сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р9-91-55

В.А.Щепунов

МЕТОД ТРАССИРОВКИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В НЕЛИНЕЙНЫХ ПОЛЯХ СИНХРОТРОНОВ

1991

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача моделирования движения заряженной частицы в синхротроне путем последовательного преобразования её фазовых координат в магнитных элементах решается с высокой точностью с помощью известных вычислительных алгоритмов [1] интегрирования уравнений движения. Платой за точность, однако, служит быстродействие, и прямое использование численного интегрирования в случаях, когда необходимо проследить за частицей на протяжении десятков, сотен и более тысяч оборотов в кольце ускорителя, затруднено. Из-за ошибок интегрирования существует также вторая проблема - несимплектичность преобразования фазовых координат, приводящая к медленному изменению фазового объёма в процессе трассирования. Как первая, так и вторая проблемы решаются путём нахождения удовлетворяющего условиям симплектичности преобразования координат между точками наблюдения за частицей, что исключает промежуточные преобразования. В программе MAD [2] это осуществляется с использованием свойств преобразования Ли. [3] (Вторая проблема решается также методом симплектического интегрирования [4], близким по быстродействию и точности методам Рунге-Кутта соответствующих порядков.)

В данной работе преобразование фазовых координат в виде полиномов ищется путём интерполяции данных, полученных в результате 'точного' интегрирования. Такой подход не требует знаний специальных свойств рядов Ли и позволяет при необходимости улучшать точность, не прибегая к усложняющимся с ростом порядка приближения аналитическим соотношениям [3].

В п.3 описан алгоритм интегрирования уравнений движения в магните с произвольным набором нелинейностей поля. Алгоритм основан на вычислении коэффициентов разложения решения в ряд Тейлора по временной координате. Кроме фазовых координат вычисляется матрица Якоби их нелинейного преобразования (см. п.4), которая необходима для организации быстрого трассирования (см. п.6) и для оценки меры несимплектичности ε (см. п.4) при прямом использовании численного интегрирования для трассировки. В последнем случае аппроксимированное на 'большое' число оборотов в реальных магнитных полях ε служит критерием выбора как порядка тейлоровского разложения, так и шага интегрирования во всех типах магнитных элементов.

Алгоритмы рассмотрены на примере уравнений 4-мерного бетатронного движения. Полный импульс частицы входит в них как постоянный параметр.

2. ГАМИЛЬТОНИАН И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Гамильтониан бетатронного движения в криволинейной системе координат имеет вид[5]:

$$H = -(1+hx)(eA_t/p+(1-(p_x-eA_x/p)^2-(p_y-eA_y/p)^2)^{1/2}, \qquad /1/$$

где h - кривизна траектории в горизонтальной плоскости; e,p - заряд и полный импульс частицы; $p_{x,y}$, $A_{x,y}$ - поперечные импульсы, нормированные на p, и векторные потенциалы; A_t - продольный векторный потенциал. Индекс x относится к горизонтальным компонентам, y - к вертикальным. Сделаем следующие допущения.

1) Потенциал A_t=const вдоль продольной оси t и ступенчатым образом спадает до нуля на границах магнита; поперечные компоненты $A_{x,y} \cong 0$ (т.е. пренебрегаем характером спада поля на краях, где они максимальны) ; эффект наклона границ учитывается в приближении "тонких линз".

2) Полагаем, что

$$\sqrt{1-p_x^2-p_y^2} \cong 1-(p_x^2-p_y^2)/2+O(p^4).$$

Отношение отброшенных членов к оставленным равно $p_x^2/4$ и для нуклотрона[6] составляет $2*10^{-5}$.

Гамильтониан принимает вид:

$$H = -(1+hx)((p_x^2+p_y^2)/2 + V(x,y)), \qquad /2/$$

где

$$V(x,y) = -1-eA/p , \qquad /3/$$

причем здесь и далее индекс t при A_t опускается.

