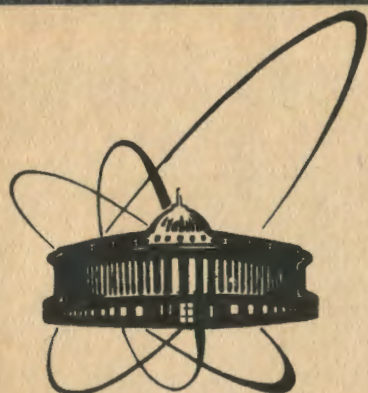


90-497



сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
Дубна

P9-90-497

Беккер Клаус

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
МАГНИТНОЙ СТРУКТУРЫ ЦИКЛОТРОНА

1990

## 1. Введение

В работе представлен способ численного моделирования распределений магнитного поля по радиусу и азимуту в рабочей области изохронных циклотронов. Для заданных отношений  $\frac{A}{Z}$  ионов, конечных энергий и параметров электромагнита циклотрона определяется конфигурация железных масс, формирующих требуемые распределения магнитных полей с точностью около 5%.

Исследования включали следующие условия:

1. Отношение значения среднего воздушного зазора к диаметру полюса циклотрона мало;

2. Формирование распределений магнитного поля циклотронов осуществляется только с помощью железных масс;

3. Уровень среднего магнитного поля  $\langle B \rangle$  ограничивается величиной  $1,5 \pm 2,1$  Тл;

4. Максимальный угол спиральности секторов меньше  $60^\circ$ .

Моделирование магнитного поля изохронных циклотронов основывается на методе магнитных сопротивлений [1,2] и учитывает условия устойчивого ускорения частиц в изохронном циклотроне [3,4].

## 2. Условные обозначения и символы

### 2.1. Циклотрон.

- $D$  - диаметр полюса циклотрона;
- $r$  экс. - радиус вывода ионов;
- $\frac{A}{Z}$  старт - наименьшее отношение массового числа иона к его заряду;
- $B_0$  - значение магнитного поля в центре ускорителя;
- $\sigma$  - средний воздушный зазор;
- $\gamma^{\text{экс.}}$  - угол спиральности на конечном радиусе ускорителя  $r_{\text{экс.}}$ ;
- $Q$  - число оборотов;
- $W_{i,j,k}$  - угловая протяженность дуантов, секторов и долин циклотрона соответственно;
- $Q_z$  - частота аксиальных бетатронных колебаний частицы;
- $\Delta B / \Delta r$  - радиальный градиент магнитного поля, подлежащий компенсации железом;
- $X_{i,j,k}$  - геометрические параметры катушки возбуждения и ярма электромагнита циклотрона.

## 2.2. Параметры рассматриваемых уравнений.

- $\tau$  - текущий радиус;
- $\tau$  пол.- радиус полюса;
- $\langle\langle B \rangle\rangle$  - среднее магнитное поле  $T_e$  ;
- $\langle \mu \rangle$  - средняя магнитная проницаемость железа;
- $\langle B \rangle_i$  - среднее магнитное поле на радиусе  $\tau_i$  ;
- $\mu_i$  - относительная магнитная проницаемость области  $i$  ;
- $\bar{\mu}_{i,j}$  - средняя относительная магнитная проницаемость;
- $\mu$  макс.- максимальная магнитная проницаемость железа;
- $\varphi$  - азимутальный угол;
- $A$  - плоскость;
- $l$  - расстояние по оси  $z$  ;
- $\theta$  - магнитное напряжение на сопротивление  $R$  ;
- $d_e$  - расстояние между катушкой и медианной плоскостью;
- $\Phi$  - магнитный поток;
- $S_i$  - расстояние между медианной плоскостью и железом области  $i$  ;
- $\varphi_x, \varphi_z$  - угловая протяженность сектора и долины циклотрона.

## 3. Схема расчета магнитной структуры циклотрона

На первом этапе определяется радиальный профиль железных масс однородных в азимутальном направлении, обеспечивающий получение изохронного распределения магнитного поля по радиусу для ускорения ионов с наименьшим отношением  $\frac{A}{Z}$ , вычисляются расстояния от медианной плоскости до поверхности железа (рис.1).

