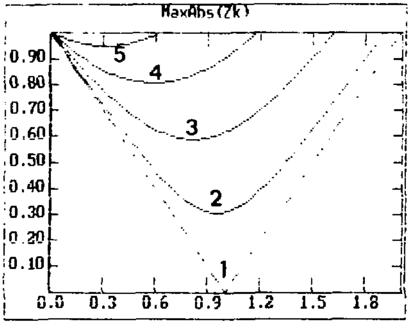

Рис.3. Зависимости $|z_k|$ от **К**. Q=52.71; αQ =0.42 +0.1(n-1). Цифры у кривых - значения n.

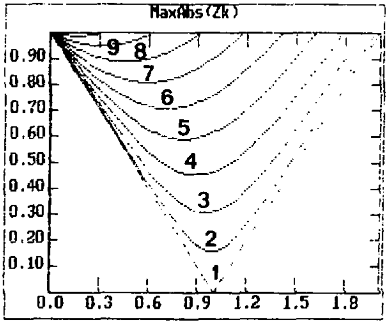

Рис.4. Зависимости $|z_k|$ от **К**. $\alpha=0.42/Q_o$; $Q=Q_o\pm0.0251(n-1)$. Цифры у кривых - значения n.

На рис.4 приведены зависимости $|z_k|$ от **К** для различных Q при $\alpha=0.42/Q_o$, причем Q_o=52.71. Максимальная область устойчивости соответствует $Q=Q_o$ и при отклонении от Q_o сужается. В пределах этой области устойчивости для положительных **К** допустимы $Q=Q_o\pm\Delta Q$, где $\Delta Q=Q_o/2(m+1)$, а m определено для оптимальной расстановки (13). Как и при вариации α, нетрудно определить следующую область устойчивости для отрицательных $\mathbf{K}$, затем для положительных $\mathbf{K}$ и так далее. Необходимо отметить, что с ростом α увеличивается область допустимых ΔQ (поскольку уменьшается величина m).

При выполнении условия (13) получаем, что $\hat{A}=-\varkappa\hat{M}$. В результате для матрицы оборота имеем

$$\hat{M}_T = (1-\varkappa\mathbf{K})\hat{M}.$$

Очевидно, что после прохождения n оборотов получим

$$\hat{V}[n+1] = \hat{M}_T^n\hat{V}[0] = (1-\varkappa\mathbf{K})^n\hat{M}^n\hat{V}[0].$$

Поскольку матрица $\hat{M}$ характеризует устойчивые бетатронные колебания, то с введением цепи обратной связи колебания будут затухать, если $0<\varkappa\mathbf{K}<2$, что совпадает с полученным выше условием устойчивости колебаний (11) для оптимальной расстановки ДП и Т (13). Декремент затухания колебаний есть

$$D = -\ln(1-\varkappa\mathbf{K}).$$

Для малых $\mathbf{K}$ имеем $D\simeq\varkappa\mathbf{K}$. Максимальный декремент получается при $\varkappa\mathbf{K}=1$, что соответствует подавлению колебаний за один оборот.

Необходимо подчеркнуть, что из-за энергетического разброса частиц в пучке когерентные колебания будут переходить в некогерентные. Минимальная величина постоянной времени перехода когерентных колебаний в некогерентные вследствие импульсного разброса частиц в пучке и ненулевой хроматичности магнитного поля ускорителя есть/2/

$$\tau_p = T_o/(\pi\Delta Q\sqrt{2}),$$

где T_o- период обращения частиц в ускорителе, ΔQ- полуширина разброса бетатронных частот частиц в пучке. Ясно, что система подавления поперечных когерентных колебаний должна обеспечивать более высокий темп подавления, чем τ_p. Это означает, что условие (7) должно быть заменено на более жесткое:

$$|z_k| < \exp(-T_o/\tau_p). \qquad (14)$$

Так, если $\tau_p=10T_o$, то $|z_k|<0.9$. В этом конкретном случае все полюсы z_k должны лежать уже внутри круга с радиусом R=0.9. В результате область допустимых $\mathbf{K}$ будет уже, чем в (11), в том числе и при оптимальной расстановке (13). Для коэффициента усиления (12), при котором темп подавления максимальный, в линейном приближении по ΔQ из (14) получаем

$$\pi\Delta Q\sqrt{2} < 1-|\sin((2-\alpha)\pi Q)|.$$

Таким образом, это ограничение существенно при уходе от оптимальной расстановки (13).