В случае, когда h=0, решение уравнения Лапласа

$$\Delta A = 0 \qquad /4/$$

записывается в декартовых координатах (x,y) в виде мультипольного разложения:

$$A = \mathrm{Re}(\hat{A}), \qquad \hat{A} = \sum_{n=1}^{L} (\bar{a}_n + i\tilde{a}_n)(x+iy)^n/n! \ , \qquad /5a/$$

где L – максимальный номер гармоники поля.
Введем жёсткость равновесной частицы ($B\rho$) через соотношение:

$$-e/p = 1/(B\rho)(1+\delta) \ , \qquad /6/$$

где δ – относительное отклонение полного импульса p от равновесного p_0. Тогда для потенциала V получим:

$$V(x,y) = \mathrm{Re}(\hat{V}), \qquad \hat{V}(x,y) = \left[\sum_{n=1}^{L}(\bar{K}_n + i\tilde{K}_n)(x+iy)^n/n!\right]-1 \ ; \qquad /5б/$$

где $\bar{K}_n$ и $\tilde{K}_n$ –прямые и косые мультипольные силы соответственно:

$$\bar{K}_n = \bar{a}_n/(B\rho)(1+\delta) = (\partial^{n-1}B_y/\partial x^{n-1})\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}(1/(B\rho)(1+\delta)),$$

$$\tilde{K}_n = \tilde{a}_n/(B\rho)(1+\delta) = (\partial^{n-1}B_x/\partial x^{n-1})\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}(1/(B\rho)(1+\delta)). \qquad /7/$$

Введём комплексные силы K_n и координату z :

$$K_n = \bar{K}_n + i\tilde{K}_n \ , \quad z = x+iy \ . \qquad /8/$$

Уравнения движения

$$x' = \partial H/\partial p_x \ , \quad p_x' = -\partial H/\partial x \ , \quad y' = \partial H/\partial p_y \ , \quad p_y' = -\partial H/\partial y \qquad /9/$$

в комплексной записи принимают компактный вид:

$$z'' = -(\partial \hat{V}/\partial z)^* = -\sum_{n=1}^{L}(K_n z^{n-1})^*/(n-1)! \ , \qquad /10/$$

где штрих обозначает производную по t, а звезда – комплексное сопряжение.

Для структурного дипольного магнита $h \neq 0$, и уравнение /4/ необходимо решать в криволинейных координатах. Потенциал V можно представить в виде разложения по степеням h:

$$V = V_0 + hV_1 + h^2 V_2 + O(h^3).$$

С точностью до $O(h^2)$ запишем выражение для потенциала V :

$$V(x,y) = \sum_{m=0}^{m+n \leqslant L} \sum_{n=0} v_{m,n} x^m y^n, \qquad v_{0,0} = -1, \qquad /11/$$

$$v_{m,2p} = (-1)^p (\bar{K}_{m+2p-1} + h(p-1)\bar{K}_{m+2p-2})/m!(2p)! \ ,$$

$$/12/$$

$$v_{m,2p+1} = (-1)^{p+1} (\tilde{K}_{m+2p} + hp\tilde{K}_{m+2p-1})/m!(2p+1)! \ , \ m \geqslant 1, \ p \geqslant 0.$$

Вывод выражений /12/ с точностью до $O(h^3)$ дан в Приложении.

Уравнения /9/ в дипольном магните принимают вид:

$$x' = F_1 = (1+hx)p_x \ , \quad p_x' = F_2 = -h(p_x^2 + p_y^2)/2 + G_x(x,y),$$

$$/13/$$

$$y' = F_3 = (1+hx)p_y \ , \quad p_y' = F_4 = G_y(x,y);$$

$$G_x(x,y) = \sum_{m=0}^{m+n \leqslant L} \sum_{n=0} g_{m,n}^{(x)} x^m y^n, \quad g_{m,n}^{(x)} = -(m+1)(v_{m+1,n} + hv_{m,n}), \quad m+n<L,$$

$$/14/$$

$$g_{m,n}^{(x)} = -(m+1)hv_{m,n} \ , \quad m+n=L;$$

$$G_y(x,y) = \sum_{m=0}^{m+n \leqslant L} \sum_{n=0} g_{m,n}^{(y)} x^m y^n \ ,$$

$$g_{m,n}^{(y)} = -(n+1)(v_{m,n+1} + hv_{m-1,n+1}), \quad m+n<L, \quad m \neq 0,$$

$$/15/$$

$$g_{m,n}^{(y)} = -(n+1)hv_{m-1,n+1} \ , \quad m+n=L, \quad m \neq 0,$$

$$g_{m,n}^{(y)} = -(n+1)v_{0,n+1}, \quad n \neq L, \quad g_{0,L}^{(y)} = 0.$$

Знак перед силами /7/ выбран так, чтобы положительная прямая компонента соответствовала фокусировке в горизонтальной плоскости.

