90-42

e
+

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р9-90-42

А.Г.Бонч-Осмоловский, К.А.Решетникова

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ РЕЗОНАНСНОГО ДОПЛЕРОВСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЗАРЯЖЕННОГО ПУЧКА СО ВСТРЕЧНОЙ Е-ВОЛНОЙ

Направлено в "Журнал технической физики"

1990

Проблема повышения темпа ускорения заряженных частиц в об-
ласти сверхвысоких энергий стимулирует поиски механизмов, при-
водящих к получению электромагнитных бегущих волн с высокой
напряженностью поля. Одним из таких механизмов может быть уси-
ление при доплеровском взаимодействии пучка с волной в замед-
ляющей структуре. Рост амплитуды поля волны, при наличии волны
накачки, ограничивается, как известно, нелинейными эффектами,
приводящими к насыщению, т.е. к захвату частиц полем волны и
выходу на плато поля [1]. Увеличение потенциала захвата при-
водит к росту напряженности электрического поля насыщения и
соответственно к росту эффективности системы как усилителя ко-
лебаний. При совпадении направлений движения пучка и волны
/попутная волна/ рост потенциала захвата возможен только за
счет разницы их скоростей и, очевидно, ограничен сверху. Это
ограничение снимается при взаимодействии пучка со встречной
волной, что позволяет существенно увеличить потенциал захвата
и тем самым продвинуться в область весьма высокой напряженнос-
ти поля [2].

В настоящей работе изучается численным способом резонансный
механизм взаимодействия электронного пучка со встречной бегу-
щей E-волной с учетом нелинейных эффектов.

Рассматриваем замагниченный релятивистский электронный пу-
чок в структуре, в которую поступает мощность от внешнего ис-
точника. Характеристикой источника является $j_{вн}$ -плотность то-
ка внешнего источника. Здесь используется аппарат, развитый
в [3], в несколько модифицированном виде.

Самосогласованная система уравнений пучка и поля имеет вид

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} + \Delta E_z = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(j_e + j_{вн}) + 4\pi\frac{\partial \rho_e}{\partial z}, \qquad /1а/$$

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \operatorname{div} j_e = 0, \qquad /1б/$$

$$\frac{d(\beta_e \gamma_e)}{dt} = \frac{eE_z}{m_0 c}, \qquad /1в/$$

где $v_e \equiv v_z = \beta_e c$, $j_e = \rho_e v_e = en_e v_e$, $\gamma_e = (1-\beta_e^2)^{-1/2}$ - скорость, ток, и релятивистский фактор пучка.

Переходим к переменной ψ : $\frac{\partial}{\partial t} = \omega \frac{\partial}{\partial \psi}$, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\omega}{v}\frac{\partial}{\partial \psi}$, где ω, $v = \beta c$ - частота и фазовая скорость встречной волны ($\psi = \omega t + \frac{\omega}{v} z - \psi_i$) , при этом считается, что $v = -v_z = \mathrm{Const}$, $\psi_i = \mathrm{Const}$ - "фаза" источника. Используем интегралы уравнений движения и непрерывности:

$$n_e = n_0 \frac{(\beta_0 + \beta)}{(\beta_e + \beta)}, \qquad \gamma_e' + \phi = \gamma_0' , \qquad /2/$$

где n_0 , β_0 - значения плотности и скорости пучка, при $\phi = 0$, $\gamma_0' = \gamma_0 \gamma (1 + \beta\beta_0)$, ϕ - потенциальная функция, связанная с E_z соотношением

$$E_z = -\frac{m_0 c^2 \omega}{e v \gamma} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} . \qquad /3/$$

Здесь $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$, $\beta = v/c$; $\gamma_e' = \gamma_e \gamma (1 + \beta_e \beta) = (1-\beta_e'^2)^{-1/2}$, $\beta_e' = \frac{\beta_e + \beta}{1 + \beta_e \beta}$ - скорость частицы в системе координат, связанной с волной. Заметим, что для попутного движения $\gamma_e' = \gamma_e \gamma (1 - \beta_e \beta)$.

