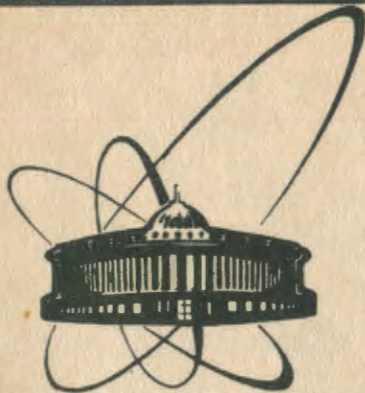


90 - 154



сообщения  
Объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
Дубна

A 62

P9-90-154

И.В.Амирханов, Е.П.Жидков, А.Н.Ильина\*,  
В.Д.Ильин\*, Б.Ю.Юшков\*

О НЕАДИАБАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ  
ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ  
В ПОЛЕ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ

\*Научно-исследовательский институт  
ядерной физики МГУ, Москва

1990

Рассматривается вопрос о неадиабатической модели движения частиц в дипольном поле. Используя понятие ведущей силовой линии, орбитально-го магнитного момента и конуса потерь, с помощью численного эксперимента найден аналог традиционных представлений адиабатической теории движения для захваченных частиц больших энергий.

Интерес к исследованию динамики нелинейной системы "частица - поле" обусловлен как общими проблемами теории движения частиц в электромагнитных полях, так и практическими потребностями некоторых разделов физики. В частности, это относится к теории ускорителей, магнитных ловушек, физике плазмы, космофизике и т.п. В сущности, здесь всюду опираются в той или иной мере на образы и представления теории движения отдельной заряженной частицы. В современной теории движения используются три взаимно дополняющих подхода. Два из них являются традиционными и связаны с теорией возмущения (дрейфовым приближением) и методом Штермера. Третий - "резонансный" подход - связан с динамическим хаосом в гамильтоновых системах  $\sqrt{I}$ . Общую физическую картину динамики частиц дает теория детерминированного хаоса. Наиболее наглядная интерпретация результатов теории движения получается в дрейфовом (адиабатическом) приближении. Однако полное решение задачи о движении возможно только с помощью численного эксперимента, включающего в себя аналитические и численные методы. Особенно это относится к высокоэнергичным частицам, для которых дрейфовое приближение неприменимо, а метод Штермера дает лишь частичное аналитическое решение.

В связи с этим наша задача состоит в том, чтобы на основе численного эксперимента попытаться найти достаточно простое (подобно дрейфовой теории) аналитическое описание поведения частиц в широком диапазоне энергий в магнитных ловушках дипольного типа. Для этого необходимо будет дополнительно рассмотреть также общеизвестные понятия, как орбитальный магнитный момент, ведущая силовая линия и конус потерь.

Исходные уравнения. Конкретно задача рассматривалась для протонов в стационарном земном дипольном магнитном поле. Движение частицы описывалось уравнением Лоренца в декартовой системе координат с центром в диполе

$$\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \frac{ec}{E} [\vec{v} \vec{B}], \quad \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{v}, \quad (1)$$

где

$$B_x = -3xz \frac{M}{R^3}, \quad B_y = -3yz \frac{M}{R^3}, \quad B_z = (R^2 - 3z^2) \frac{M}{R^3}, \quad (2)$$

$\vec{R}$  - радиус-вектор частицы,  $E$  - полная энергия протона,  $e$ ,  $v$  - заряд и скорость частицы,  $c$  - скорость света,  $M$  - дипольный момент. При изучении движения частицы в каждой точке  $\vec{R}$  строилась система координат, имеющая орты

$$\vec{e}_1 = \frac{[\vec{R} \vec{B}]}{|[\vec{R} \vec{B}]|}, \quad \vec{e}_2 = [\vec{e}_3 \vec{e}_1], \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}.$$

Вектор скорости задавался в виде

$$\vec{v} = v_{||} \vec{e}_3 + v_{\perp} (\vec{e}_1 \sin \varphi + \vec{e}_2 \cos \varphi), \quad (3)$$

$$v_{||} = (\vec{v} \vec{e}_3) = v_0 \cos \alpha, \quad v_{\perp} = v_0 \sin \alpha,$$

где  $v_{||}$  - компонента  $\vec{v} \parallel \vec{B}$ ,  $v_{\perp}$  - компонента  $\vec{v} \perp \vec{B}$ ,  $\varphi$  - фаза вращения частицы,  $v_0$  - модуль вектора скорости,  $\alpha$  -pitch-угол, - угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ .

Исследовались в основном захваченные частицы, т.е. частицы, имеющие финитные траектории. Аналитическое выражение для  $R$ , характеризующее такой режим движения, использовалось в виде

$$R = \frac{C_{st} \cos^2 \lambda}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \sin^2 \alpha \sin^2 \lambda}}, \quad (4)$$

где  $C_{st} = (e M / m v c)^{1/2}$  - штермеровская длина,  $m$  - масса частицы,  $\lambda$  - геомагнитная широта,  $\gamma > 1$  - постоянная Штермера<sup>2,3/</sup>. В качестве основного параметра системы частица-поле рассматривался параметр адиабатичности

$$\chi = \rho / R_c = 5,04 \cdot 10^{-5} \rho c L^2,$$

где  $\rho = v_0 / \omega_L$  - "полный" ларморовский радиус на экваторе при pitch-угле  $\alpha = \pi/2$ ,  $R_c$  - радиус кривизны силовой линии,  $\omega_L$  - ларморовская частота,  $\rho$  - импульс частицы, измеряемый в МэВ/с,  $L$  - экваториальное расстояние до силовой линии в радиусах Земли. Мы будем

характеризовать частицу параметром адиабатичности  $\chi_0$ , определяемым силовой линией  $L_0$ , на которой находится частица при  $\sin \alpha = 0$  или  $\sin \psi = 0$  (см. уравнение (4)). В этом случае параметр Штермера  $\gamma = Cst / 2R_3 L_0 = (0,945/\chi_0)^{1/2}$ , где  $R_3$  - радиус Земли.

Численное интегрирование уравнения (I) проводилось аналогично<sup>/4/</sup>.

### Магнитный момент и ведущая силовая линия

Магнитный момент  $\mu$  заряженной частицы является адиабатическим интегралом движения и в нулевом приближении по  $\chi$  для нерелятивистского случая  $\mu = \mu_0 = m v_0^2 \sin^2 \alpha / 2B = const$ . Отсюда следует общеизвестное соотношение

$$\frac{\sin^2 \alpha_1}{B_1} = \frac{\sin^2 \alpha_2}{B_2} = const, \quad (5)$$

позволяющее устанавливать простую связь между  $R, B$  на экваторе и в точке отражения<sup>/5/</sup>.

Исходя из уравнений (I)-(3) и результатов работы<sup>/6/</sup>, можно показать, что следующим приближением для первого адиабатического инварианта является выражение

$$\mu = \frac{m v_1^2}{2B} - \left[ \frac{m v_1^3}{2B \omega_\perp} \frac{\nabla B}{B} \vec{e}_1 + \frac{m v_1^2 v_{||}}{B \omega_\perp} \vec{e}_3 (\vec{e}_3 \nabla) \vec{e}_1 \right] \sin \psi - \quad (6)$$

$$- \frac{m v_{||} v_1^2}{4B \omega_\perp} \vec{e}_1 (\vec{e}_1 \nabla) \vec{e}_3 \sin 2\psi = \frac{e}{2c} \left\{ \frac{v_1^2}{\omega_\perp} - \frac{v_{||} (2v_{||}^2 + v_\perp^2)}{\omega_\perp^2 B^2} \right\}.$$

$$\cdot \left( B_z \frac{\partial B}{\partial z} - B_r \frac{\partial B}{\partial r} \right) \sin \psi + \frac{v_1^2 v_{||}}{2\omega_\perp^2} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{B_z}{B} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{B_r}{B} \right) \right] \sin 2\psi \Big\},$$