Таким образом, необходимо решать уравнение /10/ или /13/ с учётом /11/,/12/,/14/,/15/.

3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим сначала уравнение /10/. Подставим решение в виде ряда

$$z = x+iy = \sum_{m=0}^{M} c_m t^m, \quad c_m = a_m + ib_m \ , \qquad /16/$$

где M - порядок приближения, в уравнение /10/. Изменяя порядок суммирования и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получим рекуррентные соотношения для c_m.

При наличии только дипольной компоненты поля получим:

$$c_2 = -K_0^*/2, \quad c_m = 0, \ m>2; \qquad /17/$$

аналогично для квадрупольной компоненты:

$$c_{m+2} = -(K_2 c_m)^*/(m+1)(m+2); \qquad /18/$$

для секступольной компоненты:

$$c_{m+2} = -\left[K_3 \sum_{k=0}^{m} c_k c_{m-k}\right]^*/2(m+1)(m+2), \qquad /19/$$

и так далее. К /17/-/19/ необходимо добавить начальные условия:

$$c_0 = z_0 \ , \quad c_1 = z_0' \ . \qquad /20/$$

С ростом мультипольности n кратность суммирования в рекуррентных соотношениях растёт как (n-2). Для ускорения алгоритма целесообразно вычислять промежуточные суммы-свёртки $S_{l,m}$, определяемые для фиксированного m рекуррентно:

$$S_{l+1,m} = \sum_{k=0}^{m} c_{m-k} S_{l,k} \ , \ l=0 \div (L-2) \ ; \quad S_{0,m} = c_m. \qquad /21/$$

Для магнита с произвольным набором гармоник поля (мультипольностей) $n \leqslant L$ можно записать общее рекуррентное выражение:

$$c_{m+2} = - \frac{1}{(m+1)(m+2)} \left[\sum_{n=0}^{n \leqslant L} (K_n S_{n-2,m})^* / (n-1)! \right] . \qquad /22/$$

Вместе с /20/ и /21/ это даёт алгоритм вычисления коэффициентов разложения /16/.

Действуя аналогичным образом, можно найти решение /13/ - /15/ в виде рядов:

$$x = \sum_{m=0}^{M} a_m t^m, \quad p_x = \sum_{m=0}^{M} a'_m t^m, \quad y = \sum_{m=0}^{M} b_m t^m, \quad p_y = \sum_{m=0}^{M} b'_m t^m . \qquad /23/$$

Рекуррентные соотношения для коэффициентов будут иметь вид:

$$a_{m+1} = \left[a'_m + h \sum_{k=0}^{M} a_{m-k} a'_k \right] / (m+1), \quad b_{m+1} = \left[b'_m + h \sum_{k=0}^{M} a_{m-k} b'_k \right] / (m+1),$$

$$a'_{m+1} = \left[-h \sum_{k=0}^{M} (a'_{m-k} a_k + b'_{m-k} b_k)/2 + \sum_{n1=0}^{n1+n2 \leqslant L-1} \sum_{n2=0} g^{(x)}_{n1,n2} D_{n1,n2,m} \right] / (m+1), \qquad /24/$$

$$b'_{m+1} = \left[\sum_{n1=0}^{n1+n2 \leqslant L-1} \sum_{n2=0} g^{(y)}_{n1,n2} D_{n1,n2,m} \right] / (m+1).$$