На втором шаге рассчитываются геометрия секторов (рис.2) и азимутальные распределения магнитного поля с целью получения требуемого для фокусировки частиц значений флаттера магнитного поля.

На последней стадии расчетов, основываясь на параметрах выбранной магнитной структуры для ионов с  $\frac{A}{Z}$  старт, для уровней магнитного

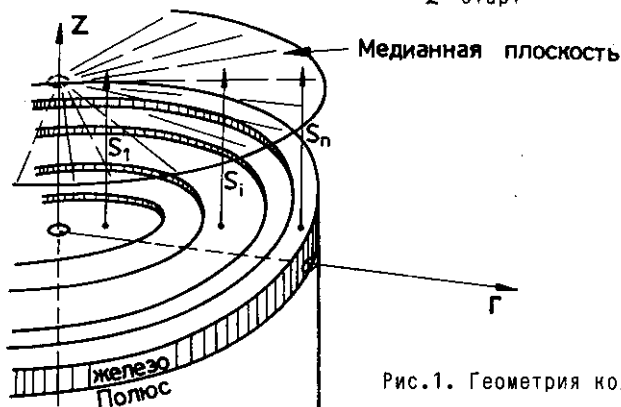


Рис.1. Геометрия кольцевых шимм.

поля больших  $B_0$  и  $\frac{A}{Z} > \frac{A}{Z_{\text{старт}}}$  определяют требуемые распределения магнитных полей в азимутальном и радиальном направлении  $B(r, \varphi)$ . Таким образом может быть получена "рабочая" линия настройки циклотрона " $B_0 - \frac{A}{Z}$ ", значения геометрических параметров структуры  $\delta$  и  $X_{i,j,k}$  в зависимости от тока возбуждения электромагнита циклотрона [5].

### 3.1. определение радиальной конфигурации железных шимм.

С этой целью полюс циклотрона разбивается на  $n$  concentрических колец (с плоскостями  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  (рис.3)) с толщиной большей  $l = 4 \cdot \delta$ , в предположении однородности магнитного потока в каждой области. Таким образом имеется система параллельных магнитных сопротивлений, на которых падает одинаковая разность магнитного напряжения.

$$\Delta\theta_1 = \Delta\theta_2 = \dots = \Delta\theta_n = \Delta\theta_{\text{весь}} \quad (1)$$

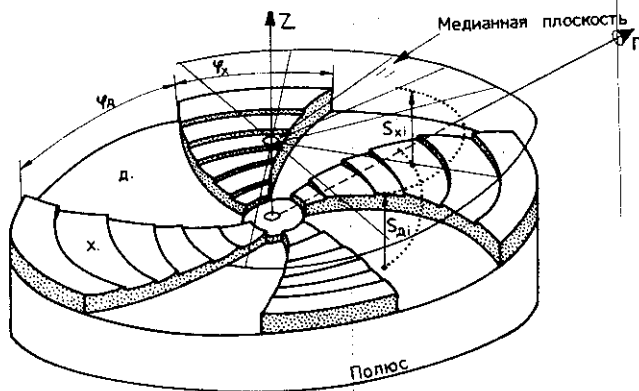


Рис. 2. Секторная структура изохронного циклотрона

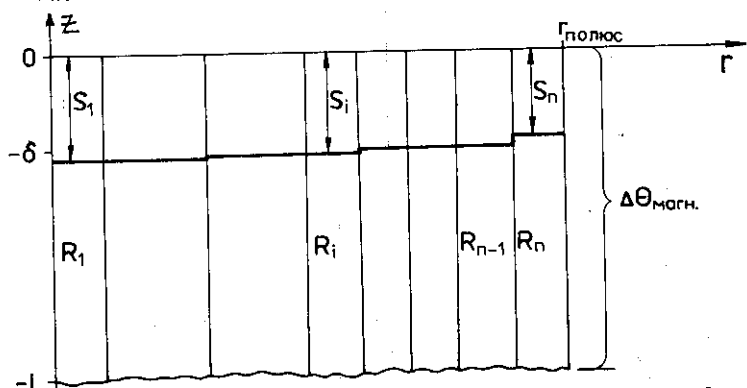


Рис. 3. Сечение магнитного зазора изохронного циклотрона ( $S_1 \dots S_n$  — расстояние ферромагнитных элементов от медианной плоскости,  $R_1 \dots R_n$  — магнитные сопротивления).