где использовались цилиндрические координаты  $r, \phi, z$ , в которых  $R^2 = r^2 + z^2$ ,  $B_z = B_z$ ,  $B_\phi = 0$ ,  $B_r = -3m\pi z / R^5$ . Все величины берутся в точке нахождения частицы. Из выражения (6) видно, что величина  $\mu/\mu_0$  имеет порядок  $\chi (\sim \rho \nabla B/B)$ . Для того, чтобы поправочный член в (6) был всюду меньше основного, необходимо соблюдение на экваторе условия  $\chi < \sin \alpha / 2$ . На рис.1 показано поведение величины  $m v_1^2 / 2B$  и уточненного инварианта (6) на траектории частицы. Видно, что в случае (6) колебания с ларморовской частотой практически исчезают. Это является иллюстрацией известного факта, когда стабильные колебания  $\mu$ , связанные с устойчивым движением частиц, качественно предсказываются членами более высокого порядка разложения магнитного момента в ряд по  $\chi$ <sup>/7/</sup>. Дальнейший учет поправок к  $\mu$  не имеет особого смысла в нашем случае из-за громоздкости вычислений.

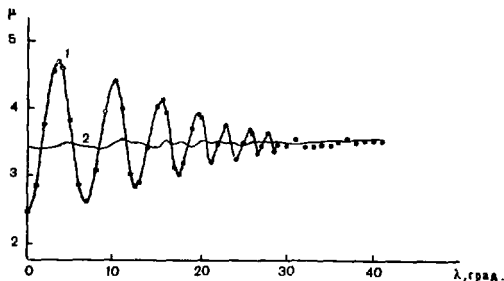


Рис. I. Поведение адиабатического инварианта  $\mu$  на траектории частицы при  $\chi \approx 0,0625$  ( $L = 2,0$ ;  $W = 50$  МэВ; экваториальное значение  $\alpha = 18^\circ$ ,  $\varphi = 270^\circ$ ). 1 - инвариант в нулевом приближении ( $\mu \sim \sin^2 \alpha / B$ ); 2 - уточненный инвариант (6).

Возможен другой, более простой подход. Согласно<sup>/5/</sup> величину  $\mu$  в лабораторной системе координат с учетом поперечного (магнитного) дрейфа можно записать в виде

$$\mu = \frac{m}{2B} |\vec{v}_\perp - \vec{v}_d|^2. \quad (7)$$

Раскрывая это выражение с использованием параметра  $\chi$ , получим

$$\mu = \frac{mv^2}{2B} \left[ \sin^2 \alpha - \chi \sin \alpha \sin \varphi (1 + \cos^2 \alpha) f(\lambda) + \frac{\chi^2}{4} (1 + \cos^2 \alpha)^2 f^2(\lambda) \right], \quad (8)$$

где

$$f(\lambda) = \frac{\cos^5 \lambda (1 + \sin^2 \lambda)}{(1 + 3 \sin^2 \lambda)^2}.$$

Выражение (8) всегда положительно и содержит член  $O(\chi^2)$ . Результаты численного счета показывают, что соотношение (5) справедливо в системе координат, вращающейся вокруг Земли со скоростью дрейфа частицы  $v_d$ . В неподвижной системе координат появляется дополнительная зависимость от  $\chi$  и  $\varphi$ .

В адиабатическом приближении заряженная частица вращается вокруг траектории ведущего центра, которая совпадает с силовой линией, характеризуемой  $L_0$ . При учете дрейфа частицы траектория ведущего центра уже не совпадает с  $L_0$  и это различие тем больше, чем больше  $v_d(\chi)$ . Для частиц, имеющих достаточно малые питч-углы, в качестве траектории ведущего центра можно взять такую траекторию, которая

