ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р9 - 8752

К.А.Решетникова

ПРОДОЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАРЯЖЕННОГО ПУЧКА В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ МЕТАЛЛ - ДИЭЛЕКТРИК

1975

P9 - 8752

К.А.Решетникова

ПРОДОЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАРЯЖЕННОГО ПУЧКА В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ МЕТАЛЛ - ДИЭЛЕКТРИК

Направлено в ЖТФ

СИЛУНД (ОИЯИ), т.к. выбранная выше математическая модель канала здесь неприменима. Дело в том, что с целью уменьшения вакуумного объема внутрь ускоряющего канала в СИЛУНДе вставлена трубка, представляющая собой ряд диэлектрических колец с металлическими промежутками между ними. Таким образом, ускоряющий канал СИЛУНДа представляет собой систему с периодическими граничными условиями: металл – диэлектрик. В такой системе, в принципе, возможно возникновение медленных электромагнитных волн. Если фазовая скорость волн меньше, чем невозмущенная скорость немодулированного электронного пучка, то возникающие в пучке флюктуации плотности заряда могут распространяться в виде волн с нарастающей амплитудой, что и свидетельствует о неустойчивости пучка.

Впервые коллективное взаимодействие заряженного пучка с периодической замедляющей структурой было рассмотрено в работе/2/. Показано, что условие неустойчивости пучка совпадает с условием черенковского излучения отдельной частицы в данной системе. Были вычислены инкременты неустойчивости пучка в цепочке связанных резонаторов и в диэлектрическом канале для аксиально-симметричной волны. В дальнейшем эти идеи получили развитие в большом количестве работ, посвященных диафрагмированным и плазменным волноводам (обзор/3/).

В настоящей работе рассматривается в линейном приближении продольная устойчивость замагниченного электронного пучка по отношению к аксиально-симметричным волнам в периодической системе металл – диэлектрик.

2. Вывод дисперсионного уравнения

Исходная система уравнений состоит из гидродинамических уравнений движения и непрерывности для частиц пучка и уравнений Максвелла для поля

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\vec{v}) = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}\vec{H}], \tag{1а}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}\vec{j} = 0 \tag{1б}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{1в}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \tag{1г}$$

где $D = \epsilon E$, $B = \mu H$ – ϵ , μ – диэлектрическая и магнитная проницаемость среды.

Ось z направим вдоль оси ускорителя. Будем считать, что вдоль оси oz проходит моноэнергетический заряженный пучок, скорость которого равна v_0 , а равновесная плотность спадает с ростом радиуса так, что $\rho_0(a)=0$. Пучок сфокусирован в поперечном направлении постоянным продольным магнитным полем. Все величины считаем $\sim e^{i(\omega t - k_n z)}$, поля – аксиально-симметричными.

В линейном приближении продольный компонент тока равен:

$$j_z = -i\frac{e\rho_0\omega E_z}{m\gamma^3(\omega - k_n v_0)^2}. \tag{2}$$

Здесь m – масса покоя электрона, γ – релятивистский фактор, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}}$, $\beta_0 = \frac{v_0}{c}$.

Рассмотрим условия возбуждения волн Е-типа. Из уравнений (1в) и (1г) имеем:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_z}{\partial r}\right) + (\epsilon\mu k^2 - k_n^2)E_z = i\frac{4\pi}{c}\frac{(\epsilon\mu k^2 - k_n^2)}{\epsilon k}j_z \tag{3}$$

$$E_r = i\frac{k_n}{k_n^2 - \epsilon\mu k^2}\frac{\partial E_z}{\partial r} \tag{4}$$

$$H_\phi = i\frac{\epsilon k}{k_n^2 - \epsilon\mu k^2}\frac{\partial E_z}{\partial r}. \tag{5}$$