Второй эффект, обусловленный ненулевым импульсным разбросом частиц в пучке, связан с тем, что, например при оптимальной расстановке, только для части частиц темп подавления максимальный, а для других, у которых число бетатронных колебаний за оборот есть $Q+\Delta Q$, при том же коэффициенте передачи K в цепи обратной связи темп подавления более медленный. Для таких частиц условие $|z_k|<1$ приводит в линейном приближении по ΔQ к соотношению

$$K + 2\cos((2-\alpha)\pi Q) < 2(2-\alpha)\pi\Delta Q \sin((2-\alpha)\pi Q).$$

Для коэффициента усиления (12), при котором темп подавления максимальный, отсюда получаем

$$2(2-\alpha)\pi\Delta Q < |\mathrm{ctg}((2-\alpha)\pi Q)|. \qquad (15)$$

Это соотношение всегда выполняется при оптимальной расстановке (13), но его необходимо иметь в виду в других ситуациях.

Приведенные выше соображения и соотношения (14) и (15) необходимо учитывать при определении области допустимых параметров для системы подавления когерентных поперечных колебаний.

Перейдем теперь к анализу реальной цепи обратной связи, то есть доопределим силы толчков в толкателях, которые характеризуют действие цепи обратной связи ДП - Т. Прежде всего необходимо отметить, что сигнал с ДП пропорционален сумме смещения равновесной орбиты Δx пучка относительно электрической оси симметрии ДП и обусловленного колебаниями пучка мгновенного смещения $\langle x\rangle$ центра тяжести пучка относительно равновесной орбиты. Поэтому выборка для сигнала с ДП после дискретизации есть

$$U_{ДП}[n] = K_Д(\langle x(\varphi_Д+2\pi n)\rangle+\Delta x),$$

где $K_Д$- коэффициент пропорциональности, обусловленный преобразованием величины смещения центра тяжести пучка в ДП в напряжение на выходе согласующего усилителя, последующей обработкой этого выходного сигнала и его дискретизацией. Затем производится задержка сигнала и его усиление в $K_у$ раз, а результирующее воздействие на пучок есть

$$\Delta v = K_у K_д(\langle x(\varphi_д+2\pi n)\rangle+\Delta x)/\sqrt{\beta_д}.$$

Поскольку в силе толчка теперь присутствует дополнительная постоянная составляющая, а толкатель представляет собой дипольный магнит, то дальнейшее бетатронное движение частиц в пучке будет происходить вокруг новой равновесной орбиты, для которой величина Q может быть другой. Будем пренебрегать этим эффектом изменения Q. Тогда в уравнении (4) величина $\hat{V}[n]$ будет иметь смысл смещения относительно некоторой зафиксированной орбиты, связанной с таким же смещением $\hat{V}[n+1]$ через оборот посредством преобразования (4), в котором возможен учет любых толчков, в том числе и с постоянной силой. Поэтому (4) приобретает вид

$$\hat{V}[n+1] = \hat{M}\hat{V}[n] + KQ\hat{A}[\hat{B}\hat{T} + \hat{T}\hat{B}]\hat{V}[n] + Q\hat{A}[\hat{B}\hat{T}\Delta\hat{V}_1 + \hat{T}\Delta\hat{V}_2]u[n],$$

