

**ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

Б-435

P9-88-24

П.Ф.Белошицкий, Н.Ю.Казаринов, Э.А.Перельштейн

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН
ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА
В КОЛЬЦЕВЫХ ПУЧКАХ**

Направлено в "Журнал теоретической физики"

1988

В работе /1/ были найдены нелинейные стационарные азимутальные волны пространственного заряда в релятивистских кольцевых пучках заряженных частиц при отсутствии диссипации. Волны представляют собой последовательность сгустков, движущихся по орбите с угловой скоростью, равной средней частоте ω_0 обращения частиц. Самофокусировка сгустков происходит в условиях кулоновского взаимодействия частиц, эффективная "масса" которых отрицательна /2,3/. Такие сгустки могут быть использованы в атомной физике, для коллективных методов ускорения и генерации электромагнитных волн. В режиме сильной нелинейности, когда разброс в пучке по частотам обращения значительно меньше порогового для гармоник с номером n в линейной теории /4/

$$\overline{\Delta\omega^2}_{\text{пор},n} = -\alpha \frac{2\gamma}{\delta_0} \gamma \omega_0^2 \frac{|\tilde{Z}_{n,n\omega_0}|}{n}, \quad (1)$$

(α - коэффициент порядка единицы, $v = \frac{N_e}{2\pi r_0} \frac{e^2}{mc^2}$, N_e - число частиц в кольцевом пучке, r_0 и γ_0 - средний радиус обращения и релятивистский фактор, $\gamma = (\frac{E}{e} \frac{\partial \omega}{\partial E})_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{v^2} - \frac{1}{\gamma_0^2}$, $E = mc^2 \gamma_0$, ν_r - частота бетатронных колебаний, $\tilde{Z}_{n,n\omega_0} = \frac{e}{\gamma n} Z_{n,n\omega_0}$, $Z_{n,n\omega_0}$ - импеданс пучка с камерой), распределение частиц в сгустке подчиняется закону

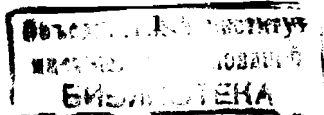
$$f(\varphi, \omega) \propto \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\Delta\omega^2}\right] \exp\left[-\frac{(\varphi - \varphi_0)^2}{\Delta\varphi^2}\right], \quad (2)$$

где f - функция распределения, φ и ω - азимутальная координата и частота обращения частицы, $\varphi_0 = \omega_0 t + \varphi(t=0)$ - азимут центра сгустка, t - время. Угловой разброс в пучке в том же предположении

$$\overline{\Delta\varphi^2} \approx \frac{\overline{\Delta\omega^2}}{2n_0^2 \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} \overline{\Delta\omega^2}_{\text{пор},n} \cdot n^2}. \quad (3)$$

Здесь n_0 - число сгустков на орбите, n_{\min} и n_{\max} определяют диапазон наиболее существенных (т.е. дающих наибольший вклад в действующую на частицы силу) гармоник собственных полей сгустков. Особенности нелинейных волн является произвольно малое допустимое значение энергетического разброса в сгустках. Угловой размер сгустка, как это следует из (3), в этом случае также мал, $(\Delta\varphi^2)^{1/2} \ll 1$. Учет эффектов диссипации ($\text{Re } Z_{n,n\omega_0} \neq 0$) и исследование устойчивости нелинейных стационарных волн (2) в работе /1/ не проводились и являются предметом настоящей работы.

Существование квазистационарных решений при наличии в системе диссипации можно показать, используя метод, развитый в /1/, если перейти к новым независимым переменным, исключая движение системы



как целого. Для коэффициентов Фурье от функции распределения C_n получается система уравнений

$$\overline{\Delta\omega^2} \cdot n C_n - \sum_{m=1}^n C_m (\mu_m C_{n-m} - i \frac{\partial \omega}{\partial \omega_0} \omega_0 \cdot \dot{\omega}_0 C_m) = 0 \quad (4)$$