Отметим, что в /24/ $n1+n2=3$ соответствует октупольной компоненте поля, тогда как в /22/ $n=3$ - это секступольная гармоника. Суммы-свёртки $D_{n1,n2,m}$ в /24/ вычисляются подобно /21/ :

$$D_{n1+1,n2,m} = \sum_{k=0}^{m} a_{m-k} D_{n1,n2,k} , \quad D_{n1,n2+1,m} = \sum_{k=0}^{m} b_{m-k} D_{n1,n2,k} , \qquad /25/$$

$$D_{1,0,m} = a_m , \quad D_{0,1,m} = b_m , \quad D_{0,0,m} = \delta_{m,0} ,$$

где δ -символ Кронекера. Начальные условия:

$$a_0 = x_0, \quad a'_0 = x'_0/(1+hx_0), \quad b_0 = y_0, \quad b'_0 = y'_0/(1+hx_0). \qquad /26/$$

Соотношения /23/-/26/ дают решение уравнений движения в структурном дипольном магните с точностью до порядков выше M в /23/.

4. МАТРИЦА ЯКОБИ И МЕРА НЕСИМПЛЕКТИЧНОСТИ

Покажем, как вычисляется матрица Якоби на примере преобразования /16/. Пусть

$$v_0=(x_0,p_{x0},y_0,p_{y0}),\quad v=(x,p_x,y,p_y) \qquad /27/$$

вектора фазовых координат в начале и в конце магнита. Продифференцируем /16/ по начальным условиям:

$$(\partial x/\partial v_{i0})=\mathrm{Re}\left[\sum_{m=0}^{M}t^m(\partial c_m/\partial v_{i0})\right],\quad (\partial p_x/\partial v_{i0})=\mathrm{Re}\left[\sum_{m=1}^{M+1}mt^{m-1}(\partial c_m/\partial v_{i0})\right],$$

$$p_x=x',\quad i=1\div 4\ ; \qquad /28/$$

и аналогично для y, p_y, но с взятием мнимых частей в /28/. Для вычисления производных от c_m можно получить рекуррентные формулы дифференцированием /21/ и /22/:

$$(\partial c_{m+2}/\partial v_{i0})=-\frac{1}{(m+1)(m+2)}\left[\sum_{n=2}^{n\leqslant L}(K_n\partial S_{n-2,m}/\partial v_{i0})^*/(n-1)!\right]\ ; \qquad /29/$$

$$(\partial S_{l+1,m}/\partial v_{i0})=\sum_{k=0}^{m}\left[(\partial c_{m-k}/\partial v_{i0})S_{l,k}+c_{m-k}(\partial S_{l,k}/\partial v_{i0})\right],\quad l=0\div(L-2);$$

$$/30/$$

$$(\partial S_{0,m}/\partial v_{i0})=(\partial c_m/\partial v_{i0})\ ;$$

с начальными условиями:

$$(\partial c_0/\partial v_{10})=1,\ (\partial c_0/\partial v_{20})=0,\ (\partial c_0/\partial v_{30})=i,\ (\partial c_0/\partial v_{40})=0;$$

$$(\partial c_1/\partial v_{10})=0,\ (\partial c_1/\partial v_{20})=1,\ (\partial c_1/\partial v_{30})=0,\ (\partial c_1/\partial v_{40})=i; \qquad /31/$$

$$c_0=v_{10}+iv_{30},\quad c_1=v_{20}+iv_{40}.$$

Соотношения /28/-/31/ позволяют вычислять матрицу Якоби $\hat{R}$

преобразования фазовых координат /16/ в магните:

$$R_{ij}(\mathbf{v}_0)=(\partial v_i/\partial v_{j0}), \qquad i,j=1\div4. \qquad /32/$$

Последовательным перемножением получаем далее матрицу Якоби $\hat{\mathbf{M}}_K$ для последовательности из К магнитных элементов. Для оценки ошибки интегрирования можно использовать величину δD_K отклонения детерминанта матрицы $\hat{\mathbf{M}}_K$ от 1 :

$$\delta D_K=|1-\det(\hat{\mathbf{M}})| \ , \qquad /33/$$

или величину $\delta H=H(\mathbf{v})-H(\mathbf{v}_0)$ несохранения гамильтониана. Более корректной будет, однако, оценка меры невыполнения условия симплектичности. Последнее условие следующее[3]:

$$\hat{\mathbf{M}}_K^T\hat{\mathbf{J}}\hat{\mathbf{M}}_K=\hat{\mathbf{J}}, \qquad J_{12}=J_{34}=1, \ J_{21}=J_{43}=-1 \ ; \qquad /34/$$