где u[n]- функция единичного скачка дискретного времени (u[n]=1 при n⩾1, u[n]=0 при n<0)/7/. Матрицы $\Delta\hat{V}_1$ и $\Delta\hat{V}_2$ характеризуют постоянные толчки пучка соответственно первым и вторым толкателем, причем в отличие от (10) элементы в них выражены в единицах смещения равновесной орбиты на азимуте ДП при единичном коэффициенте передачи цепи обратной связи (K=1):

$$\Delta v_i = \Delta x_i/\sqrt{\beta_{дi}}.$$

Подчеркнем, что теперь эти постоянные толчки следует интерпретировать как постоянную помеху, возникшую в толкателях. Такая помеха, например, может возникнуть при наличии дополнительного импульса тока в обмотках толкателя из-за погрешности преобразования сигнала в цепи обратной связи при нулевом напряжении на ее входе или при постоянной (или с частотой обращения) наводке на входе цепи или ее элементах, которая, однако, приведет к дополнительному постоянному импульсу тока в обмотке толкателя (то есть в последнем случае считается, что сила толчка есть величина постоянная независимо от коэффициента передачи K или места возникновения помехи на элементах цепи обратной связи). Еще раз подчеркнем, что такая интерпретация является прямым следствием отсутствия анализатора в цепи обратной связи.

способного отделить полезный переменный сигнал, обусловленный величиной <x>, от постоянного, обусловленного величиной Δx. Отсутствие корреляции между Δx и постоянными дополнительными компонентами $\Delta\hat{V}_1$ и $\Delta\hat{V}_2$ как раз и отражено в модифицированном уравнении (4). Выполняя Z-преобразование в этом уравнении, получаем

$$\hat{\mathbf{V}}(z)=(z\hat{I}-\det(\hat{M}_T)\hat{M}_T^{-1})z\{\hat{V}[0]+Q\hat{A}[\hat{B}\hat{T}\Delta\hat{V}_1+\hat{T}\Delta\hat{V}_2]/(z-1)\}/\det(z\hat{I}-\hat{M}_T).$$

Отсюда видно, что в этом решении положение полюсов z_k, найденных из (9), остается прежним, так что условия устойчивости не претерпевают изменений и решение однородного уравнения, пропорционального $\hat{V}[0]$, остается неизменным. Дополнительные члены в решении, связанные с постоянными толчками, приводят в решении к асимптотике, которую легко найти по теореме о конечном значении/7/:

$$\hat{V}[\infty]=\lim_{z\to 1}(z-1)\hat{\mathbf{V}}(z)=(\hat{I}-\det(\hat{M}_T)\hat{M}_T^{-1})Q\hat{A}[\hat{B}\hat{T}\Delta\hat{V}_1+\hat{T}\Delta\hat{V}_2]/\det(\hat{I}-\hat{M}_T).$$

Необходимо отметить, что при выводе последнего соотношения считалось, что предел существует (то есть все полюсы лежат внутри единичной окружности) и все полюсы z_k из (9) не совпадают с единицей.

Вычислим теперь максимальное отклонение пучка, которое характеризуется асимптотическим решением и равно сумме квадратов первого элемента матрицы $\hat{V}[\infty]$ и ее второго элемента, деленного на Q^2. Подставляя в эту сумму матричные элементы для $\hat{V}[\infty]$, после вычислений (при $\Delta\varphi=\pi/2Q$ в матрице $\hat{B}$) получим для квадрата амплитуды смещения центра тяжести пучка

$$(\hat{V}[\infty])_1^2+(\hat{V}[\infty])_2^2/Q^2=[(\Delta v_1)^2+(\Delta v_2)^2]\ F_k^2\ . \tag{16}$$

Здесь формфактор F_k есть

$$F_k=1/\sqrt{\det(\hat{I}-\hat{M}_T)}, \tag{17}$$

где

$$\det(\hat{I}-\hat{M}_T)=2-2[\cos(2\pi Q)+K\cos(\alpha\pi Q)]+2K\cos(2-\alpha)\pi Q+K^2.$$

