сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р9-90-153

И.В.Амирханов, Е.П.Жидков, А.Н.Ильина*,
В.Д.Ильин*

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТРАЕКТОРИЙ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО СОЛЕНОИДА

*Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ, Москва

1990

Задача численного исследования траекторий релятивистских электронов в магнитном поле возникает в связи с возможностью использования сверхпроводящего соленоида в качестве спектрометра, разделяющего частицы по их энергиям, в экспериментах с искусственной магнитосферой /1/. Использование сверхпроводников значительно усиливает магнитные свойства соленоида и тем самым повышает его спектрометрические возможности. В частности, оказывается возможным измерение энергетического спектра релятивистских электронов с $E_{max} \sim 10$ МэВ. Получение поля с помощью системы токов удобно в смысле регулирования величины и формы распределения магнитного поля. Выбор конфигурации тока связан с общей оптимизацией задачи, в которую входят вопросы конструирования и вычислений жесткостей обрезания /минимальных энергий частиц, при которых они могут достигнуть поверхности магнита/ /2/. С точки зрения удобств определения жесткостей обрезания наиболее подходящей является катушка /соленоид/ сферической формы. При этом ток /число ампервитков/ в такой катушке должен быть неоднороден и подчиняться закону $I \sim \cos\theta$, где θ - полярное расстояние, начало координат находится в центре катушки, ось Z перпендикулярна плоскостям витков. В этом случае магнитное поле вне сферы всюду будет дипольным и, следовательно, вычисление жесткостей обрезания можно проводить общеизвестным аналитическим способом /2/. В нашем случае источником поля является осесимметричная кольцевая катушка /сверхпроводящий соленоид/ с дискретным распределением витков по Z. Размеры витков и их расположение в катушке показаны на рис.1.

Задача состоит в том, чтобы вычислить распределение поля и затем с помощью численного интегрирования уравнений движения найти жесткости обрезания.

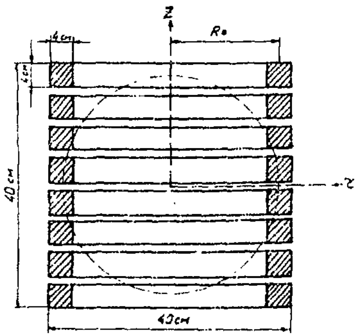


Рис.1. Источник магнитного поля - сверхпроводник /сечением 4x4 см/, свернутый в спираль /соленоид/. Соленоид представлен в виде отдельных витков, образующих цилиндр, у которого высота равна диаметру.

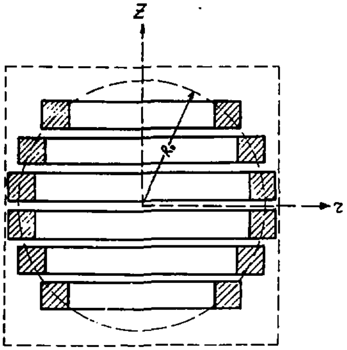


Рис.2. Переход от цилиндрической формы источника магнитного поля /рис.1/ к сферической.

Для сравнения будет показано поле сферической катушки, которая получается из исходной цилиндрической путем соответствующего уменьшения диаметра витков /см. рис.2/. Ток в витках в этом случае предполагается пропорциональным $\cos\theta$.

ПОЛЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КАТУШКИ С ДИСКРЕТНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ТОКА

Распределение магнитного поля катушки, показанной на рис.1, может быть найдено из соответствующих выражений для тонкого кольцевого витка с помощью интегрирования по r и Z. Методы расчета магнитного поля, создаваемого токами, описаны во многих работах /см., например,[3,4] /. Для кругового тока магнитное поле использовалось в виде

$$H_z = \frac{0{,}21}{\sqrt{(r+R_0)^2+Z^2}}\left[K(k_0)+\frac{R_0^2-r^2-Z^2}{(R_0-r)^2+Z^2}E(k_0)\right], \qquad /1/$$

$$H_r = \frac{0{,}2\,IZ}{r\sqrt{(r+R_0)^2+Z^2}}\left[-K(k_0)+\frac{R_0^2+r^2+Z^2}{(R_0-r)^2+Z^2}E(k_0)\right], \qquad /2/$$