С учетом (2) для (3) получим

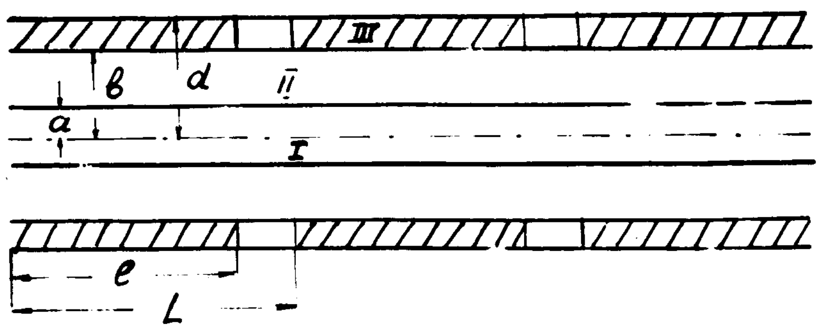
$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial E_z}{\partial r}+(\epsilon\mu k^2-k_n^2)\left[1-\frac{\omega_p^2}{\epsilon(\omega-k_n v_0)^2}\right]E_z=0, \qquad (6)$$

где

$$\omega_p^2=\frac{4\pi e\rho_0}{m\gamma^3}.$$

Перейдем к нахождению решения уравнения (6) для ускоряющего канала СИЛУНДа.

Схематически его вид показан на рисунке:



Здесь область I – часть вакуумного канала, занятая пучком, область II – часть вакуумного канала без пучка, область III (штрих) – диэлектрик; a – радиус пучка, b – радиус канала, h=(d–b)– толщина диэлектрика, L– период системы, S=(L–ℓ)– длина металлического кольца.

Граничные условия сводятся, как обычно, к непрерывности тангенциальных составляющих поля при переходе через поверхность раздела.

Для области I $\epsilon=\mu=1$, и решение уравнения (6) будет:

$$E_1=E_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n J_0(\bar\kappa_n r)e^{i(\omega t-k_n z)}, \qquad (7а)$$

Из (5) для компоненты H_ϕ имеем:

$$H_1=iE_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{k\bar\kappa}{(k^2-k_n^2)}a_n J_1(\bar\kappa_n r)e^{i(\omega t-k_n z)}. \qquad (7б)$$

Здесь $k_n=k_0+\frac{2\pi}{L}n$, $k_0=k/\beta_\phi$, $k=\frac{\omega}{c}$, $\beta=\frac{v_\phi}{c}$, v_ϕ – фазовая скорость волны

$$\bar\kappa_n^2=(k^2-k_n^2)\left[1-\frac{\omega_p^2}{(\omega-k_n v_0)^2}\right].$$

Для области II $\epsilon=\mu=1$, $\omega_p^2=0$

$$E_2=E_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n[J_0(\kappa_n r)+G_n N_0(\kappa_n r)]e^{i(\omega t-k_n z)} \qquad (8а)$$

$$H_2=iE_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{k}{\kappa_n}b_0[J_1(\kappa_n r)+G_n N_1(\kappa_n r)]e^{i(\omega t-k_n z)}, \qquad (8б)$$

где $\kappa_n^2=k^2-k_n^2$.

В области III $\mu=1$, $\epsilon=1$, $\omega_0=0$.

Здесь надо учесть, что при $z=\mp\frac{\ell}{2}$ $E_r=0$. С учетом этого граничного условия, пользуясь уравнениями (1в) и (1г), запишем поля в этой области в виде:

$$E_3=E_0\left[\sum_{m=0}^{\infty}d_m Z_0(p_m r)\cos q_m z+\sum_{m=1}^{\infty}c_m Z_0(p'_m r)\sin q'_m z\right]e^{i\omega t}, \qquad (9а)$$

$$H_3=i\epsilon kE_0\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{d_m}{p_m}Z_1(p_m r)\cos(q_m z)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_m}{p'_m}Z_1(p'_m r)\sin(q'_m z)\right]e^{i\omega t}, \qquad (9б)$$