При $K=0$ имеем $F_k=1/2|\sin\pi Q|$, что совпадает с известным значением коэффициента пропорциональности для наибольшего вероятного отклонения замкнутой орбиты при наличии возмущений магнитного поля/9/. Так, для $Q=52.71$ имеем $F_k=0.633$. Перейдем теперь к анализу F_k при $K\neq 0$. На рис.5 приведен график зависимости F_k от K в области устойчивости

0.42<αQ<0.92. Максимальные значения F_k соответствуют α=0.42/Q, то есть оптимальной расстановке. С увеличением α величина F_k уменьшается.

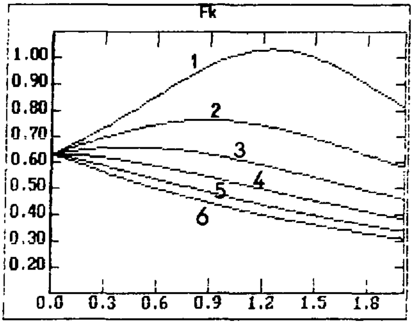

Рис.5. Зависимости F_k от **К**. Q= 52.71; αQ =0.42+0.1(n-1). Цифры у кривых - значения n.

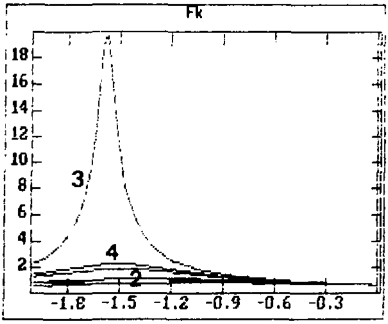

Рис.6. Зависимости F_k от **К**. Q= 52.71; αQ =1.42-0.1(n-1). Цифры у кривых - значения n.

Отметим также, что при оптимальной расстановке во всей области допустимых **К** величина F_k больше своего значения при **К**=0. Это означает, что при максимальном темпе подавления когерентных бетатронных колебаний включение цепи обратной связи приводит к увеличению смещения пучка при наличии возмущений магнитного поля (для параметров, приведенных на рис.5, имеем F_k(**К**=1)/F_k(**К**=0)=1.6 для α=0.42/Q). На рис.6 приведены зависимости F_k от **К** для 0.92<αQ<1.42 (Q=52.71). В этой области для отрицательных **К** (-2<**К**<0) введение цепи отрицательной обратной связи также приводит к подавлению поперечных когерентных колебаний. Однако вблизи α=1.22/Q происходит резкое увеличение вклада постоянных толчков при включении цепи обратной связи (F_k=20 при **К**=-1.6). Таким образом, предпочтительней выбирать параметры системы подавления в области 0.42<αQ<0.92. Аналогичные выводы получаются для других областей устойчивости по α.

Частичное подавление действия постоянных толчков или толчков, следующих с частотой обращения частиц, возможно с помощью фильтра типа гребенчатого[6]. Для простейшего фильтра первого порядка такого типа связь между дискретными сигналами $U_{дп}[n]$ на его входе и $U_{ф}[n]$ на выходе есть

$$U_{ф}[n+1] = U_{дп}[n+1] - bU_{дп}[n],$$

где b – параметр фильтра, подлежащий определению. В этом случае уравнение (4) примет вид

$$\hat{V}[n+2]= \hat{M}\hat{V}[n+1]+ \mathbf{K}Q\hat{A}[\hat{B}\hat{T}+\hat{T}\hat{B}](\hat{V}[n+1]-b\hat{V}[n])+ Q\hat{A}[\hat{B}\hat{T}\Delta\hat{V}_1+\hat{T}\Delta\hat{V}_2]u[n].$$