остальные элеметы $J_{ij}=0$. Мерой несимплектичности $\hat{\mathbf{M}}_K$ может служить норма ε_K матрицы $\hat{\Delta}_K$, имеющей 6 независимых элементов:

$$\varepsilon_K=\left[\sum_1^4\sum_1^4 \Delta_{ij}^2\right]^{1/2}, \qquad \hat{\Delta} = \hat{\mathbf{M}}_K^T\hat{\mathbf{J}}\hat{\mathbf{M}}_K-\hat{\mathbf{J}} \ ; \qquad /35/$$

$$\Delta_{ij}= (M_{1i}M_{2j}-M_{2i}M_{1j})+(M_{3i}M_{4j}-M_{4i}M_{3j})-\delta_{1i}\delta_{2j}-\delta_{3i}\delta_{4j} \ , \qquad /36/$$

$$i=2,3,4; \quad i<j\leqslant4; \quad \Delta_{ii}=0; \quad \Delta_{ji}=-\Delta_{ij} \ ;$$

где δ -символ Кронекера.

Как отмечалось в п.1, характер роста ε_K с увеличением К может служить основой для выбора оправданных порядков $\mathbf{M}$ в /16/ и /23/ и шага интегрирования в магнитных элементах, исходя из числа оборотов в кольце ускорителя и требования к точности.

5. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР - ДИПОЛЬНЫЙ МАГНИТ НУКЛОТРОНА

В табл.1 приведены средние значения мультипольных сил в в дипольных магнитах нуклотрона, полученные по данным магнитных измерений, при основном поле $B_0\cong1,13$ Тл($E\cong2.8$ ГэВ/н). Длина магнита - $L\cong144$ см, радиус кривизны - $\rho\cong2200$ см. Вычисления

Табл.1. Мультипольные силы дипольного магнита нуклотрона.

n	$\bar{K}_n(\text{См}^{-n})$	$\tilde{K}_n(\text{См}^{-n})$
1	$h=1/\rho$	0
2	$2.3\cdot10^{-9}$	$-2.3\cdot10^{-8}$
3	$-5.7\cdot10^{-8}$	$-2.3\cdot10^{-9}$
4	$-1.3\cdot10^{-9}$	$-6.4\cdot10^{-9}$
5	$1.3\cdot10^{-8}$	$3.4\cdot10^{-10}$
6	$-0.9\cdot10^{-9}$	$-2.7\cdot10^{-9}$
7	$1.4\cdot10^{-8}$	$-3.8\cdot10^{-10}$

Табл.2. Ошибка ε (см. /35/) в зависимости от порядка приближения М для сил из Табл.1.

М	ε при шаге=L	ε при шаге=L/2
2	$6.8\cdot10^{-4}$	$8.5\cdot10^{-5}$
4	$1.9\cdot10^{-6}$	$6.2\cdot10^{-7}$
6	$2.0\cdot10^{-7}$	$1.5\cdot10^{-10}$
8	$1.6\cdot10^{-9}$	$3.0\cdot10^{-13}$
10	$5.5\cdot10^{-12}$	$3.9\cdot10^{-16}$

Табл.3. Ошибка ε для сил в 10 раз больших, чем указанные в табл.1.

М	ε при шаге=L	ε при шаге=L/2
2	$9.4\cdot10^{-3}$	$0.9\cdot10^{-3}$
4	$1.3\cdot10^{-2}$	$0.9\cdot10^{-4}$
6	$1.0\cdot10^{-3}$	$7.0\cdot10^{-6}$
8	$1.2\cdot10^{-5}$	$2.1\cdot10^{-8}$
10	$1.6\cdot10^{-7}$	$7.1\cdot10^{-11}$

проводились для начальных координат:

$x_0=4$ см, $y_0=3$ см,

$p_{x0}=p_{y0}=0$.

В табл.2-3 приведены точности, достигаемые в различных порядках М для двух значений шага интегрирования: L и L/2. Из табл.2 видно, что при М=4÷6 имеем уже достаточно высокую точность. С увеличением нелинейностей (см. Табл.3) имеет смысл уменьшать длину шага интегрирования.