соответствует максимальному проникновению частицы к центру диполя. Такая траектория приближается к диполю по  $L_0$  (см.(4)), на экваторе она будет характеризоваться значениями  $\alpha_0$ ,  $\varphi_0$  и  $L_1 = L_0 + \Delta L$ , при заданной величине  $\chi_0$ . Под максимальным проникновением частицы к центру диполя подразумевается область  $R \ll R_3$ , ограниченная возможностями СВМ. По нашим оценкам это соответствует  $R \equiv R_p \approx 0,1 R_3$ . В принципе ниже приведенные результаты сохраняются, если  $0,1 \leq R_p/R_3 \leq 0,6$ . Таким образом, предлагается использовать в качестве ведущей траектории не силовую линию  $R/R_3 = L_0 \cos^2 \lambda$ , а траекторию ведущего центра, характеризуемую на экваторе величинами  $L_1$ ,  $\alpha_0$ ,  $\varphi_0$ .

Вычислительный алгоритм определения траектории ведущего центра заключался в следующем. Бралась силовая линия, характеризуемая параметром  $L_0$ , на которой в точке  $R(L_0) = 0,1 R_3$  задавалась энергия частицы и питч-угол  $\alpha = 0 (\pi)$ . Затем, при проведении "обратного" интегрирования (I), находилось экваториальное положение траектории  $L_1$  и  $\alpha_0, \varphi_0$ . Вычисления показывают, что связь между  $L_1$  и  $L_0$  аппроксимируется выражением

$$L_1 \approx L_0 (1 + \chi_0^2/3), \quad \chi \leq 1,5. \quad (9)$$

Соответствующие значения  $\alpha_0$  и  $\varphi_0$  показаны на рис. 2.

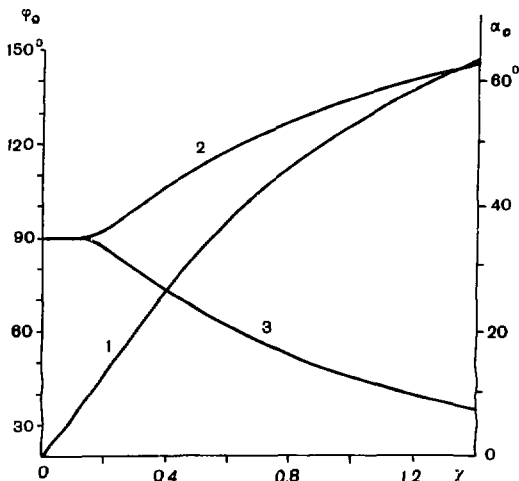


Рис.2. Зависимость  $\alpha_0$  и  $\varphi_0$  от  $\chi$ . 1 - функция  $\alpha_0(\chi)$ ; 2, 3 -  $\varphi_0(\chi)$  для южного и северного полушариев.

Отличительной особенностью движения частицы по такой траектории является отсутствие вращения вокруг силовых линий, поскольку скорость ларморовского вращения  $v_l$  в этом случае совпадает со скоростью дрейфа  $v_d$ . Из условия  $v_l - v_d = 0$  можно получить соотношение

$$\sin \alpha_0 \approx \frac{\sqrt{1+2X_0^2} - 1}{X_0}. \quad (10)$$

При  $X_0 \ll 1$  выражение (10) принимает вид  $\sin \alpha_0 \approx X_0$ . С точностью  $\lesssim 10\%$  формула (10) соответствует кривой I на рис.2. Следует также отметить, что фаза  $\varphi_0$  практически не меняется при  $0 \leq X_0 \leq 0,13$  и составляет  $\varphi_0 = \pi/2$ .

Рассмотрим теперь движение частицы от экватора до точки отражения с начальными условиями, отличающимися от  $\alpha_0$  и  $\varphi_0$ . Помимо питч-угла  $\alpha$  будем также вычислять угол  $\alpha^*$  - угол между вектором скорости частицы и касательной к траектории ведущего центра при одинаковой текущей широте  $\lambda$ . Как показывает траекторный счет для  $0,1 < X_0 \leq 0,6$  и  $\alpha \leq 20^\circ$ , магнитный момент  $\mu \sim \sin^2 \alpha / B$  сильно меняется, однако величина  $\mu^* \sim \sin^2 \alpha^* / B$  оказывается практически постоянной на всей траектории. Следовательно, траектория ведущего центра играет роль ведущей силовой линии, как в адиабатической теории, а угол  $\alpha^*$  является аналогом питч-угла. Здесь мы ограничились движением частицы в одном полушарии, когда она инжектируется с экватора. Посмотрим, что может измениться, если частица движется между точками отражения, т.е. переходит из одного полушария в другое.