Используя /2/ и /3/, найдем

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial \psi} = -\frac{\rho_0(\beta_0 + \beta)}{(\beta_e + \beta)^2}\frac{\partial \beta_e}{\partial \psi}, \qquad \frac{\partial \beta_e}{\partial \psi} = \frac{e \beta E_z}{m_0 c \omega \gamma_e^3 (\beta_e + \beta)} . \qquad /4/$$

Подставляя /4/ в /1а/, получим уравнение

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \psi^2} + L \cdot E + \delta(E) \cdot E = \frac{4\pi e}{m_0 c \omega^2} \beta^2 \gamma^2 \frac{\partial j_{вн}}{\partial \psi} , \qquad /5/$$

где

$$L = \frac{\Delta_\perp}{k_{\perp 0}^2} + \frac{\omega_e^2 \beta^2}{\omega^2 \gamma_0^3 (\beta + \beta_0)^2}, \qquad \Delta_\perp = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) .$$

$$k_{\perp 0}^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2} ,$$

$$\delta(E) = \frac{\omega_e^2}{\omega^2}\beta^2(\beta_0+\beta)\left[\frac{1}{\gamma_e^3(\beta_e+\beta)^3} - \frac{1}{\gamma_0^3(\beta_0+\beta)^3}\right],$$

$$\omega_e^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m_0}, \qquad E = \frac{eE_z}{m_0 c\omega}.$$

Пусть $j_{вн} = -j_0^{вн}\operatorname{Cos}\psi \cdot f_{вн}^{(1)}(r)$, где $f_{вн}^{(1)}(r)$ содержит одну из собственных функций (R_1) оператора L. Положим $E = \sum_n E_n(\psi)R_n(r)$.

Выделим из всего ряда одну гармонику, E_1-резонансную, редуцированная /с учетом тока пучка/ частота которой совпадает с частотой внешнего источника. В структуре

$$R_1(r) = \begin{matrix} J_0(k_\perp r) \\ I_0(k_\perp r) \end{matrix}$$, где $J_0(x)$, $I_0(x)$ – Функции Бесселя. Тогда из /5/ для $E_1(\psi)$ получим

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial\psi^2} + \Omega_0^2 E_1 + \delta(E_1)\cdot E_1 = +f_{вн}^{(0)}\operatorname{Sin}\psi, \qquad /6/$$

где

$$\Omega_0^2 = \mp\frac{k_\perp^2}{k_{\perp 0}^2} + \frac{\omega_e^2\beta^2}{\omega^2\gamma_0^3(\beta+\beta_0)^2}, \quad f_{вн}^{(0)} = \frac{4\pi e}{m_0 c\omega^2}\beta^2\gamma^2 j_{вн}^0.$$

Заметим, что, используя /3/ и соотношение $\gamma_e(\beta_e+\beta) = \frac{\beta_e'\gamma_e'}{\gamma} = \frac{\sqrt{(\gamma_0'-\phi)^2-1}}{\gamma}$, из /6/ легко получить нелинейное уравнение для функции ϕ, которое изучалось ранее [3]. Резонансное условие для гармоники E_1 следующее:

$$\Omega_0^2 = 1, \text{ или } \frac{\omega_e^2\beta^2}{\omega^2\gamma_0^3(\beta_0+\beta)^2} = S^2, \qquad /7/$$

где $S^2 = 1 \pm k_\perp^2/k_{\perp 0}^2$.