Далее рассчитывается радиальное распределение магнитного поля в медленной плоскости ускорителя. Для коррекции спада магнитного поля используется следующая зависимость радиального распределения от геометрии зазора циклотрона, полученная из опытных данных и феноменологических исследований (принципов):

$$B_0(\tau, \sigma, \kappa(B_0)) = B_0 \cdot \left( 1 - \frac{\tau^2 (15 \cdot d_e^2 - 3 (\tau_{\text{пол.}}^2 + d_e^2))}{4 \cdot (\tau_{\text{пол.}}^2 + d_e^2)} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left( 1 - e^{-\left(\frac{\tau_{\text{пол.}}}{\tau}\right)^4} \right) \cdot \left( 1 - e^{-\frac{d_e}{\sigma}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( e^{\left(\frac{\kappa(B_0)}{\kappa_{\text{макс.}}}\right)^2} - 1 \right)^{\frac{1}{m}}, \quad (2)$$

где:

- I - геометрический фактор катушек возбуждения ( $\tau > \tau_{\text{полюса}}$ ),
- II - радиальный фактор,
- III - фактор среднего воздушного зазора,
- IV - материальный фактор,  $\kappa = \kappa(B_0)$ .

Уравнение (2) описывает радиальные распределения магнитного поля в диапазоне от 1,5 до 2,1 Тл.

Результатом коррекции радиального распределения магнитного поля для изохронного ускорения ионов с выбранным отношением  $\frac{A}{Z}$  зависимость будет иметь вид

$$B(\tau, \sigma, \frac{A}{Z}, \kappa) = B(\tau, \frac{A}{Z}) + \left( B_0(\frac{A}{Z}) - B_0(\tau, \sigma, \kappa(B_0)) \right) \Big|_{\frac{A}{Z}}, \quad (3)$$

где  $B(\tau, \frac{A}{Z})$  - геометрическая зависимость изохронного поля от радиуса.

Вначале определяются значения  $B(\tau, \sigma, \frac{A}{Z}, \kappa)$  для  $\frac{A}{Z}_{\text{старт}}$ ,  $B_{0, \text{старт}}$  и  $\sigma$  и для каждого  $i$ -го кольца магнитный поток  $\Phi$ .

$$\Phi_i = A_i \cdot \langle B \rangle_i \quad (4)$$

Из закона Ома следует

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i = \sum_{i=1}^n A_i \cdot \langle B \rangle_i = \Phi_{\sigma}, \quad (4a)$$

$$\frac{A}{R_{\sigma}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}, \quad (4б)$$

$$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_i = \dots = \theta_n = \theta_{\sigma} \quad (4в)$$

$$\Phi_1 \cdot R_1 = \dots = \Phi_i \cdot R_i = \dots = \Phi_{\sigma} \cdot R_{\sigma}. \quad (4г)$$

Тогда

$$R_i = \frac{\Phi_{\sigma} \cdot R_{\sigma}}{\Phi_i} \quad (5)$$

$$R_{\sigma} = \frac{\Phi_i \cdot R_i}{\sum_{i=1}^n \Phi_i} \quad (6)$$

$$R_i = R_{\sigma} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \Phi_i}{\Phi_i} \quad (7)$$

Полное магнитное сопротивление кольца включает сопротивление воздушного зазора  $\sigma$  и железа  $l - \sigma$ .

$$R_{\sigma} = R_{\sigma, \text{возз. заз.}} + R_{\sigma, \text{желез.}} \quad (8)$$

или

$$R_{\sigma} = \frac{1}{A_{\text{пол.}}} \cdot \left( \sigma + \frac{l - \sigma}{\langle \mu \rangle} \right) \quad (9)$$