Траекторию частицы между двумя сопряженными точками отражения можно представить себе как траекторию от первой точки отражения до экватора (от диполя к экватору) и от экватора до второй точки отражения (от экватора к диполю). Что касается участка траектории от экватора к диполю, то он нами уже исследован. Движение же от точки отражения до экватора с точки зрения траекторного счета равносильно "обратному" интегрированию от экватора к диполю. Математически это означает замену в уравнении (I)  $e \rightarrow -e$  и  $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$ . Сами уравнения (I) от этого не изменяются, но начальные условия, а вместе с ними и задача Коши становится другой. Отсюда по определению следует, что в общем случае траектории в обоих полушариях неадекватны. Действительно, частица, движущаяся по этой траектории от диполя к экватору, пересекая его, может затем в зависимости от энергии (или  $X$ ) отразиться на любой широте или вообще уйти на бесконечность. Чтобы "заставить" частицу двигаться в другом полушарии по траектории максимального проникновения к диполю (т.е. по траектории ведущего центра) нужно на экваторе изменить ее параметры. Если она пришла на экватор с параметрами  $\alpha_0$ ,  $\varphi_0$ , то при уходе в другое полушарие необходимо изменить

только фазу  $\varphi_0 \rightarrow \pi - \varphi_0$ . Таким образом, наша система отчета, составленная по сути из двух траекторий ведущего центра, имеет на экваторе излом. В сферической системе координат величина излома характеризуется выражением <sup>3/3</sup>:

$$\sin \vartheta/2 = \sin \alpha_0 \sin \delta, \quad (II)$$

где  $\vartheta$  - угловое расстояние между точками  $\varphi_{01}, \alpha$  и  $\varphi_{02}, \alpha_0$ ,  $\delta = \pi/2 - \varphi_{01} = \varphi_{02} - \pi/2$ , индексы "1" и "2" относятся к верхнему и нижнему полушариям. Из формулы (II) и рис.2 видно, что при  $\alpha_0 \approx 0,13$  фазы  $\varphi_{01}$  и  $\varphi_{02} = \pi - \varphi_{01}$  стремятся к  $\pi/2$  и  $\vartheta \rightarrow 0$ .

Именно этим обстоятельством объясняются особенности рис.3, на котором показано поведение  $\mu$  и  $\mu^*$  на трех траекториях. Начальные условия на экваторе задавались таким образом, чтобы параметр Штермера  $\gamma \equiv const$ . Как видно из рис.3, изменения  $\mu$  носят естественный непрерывный характер. Что касается  $\mu^*$ , то эта величина испытывает