$$E_3^{(r)}=iE_0\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q_m}{p_m}d_m Z_1(p_m r)\sin(q_m z)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q'_m}{p'_m}c_m Z_1(p'_m r)\times\right. \qquad (9в)$$

$$\left.\times\cos(q'_m z)\right]e^{i\omega t}.$$

Здесь

$$Z_0(p_m r)=J_0(p_m r)N_0(p_m d)-J_0(p_m d)N_0(p_m r)$$

$$Z_1(p_m r)=J_1(p_m r)N_0(p_m d)-J_0(p_m d)N_1(p_m r)$$

$$q_m=\frac{2\pi}{\ell}m\,,\quad q'_m=\frac{(2m-1)}{\ell}\pi$$

$$p_m^2=\epsilon k^2-q_m^2,\quad p_m'^2=\epsilon k^2-q_m'^2.$$

Учтем граничные условия.

При $r=a$ имеем: $E_1=E_2$, $H_1=H_2$. (10)

Подставляя в (10) выражения (7а) и (8а) при $r=a$, получим:

$$G_n=\frac{\bar{x}_n J_1(x_n)J_0(x_n)-x_n J_0(\bar{x}_n)J_1(x_n)}{x_n J_0(\bar{x}_n)N_1(x_n)-\bar{x}_n J_1(\bar{x}_n)N_0(x_n)}, \tag{11}$$

где $x_n=\kappa_n a$, $\bar{x}_n=\bar{\kappa}_n a$.

При $r=b$ имеем: $E_2=E_3$ при $|z|\le \ell/2$,

$$E_2=0 \quad \text{при} \quad \frac{\ell}{2}<|z|\le\frac{L}{2}. \tag{12}$$

$$H_2=H_3 \quad \text{при} \quad |z|\le\ell/2.$$

На металлическом кольце, т.е. при $\ell/2<|z|\le L/2$ имеет место скачок H_ϕ , связанный с поверхностными токами [4].

Итак, имеем соотношения:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n Q_0(\kappa_n b)e^{-ik_n z}=\sum_{m=0}^{\infty} d_m Z_0(p_m b)\cos(q_m z)+\sum_{m=1}^{\infty} c_m Z_0(p'_m b)\sin(q'_m z) \tag{13}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{kb_n}{\kappa_n}Q_1(\kappa_n b)e^{-ik_n z}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\epsilon k}{p_m}d_m Z_1(p_m b)\cos(q_m z)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\epsilon k c_m}{p'_m}Z_1(p'_m b)\sin(q'_m z), \tag{14}$$

где

$$Q_0(\kappa_n b)=J_0(\kappa_n b)+G_n N_0(\kappa_n b);\ Q_1(\kappa_n b)=J_1(\kappa_n b)+G_n N_1(\kappa_n b).$$

Умножая (13) последовательно на $\cos(q_m z)$ и $\sin(q'_m z)$ и интегрируя по z в пределах от $z=-L/2$ до $z=L/2$, получим:

$$d_0=\frac{1}{\ell}\frac{1}{Z_0(p_0 b)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_n D_{n0}$$

$$d_m=\frac{2}{\ell}\frac{1}{Z_0(p_m b)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_n D_{nm} \tag{15}$$

$$c_m=\frac{2}{\ell}\frac{1}{Z_0(p'_m b)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_n C_{nm},$$