Применяя Z-преобразование, получаем следующее решение:

$$\hat{\mathbf{V}}(z) = \frac{(z\hat{I}-\det(\hat{M}_{ф})\hat{M}_{ф}^{-1})}{\det(z\hat{I}-\hat{M}_{ф})}\left[z\hat{V}[1]+(\hat{I}-\hat{M}_{T})\hat{V}[0] + \frac{Q}{z-1}\hat{A}[\hat{B}\hat{T}\Delta\hat{V}_1+\hat{T}\Delta\hat{V}_2]\right],$$

где

$$\hat{M}_{ф} = \hat{M}+\mathbf{K}(1-b/z)Q\hat{A}[\hat{B}\hat{T}+\hat{T}\hat{B}].$$

Видно, что это решение отличается от полученного выше без фильтра, во-первых, добавлением к его правой части дополнительных членов, приводящих к зависимости однородного решения от $\hat{V}[1]$. Второе отличие заключается в замене коэффициента передачи $\mathbf{K}$ на $\mathbf{K}(1-b/z)$ – коэффициент передачи цепи обратной связи с фильтром типа гребенчатого. Это отличие является существенным, поскольку приводит к удвоению числа полюсов z_k и, следовательно, к измененным величинам параметров, для которых движение частиц устойчиво. Решая уравнение (9) для матрицы $\hat{M}_{ф}$ в частном случае при $\Delta\varphi=\pi/2Q$ в матрице $\hat{B}$, получаем, что полюсы z_k есть

$$z_k= [\exp(\pm i2\pi Q)+\mathbf{K}\exp(\pm i\alpha\pi Q)]/2 \pm$$

$$\pm \sqrt{[\exp(\pm i2\pi Q)+\mathbf{K}\exp(\pm i\alpha\pi Q)]^2/4 - \mathbf{K}b\exp(\pm i\alpha\pi Q)} .$$

При оптимальной расстановке толкателей (13) имеем

$$z_k= \left[(1-\varkappa\mathbf{K})/2 \pm \sqrt{(1-\varkappa\mathbf{K})^2/4 + \varkappa\mathbf{K}b\exp(\mp i2\pi Q)}\right]\exp(\pm i2\pi Q).$$

Напомним, что без гребенчатого фильтра при оптимальной расстановке толкателей и $\varkappa\mathbf{K}=1$ в отсутствие внешних толчков достигался режим подавления поперечных колебаний за один оборот. При наличии же в цепи обратной связи гребенчатого фильтра аналогичный режим подавления колебаний невозможен, и декремент равен

$$D= -\ln\sqrt{|b|}.$$

Если теперь принять во внимание условие (14), то в этом случае получаем следующее ограничение на параметр фильтра b:

$$|b| < \exp(-2T_0/\tau_p).$$

Известно[8], что гребенчатый фильтр первого порядка имеет наибольшую эффективность подавления постоянной составляющей в радиотехнических цепях при b=1. Однако при использовании такого фильтра в цепи обратной связи для системы подавления поперечных колебаний частиц в ускорителе невозможно обеспечить максимальный эффект действия гребенчатого фильтра первого порядка и одновременно максимальный темп подавления когерентных колебаний при оптимальной расстановке устройств системы обратной связи, как в (13).

В то же время использование гребенчатого фильтра приводит к положительному эффекту, ослабляя влияние постоянных толчков на пучок. Действительно, применяя, как и выше, теорему о конечном значении и вычисляя соответствующее выражение для квадрата амплитуды смещения пучка, получаем в (16) следующее выражение для формфактора:

$$F_k = 1/\sqrt{\det[\hat{I}-\hat{M}_\phi(z=1)]}.$$

При оптимальной расстановке (13) для случая $\varkappa K$=1 имеем

$$\det[\hat{I}-\hat{M}_\phi(z=1)] = 1-2b\cos(2\pi Q)+b^2.$$

Таким образом, эффективность действия фильтра по подавлению постоянных толчков растет с ростом b (в области $b>2\cos(2\pi Q)$). Необходимо отметить, что при b=1 имеем $F_k=1/2|\sin\pi Q|$ независимо от величины K. В этом случае система подавления колебаний не приводит к дополнительным эффектам смещения пучка при наличии постоянных возмущений магнитного поля. По этой причине, а также по соображениям простоты реализации цифрового гребенчатого фильтра в случае b=1 следует выбрать параметр фильтра b, равный единице.