Помимо изложенных были проделаны расчёты с целью сравнения данного метода при М=4÷6 с методами Рунге-Кутта /1/ (в различных схемах) таких же порядков. Ошибка при этом оценивалась по величине несохранения гамильтониана /2/. Найдено, что 'в среднем' данный метод порядка М показывает лучшую точность, примерно соответствующую методам Рунге-Кутта порядка $M+1$. Что касается быстродействия (без вычисления матриц), то при $M=4$ эти методы близки, но с дальнейшим ростом M и при наличии мультипольностей высокого порядка ($n\geq4$) быстродействие по отношению к схемам Рунге-Кутта ухудшается.

6. БЫСТРОЕ ТРАССИРОВАНИЕ

Алгоритм численного интегрирования сам по себе не может быть использован для исследования многооборотного движения частиц, поскольку является достаточно медленным. Для ускорения трассирования необходимо найти преобразования фазовых координат, удовлетворяющие условию /34/, между точками азимута, в которых находятся мониторы. Это можно сделать путём численной интерполяции данных, полученных точным интегрированием для ряда точек фазового пространства.

Простейшим способом будет разбиение фазового пространства на четырёхмерные кубические ячейки и использование в них матриц Якоби, вычисленных в центрах ячеек. Главным достоинством такого подхода является то, что для симплектичности преобразования достаточно, чтобы матрицы в центрах точно удовлетворяли условиям /34/. Этого можно достичь, изменяя (различными способами) в пределах ошибки интегрирования матричные элементы $\hat{\mathbf{R}}$ в каждом магнитном элементе. Возможна, например, градиентная минимизация функционала $F=\varepsilon^2$, где ε из /35/ вычисляется для $\hat{\mathbf{R}}$. Другой путь следующий.

1) Координаты на выходе из магнита изменяются так, чтобы $H(\mathbf{v}+\delta\mathbf{v})=H(\mathbf{v}_0)\equiv H_0$. Это делается градиентным способом:

$$\delta v_i=-(H(\mathbf{v}+\delta\mathbf{v})-H_0)h_i/\sum_{i=1}^{4}h_i^2\ ,\quad h_i=(\partial H/\partial v_i)_{|\mathbf{v}}\ ,\quad i=1\div4. \qquad /37/$$

2) Матрица $\hat{\mathbf{R}}$ изменяется с помощью малого преобразования $\delta\hat{\mathbf{R}}$ так, чтобы она точно удовлетворяла /34/ и обеспечивала равенство:

$$\mathbf{v}+\delta\mathbf{v}=(\hat{\mathbf{R}}+\delta\hat{\mathbf{R}}(\Delta))\mathbf{v}_0\ . \qquad /38/$$

Подставляя в /35/ матрицу $\hat{\mathbf{R}}+\delta\hat{\mathbf{R}}$, получим уравнение для определения $\delta\hat{R}$:

$$\hat{\Delta} + \hat{R}^T\hat{J}\delta\hat{R} + \delta\hat{R}^T\hat{J}\hat{R} + \delta\hat{R}^T\hat{J}\delta\hat{R} = 0 \,, \qquad /39/$$

где $\hat{\Delta}$ - матрица ошибки /35/ для $\hat{R}$. Заменим /39/ на систему:

$$\hat{\Delta} + \hat{R}^T\hat{J}\delta\hat{R} + \delta\hat{R}^T\hat{J}\hat{R} = 0 \,, \qquad /40/$$

$$\delta\hat{R}^T\hat{J}\delta\hat{R} = 0 \,. \qquad /41/$$

12 независимых уравнений /40-41/ вместе с 4 уравнениями /38/ образуют систему для определения 16 матричных элементов матрицы $\delta\hat{R}$. Таким образом, 'исправленное' в пределах ошибки интегрирования преобразование /38/ обеспечивает симплектичность и, одновременно, сохранение интеграла движения H.