(ω_0 - усредненный по частицам азимутальный момент, коэффициенты $\mu_m = \frac{2\nu}{\omega_0} \rho \omega_0^2 \frac{i Z_{n,m} \omega_0}{n}$, т.е. в соответствии с (I) приблизительно равны пороговому среднеквадратичному разбросу по частотам обращения для гармоники с номером m), имеющая решения при $Re Z_{n,m} \omega_0 \neq 0$. В случае малости разброса в ступках $\overline{\Delta\omega^2}$ по сравнению с пороговым $\Delta\omega_{пор,n}^2$ функция распределения по-прежнему имеет вид (2) с заменой ω_0 на $\omega_0(t)$, φ_0 на $\varphi_0(t) = \int \omega_0(t) dt + \varphi(t=0)$, где $\omega_0(t)$ - средняя по всем частицам частота обращения, учитывающая медленное изменение энергии.

Изучение устойчивости волн пространственного заряда проводилось методом численного моделирования ступков ансамблем N "крупных" частиц, движение которых описывалось системой уравнений

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \zeta_k, \quad \frac{d\zeta_k}{dt} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \tilde{Z}(\xi_k - \xi_m), \quad (5)$$

$$\xi = \varphi - \omega_0 t, \quad \zeta = \frac{1}{\chi} \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}, \quad \tau = \chi \omega_0 t, \quad \chi = \left(\frac{2\nu}{\omega_0} \rho \right)^{1/2}, \quad \tilde{Z}(\varphi) = \frac{c}{4\pi n} \sum_n Z_{n,m} \omega_0 e^{in\varphi},$$

где K - номер частицы. Уравнения (5) справедливы в нерезонансном случае, когда импеданс Z_{n,ω_0} не имеет особенностей вблизи $Z_{n,m} \omega_0$. Пороговое условие (I) в переменных ξ, ζ принимает вид

$$\overline{\Delta\xi^2}_{пор,n} = d \frac{|Z_{n,m} \omega_0|}{n}, \quad (2a)$$

а условие применимости одномерной модели - $(\overline{\Delta\xi^2})^{1/2} \gg \chi (\overline{\Delta\xi^2})^{1/2}$.

Рассмотрим сначала устойчивость относительно длинноволновых возмущений одиночного ступка, частицы которого в начальный момент времени расставлены в фазовой плоскости в соответствии с (2), (3). Система уравнений (5) решалась методом Рунге-Кутты для 1000+2000 частиц. Для расчетов использовался модельный импеданс вида

$$\tilde{Z}_{n,m} \omega_0 = A + iBn, \quad 1 \leq n \leq n_{max}, \quad (6)$$

с $A = 0,01$, $B = 0,1$ и $n_{max} = 3 + 10$. Как показали результаты численного моделирования, ступок с начальными условиями (2), (3) оказывается устойчивым относительно малых возмущений. Малые возмущения возникают как при переходе от непрерывной функции распределения к "крупным" частицам, так и вследствие неточности соотношения (3), полученного в приближении $\overline{\Delta\xi^2}_{\tau=0} \ll \overline{\Delta\xi^2}_{пор,n}$ и для $Re Z_{n,m} \omega_0 = 0$. Начальный угловой размер ступка выбирался $(\overline{\Delta\xi^2})^{1/2} = (\overline{\Delta\varphi^2})^{1/2} \ll 2\pi$, что

соответствует наиболее интересному случаю $\overline{\Delta\xi^2}_{\tau=0} < \overline{\Delta\xi^2}_{пор,n} \approx 0,1$ согласно (2a) и (6). Под действием сил пространственного заряда ступок вращается в фазовой плоскости, и за несколько десятков оборотов малые (несколько процентов) колебания углового размера и среднеквадратичного разброса по частотам обращения затухают, так что $\overline{\Delta\xi^2}_{\tau \rightarrow \infty} \approx \overline{\Delta\xi^2}_{\tau=0}$ и $\overline{\Delta\xi^2}_{\tau \rightarrow \infty} \approx \overline{\Delta\xi^2}_{\tau=0}$. Ступок оказывается устойчивым во всей области начальных условий $\overline{\Delta\xi^2}_{\tau=0} \lesssim \overline{\Delta\xi^2}_{пор,n}$. При $\overline{\Delta\xi^2}_{\tau=0} > \overline{\Delta\xi^2}_{пор,n}$ и соответствующем угловом размере ступок постепенно расплывается и заполняет всю орбиту.