Средняя магнитная проницаемость железа кольца  $\langle \mu \rangle$  представлена на экспериментальной зависимости  $\langle \mu \rangle = f(\langle B \rangle)$ . Сопротивление  $i$ -го кольца равно

$$R_i = \frac{1}{A_i} \cdot \left( S_i + \frac{l - S_i}{\bar{\mu}_i} \right) \quad (10)$$

где  $\bar{\mu}_i$  - средняя магнитная проницаемость железа в области  $z = S_i \pm l$ . Значения  $\bar{\mu}_i$  определяются из выражений

$$\bar{\mu}_i = \frac{1}{l - S_i} \int_0^{l - S_i} \mu_i(z) dz \quad (11)$$

и

$$\mu_i(z) = \langle \mu \rangle - (\langle \mu \rangle - \mu_i) \cdot e^{-\frac{z \cdot \langle \mu \rangle}{\mu_i \cdot \tau_{\text{пол.}}}} \quad (12)$$

Величина  $\mu_i = f(\langle B_i \rangle)$  соответствует значению магнитного поля в медианной плоскости. Интегрированием уравнения (11) определяется средняя магнитная проницаемость в железе на плоскости  $A_i$  уровня  $l - S_i$

$$\bar{\mu}_i = \frac{1}{l - S_i} \left[ \langle \mu \rangle (l - S_i) + (\langle \mu \rangle - \mu_i) \frac{\mu_i \cdot \tau_{\text{пол.}}}{\langle \mu \rangle} \left( e^{-\frac{(l - S_i) \langle \mu \rangle}{\mu_i \cdot \tau_{\text{пол.}}}} - 1 \right) \right] \quad (13)$$

Из уравнения (7) и (10) следует, что расстояние  $S_i$  между медианной плоскостью и поверхностью железа зависит от  $\tau$  или ее дискретной величины  $\tau_i$

$$S_i + \frac{l - S_i}{\bar{\mu}_i} = \left( \sigma + \frac{l - \sigma}{\langle \mu \rangle} \right) \cdot \frac{\langle \langle B \rangle \rangle}{\langle B \rangle_i} \quad (14)$$

поскольку  $\bar{\mu}_i = f(S_i)$ , то, заменяя  $l - S_i = X_i$  в уравнениях (13) и (14), получим

$$X_i = \frac{X_i^2 \cdot \langle \mu \rangle}{X_i \cdot \langle \mu \rangle^2 + r_{\text{max}} \cdot \mu_i (\langle \mu \rangle - \mu_i) \left( e^{-\frac{X_i \cdot \langle \mu \rangle}{\langle \mu \rangle \cdot r_{\text{max}}}} - 1 \right)} + l - \frac{\langle \langle B \rangle \rangle}{\langle B \rangle} \cdot \left( \sigma + \frac{l - \sigma}{\langle \mu \rangle} \right) \quad (15)$$

С помощью метода аппроксимаций получим решение для  $X_i = l - S_i$  (для  $X_i - S_i \leq X_i < l$ ), где  $S_i$  - расстояние между медианной плоскостью и поверхностью железа (рис.1), однородного по азимуту циклотрона. Далее рассматривается секторная структура изохронного циклотрона.

### 3.2. Секторная структура.

В предыдущем разделе определен профиль железа, формирующий изохронную зависимость магнитного поля от радиуса для иона с отношением  $\frac{A}{Z}$  старт,  $B_{0, \text{старт}}$ . Для фокусировки заряженных частиц в аксиальном и радиальном направлениях ( $Q_r, Q_z$ ) необходимо выполнение определенных требований к величинам радиального градиента магнитного поля  $\frac{dB}{dr}$ , флаттеру  $F(r) = f(B_{cx}(r), B_{cz}(r))$  и углу спиральности  $\gamma(r)$  секторов. Для каждого кольца с индексом  $i$  зазор в холме  $S_{xi}$  и долине  $S_{gi}$  зависит от радиуса  $r$ . Здесь  $S_i \rightarrow \sigma_i$  для кольца  $i$ . Магнитные сопротивления в этом случае представляются выражением

$$R_{Si} = \frac{R_{gi} \cdot R_{xi}}{R_{gi} + R_{xi}} \quad , \quad (16)$$

$$R_{xi} = R_f \cdot \frac{\phi_f}{\phi_{xi}} = R_{Si} \cdot \frac{\phi_{Si}}{\phi_{xi}} \quad (17)$$

$$R_{gi} = R_f \cdot \frac{\phi_f}{\phi_{gi}} = R_{Si} \cdot \frac{\phi_{Si}}{\phi_{gi}} \quad (18)$$