где

$$D_{nm}=\int_{-L/2}^{L/2}e^{-ik_n z}\cos(q_m z)dz;\quad C_{nm}=\int_{-L/2}^{L/2}e^{-ik_n z}\sin(q'_m z)dz;$$

$$B_n=b_n Q_0(\kappa_n b).$$

Умножим далее (14) на $\cos q_m z$ и $\sin q'_m z$ и проинтегрируем по z в пределах от $z=-\ell/2$ до $z=\ell/2$. Подставляя в найденное выражение значения коэффициентов из (15), получим следующую бесконечную систему уравнений для определения коэффициентов B_n.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_n\left[\frac{k}{\kappa_n}\frac{Q_1(\kappa_n b)}{Q_0(\kappa_n b)}D'_{nm}-\frac{\epsilon k}{p_m}\frac{Z_1(p_m b)}{Z_0(p_m b)}D_{nm}\right]=0 \tag{16а}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_n\left[\frac{k}{\kappa_n}\frac{Q_1(\kappa_n b)}{Q_0(\kappa_n b)}C'_{nm}-\frac{\epsilon k}{p'_m}\frac{Z_1(p'_m b)}{Z_0(p'_m b)}C_{nm}\right]. \tag{16б}$$

Здесь D'_{nm} и C'_{nm} получаются из D_{nm} и C_{nm} заменой L на ℓ .

Условие разрешимости системы уравнений (16) заключается в равенстве нулю детерминанта, составленного из членов, являющихся коэффициентами при неизвестных B_n . Это условие и дает дисперсионное уравнение, связывающее частоту и фазовую скорость волны с параметрами системы.

С целью упрощения дисперсионного уравнения можно использовать "сшивание" полей при $r=b$ в средней точке $(z=\bar{z})$. В этом случае поля в области III предполагаются пропорциональными $e^{-iq_m \bar{z}}$, где $\bar{z}=const$. Дисперсионное уравнение теперь имеет вид:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\kappa_n} \frac{Q_1(\kappa_n b)}{Q_0(\kappa_n b)} = \frac{L}{\ell} \frac{\epsilon}{p} \frac{Z_1(pb)}{Z_0(pb)}. \qquad (17)$$

Здесь

$$\kappa_n^2 = k^2 - k_n^2$$

$$p^2 = \epsilon k^2 .$$

3. Анализ дисперсионного уравнения

Рассмотрим некоторые предельные случаи. Как следует из (16) и (17), при $b=d$ $Z_0(p_m b)=0$ и при отсутствии пучка имеем обычное дисперсионное соотношение для металлического волновода.

$$J_0(\kappa a)=0, \qquad (18)$$

откуда $\kappa a = \mu_{0,s}$ – корни уравнения (18).

При наличии пучка $(a=b=d)$ дисперсионное соотношение будет:

$$J_0(\bar{\kappa} a)=0,$$

где

$$\bar{\kappa}^2 = (k^2 - k_0^2)[1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_0 v_0)^2}].$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае пучок устойчив.

Исследуем устойчивость пучка в разных диапазонах длин волн. Как легко видеть, уравнение (17) получается из (16) при $\bar{z}=0$. Тогда $C_{nm}=C'_{nm}=0$. Так как в нашем случае длина металлического кольца мала сравнительно с длиной диэлектрического $(\frac{L-\ell}{L} \ll 1)$, то $\frac{D_{nm}}{D'_{nm}} \simeq \frac{L}{\ell}$. При $\sqrt{\epsilon} \gg \frac{\lambda}{\ell} m$ второй член в квадратных скобках (16) не зависит от m. При $\sqrt{\epsilon} \ll \frac{\lambda}{\ell} m$ и $\lambda \gg \ell$ в уравнениях (16) и слева в (17) можно сохранить только члены, отвечающие $n=0$, $m=0$. Остальные содержат множитель $\frac{\ell}{\lambda}(\ell \sim L)$ и поэтому в рассматриваемом приближении автоматически удовлетворяются. Таким образом, анализ устойчивости

для нашего случая можно с некоторым приближением провести, исходя из дисперсионного уравнения (17).