Численное значение импеданса (6) несущественно при определении области устойчивости ступка $\overline{\Delta\xi^2}_{\tau=0}$: при изменении величины $Z_{n,m} \omega_0$ (например, уменьшении в 10 раз) соответственно меняется предельное значение начального разброса в ступке, при котором он еще остается устойчивым. Этот вывод справедлив, естественно, если $|Z_{n,m} \omega_0|/n \ll 1$, т.е. угловой размер ступка $(\overline{\Delta\xi^2}_{\tau=0})^{1/2} \ll 2\pi$. Также не меняет выводов число существенных гармоник в поле n_{max} , оно лишь в соответствии с (3) изменяет согласованный с разбросом по частотам обращения угловой размер устойчивого ступка.

Рассмотрим теперь более широкий, чем (2), (3), класс начальных условий в задаче об устойчивости одного ступка. Пусть частицы в начальный момент распределены согласно (2), но соотношение (3) не выполняется. Тогда при фиксированном $\overline{\Delta\xi^2}_{\tau=0} \ll \overline{\Delta\xi^2}_{пор,n}$ в широком диапазоне значений начального углового размера ступка $\overline{\Delta\xi^2}_{\tau=0} \leq \overline{\Delta\xi^2}_{\tau=0} \leq \overline{\Delta\xi^2}_{\tau=0}$, $\overline{\Delta\xi^2}_{\tau=0} \ll \overline{\Delta\xi^2}_{\tau=0}$, $\overline{\Delta\xi^2}_{\tau=0} \gg \overline{\Delta\xi^2}_{\tau=0}$, где $\overline{\Delta\xi^2}_{\tau=0}$ - согласованный угловой размер, он остается компактным образованием, разброс по частотам обращения и угловые размеры которого испытывают затухающие колебания около средних (асимптотических) значений (рис.1,2). Кривая 2 на рис.2 иллюстрирует расплывание ступка при $\overline{\Delta\xi^2}_{\tau=0} > \overline{\Delta\xi^2}_{пор,n}$. Соотношение между $\overline{\Delta\xi^2}_{\tau \rightarrow \infty}$ и $\overline{\Delta\xi^2}_{\tau=0}$ зависит от начальных условий и приблизительно совпадает с (3), т.е. ступок приходит к согласованному состоянию.

При отказе от гауссова вида распределения частиц в фазовой плоскости и замене его другим (например, равномерным) выводы остаются прежними: ступок устойчив относительно длинноволновых возмущений при $\overline{\Delta\xi^2}_{\tau=0} \ll \overline{\Delta\xi^2}_{пор,n}$ в широком диапазоне его угловых размеров, а соотношение между $\overline{\Delta\xi^2}_{\tau \rightarrow \infty}$ и $\overline{\Delta\xi^2}_{\tau=0}$ по-прежнему примерно совпадает с вычисленным с помощью (3).

Рассмотрим теперь устойчивость ступка в условиях сильной диссипации. Вместо (6) выберем импеданс в виде

$$\tilde{Z}_{n,m} \omega_0 = \gamma n [\gamma'_{2n}(2n) - i E'_{2n}(2n)], \quad n \leq n_{max}, \quad (7)$$

$$\tilde{Z}_{n,m} \omega_0 = 0, \quad n > n_{max},$$

($J_{2n}(x)$ и $E_{2n}(x)$ - функции Бесселя и Вебера), соответствующем кольцевому пучку в свободном пространстве $1/4$. Пусть распределение частиц в сгустке в начальный момент времени выбрано в виде (2), (3) с $\bar{\xi}_{\tau=0}^2 \ll \bar{\xi}_{пор,n}^2$. Результаты численного моделирования показывают, что в этом случае частицы теряются из сгустка. Потерянные частицы распределены приблизительно равномерно по азимуту с частотами обращения, меньшими, чем средняя для компактной части пучка. Размеры компактной части пучка меняются незначительно (рис.3).