Тогда магнитное сопротивление долины  $i$  будет

$$R_{gi} = \frac{R_{Si} \cdot \phi_{Si}}{\phi_{Si} - \phi_{xi}} \quad , \quad (19)$$

или

$$R_{gi} = \left( S_{gi} + \frac{l - S_{xi}}{\mu_{gi}} \right) \cdot \frac{\gamma_x + \gamma_g}{A_i \cdot \gamma_g} \quad (20)$$

$\overline{\mu_{gi}}$  - выражение для интегральной магнитной проницаемости в области  $S_{gi} \div l - S_{xi}$ , аналогично уравнению (11), с заменой  $X_i = l - S_{gi}$ ,

будет иметь вид

$$\bar{\mu}_{gi} = \frac{\langle \mu \rangle^2 X_i + \tau_{\text{max}} \cdot \mu_{gi} \cdot (\langle \mu \rangle - \mu_{gi}) \cdot \left( e^{-\frac{X_i \cdot \langle \mu \rangle}{\mu_{gi} \cdot \tau_{\text{max}}}} - 1 \right)}{\langle \mu \rangle \cdot X_i} \quad (21)$$

с  $\mu_{gi} = f(B_{gi})$  и  $\langle \mu \rangle = f(\langle B \rangle)$ ,

где  $l_g$  и  $l_x$  - азимутальная ширина долины и холма циклотрона.

Зависимость расстояния между медианной плоскостью и поверхностью железа в долине записывается в виде

$$X_i = \frac{X_i^2 \cdot \langle \mu \rangle}{X_i \cdot \langle \mu \rangle^2 + \tau_{\text{max}} \cdot \mu_{gi} \cdot (\langle \mu \rangle - \mu_{gi}) \cdot \left( e^{-\frac{X_i \cdot \langle \mu \rangle}{\tau_{\text{max}} \cdot \mu_{gi}}} - 1 \right)} + l - \frac{R_{Si} \cdot \phi_{Si} \cdot A_i \cdot l_g}{\phi_{Si} - \phi_{xi} \cdot l_g + l_x} \quad (22)$$

С помощью метода аппроксимаций определяется расстояние  $S_{gi} = l - X_i$  для начального условия  $0 \leq X_i < l$ . Для магнитного сопротивления в области холма ускорителя имеем

$$\begin{aligned} R_{xi} &= \left( S_{xi} + \frac{S_{xi} - S_{xi}}{\mu_{xi}} + \frac{l - S_{xi}}{\mu_{xi}} \right) \cdot \frac{l_x + l_g}{A_i \cdot l_x} \\ &= R_{Si} \cdot \frac{\phi_{Si}}{\phi_{xi}} \end{aligned} \quad (23)$$

с  $\mu_{xi} = f(B_{xi})$ .

Значение интегральной магнитной проницаемости  $\bar{\mu}_{ix}$  можно получить из уравнения (11). Для расстояний  $S_{xi}$  имеем следующее уравнение:

$$S_{xi} = \left( \frac{R_{Si} \cdot \phi_{Si} \cdot A_i \cdot l_x}{\phi_{xi} \cdot (l_x + l_g)} - \frac{S_{gi}}{\mu_{xi}} - \frac{l - S_{gi}}{\mu_{xi}} \right) \cdot \frac{\mu_{xi}}{(\mu_{xi} - 1)} \quad (24)$$

Таким образом производится выбор геометрии воздушного зазора циклот-



рона для минимального отношения  $\frac{A}{Z} = \frac{A}{Z}_{\text{старт}}$ , (рис.2).