Приближение преобразования фазовых координат постоянными матрицами не будет обеспечивать высокую точность в случае сильных нелинейностей полей в магнитах. Более приемлемой поэтому будет интерполяция преобразования с помощью полиномов 4- й степени:

$$y_i = y_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{4} r_{ij}^{(0)} x_j + \sum_{\substack{j=1\\k=1}}^{4} t_{ijk} x_j x_k + \sum_{\substack{j,k=1\\l=1}}^{4} c_{ijkl} x_j x_k x_l + \sum_{\substack{j,k=1\\l,m=1}}^{4} d_{ijklm} x_j x_k x_l x_m ; \quad i=1\div 4; \qquad /42/$$

$$t_{ijk}=t_{ikj},\ c_{ijkl}=c_{ikjl}=c_{ijlk},\ d_{ijklm}=d_{ikjlm}=d_{ijlkm}=d_{ijkml}; \qquad /43/$$

где x_i и y_i обозначают фазовые координаты, а ноль показывает, что величины взяты при $\mathbf{x}=(0,0,0,0)$. Коэффициенты полиномов находятся из 4 условий на фазовые координаты и 10 независимых условий на матрицы Якоби (с учётом /34/) в 16 угловых точках 4 -мерного куба, охватывающего всю область движения частиц. При этом полагаем, что полученные в результате численного интегрирования матрицы и координаты изменены в соответствии с /37/-/41/, и условие /34/ - выполняется. Таким образом, получаем 224 линейных относительно коэффициентов /42/ уравнения. С другой стороны, с учётом симметрии /43/ число коэффициентов в каждом порядке есть (M+1)(M+2)(M+3)/6, где M-порядок, и составляет 10, 20 и 35 для M=2, 3 и 4 соответственно (для каждой фазовой координаты y_i в /42/), т.е. всего 260 коэффициентов 2÷4 порядков.

Дополнительные уравнения для коэффициентов в /42/ даёт условие симплектичности /34/ для матрицы Якоби преобразования /42/. Подставим якобиеву матрицу /42/ в /36/ (где $\Delta_{ij}=0$) и приравняем к нулю коэффициенты получившегося полинома 6 степени. Например, для коэффициентов при 1- й и 2- й степенях это даст уравнения:

$$\left[(r_{1i}t_{2jk}+r_{2j}t_{1ik}-r_{2i}t_{1jk}-r_{1j}t_{2ik}) + +(r_{3i}t_{4jk}+r_{4j}t_{3ik}-r_{4i}t_{3jk}-r_{3j}t_{4ik})\right] = 0;$$

$$\left[(t_{1ik}t_{2jl}-t_{2ik}t_{1jl})+(r_{1i}c_{2jkl}+r_{2j}c_{1ikl}-r_{2i}c_{1jkl}-r_{1j}c_{2ikl})+ +(t_{3ik}t_{4jl}-t_{4ik}t_{3jl})+(r_{3i}c_{4jkl}+r_{4j}c_{3ikl}-r_{4i}c_{3jkl}-r_{3j}c_{4ikl})\right]=0; \qquad /44/$$

$k,l=1\div4;\quad i=2,3,4;\quad i<j\leqslant4;$

где опущен ноль вверху r_{ij}. Подобные равенства записываются и для коэффициентов при 3÷6 степенях.

Таким образом, получаем систему уравнений для определения 260 коэффициентов (при 2÷4 степенях в /42/), которую можно решать минимизацией соответствующего функционала.

Возможны, разумеется, и другие варианты деления фазового пространства на ячейки и постановки условий в узлах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что численное построение преобразований координат типа /42/ возможно на основе интегрирования уравнений движения методами, которые отличаются от описанного в п.3-4/1/. При этом иной метод должен обеспечивать вычисление матриц Якоби /32/.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ СТРУКТУРНОГО ДИПОЛЬНОГО МАГНИТА

С учётом 1) п.2 запишем уравнение для продольной компоненты векторного потенциала:

$$\Delta A = \frac{1}{1+hx}\frac{\partial}{\partial x}\left[(1+hx)\frac{\partial A}{\partial x}\right] + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 0 \ . \qquad /П1/$$

Поле **B**=rot**A** в криволинейных координатах:

$$B_x = -\frac{\partial A}{\partial y}, \qquad B_y = \frac{1}{1+hx}\frac{\partial}{\partial x}\left[(1+hx)A\right] \ . \qquad /П2/$$