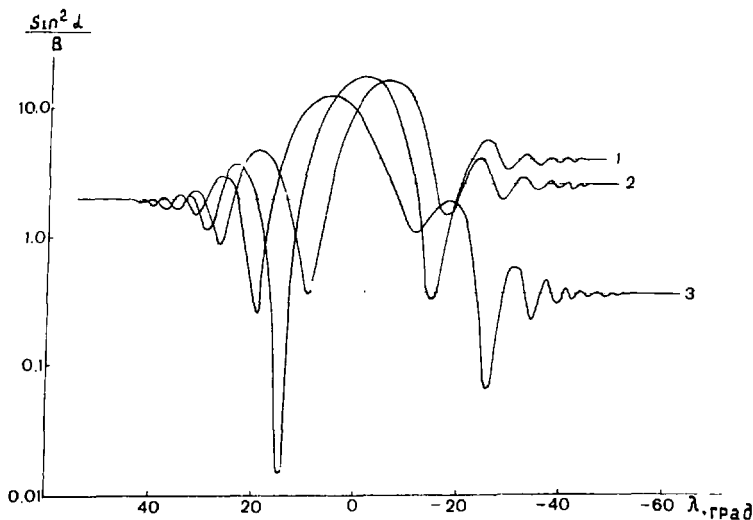


Рис.3. Поведение  $\mu$  и  $\mu^*$  при движении частицы между двумя точками отражения для  $W = 200$  МэВ;  $L \approx 3$  ( $\alpha \approx 0,13$ ).  
 1 - на экваторе  $\alpha \approx 20^\circ$ ;  $\varphi \approx 50,5^\circ$ ; 2 -  $\alpha = 26^\circ$ ;  $\varphi \approx 82,5^\circ$ ;  
 3 -  $\alpha = 30^\circ$ ;  $\varphi = 108^\circ$ . Траектории характеризуются постоянной Штермера  $\gamma = const$ .



на экваторе скачок (разрыв)  $\Delta\mu^*$ . При этом величина скачка совпадает с точностью  $\sim 10\%$  с теоретической оценкой для  $\Delta\mu/8$ .

Основной вопрос теперь заключается в определении квази-питч-угла  $\alpha^*$ . Отметим, что для левой части рис.3 связь между точкой отражения  $R_m$  и экваториальным углом  $\alpha^*$  такая же, как и в адиабатической теории:

$$\sin \alpha^* = \left[ \left( 4 \frac{R}{R_m} - 3 \right) \left( \frac{R}{R_m} \right)^5 \right]^{-1/4}. \quad (12)$$

В данном случае значение  $R_m$  было выбрано равным  $R_3$ , поэтому вместо (12) следует записать

$$\sin \alpha^* = \left[ (4L - 3) L^5 \right]^{-1/4}. \quad (13)$$

Для правой части рис.3 имеем  $\alpha^{*'} = \alpha^* + \Delta\alpha^*$ , где  $\Delta\alpha^* = \nu$  (см. уравнение (II)),  $\alpha^*$  - вычисляется в системе координат, в которой скорость дрейфа  $v_d = 0$  (см. (7), (8)). Величину  $\Delta\alpha^*$  можно оценить также с помощью формулы  $\Delta\alpha^* \approx \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha^* \Delta\mu/\mu$ , где выражение для  $\Delta\mu/\mu$  приведено в работе<sup>4/</sup>.

Экваториальный конус потерь. Результаты траекторного счета<sup>4/</sup> показали, что и при относительно малых значениях параметра адиабатичности  $\chi$  наблюдается существенное отличие от общеизвестной формулы  $\sin \alpha_c = \left[ (4L - 3) L^5 \right]^{-1/4}$ , где  $\alpha_c$  - критическое значение экваториального питч-угла. Возникает зависимость  $\alpha_c$  от фазы  $\varphi$ , что видно на примере рис. 4 для  $\chi \approx 0,13$ . Существование этой зависимости следует из уравнений (6)-(8) и связано с тем, что направление оси конуса потерь изменяется в зависимости от  $\chi$ . При этом угол раствора конуса потерь не зависит от энергии частицы и определяется, как

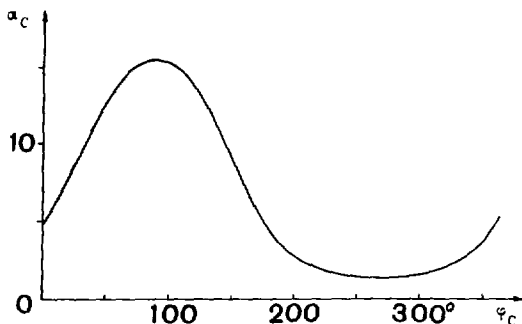


Рис.4. Положение и форма экваториального конуса потерь для  $L = 2,9$ ;  $W = 50$  МэВ ( $\chi \approx 0,13$ ).