### 3.3. определение рабочей линии $B_0 = f(A/Z)$ циклотрона.

Основываясь на выбранной геометрической структуре, определяем необходимую конфигурацию железа для ионов с  $\frac{A}{Z} > \frac{A}{Z}_{\text{старт}}$  и уровней среднего магнитного поля  $B$  большими  $B_0$ , с учетом насыщения железа и радиального спада магнитного поля. Выражения для сопротивления  $i$ -го слоя и падения магнитного напряжения на нем, аналогично уравнениям (4)...(4г), представляются в виде

$$\theta_{si,j} = \theta_{\sigma,j} \quad , \quad (25)$$

$$R_{si,j} \cdot \phi_{si,j} = R_{\sigma,j} \cdot \phi_{\sigma,j} \quad (25a)$$

$$R_{si}(B_j) \cdot \phi_{si}(B_j) = R_{\sigma}(\langle\langle B_j \rangle\rangle) \cdot \phi_{\sigma}(\langle\langle B_j \rangle\rangle) . \quad (25b)$$

где  $B_j = B_0 + B_E \cdot j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ ;  $B_E \ll B_0$ .

Для частиц с  $\frac{A}{Z} > \frac{A}{Z}_{\text{старт}}$  определяется магнитное поле, распределение которого по азимуту и радиусу удовлетворяет условиям устойчивого ускорения ионов. Вычисления начинаются с первого кольцевого слоя:

$i = 1$ ,  $B_1 = B_0 + B_E$ ,  $\langle\langle B \rangle\rangle_{j-1}$ . Уравнение (25b) имеет вид

$$\left( s_i + \frac{l - s_i}{\alpha_{ij}} \right) \cdot B_{ij} = \langle\langle B \rangle\rangle_j \cdot \left( \sigma + \frac{l - \sigma}{\langle\alpha \rangle_j} \right) , \quad (26)$$

Средняя магнитная проницаемость  $\alpha_{ij}$  аналогично уравнению (11) вычисляется из выражения

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{l - s_i} \cdot \left( \langle\alpha \rangle_j (l - s_i) + \frac{\text{Tran} \cdot \langle\alpha \rangle_j}{\langle\alpha \rangle_j} \cdot (\langle\alpha \rangle_j - \alpha_{ij}) \cdot \left( e^{-\frac{(l - s_i) \cdot \langle\alpha \rangle_j}{\alpha_{ij} \cdot \text{Tran}}} - 1 \right) \right) , \quad (27)$$

где  $\langle\alpha \rangle_j = f(\langle\langle B \rangle\rangle_j)$  и  $\alpha_{ij} = f(B_{ij})$ .

Продолжая расчеты полей для следующих колец, определяем геометрию железа, как в п.3.2., создающую требуемое распределение магнитного поля. Радиальное распределение среднего магнитного поля для ионов с  $\frac{A}{Z} > \frac{A}{Z}_{\text{старт}}$  сравнивается с изохронным, и в случае большого смещения по фазе ускоренного иона процесс вычисления повторяется с  $j = j + 1$ . Так для всех выбранных значений  $\frac{A}{Z}$  определяется соответствующий уровень среднего магнитного поля или линия настройки изохронного циклотрона  $B = f\left(\frac{A}{Z}\right)$ .

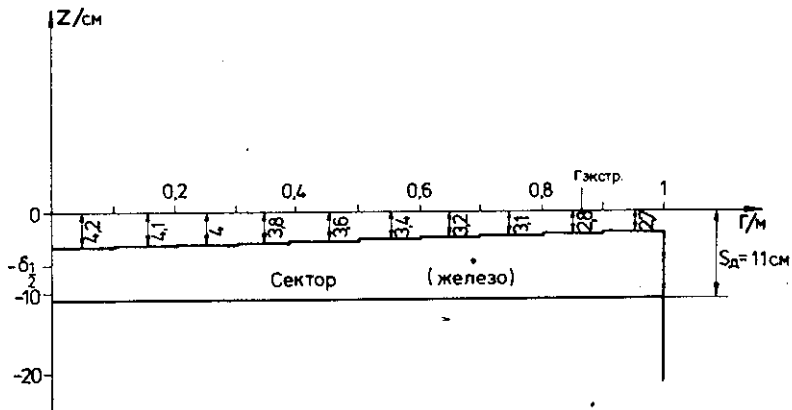


Рис.4. Сечение магнитного зазора циклотрона

у-200:  $\sigma_{\frac{1}{2}} = 6,6$  см,  $\frac{A}{Z \text{ старт}} = 2,$   
 $\gamma^* = 0,$   $\frac{S_{\frac{1}{2}}}{(S_{\text{ж}})} = 3,6.$