При условии /7/ и $\delta \ll 1$ из /6/ получаем линейное уравнение /индекс "1" опущен/:

$$\frac{d^2E}{d\psi^2} + E = +f_{вн}^{(0)}\operatorname{Sin}\psi. \qquad /8/$$

Решение его при начальном условии $\psi = 0$, $E = E_н$, $\frac{\partial E}{\partial \psi} = 0$ будет

$$E = \frac{-f_{вн}^{(0)}}{2} (\psi \cos \psi - \sin \psi) + E_н \cos \psi . \qquad /9/$$

Как видно из /9/, напряженность поля в системе /при $\delta \ll 1$ / растет линейно по $|\psi|$, ($\psi < 0$), что характерно для обычного резонансного возбуждения волновода. Заметим, что в отличие от возбуждения на неустойчивости, здесь накачка мощности от источника идет в устойчивую гармонику системы. Поле нарастает вдоль распространения волны. Величина резонансного тока, определяемого из условия /7/, будет

$$J_{рез} = J_A \left(\frac{\pi a}{\lambda_0 \beta}\right)^2 \gamma_0^3 (\beta + \beta_0)^2 S^2 , \qquad /10/$$

где $J_A = \frac{m_0 c^3}{e} = 17$ кА, a - радиус пучка. Величина S^2 определяется для конкретной структуры из граничных условий.

С ростом поля в системе начинают проявляться нелинейные эффекты, т.е. растет величина $\delta(E)$.

Для получения некоторых количественных зависимостей численно решалась следующая система уравнений.

$$\frac{d^2 E}{d\psi^2} + E + \delta(E) \cdot E = + f_{вн}^{(0)} \sin \psi , \qquad /11а/$$

$$\frac{d \beta_e}{d\psi} = \frac{\beta E}{\gamma_e^3 (\beta_e + \beta)} , \qquad /11б/$$

$$\frac{d\phi}{d\psi} = - \beta \gamma E , \qquad /11в/$$

Здесь $\delta(E) = q \left[\frac{1}{\beta_e'^3 \gamma_e'^3} - \frac{1}{\beta_0'^3 \gamma_0'^3} \right]$, $q = \frac{\omega_e^2}{\omega^2} \beta^2 \gamma^2 \frac{\beta_0' \gamma_0'}{\gamma_0}$ . .

Система уравнений /9/ решалась методом Рунге - Кутта на быстродействующей ЭВМ при следующих начальных условиях: $\psi = 0$, $E = E_н$, $\dot{E} = 0$, $\phi = 0$, $\beta_e = \beta_0$. Использовались значения постоянных: $\gamma_0 = 2$, $\gamma = 4$, $\lambda_0 = 10$ см, $J_0 = 10$ кА, $f_{вн}^{(0)} = 0,1$, $a = 1$ см, $J_0 = J_{рез}$.

Заметим, что из /10/ следует: $S^2 = 0,15$. Результаты расчета представлены на рис.1-4. На рис.1 показаны медленные коле-

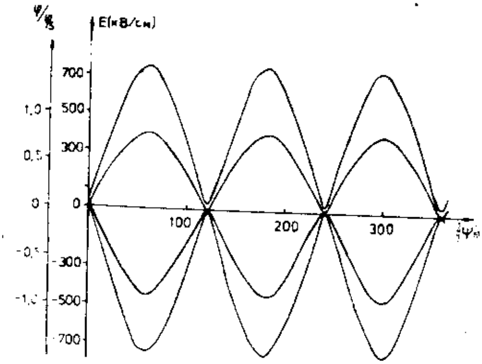

Рис.1. Зависимость огибающих напряженности поля и потенциала от $|\psi|$.

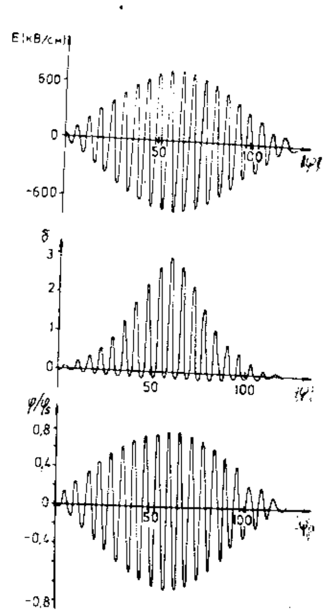

Рис.2. Зависимость E_z, δ, $\frac{\phi}{\phi_s}$, от $|\psi|$.