Подставим в /П1/ разложение A в точке x=y=0:

$$A = \sum_{m,n\geqslant 0}\sum A_{m,n}x^m y^n/(m!n!) \ , \qquad /П3/$$

причём $A_{m,n}$=const в пределах магнита. Из /П1/ следует

$$A_{m,n+2} = -A_{m+2,n} - h((m+1)A_{m+1,n} + mA_{m-1,n+2}) \ . \qquad /П4а/$$

Подставляя /П3/ и разложения $B_{x,y}$ в виде /П3/ в /П2/, получим

$$A_{m+1,0} = \bar{B}_m + mh\bar{B}_{m-1} - h(m+1)A_{m,0} \ , \qquad /П5а/$$

$$A_{m,1} = -\tilde{B}_m \ , \qquad /П6/$$

где $\bar{B}_m$, $\tilde{B}_m$ – m– е производные B_y и B_x соответственно при x=y=0. Рекуррентные соотношения /П5а/–/П6/ позволяют определить $A_{m,0}$ и $A_{m,1}$ для всех m и далее с помощью /П4а/ вычислить все производные $A_{m,n}$.

Вычислим $A_{m,n}$ как функции $\bar{B}_m$, $\tilde{B}_m$ с точностью до $O(h^3)$. Записывая /П5а/ последовательно для m+1, m+2, m+3 и делая подстановки, получим

$$A_{m+3,0} = \bar{B}_{m+2} - h\bar{B}_{m+1} + h^2(m+3)\bar{B}_m + O(h^3) \ , \qquad /П5б/$$

Аналогично из /П4а/ получим

$$A_{m,n+2}=-A_{m+2,n}-hA_{m+1,n}+h^2mA_{m,n}+O(h^3) \ . \qquad /П4б/$$

Последовательно подставляя начальные значения /П5б/, /П6/ в /П4б/ для чётных и для нечётных n, можно показать, что

$$A_{m,2p}=(-1)^p\left[\bar{B}_{r-1}+h(p-1)\bar{B}_{r-2}-h^2(m(p-1)+p(p-3)/2)\bar{B}_{r-3}\right] + O(h^3),$$

$$/П7/$$

$$A_{m,2p+1}=-(-1)^p\left[\tilde{B}_r+hp\tilde{B}_{r-1}-h^2(m(p-2)+(p-1)(p-8)/2)\tilde{B}_{r-2}\right] + O(h^3),$$

$r=m+2p$, $m\geqslant1$, $p\geqslant0$.

Для потенциала $V=-(1+eA/p)$ с учётом выражений /7/ п.2 для мультипольных сил окончательно получим

$$V(x,y) = \sum_{m=0}^{m+n\leqslant L}\sum_{n=0} v_{m,n}x^my^n, \qquad v_{0,0}= -1,$$

$$/П8/$$

$$v_{m,2p}=(-1)^p\left[\bar{K}_{r-1}+h(p-1)\bar{K}_{r-2}-h^2(m(p-1)+p(p-3)/2)\bar{K}_{r-3}\right]/m!(2p)!,$$

$$v_{m,2p+1}=-(-1)^p\left[\tilde{K}_r+hp\tilde{K}_{r-1}-h^2(m(p-2)+(p-1)(p-8)/2)\tilde{K}_{r-2}\right]/m!(2p+1)!$$

$r=m+2p$, $m\geqslant1$, $p\geqslant0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хайрер Э. и др. - Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежёсткие задачи. М.: Мир, 1990, Гл.2.
2. Iselin F.C., Niederer J. - CERN/LEP-TH/88-38, 1988.
3. Dragt A. - Lectures on nonlinear orbit dynamics, In: AIP Conference Proc. No.87, 1981, 147.
4. Ruth R. - IEEE Trans. Nucl. Sci., Vol. NS-30, No.4, 1983, 2669.
5. Montague B. - CERN 77-13, Geneva, 1977, 37.
6. Issinsky I.B. et al. - In: Proc. of the 2-nd European Particle Accelerator Conference, Nice, June 12-16, 1990, Vol.1, 458.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 января 1991 года.