где H - поле в эрстедах, I - ток в амперах, R_0 - радиус витка в см, $K(k_0)$, $E(k_0)$ - полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем k_0,

$$k_0 = 4rR_0\,/[r+R_0)^2+Z^2],$$

значения $K(k_0)$ и $E(k_0)$ вычислялись по достаточно точным формулам [5]:

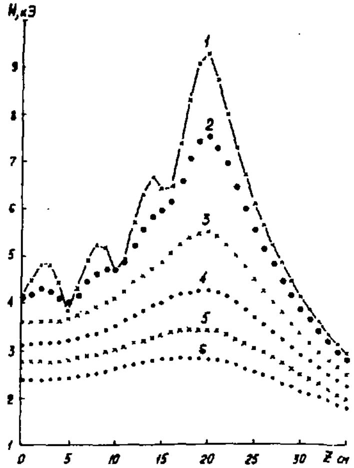


Рис.3. Зависимость напряженности H магнитного поля соленоида /рис.1/ от z и r : 1 – r = = 21 см; 2 – r = 22 см; 3 – r = = 24 см; 4 – r = 26 см; 5 – r = = 28 см; 6 – r = 30 см.

$$K(k_0) = 1{,}3863 + 0{,}112\,\xi + 0{,}0725\,\xi^2 - (0{,}5 + 0{,}1213\,\xi + 0{,}0289\,\xi^2)\ln\xi ;$$

$$E(k_0) = 1.0 + 0{,}463\,\xi + 0{,}1078\,\xi^2 - (0{,}2453\,\xi + 0{,}0412\,\xi^2)\ln\xi ;$$

где $\xi = 1 - k_0^2$.

Поле реального витка с током находилось путем простого алгебраического суммирования полей отдельных "элементарных витков" /тонких кольцевых витков/ для различных значений R_0. При этом предполагалось, что плотность тока в реальном витке однородна. Расчеты показывают, что уже при числе "элементарных витков", равном 10x10 /10 витков по горизонтали и 10 – по вертикали/, результаты оказываются практически предельными.

Расчетные распределения H_z и H_r для всей катушки представлены на рис.3. Все вычисления проводились на ЭВМ CDC-6500. Значения функции $H(r,z)$ вычислены для катушки с током, имеющей магнитный момент $M = 10^5$ А·м^2 = 10^8 Э·см^3. Если учесть, что эффективный радиус витка R_0 = 18 см / см. рис.1/, то это дает ток в катушке ~$1{,}23\cdot10^5$ А. Как видно из рис.3, поле катушки существенно отличается от поля диполя на расстояниях ≤ 60 см. В медианной /экваториальной/ плоскости это различие можно определить из формулы

$$H_k / H_g = 1 - 1{,}985\,\exp(-1{,}13\,\xi)\,, \qquad \xi = r/20\,, \quad r \geq 20\ \text{см}, \qquad /3/$$

где H_k – поле катушки, H_g – поле эквивалентного диполя. Погрешность формулы /3/ не превышает 1,5%. При $r > 3R_0$ поле H_k становится практически дипольным. Силовые линии и направление поля в некоторых точках показаны на рис.4 и 5.

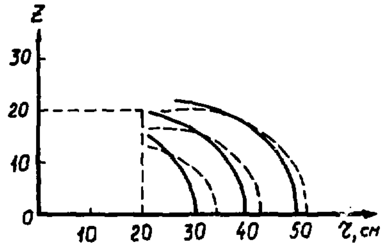
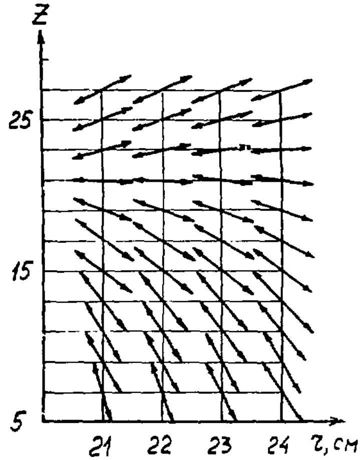


Рис.4. Силовые линии соленоида /сплошные кривые/ и эквивалентного диполя /пунктирные кривые/.