На рис.7 приведены зависимости $\max|z_k|$ от K, где в качестве параметра фигурирует α ($0.42<\alpha Q<0.92$), причем b=1 и Q=52.71. Видно, что с увеличением α от значения 0.42/Q (что соответствует расстановке (13), когда без фильтра достигался режим подавления колебаний за один оборот при K=1) сначала происходит увеличение темпа подавления колебаний, хотя область устойчивости по K сужается. Максимальный темп подавления соответствует расстановке $\alpha=0.7/Q$ и коэффициенту передачи $K=0.24$. В этом случае происходит уменьшение амплитуды колебаний в два раза за оборот. При дальнейшем увеличении α до значения $0.92/Q$ темп подавления колебаний уменьшается и одновременно сужается область устойчивости по K. Аналогичные зависимости по увеличению темпа подавления колебаний при уходе от расстановки (13) получаются при $b>0$ и в других областях устойчивости по α.

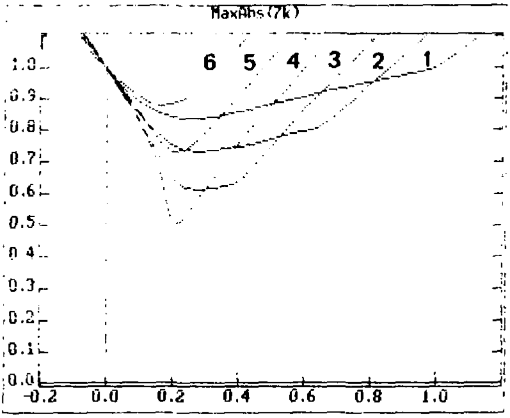

Рис.7. Зависимости $|z_k|$ от K при $Q=52.71$ и $\alpha Q=0.42+0.1(n-1)$. Параметр фильтра $b=1$. Цифры у кривых - значения n.

Таким образом, максимальное использование свойств гребенчатого фильтра для подавления постоянной составляющей в сигнале с ДП и одновременное обеспечение максимального темпа подавления поперечных колебаний возможно при специальной расстановке устройств системы подавления колебаний, отличной от оптимальной расстановки в отсутствие фильтра.

В заключение автор выражает свою признательность за постоянный интерес и содействие в работе И.Н.Иванову, Л.А.Юдину, И.Л.Кореневу.

Литература

1. Bossart R. et al. The Damper for the Transverse Instabilities of the SPS. IEEE Trans. Nucl. Sci., NS-26, No.3, pp.3284(1979).
2. Brouzet E. et al. A Damper for the $\bar{p}$ Injection Oscillations in the PS Machine. IEEE Trans. Nucl. Sci., NS-32, No.5, pp.2135(1985).
3. Балбеков В.И. Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. ОИЯИ, Дубна, 1985, т.2, с.360.
4. Балбеков В.И., Герцев К.Ф. Препринт ИФВЭ 87-120, Серпухов, 1987.
5. Keil E. et al. Feedback Damping of Horizontal Beam Transfer Errors. CERN 69-27.
6. Bossart R., Louwerse R., Mourier J. The Digital Notch Filter of the Damper. SPS/ABM/Note/85-10, September 1985.
7. Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы. М.: Мир, 1988.
8. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Советское радио, 1977.
9. Брук Г. Циклические ускорители заряженных частиц. М.: Атомиздат, 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел

14 февраля 1991 года