Заметим, что правая часть этого уравнения не зависит от волнового вектора k_n. Допустим, что при наличии пучка частота волны в системе остается прежней, а изменяется лишь проекция волнового вектора вдоль оси z. Тогда правую часть уравнения (17) можно заменить значением левой части без пучка. Если пучок полностью заполняет апертуру канала $(a=b$, $G_n=0)$, то из (17) получим:

$$\sum_n [\frac{1}{\bar{x}_n} \frac{J_1(\bar{x}_n)}{J_0(\bar{x}_n)} - \frac{1}{y_n} \frac{J_1(y_n)}{J_0(y_n)}]=0, \qquad (19)$$

где

$$\bar{x}^2 = (k^2 - k_n^2)a^2[1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_n v_0)^2}]$$

$$y_n^2 = (k^2 - \tilde{k}_n^2)a^2 ,$$

$\tilde{k}_n$ – проекция волнового вектора на ось z в системе без пучка.

Из (19) имеем $\bar{x}_n = y_n$. Или для $n=0$

$$(k^2 - k_0^2)[1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_0 v_0)^2}] = (k^2 - \tilde{k}_0^2). \qquad (20)$$

Исследуем уравнение (20) вблизи корня $k_0 = \frac{\omega}{v_0} + \eta$,

где $\eta \ll \frac{\omega}{v_0}$. Обозначим $\delta = \eta v_0$. Тогда из (20) найдем $(\tilde{k}_0 = k/\beta_ф)$:

$$\frac{\omega_p^2}{\delta^2} = \gamma^2 (1 - \frac{\beta_0^2}{\beta_ф^2}).$$

Получается известный результат: если фазовая скорость волны меньше, чем невозмущенная скорость пучка, то возникает неустойчивость. Инкремент её, найденный из (20), при $\beta_ф \approx \beta_0$, и условии $\frac{\delta}{\omega} \ll 1/\gamma^2$, известен /3/:

$$\delta = \frac{\omega_p^{2/3}}{2^{1/3}} \frac{\omega^{1/3}}{\gamma^{2/3}} \frac{(1 - i\sqrt{3})}{2}. \qquad (21)$$

Необходимо исследовать – возможны ли в данной системе без пучка медленные волны.
Дисперсионное уравнение в этом случае будет:

$$\sum_n \frac{k}{y_n} \frac{J_1(y_n)}{J_0(y_n)} = Z(\epsilon, k, b, h), \tag{22}$$

где

$$Z(\epsilon,k,b,h) = \frac{L}{\ell} \frac{\epsilon k}{pb} \frac{Z_1(pb)}{Z_0(pb)}.$$

Рассмотрим длинные волны и сравнительно небольшие значения ϵ, так что $pb \ll 1$ и $kb \ll 1$. Тогда $n=0$. Раскладывая функции Бесселя справа в (22) в ряды вблизи точки (pb) по параметру малости (ph), найдем:

$$Z = \frac{L}{\ell} \frac{1}{kh \cdot kb}.$$

Слева в (22) используем разложения функций Бесселя в ряды при малых значениях аргумента с точностью до членов второго порядка малости. В результате из (22) получим:

$$k^2 b^2 \left(1 - \frac{1}{\beta_\text{ф}^2}\right) = 8 \frac{L}{\ell} \frac{1}{kh \cdot kb} - 1. \tag{23}$$

Так как $kh \ll 1$ и $kb \ll 1$, то первый член справа в (23) значительно превышает единицу и, таким образом, $\beta_\text{ф}^2 > 1$, т.е. в длинноволновом приближении медленные волны в системе невозможны. Рассмотрим другой предельный случай $pb \gg 1$, т.е. когда длина волны в диэлектрике мала сравнительно с апертурой канала $(\epsilon \gg 1)$. Используя асимптотику для функций Бесселя, для правой части (22) найдем:

$$Z = \frac{L}{\ell} \frac{\sqrt{\epsilon}}{kb} \operatorname{ctg}(\sqrt{\epsilon}\, kh). \tag{24}$$