Рис.5. Направление поля в области предполагаемого местонахождения детектора.



РАСЧЕТ ЖЕСТКОСТЕЙ ОБРЕЗАНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В ПОЛЕ КАТУШКИ

В сущности, речь идет об определении наименьшей энергии электрона E_{min} , при которой он мог бы достичь заданной точки. Наибольший интерес, естественно, представляет область вблизи катушки, где поле максимально и сильно отличается от дипольного. Решение такой задачи возможно только с помощью численного интегрирования уравнений движения частицы.

Движение частицы в магнитном поле описывалось системой уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= a\,[\,v_y H_z - v_z H_y\,], \\ \ddot{y} &= a\,[\,v_z H_x - v_x H_z\,], \qquad\qquad /4/ \\ \ddot{z} &= a\,[\,v_x H_y - v_y H_x\,], \end{aligned}$$

с начальными условиями

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}_{t=0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ z_0 \\ v_{0_x}\ (\alpha, \phi) \\ v_{0_y}\ (\alpha, \phi) \\ v_{0_z}\ (\alpha, \phi) \end{pmatrix}, \qquad /5/$$

где $a = ec/E$, е - заряд электрона, E - его полная энергия, с - скорость света, $H_x = H_r x/r'$, $H_y = yH_r/r'$, $r' = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, v_0 - модуль вектора скорости, α - питч-угол - угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{H}$, ϕ - фаза частицы - угол между меридиональной плоскостью, в которой находится частица, и $v_\perp$ /перпендикулярной компонентой вектора скорости к полю H/, отсчитываемый по ларморовскому вращению электрона. В системе координат, связанной с частицей и имеющей орты

$$\vec{e}_1 = \frac{[\vec{r}'\vec{H}]}{|[\vec{r}'\vec{H}]|}, \quad \vec{e}_2 = [\vec{e}_3\vec{e}_1], \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{H}}{|\vec{H}|},$$

вектор скорости имеет вид

$$\vec{v} = v_{||}\vec{e}_3 + v_\perp(\vec{e}_1 \operatorname{Sin}\phi + \vec{e}_2 \operatorname{Cos}\phi),$$

$$v_{||} = (\vec{v}\vec{e}_3) = v_0 \operatorname{Cos}\alpha, v_\perp = v_0 \operatorname{Sin}\alpha.$$

Численные расчеты задачи Коши /4/ и /5/ проводились методом Рунге - Кутта 4-го порядка. Жесткости образования находились путем "обратного" интегрирования системы /4/ от точек, соответствующих предполагаемым расположениям детекторов. В качестве таковых брались точки с координатами $x_0 \geq 21$ см; $0 \leq z_0 \leq 30$ см. В силу аксиальной симметрии задачи координата y_0 полагалась равной нулю. Критерием того, что частица, двигаясь из "бесконечности", способна достичь заданной точки вблизи катушки, являлся уход частицы при "обратном" интегрировании на расстояние $r > 10^3$ см.

Для обеспечения наименьших затрат машинного времени полезен следующий алгоритм использования компонент поля H в уравнениях /4/. На основе итогов расчета поля по формулам /1/ и /2/ составляется таблица значений $H(r,z)$ с некоторым шагом /например, в 1 см/ до $r = 60$ см. Промежуточные значения $H(r,z)$ находятся с помощью линейного интерполирования. При $r \geq 60$ см поле $H(r,z)$ описывается простыми общеизвестными формулами для поля магнитного диполя.

Некоторые значения функции $E_{min}(x_0, z_0, \alpha, \phi)$, найденные с помощью численного интегрирования системы дифференциальных уравнений /4/, представлены в таблице. Для сравнения в таблице приведены данные для поля диполя с тем же магнитным моментом М. Для диполя аналитическое выражение для жесткости образования можно, исходя из /2/, представить в виде

Таблица

$x_0 = 21$ см

z, см	ϕ°	α°	E_{min}, МэВ	
2	0	80	~10–11	/16/
		60	~10–11	/16/
	90	80	~27–28	/48/
		60	~24–25	/34,2/
	270	80	~5–10	/11/
		60	~5–10	/11,4/
6	0	80	~10	/12,9/
		60	~10	/12,9/
	90	80	~25	/28,9/
		60	~25	/24/
18	0	80	~4	/2,8/
24	0	80	<3	/0,97/
		60	<3	/0,97/
	90	80	<3	/1,19/
		60	<3	/1,16/
$x_0 = 24$ см				
2	0	80	~5–10	/12,3/
	90		~20–25	/37,5/
	270		~5	/8,3/