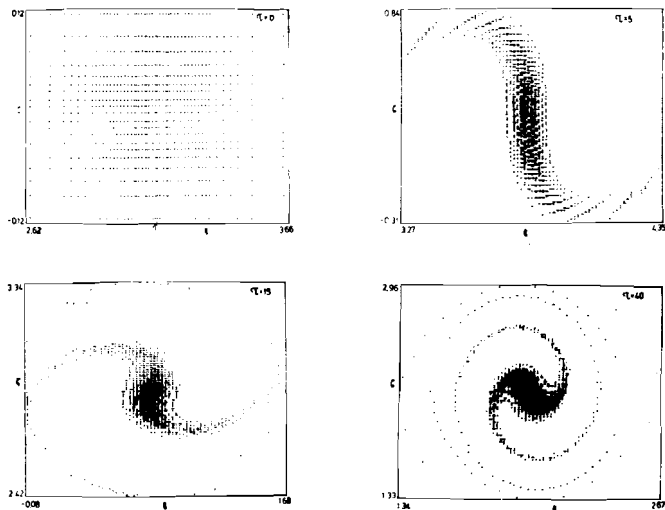


Рис.1. Фазовый портрет одиночного сгустка с $\bar{\xi}_{\tau=0}^2 = \frac{1}{25} \bar{\xi}_{пор,n}^2$, $\Delta \bar{\xi}_{\tau=0}^2 = 35 \Delta \bar{\xi}_c^2$ ($n_{max} = 3$).

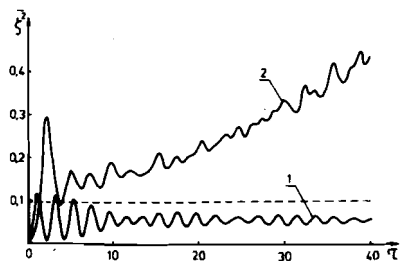


Рис.2. Зависимость безразмерного разброса в сгустке \bar{S}^2 от переменной τ ($n_{max} = 3$, $\bar{\xi}_{\tau=0}^2 = \frac{1}{25} \bar{\xi}_{пор,n}^2$). $1 - \Delta \bar{\xi}_{\tau=0}^2 = 35 \Delta \bar{\xi}_c^2$, $2 - \Delta \bar{\xi}_{\tau=0}^2 = 175 \Delta \bar{\xi}_c^2$. Штриховой линией показано пороговое значение разброса в линейной теории для импеданса вида (6).

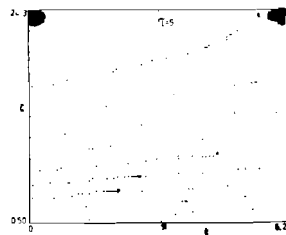


Рис.3. Фазовый портрет одиночного сгустка в случае сильной диссипации ($n_{max} = 3$, $\bar{\xi}_{\tau=0}^2 = 0, 1 \bar{\xi}_{пор,n}^2$, $\Delta \bar{\xi}_{\tau=0}^2 = 3 \Delta \bar{\xi}_c^2$).

собственным разбросом по частотам обращения $\bar{\xi}_{\tau=0}^2 \ll \bar{\xi}_{пор,n}^2$. Угловой размер сгустка будем выбирать в соответствии с (3), относительное движение сгустков считаем медленным по сравнению с обращением по круговой орбите. Качественные выводы о характере движения можно получить, рассмотрев задачу о взаимном движении двух точечных сгустков. В этом случае сгустки описываются приближенной системой уравнений (5), которая имеет интеграл

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + U(\theta) = const, \quad (8)$$

где $\theta = \xi_1 - \xi_2$, точка означает дифференцирование по t , а потенциал $U(\theta)$ имеет вид

$$U(\theta) = -2 \sum \mu_n \cos n\theta. \quad (9)$$

Отметим, что в случае двух δ -образных сгустков действительная часть импеданса не влияет на их взаимное движение, а сказывается только на изменении средней частоты обращения. Исследуем на устойчивость решения (8), (9) в соответствии с (6) при $\mu_n = \mu$ и ограничимся для простоты $n_{max} = 3$. Потенциал $U(\theta)$ и сепаратрисы показаны на рис.4. Как видно из рисунка, взаимное положение сгустков остается

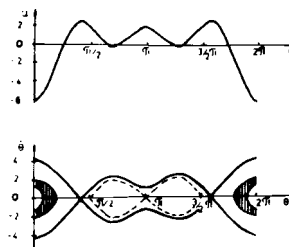


Рис.4. Потенциал U и сепаратрисы в зависимости от переменной θ для двух точечных сгустков. Штриховой линией показана область допустимых изменений θ , θ для задачи о двух сгустках с $\theta_{\tau=0} = \frac{\pi}{7}$ (см. также рис.5).