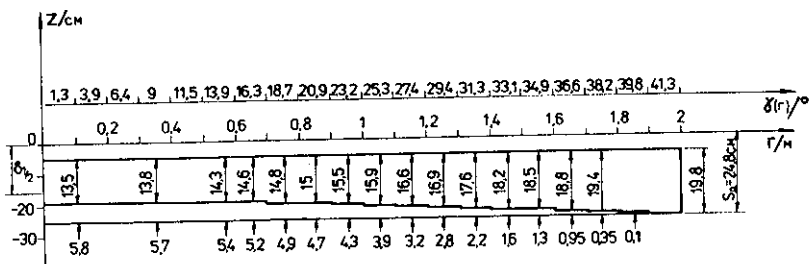


Рис.5. Сечение магнитного зазора циклотрона

у-400М:  $\sigma_{\frac{1}{2}} = 15,65$  см,  $\frac{A}{Z \text{ старт}} = 2,$   
 $B_{0, \text{ старт}} = 1,5$  Т,  $\frac{S_{\frac{1}{2}}}{(S_{\text{ж}})} = 3,6.$

#### 4. Примеры расчетов геометрий рабочих воздушных зазоров ряда циклотронов

Расчеты проводились на ЭВМ по составленной на Фортране вычислительной программе.

##### 4.1. Изохронный циклотрон У-200.

Для этого ускорителя  $\frac{A}{Z_{\text{старт}}} = 2$  (например,  $H_2^+$ ),  $B_0_{\text{старт}} = 1,7$  Тл.  $\delta = 0,013$  м,  $\gamma = 0^\circ$ ,  $r_{\text{пол}} = 1$  м. Результаты вычислений представленным выше методом магнитных сопротивлений (рис.4) с удовлетворительной точностью соответствуют проектной геометрии воздушного зазора /5/.

##### 4.2. Изохронный циклотрон У-400М.

По расчетам магнитных полей циклотрона определены радиальный и азимутальный профили секторов ускорителя (рис.5), отличающиеся от найденных ранее /6/ методом численного решения магнитоэстатического уравнения Пуассона /7/ менее чем на 5%.

#### 5. Заключение

В работе показано, что представленным здесь методом магнитных сопротивлений возможно с удовлетворительной точностью определить геометрию воздушного зазора изохронного циклотрона, формирующего требуемые распределения магнитных полей. Подобные вычисления могут служить для предварительной оценки, выбора начальной геометрии зазора циклотрона с последующими расчетами магнитной цепи ускорителя по уравнениям магнитоэстатике.

#### Литература

1. А.Г.Сливинская, А.В.Гордон. Постоянные магниты, Москва 1965.
2. K.Simonyi; Theoretische Elektrodynamik, Berlin 1980.
3. H.Melcher; Relativitätstheorie, Berlin 1974.
4. Дж.Ливингуд. Принципы работы циклических ускорителей, Изд-во иностранной литературы, М., 1963.
5. J.Franko, G.G.Gulbekjan u друг.; URÝCHĽOVAC ŤAŽKÝCH IÓNOV UK BRATISLAVA, JINR, LNR, Dubna, 1987.
6. С.И.Козлов и др. ОИЯИ, 9-83-125, Дубна, 1983.
7. Chr. Iselin; FORTRAN-PROGRAMM Solution of Poisson's or Laplace's Equation in Two-Dimensional Regions, CERN COMPUTER CENTRE 1984.

Рукопись поступила в издательский отдел  
30 октября 1990 года.