Если $kb \ll 1$, то для левой части (22) используем предыдущее разложение. Если $kb \approx 1$, то необходимо найти другое представление. При $h \to 0$, $y_n \to \mu_{0,s}$, где $\mu_{0,s}$ – корни уравнения $J_0(y_n)=0$ – дисперсионного соотношения для металлического волновода. Поэтому в случае $h \ll b$ удобно использовать для левой части (22) разложение по корням функций Бесселя [5]

$$\frac{J_1(y)}{J_0(y)} = -2y \sum_{s=0}^{\infty} (y^2 - \mu_{0,s}^2)^{-1} \tag{25}$$

Подставляя (24) и (25) в (22) и ограничиваясь случаем $n=0$, $s=1$, найдем:

$$k^2 b^2 \left(1 - \frac{1}{\beta_\text{ф}^2}\right) = \mu_{0,1}^2 - \frac{2}{Z}. \tag{26}$$

Как следует из (26), при $\mu_{0,1}^2 < \frac{2}{Z}$, $\beta_\text{ф} < 1$, т.е. в системе возможны медленные волны и, следовательно, неустойчивость.

Условие возникновения неустойчивости с учетом (24) можно записать в виде:

$$2 \frac{\ell}{L} \frac{kb}{\sqrt{\epsilon}} \operatorname{tg}(\sqrt{\epsilon} \cdot kh) > \mu_{0,1}^2, \tag{27}$$

где $\mu_{0,1} = 2{,}405$. При $(\sqrt{\epsilon} \cdot kh) \to \frac{\pi}{2}$ неравенство (27), безусловно, выполняется. Отсюда можно оценить значение ϵ, при котором для данного (kh) пучок неустойчив.

Были проведены численные расчеты на ЭВМ определителя шестнадцатого порядка системы уравнений (16). Использованы следующие значения параметров: $b = 2{,}5$ см; $d = 3$ см; $L = 5{,}25$; $\ell = 5$ см. Нас интересовал вопрос о возможности распространения в системе без пучка медленных волн с $\beta_\text{ф} \approx \beta_0 = 0{,}8660$, что соответствует $\gamma = 2$. Расчеты показали, что при $\frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon}} \gg L$ определитель отличен от нуля для всех рассмотренных значений $\epsilon = 5 \div 50$, т.е. такие волны в системе распространяться не могут. При $\frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon}} \le L$ появляются характерные для периодической структуры полосы пропускания. Первые полосы со стороны наибольших длин волн приходятся соответственно на значения $\lambda = 22{,}4$ см для $\epsilon = 5$; $\lambda = 38{,}7$ см для $\epsilon = 15$; $\lambda = 55{,}7$ см для

ϵ =31, λ =70,7 см для ϵ =50. Это соответствует длине волны в диэлектрике $\lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon}} \simeq 10$ см.

Таким образом, можно сделать вывод: при движении заряженного пучка в периодической системе металл – диэлектрик пучок устойчив по отношению к длинноволновым возмущениям ($\frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon}} \gg L$) и неустойчив относительно коротковолновых возмущений ($\frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon}} \lesssim L$), т.е. таких, длина волны которых в диэлектрике сравнима или меньше периода системы, если эти частоты попадают в полосы пропускания волновода.

В заключение автор благодарит товарищей по работе за обсуждение и ряд замечаний.

Литература

1. V.K.Neil, R.K.Cooper. Coherent Instabielities in High Current Linear Induction Accelerators. Particle Accelerators,1,111,1970.
2. A.I.Akhiezer, Ia.B.Fainberg and G.Ia.Luibarski.Ĉerenkov Radiation and the Stability of Beams in the Wave Guides of Slow Waves used in Linear Accelerators. CERN Symposium I, 220, 1956.
3. В.Н.Курилко, Ю.В.Ткач, В.А.Шендрик. ЖТФ XLIV, 956, 1974.
4. А.И.Ахиезер, Я.Б.Файнберг. УФН, 44, 321, 1951.
5. Г.Бейтмен, А.Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. М., 1971.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 апреля 1975 года