разброса в каждом из сгустков в несколько раз превышали их начальные величины и при соответствующем их выборе оставались много меньшими порогового линейной теории.

При численном моделировании движения четырех почти симметрично расположенных на орбите сгустков (координата центра сгустка с номером j задавалась по закону $\xi_j = \frac{\pi}{2}(j-1) + \delta_j$, δ_j - случайная величина, лежащая в интервале $(-5 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-3})$, $N_{max} = 4$) устойчивость достигалась при $E_0 \geq 0,1 \frac{eMc}{Tc^2}$ для $M = 16$, а разброс по частотам обращения увеличился примерно вдвое.

Таким образом, результаты численного моделирования продольного движения волн пространственного заряда в кольцевых пучках показывают, что сгустки с разбросом по частотам обращения, много меньшим порогового линейной теории, оказываются устойчивыми относительно длинноволновых возмущений, когда их угловой размер достаточно мал. Когерентную устойчивость последовательности симметрично расположенных на орбите сгустков можно обеспечить бегущей электромагнитной волной умеренной амплитуды.

Л и т е р а т у р а

1. Казаринов Н.Ю., Перельштейн Э.А. - ЖТФ, 1980, т.50, с.768.
2. Коломенский А.А., Лебедев Н.Н. - "Атомная энергия", 1959, т.7, с.549.
3. Nielsen C.E., Sessler A.M., Symon K.R. In: Internat. Conf. on High Energy Accelerat. and Instrum. Geneva, 1959, p. 239.
4. Саранцев В.П., Перельштейн Э.А. Коллективное ускорение ионов электронными кольцами. Атомиздат, М., 1979.
5. Белошицкий П.Ф., Перельштейн Э.А., Циннов Б.Г. ОИЯИ, 9-81-326, Дубна, 1981.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 января 1988 года.

Белошицкий П.Ф., Казаринов Н.Ю., Перельштейн Э.А.
Численное моделирование нелинейных продольных
волн пространственного заряда в кольцевых пучках

P9-88-24

Рассматриваются нелинейные продольные волны пространственного заряда в релятивистских кольцевых пучках заряженных частиц с отрицательной эффективной массой. Волны представляют собой последовательность сгустков, движущихся по орбите с угловой скоростью, равной средней частоте обращения частиц. Показано существование таких волн при наличии в системе диссипации. Методом численного моделирования исследована устойчивость сгустков. Показано, что сгустки с разбросом по частотам обращения, много меньшим порогового линейной теории, оказываются устойчивыми относительно длинноволновых возмущений, когда их угловой размер достаточно мал. Когерентную устойчивость последовательности симметрично расположенных на орбите сгустков можно обеспечить внешней бегущей электромагнитной волной умеренной амплитуды.

Работа выполнена в Общественном научно-методическом отделении ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1988

Перевод О.С.Виноградовой

Beloshitskij P.F., Kazarinov N.Yu., Perelstein E.A.
Computational Study of Nonlinear Space-Charge Waves
in Circulating Beams

P9-88-24

Nonlinear space-charge waves in relativistic circular beams are investigated of charged particles with negative mass. These waves are bunches circulating over orbit with angular velocity equal the averaged over all particles. The existence of such waves if dissipation is present in the system is shown. The bunch stability is investigated by the computerized simulation method. It is shown that bunches with the energy spread smaller than the linear theory threshold are stable against long-wave disturbances if their angular size is small enough. Coherent stability of a set of symmetrically placed over the orbit bunches could be achieved by implied electromagnetic wave of moderate amplitude travelling over the orbit.

The investigation has been performed at the Scientific-Methodical Division, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1988