и в адиабатическом случае. Смещение оси конуса от вектора  $\vec{B}$  происходит в сторону вращения и дрейфа частицы, как это показано в <sup>19/</sup>. Величина этого отклонения определяется углами  $\alpha_0$  и  $\varphi_0$  (см. рис. 2). Некоторое отличие кривой 3 рис. 2 данной работы от соответствующей кривой 2 рис. 5 <sup>19/</sup> связано с недостаточной точностью метода определения функции  $\varphi_0(x)$  при малых  $x$  в работе <sup>19/</sup>.

Указанный эффект беспороговый и имеет место при сколь угодно малом значении  $x$ , поскольку связан он с переходом от подвижной (вращающейся) системы координат к неподвижной (см. (7)). Окончательное выражение для формы стока частиц (конуса потерь) в плоскости  $(\alpha, \varphi)$  можно записать в виде <sup>19/</sup>:

(14)

$$\cos \alpha_c = \cos \alpha_c^* \cos \alpha_0 - \sin \alpha_c^* \sin \alpha_0 \cos \phi,$$

$$\sin(\varphi_c - \varphi_0) = \frac{\sin \alpha_c^* \sin \phi}{\sin \alpha_c},$$

$$\sin \alpha_c^* = [(4L - 3)L^5]^{-1/4},$$

$$0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

При  $x \rightarrow 0$  уравнения (15) переходят в общеизвестное выражение для конуса потерь в адиабатической теории.

#### Заключение

Таким образом, традиционную адиабатическую модель движения можно обобщить на явно неадиабатический случай. Для этого нужно заменить ведущую силовую линию на траекторию ведущего центра, ось конуса потерь на новую ось в соответствии с <sup>19/</sup> и перейти от  $\mu$  к  $\mu^*$ . Эта модель позволяет делать краткосрочные прогнозы неадиабатической динамики частиц (примерно в течение одного периода продольных колебаний). Результаты численных расчетов показывают, что указанная модель является достаточно строгой при экваториальных пичч-углах  $\alpha \leq 50^\circ$ . Область значений  $50^\circ \leq \alpha \leq 80^\circ$  требует дополнительных специальных численных исследований. Что касается приэкваториальной области  $\alpha \geq 80^\circ$ , то здесь можно обойтись одним выражением (4), которое в данном случае упрощается к виду

$$R \approx \frac{C_{st}}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \sin^2 \varphi}} = R_3 L_0 \frac{\sqrt{3/x}}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \sin^2 \varphi}}. \quad (15)$$

Авторы выражают благодарность С.Н. Кузнецову за полезные обсуждения основных результатов.

### Литература

1. Чириков Б.В. Динамика частиц в магнитных ловушках. Вопросы теории плазмы. М: Энергоатомиздат, 1984. Вып.13, с.3.
2. Дорман Л.И., Смирнов В.С., Тясто М.И. Космические лучи в магнитном поле Земли. М: Наука, 1971, гл.П.
3. Амирханов И.В., Бидков Е.П., Ильин В.Д., Ильина А.Н., Кузнецов С.Н., Юшков Б.Ю. Неадиабатическое движение энергичных протонов в геомагнитном поле. Известия АН СССР. Серия физ. 1988. Т.53, № 12, с.2422.
4. Амирханов И.В., Бидков Е.П., Ильина А.Н., Ильин В.Д. О некоторых особенностях движения высокоэнергетичных протонов радиационных поясов Земли. Космич. исслед. 1988. Т.26, № 2, с.263.
5. Редерер Х. Динамика радиации, захваченной геомагнитным полем. М: Мир, 1972. Гл. I-III.
6. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971, с.56.
7. Нортроп Т. Адиабатическая теория движения заряженных частиц. М.: Атомиздат, 1967.
8. Ильин В.Д., Ильина А.Н. О механизме неадиабатических потерь в дипольной ловушке. ЖЭТФ, 1978, т.75, вып.2(8), с.518.
9. Амирханов И.В. и др. Конфигурация стока для высокоэнергетичных заряженных частиц в магнитном поле диполя. СИИИ, РИ-87-377, Дубна, 1987.

Рукопись поступила в издательский отдел  
1 марта 1990 года.