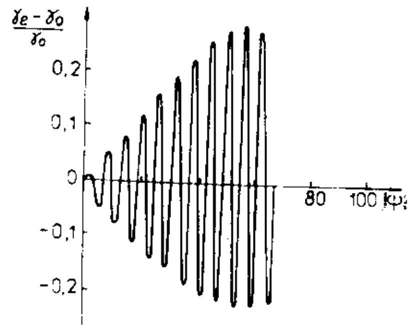

Рис.3. Изменение относительной энергии $\left(\frac{\gamma_e-\gamma_0}{\gamma_0}\right)$ как функции $|\psi|$.

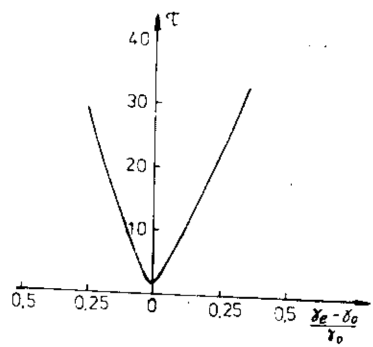

Рис.4. Зависимость времени нахождения частиц от их относительной энергии.

бания огибающих E и ϕ. Видно, что в начале поле растет линейно, выходит на некоторый максимум, затем амплитуда уменьшается. Максимум напряженности поля достигает 750 кВ/см при $\psi_m = 60$. Это значение близко к оценке по формуле: $E_z \simeq \frac{2\pi m_0 c^2}{e\lambda}$, $\lambda = \lambda_0 \beta / 2\gamma_0$ из /2/. При этом в численных расчетах $\phi_{MAX} \simeq 0{,}8\,\phi_s$, $\phi_s = (\gamma_0' - \gamma)$, т.е. $\beta_e = 0$. Амплитуда величины ϕ в области отрицательных значений больше, чем в области положительных ϕ. Заметим, что с ростом $f_{вн}^{(0)}$ амплитуда E_z растет, а время достижения максимума поля сокращается /так, при $f_{вн}^{(0)} = 0,15$, $E_m = 755$ кВ/см, $\psi_m = 54$/. С ростом тока пучка E_m также растет /при $J_0 = 30$ кА, $E_m = 780$ кВ/см, $\psi_m = 74$/.

На рис.2 показаны быстрые колебания с нарастающей амплитудой для величин E_z, $\frac{\phi}{\phi_s}$, δ. Видно, что, пока $|\delta| < 0,5$, рост амплитуды - линейный. Колебания δ существенно несимметричны. В области торможения δ значительно больше, чем в области ускорения. Это значит, что полупериод колебаний $T = \frac{1}{2\sqrt{1+\delta}}$ несимметричен. Там, где частицы тормозятся, величина T значительно меньше.

Несимметрия колебаний ϕ и δ приводит к тому, что величина $\left(\frac{\gamma_e - \gamma_0}{\gamma_0}\right)$ также несимметрична, что видно из рис.3. В ускоряющей части периода $\Delta\gamma_e$ больше, чем в тормозящей. Это связано с тем, что частица находится в ускоряющем поле дольше, чем в тормозящем. Это видно из рис.4, где показана зависимость времени нахождения τ частиц в различных частях поля как функции $\frac{\Delta\gamma_e}{\gamma_0} = \frac{\gamma_e - \gamma_0}{\gamma_0}$. Видно, что в области, где $\Delta_\gamma > 0$, время больше, чем там, где $\Delta\gamma_e < 0$.

Таким образом, взаимодействие заряженного пучка со встречной волной при выполнении резонансного условия в системе волна - пучок с окружением приводит к получению бегущих волн с весьма высокой напряженностью электрического поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рухадзе А.А. и др. Физика сильноточных релятивистских электронных пучков. М.: Атомиздат, 1980, с.165.
2. Бонч-Осмоловский А.Г. Препринт ОИЯИ, Р2-89-83, Дубна, 1989.
3. Бонч-Осмоловский А.Г., Решетникова К.А. ЖТФ, 1986, т.56, в.9, с.1664.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 января 1990 года.