В скобках приведены значения E_{min} для эквивалентного диполя, вычисленные по формуле /6/.

$$R_{mc} = \frac{pc}{e} = \frac{3 \cdot 10^{-4} M}{r'^2} \frac{\cos^4 \lambda}{(1 + \sqrt{1 - \sin\alpha \sin\phi \cos^3\lambda}\,)^2} \text{ МВ}, \quad /6/$$

где pc измеряется в МэВ, M – Э·см^3, r′ – см, λ – широта /tg λ = $= z_0/x_0$). Отсюда следует, что в дипольном поле для электронов

$$E_{min} = [-0{,}511 + \sqrt{0{,}261 + (R_{mc}e)^2}\ ]\ \text{МэВ},$$

где численное значение величины $R_{mc}e$ совпадает с R_{mc}, определяемым по формуле /6/ /1 МВ.е = 1 МэВ/. На экваторе для вертикально падающих электронов / $\lambda = 0$; $\alpha = \pi/2$; $\phi = 0$/ величина $R_{mc} = 7{,}5 \cdot 10^3\ r^{-2}$ МВ.

ПОЛЕ СФЕРИЧЕСКОЙ КАТУШКИ

Переход от цилиндрической конфигурации системы токов к сферической показан на рис.1 и 2. Вычисления поля, аналогичные с цилиндрической катушкой, показывают, что простое изменение диаметров витков и тока в них ($I \sim \cos\theta$) формирует практически дипольное распределение поля при $z \gtrsim 24$ см. На расстоянии $r \simeq$ $\simeq 23$ см отличие от дипольности составляет примерно 10%. При этом магнитный момент М /абсолютное значение поля/ сферической катушки естественно меньше цилиндрической из-за уменьшения суммарной площади витков и падения тока к полюсам. Величины М /рис.1 и 2/ отличаются приблизительно в 2 раза. Поднять величину М для сферической катушки можно за счет увеличения числа витков /ампер-витков/.

ВЫВОДЫ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Зависимость E_{min} от ϕ, α и λ при малых r / $r \gtrsim 21$ см/ качественно описывается формулой /6/. Численное расхождение может быть в 1,5 раза. Поскольку поле Н вблизи соленоида сильно изрезано /см. рис.3, кривая 1/, то для большей предсказуемости предпочтительнее ставить детекторы на $r \gtrsim 22$ см. При малых z величина E_{min} может изменяться в несколько раз в зависимости от угла падения частицы. Поэтому для измерения энергетического спектра частиц целесообразно использовать не только зависимость E_{min} от расстояния, но и от ориентации конуса приема релятивистских электронов. В общем случае величина E_{min} не является однозначной функцией от ϕ, α, r'. Например, электроны с энергиями 28, 27, 26, 25, 21 МэВ /инжектируемые с начальными данными: $r = 21$ см, $z = 2$ см, $\alpha = 40°$ и $\phi = 90°$/ "уходят на бесконечность", а с энергиями 29, 24, 23, 22, 20 МэВ попадают на тело соленоида. Это напоминает пенубру /конус полутени/ [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Физика космической и лабораторной плазмы. Сб. под ред.Пономаренко А.Г. Новосибирск: Наука, Сибирское отд. 1989, с.34, 65.
2. Дорман Л.И., Смирнов В.С., Тясто М.И. - Космические лучи в магнитном поле Земли. М.: Наука, 1971, с.399.
3. Монтгомери Д.Б. - Получение сильных магнитных полей с помощью соленоидов. М.: Мир, 1971, с.359.
4. Алиевский Б.Л., Орлов В.Л. - Расчет параметров магнитных полей осесимметричных катушек. М.: Энергоатомиздат, 1983.
5. Справочник по специальным функциям. Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. М.: Наука, 1979, с.404.

Рукопись поступила в издательский отдел
1 марта 1990 года.